# МЕХАНИКА

УДК 531.37

## ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ГЛОБАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ ТЕЛА В СВОБОДНОМ УГЛОВОМ ДВИЖЕНИИ



***В.В. Новиков, Л.Н. Григорьева***

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

grigorieva_ln@mail.ru

*Поступила в редакцию 22.03.2013*

Изучаются свободные угловые движения деформируемого упругого тела с малой анизотропией упругих свойств, обладающего в недеформированном состоянии квазишаровым тензором инерции. Показано, что с уменьшением угловой скорости вращения тела возможно изменение положения в нем оси устойчивого стационарного вращения. Результаты рассмотрения позволяют предложить вероятный механизм глобального перемещения полюсов Земли.

*Ключевые слова:* устойчивость, стационарное вращение, анизотропия, плоскость изотропии, эллипсоид инерции.

Рассматривается однородное тело объема $V$, ограниченное поверхностью $S$. С телом связана система координат $Ox_1x_2x_3$, вращающаяся с угловой скоростью $\vec{\omega}(t)$. Относительно этой системы смещение элемента объема характеризуется вектором $\vec{u}(\vec{r},t)$. В отличие от абсолютно твердого тела, движение которого полностью определяется изменением положения изначально задаваемой связанной с ним системы координат, в случае деформируемого тела выбор связанной системы осуществляется в каждый момент времени в соответствии с условиями отсутствия в ней малых поступательных перемещений и поворотов тела как целого [1]:

$$\int\limits_V \vec{u}\,dV = 0, \qquad \int\limits_V [\vec{r},\vec{u}]\,dV = 0.$$

Полагая, что упругие свойства тела обладают малой анизотропией, запишем компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} + c_{ijkl}u_{kl},$$

где $u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – тензор деформации, $\lambda, \mu$ – постоянные Ламе.

Параметры $c_{ijkl}$ характеризуют анизотропные свойства тела. Они удовлетворяют условиям: $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$, т.е. в общем случае содержат 21 независимую компоненту.

При переходе к безразмерным переменным и параметрам в качестве масштабов времени, длины и массы примем $t_*$ – характерное время движения шара как целого относительно центра инерции, $R$ – радиус шара и его массу $M$. Введем новые обозначения:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \varepsilon = \frac{\rho R^2}{\mu t_*^2},$$

где $\rho$ – плотность шара.

Считаем, что параметр $\varepsilon \ll 1$. Это условие означает, что периоды упругих колебаний много меньше периода вращательных движений тела. Предполагается, что внутреннее рассеяние энергии обеспечивает достаточно быстрое затухание упругих колебаний. Поэтому в рассмотрении можно ограничиться лишь угловыми движениями тела.

Параметры анизотропии упругих свойств представим в виде: $c_{ijkl} = \mu\delta a_{ijkl}$, где $\delta$ – отношение наибольшей из постоянных $c_{ijkl}$ к $\mu$. При этом величины $\varepsilon$ и $\delta$ связаны неравенством:

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1.$$

В сделанных предположениях вектор $\vec{u}$ можно представить в виде ряда по малым параметрам $\varepsilon$, $\delta$ и ограничиться первыми членами разложения:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \varepsilon[\vec{u}_0(\vec{r},t) + \delta\vec{u}_1(\vec{r},t)].$$

Составляющая $\vec{u}_0(\vec{r},t)$ вектора смещения отвечает деформированию однородного изотропного тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}(t)$, и определяется в результате решения следующей задачи:

$$\kappa \frac{\partial u_{ll}^0}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\frac{\partial u_{ij}^0}{\partial x_j} = f_i \text{ в } V,$$
$$[\kappa u_{ll}^0 \delta_{ij} + 2u_{ij}^0]n_j = 0 \text{ на } S, \tag{1}$$

где $\vec{f} = f_i\vec{e}_i = [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}]]$ – центробежная сила, $\vec{n} = n_i\vec{e}_i$ – нормаль к поверхности $S$.

Вектор $\vec{u}_1(\vec{r},t)$ характеризует вклад анизотропных свойств тела. Он вычисляется по известному $\vec{u}_0$:

$$\kappa \frac{\partial u_{ll}^1}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\frac{\partial u_{ij}^1}{\partial x_j} = -a_{ijkl}\frac{\partial u_{kl}^0}{\partial x_j} \text{ в } V,$$
$$[\kappa u_{ll}^1 \delta_{ij} + 2u_{ij}^1]n_j = -a_{ijkl}u_{kl}^0 n_j \text{ на } S. \tag{2}$$

Составляющие вектора кинетического момента $\vec{K}$ запишем в виде $K_i = I_{ij}\omega_j$, где в рассматриваемом приближении тензор инерции имеет вид:

$$I_{ij} = \int_V [(x_l^2 + 2x_l u_l)\delta_{ij} - (x_i x_j + 2x_i u_j)]dV =$$
$$= I_{ij}^0 + \varepsilon(I_{ij}' + \delta I_{ij}'').$$

Тензор инерции $I_{ij}^0$ отвечает недеформированному телу. Обусловленные упругими свойствами тела величины $I_{ij}'$, $I_{ij}''$, как и входящие в них деформации $\vec{u}_0(\vec{r},t)$, $\vec{u}_1(\vec{r},t)$, в соответствии с (1), (2) являются квадратичными функциями компонент угловой скорости. Для вычисления $I_{ij}'$, $I_{ij}''$ воспользуемся результатами работы [2].

Угловая скорость $\vec{\omega}$ определяется в результате решения уравнения

$$\dot{\vec{K}} + [\vec{\omega},\vec{K}] = 0. \tag{3}$$

По форме оно совпадает с уравнением Эйлера для абсолютно твердого тела, но здесь выражение для кинетического момента состоит из двух слагаемых: линейного по компонентам угловой скорости $\vec{\omega}$, отвечающего абсолютно твердому телу, и кубического (в данном приближении) по составляющим вектора $\vec{\omega}$.

Эффект перехода оси стационарного вращения к новому положению в теле продемонстрируем на примере упругого шара, обладающего плоскостью изотропии, перпендикулярной оси $Ox_3$. Предположим, что шар содержит точечные включения (неоднородности), которые приводят к малым отклонениям тензора инерции недеформированного тела $I_{ij}^0$ от его значения для шара, но не влияют на деформации. Оси системы $Ox_1x_2x_3$ являются главными осями инерции недеформированного тела: $I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}$, где $I_0 = 2/5$, $\Delta_i << I_0$.

Пусть тело приведено в быстрое вращение вокруг оси $Ox_3$ с угловой скоростью $\Omega$. При малых возмущениях этого движения вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + (\omega_3 + \Omega)\vec{e}_3$, где $\omega_i << \Omega$. В данном приближении поправки к тензору инерции, связанные с учетом упругих свойств тела, в соответствии с [2] имеют вид:

$$I_{11}' = I_{22}' = g_1\Omega^2,\ I_{33}' = \left[g_1 + \frac{2}{35}(1-\xi_1)\right]\Omega^2,$$
$$I_{13}' = \frac{2}{35}(1-\xi_1)\Omega\omega_1,\ I_{23}' = \frac{2}{35}(1-\xi_1)\Omega\omega_2,$$
$$I_{11}'' = I_{22}'' = g_2 a_{3333}\Omega^2,\ I_{33}'' = g_3 a_{3333}\Omega^2,$$
$$I_{13}'' = g_4 a_{3333}\Omega\omega_1,\ I_{23}'' = g_4 a_{3333}\Omega\omega_2,$$

где

$$g_1 = -0.019 + 0.019\xi_1 + 0.229\xi_2 + 1.6\xi_3,$$
$$g_2 = 0.298 - 0.93\xi_1 + 0.133\xi_3 +$$
$$+ 0.581\xi_1^2 + 0.229\xi_1\xi_2 - 0.686\xi_2^2,$$
$$g_3 = -0.017 + 0.171\xi_1 + 0.533\xi_3 -$$
$$-1.162\xi_1^2 + 0.914\xi_1\xi_2 - 0.686\xi_2^2 - 8\xi_3^2,$$
$$g_4 = -0.007 + 0.2\xi_1 - 1.4\xi_1^2,$$
$$\xi_1 = \frac{3\kappa+2}{2(19\kappa+14)},\ \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa+2)},$$
$$\xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa+2)}.$$

Уравнение (3) в проекциях на оси $Ox_1x_2x_3$ принимает вид:

$$\begin{cases} 2/5\dot{\omega}_1 + (\Delta_3 - \Delta_2)\Omega\omega_2 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_2 = 0, \\ 2/5\dot{\omega}_2 + (\Delta_1 - \Delta_3)\Omega\omega_1 + \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_1 = 0, \\ \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$g = g_2 + g_4 - g_3 = 0.308 - 0.901\xi_1 - 0.4\xi_3 +$$
$$+ 0.343\xi_1^2 - 0.685\xi_1\xi_2 + 8\xi_3^2.$$

Отметим, что $g > 0$ при любых значениях параметра $\kappa \in (0,\infty)$, в чем можно непосредственно убедиться.

Выражение для кинетической энергии тела при постоянном кинетическом моменте имеет вид:

$$T = T_0 + \frac{1}{2}[(\Delta_3 - \Delta_1 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^2)\omega_1^2 +$$
$$+ (\Delta_3 - \Delta_2 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^2)\omega_2^2]. \tag{5}$$

Однородный изотропный упругий шар ($\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, $a_{3333} = 0$), как следует из (4), не прецессирует. Любое положение в нем оси вращения остается неизменным со временем. Шар принимает форму эллипсоида вращения, но деформации $\vec{u}_0(\vec{r},t)$ на угловом движении тела не сказываются.

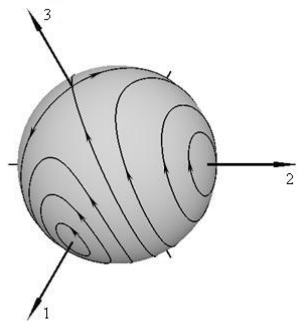


Рис. 1. Траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере $\vec{K}^2 = \text{const}$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} = 0$

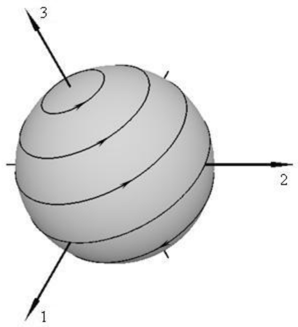


Рис. 2. Траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере $\vec{K}^2 = \text{const}$ при $\Delta_i = 0$, $i = 1,2,3$, $a_{3333} < 0$

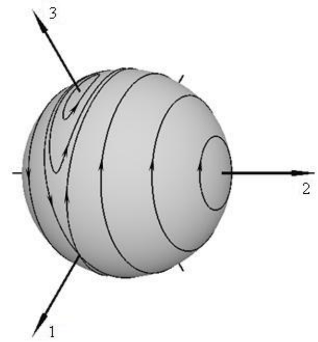


Рис. 3. Траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере $\vec{K}^2 = \text{const}$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$, $\Omega > \Omega_*$

Пусть $Ox_3$ является осью среднего момента инерции, т.е.

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1 .$$

В приближении абсолютно твердого тела вращение вокруг оси $Ox_3$ неустойчиво. Ему отвечает седловая точка (рис. 1).

Рассмотрим случай, когда тензор $I_{ij}^0$ шаровой, т.е. $\Delta_i = 0$, $i = 1,2,3$, а параметр, характеризующий анизотропию упругих свойств, $a_{3333} < 0$. В соответствии с (4) вращение вокруг $Ox_3$ консервативно устойчиво вне зависимости от знака $a_{3333}$. На рис. 2 показаны траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере постоянного кинетического момента при различных значениях кинетической энергии тела. Вращению вокруг $Ox_3$ отвечает особая точка типа центр. При $a_{3333} < 0$ учет малых внутренних потерь энергии приводит к трансформации центра в устойчивый фокус, т.к. в этом случае вращению тела вокруг $Ox_3$ отвечает минимум кинетической энергии при постоянном кинетическом моменте (5).

Интересный качественный эффект обнаруживается в случае, когда анизотропия упругих свойств и малое отличие тензора инерции недеформированного тела от $I_0$ наблюдаются одновременно. В уравнениях движения (4) эти факторы оказывают различное влияние в зависимости от угловой скорости вращения $\Omega$. Пусть параметры $\Delta_i\,(i = 1,2,3)$, $a_{3333}$ и угловая скорость $\Omega$ таковы, что анизотропия определяет качество динамики тела (рис. 3). Стационарное вращение относительно оси $Ox_3$ консервативно устойчиво при достаточно больших значениях $\Omega :\ \Omega^2 > {(\Delta_1 - \Delta_3)}\big/{\varepsilon\delta g |a_{3333}|} = \Omega_*^2$.

С уменьшением угловой скорости $\Omega$ область притяжения устойчивого вращения относительно $Ox_3$ уменьшается, сепаратрисы, показанные на рис. 3, сближаются. Наконец, при $\Omega = \Omega_*$ траектории конца вектора кинетического момента на сфере $\vec{K}^2 = \text{const}$ принимают вид, показанный на рис. 4.

При $\Omega < \Omega_*$ динамику тела определяет, главным образом, его тензор инерции в недеформированном состоянии (т.е. величины $\Delta_i$, $i = 1,2,3$): стационарное вращение вокруг $Ox_3$ неустойчиво, а вращение относительно двух других осей консервативно устойчиво (рис. 5).

Пусть твердое тело совершает угловые движения вблизи некоторого направления устойчивого стационарного вращения (в нашем случае – вокруг $Ox_3$). Со временем внутренняя диссипация уменьшает кинетическую энергию (угловую скорость) тела. Однако качественно его динамика не изменится. Одновременно с уменьшением угловой скорости $\Omega$ затухает прецессия тела, следовательно, прекращается какое-либо движение в теле, а вместе с ним – внутреннее рассеяние энергии. Тело возвращается к исходному стационарному вращению, сокращается лишь область его притяжения.

Иначе обстоит дело, когда наряду с внутренней диссипацией энергии присутствует и малое внешнее сопротивление движению тела. Кинетический момент не сохраняется, но его изменение в виду малости можно не принимать в расчет. Внешнее сопротивление уменьшает угловую скорость $\Omega$ тела и в отсутствие прецессии, а следовательно, со временем изменяет соотношение между факторами, определяющими динамику тела. В результате при $\Omega = \Omega_*$ ось устойчивого стационарного вращения смещается в теле в новое положение. В рассмотренной

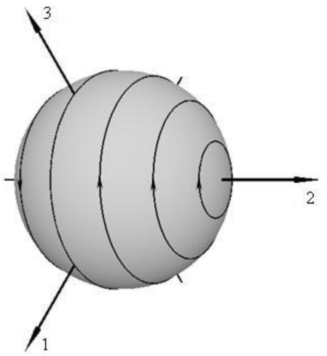


Рис. 4. Траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере $\vec{K}^2 = \mathrm{const}$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$, $\Omega = \Omega_*$

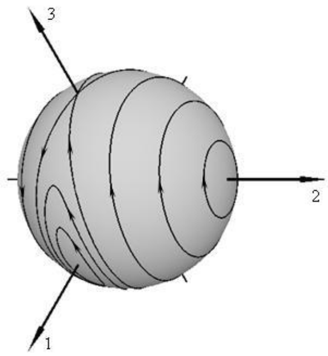


Рис. 5. Траектории конца вектора $\vec{K}$ на сфере $\vec{K}^2 = \mathrm{const}$ при $\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1$, $a_{3333} < 0$, $\Omega < \Omega_*$

задаче минимум кинетической энергии «перемещается» от $Ox_3$ к направлению $Ox_1$, т.е. ось вращения за короткое время повернется в теле на угол $\pi/2$. В инерциальном пространстве явление глобального перемещения полюсов представляет собой поворот тела.

На основе результатов работы можно предположить в качестве одной из причин наблюдавшегося в истории Земли глобального перемещения полюсов существенное влияние упругих свойств Земли на ее угловые движения. Наличие литосферных плит позволяет рассматривать Землю как анизотропно-упругое тело. Предположение об отклонении тензора инерции от шарового в недеформированном состоянии шара также имеет основание. В качестве масштаба замедления вращения Земли можно принять наблюдаемое увеличение продолжительности суток на $1.7 \cdot 10^{-3}$ с за столетие за счет приливного момента, обусловленного гравитационным взаимодействием Земли с Луной и Солнцем.

Заметим, что в отсутствие внешнего сопротивления также возможен переход к новому положению оси устойчивого стационарного вращения в теле. Предположим, что тело от случая к случаю испытывает малые внешние непродолжительные воздействия, вызывающие его прецессию. Внутренняя диссипация приводит к уменьшению угловой скорости, а вместе с ней – к сокращению области притяжения главной оси. Со временем даже весьма малое внешнее воздействие может вывести тело за пределы области притяжения данного стационарного состояния.

Авторы благодарны Г.Г. Денисову за постоянный интерес к работе и полезные замечания.

***Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00314).***

*Список литературы*

1. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 43–50.

2. Новиков В.В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 3. Вып. 5. С. 767–774.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.

## ON A MECHANISM OF THE GLOBAL MOTION OF BODY’S POLES IN A FREE ANGULAR MOTION

***V.V. Novikov, L.N. Grigorieva***

Free angular motions of a deformable elastic body with a small anisotropy of elastic properties and the quasispherical inertia tensor in its undeformed state are studied. It is shown that a decrease in the body's angular velocity can lead to a displacement of its stable stationary rotation axis. The results obtained allow one to propose a possible mechanism of the global movement of the Earth's poles.

*Keywords:* stability, stationary rotation, anisotropy, plane of isotropy, inertia ellipsoid.