МАТЕМАТИКА

УДК 515.14+519.6

АЛГОРИТМ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ БАЗИСНЫХ ЦИКЛОВ ПОЛИЭДРОВ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.И. Яковлев, А.А. Ценова, В.Ю. Епифанов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

yei@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 02.04.2013

Разработан новый метод вычисления базисов групп двумерных гомологий полиэдров трехмерного пространства. Его идея восходит к теореме Александера–Понтрягина. В отличие от стандартного подхода в нашем алгоритме не используются матрицы. Кроме того, найденные с его помощью базисные циклы имеют явный геометрический смысл.

Ключевые слова: симплекс, полиэдр, группа гомологий, алгоритм.

Постановка задачи

В статье исследуются компактные полиэдры трехмерного евклидова пространства R^3, представляющие собой объединения конечных наборов правильно пересекающихся прямолинейных симплексов размерностей $n = 0, 1, 2, 3$. В прикладных науках их принято называть триангулированными 3D-объектами, поскольку они часто используются в качестве компьютерных моделей.

Целью работы является разработка нового алгоритма для вычисления базисов групп двумерных гомологий $H_2(P)$ полиэдров P указанного вида с коэффициентами из поля Z_2. Отметим, что выбор коэффициентов здесь не существенен, так как группы целочисленных гомологий в рассматриваемом случае свободны. Вместе с тем, вычисления по модулю 2 заведомо являются наиболее экономными.

Для решения данной задачи имеются известные методы. Стандартный и в то же время самый универсальный подход основан на приведении матриц инциденций симплексов заданного полиэдра к нормальной диагональной форме [1, с. 98–106]. Однако компьютерные модели могут состоять из многих миллионов симплексов. Работа с матрицами таких размеров предъявляет большие требования к ресурсам используемых для вычислений компьютеров и может занимать много времени.

С другой стороны, симплициальный комплекс любого трехмерного полиэдра P пространства R^3 содержит треугольники, инцидентные не более чем одному трехмерному симплексу. Поэтому P допускает коллапсирование на подполиэдр $P' \subset P$ размерности 2. Поскольку при этом включение $i' : P' \to P$ является гомотопической эквивалентностью, то таким образом решаемая задача сводится к поиску базисных циклов двумерного полиэдра [2, 3].

Для поверхностей алгоритмы вычисления двумерных базисных циклов, не использующие матрицы, подробно разработаны и обоснованы в [3] и [4].

К сожалению, произвольное коллапсирование может привести к потере важного геометрического смысла найденных циклов. В частности, если P – трехмерное подмногообразие пространства R^3, то при использовании данного способа мы можем не получить в качестве базисных циклов компоненты края ∂P.

Предлагаемый ниже алгоритм лишен обоих указанных недостатков. Но прежде чем перейти к его изложению, остановимся на некоторых общих свойствах подполиэдров пространства R^3.

Группы гомологий полиэдров трехмерного пространства

Для любого целого неотрицательного n и произвольного полиэдра T символом $S^n(T)$ будем обозначать совокупность всех его симплексов размерности n.

Всюду далее P – компактный трехмерный полиэдр в пространстве R^3, ∂P – объединение всех треугольников из P, инцидентных не более чем одному трехмерному симплексу. Для удобства мы будем называть ∂P краем полиэдра P, хотя обычно этот термин применяется только в ситуации, когда P является многообразием. Символом P_3 обозначим объединение всех трехмерных симплексов полиэдра P.

Теорема 1. Пусть $K_1,\ldots,K_m$ – компоненты сильной связности полиэдра P_3 и $Q_i = S^3(K_i)$ для всех $i \in \{1,\ldots,m\}$. Тогда справедливы утверждения:

1. $Q_1,\ldots,Q_m$ – базис группы относительных гомологий $H_3(P,\partial P) = Z_3(P,\partial P)$.
2. Для гомологической последовательности

$$\ldots \to H_3(P,\partial P) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\partial P) \xrightarrow{i_*} \xrightarrow{i_*} H_2(P) \xrightarrow{j_*} H_2(P,\partial P) \to \ldots \quad (1)$$

пары $(P,\partial P)$ имеет место равенство

$$\mathrm{im}\partial_* = \langle \partial Q_1,\ldots,\partial Q_m \rangle \cong Z_2^m.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.3 из [5] пространство R^3 можно триангулировать так, чтобы полиэдр P стал подполиэдром полиэдра R^3.

Рассмотрим произвольный номер $i \in \{1,\ldots,m\}$ и некоторый треугольник $t \in \partial Q_i$. Тогда найдется единственный инцидентный t трехмерный симплекс – тетраэдр $\sigma^3 \in Q_i$. Так как $t \subset R^3$, а R^3 – многообразие, то существует только один трехмерный симплекс $\sigma_*^3 \subset R^3$, инцидентный треугольнику t и отличный от σ^3. Предположим, что $\sigma_*^3 \subset P$. Тогда объединение $K_i \cup \sigma_*^3$ лежит в P_3 и является сильно связным полиэдром. Это противоречит тому, что K_i – компонента сильной связности полиэдра P_3. Следовательно, наше допущение неверно и, на самом деле, $\sigma_*^3 \not\subset P$. Но тогда $t \subset \partial P$.

Результат предыдущего абзаца означает, что $\partial Q_i \in Z_2(\partial P)$. Согласно равенству $\dim\partial P = 2$ в такой ситуации $Q_i = Q_i + C_3(\partial P) \in Z_3(P,\partial P)$.

Линейная независимость системы $Q_1,\ldots,Q_l$ очевидна, так как цепи Q_i и Q_j при $i \neq j$ общих трехмерных симплексов не содержат.

Рассмотрим произвольный относительный цикл $Q \in Z_3(P,\partial P)$. Так как $\dim\partial P = 2$, то $Q \in C_3(P)$ и $\partial Q \in Z_2(\partial P)$. Предположим, что пересечение $Q \cap Q_i$ содержит трехмерный симплекс σ^3, но при этом цепь Q_i не лежит в Q целиком. Тогда найдется тетраэдр $\sigma_*^3 \in Q_i$, который не лежит в Q. Так как полиэдр K_i сильно связен, то существует трехмерный путь $X = \{\sigma_0^3, \sigma_1^3, \ldots, \sigma_s^3\}$ в K_i, такой, что $\sigma_0^3 = \sigma^3$, $\sigma_s^3 = \sigma_*^3$. Отметим, что по определению пути для любого номера $j = 1,\ldots,s$ пересечение $t_j = \sigma_{j-1}^3 \cap \sigma_j^3$ является треугольником. Поскольку $\sigma_0^3 \in Q$, а $\sigma_s^3 \notin Q$, то найдется наибольший номер j, $0 < j < s$, такой, что $\sigma_{j-1}^3 \in Q$, а $\sigma_j^3 \notin Q$. Таким образом, $t_j \in \partial Q$. Отсюда и из включения $\partial Q \in Z_2(\partial P)$ следует, что $t_j \in Z_2(\partial P)$. С другой стороны, треугольник t_j инцидентен трехмерным симплексам σ_{j-1}^3 и σ_j^3 полиэдра P и потому не может быть краевым для P. Полученное противоречие означает, что высказанное выше предположение неверно и, на самом деле, если $Q \cap Q_i$ содержит трехмерный симплекс, то $Q_i \subset Q$. Отсюда вытекает существование таких $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}$, что $Q = Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_k}$.

Таким образом, $Q_1,\ldots,Q_m$ – базис группы $Z_3(P,\partial P) = H_3(P,\partial P)$.

Так как $\dim P = 3$, то по определению гомоморфизма $\partial_* : H_3(P,\partial P) \to H_2(\partial P)$ для всех $i \in \{1,\ldots,m\}$ имеют место равенства $\partial_*(Q_i) = \partial Q_i$. Отсюда согласно доказанному выше вытекает, что образ $\mathrm{im}\partial_*$ порождается циклами $\partial Q_1,\ldots,\partial Q_m$. Кроме того, в силу равенства $H_3(P) = 0$ и точности последовательности (1) $\ker\partial_* = j_*(H_3(P)) = 0$. Следовательно, циклы $\partial Q_1,\ldots,\partial Q_m$ линейно независимы, и потому $\langle \partial Q_1,\ldots,\partial Q_m \rangle \cong Z_2^m$. Теорема доказана.

Теорема 2. Включение $i_2 : \langle \partial Q_1,\ldots,\partial Q_m \rangle \to H_2(\partial P)$ и гомоморфизм i_* из (1) образуют короткую точную последовательность

$$0 \to \langle \partial Q_1,\ldots,\partial Q_m \rangle \xrightarrow{i_2} \xrightarrow{i_2} H_2(\partial P) \xrightarrow{i_*} H_2(P) \to 0. \quad (2)$$

Доказательство. Точность в первых двух членах последовательности вытекает из второго утверждения теоремы 1. Для доказательства точности в последнем члене достаточно показать, что гомоморфизм j_* из (1) равен нулю.

Рассмотрим произвольный элемент $[x] \in H_2(P)$. Так как $x \in Z_2(P) \subset Z_2(R^3)$, то найдется цепь $c \in C_3(R^3)$ с границей $\partial c = x$.

Пусть $c_P = c \cap S^3(P)$ и $c' = c_P + c$. Тогда, с одной стороны, цикл $y = \partial c'$ лежит на крае ∂P. С другой стороны, $x + y = \partial c + \partial c' = \partial c_P$, и потому $[x] = [y]$ в $H_2(P)$. В такой ситуации $j_*([x]) = j_*([y]) = 0$ в $H_2(P, \partial P)$. Теорема доказана.

По теореме о гомоморфизмах групп из теоремы 2 вытекает, что

$$H_2(P) \cong H_2(\partial P) / \langle \partial Q_1, \ldots, \partial Q_m \rangle .$$

Алгоритм и его обоснование

Для решения поставленной задачи на вход алгоритма должны подаваться следующие данные:

1. Списки ребер E, треугольников T и тетраэдров W полиэдра P.
2. Для каждого ребра $a \in E$ и треугольника $t \in T$ списки $\partial^{-1}(a) \subset T$ и $\partial^{-1}(t) \subset W$ инцидентных им симплексов полиэдра P размерностей 2 и 3 соответственно.

На выходе будет получен список Z двумерных циклов полиэдра P.

Описание алгоритма.

Шаг 1. Найдем край ∂P и его компоненты сильной связности $D_1, \ldots, D_n$.

Шаг 2. С помощью алгоритма из [4] в каждой компоненте D_i, $i = 1, \ldots, n$, получим циклы $x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{r_i}$, любые r_i из которых образуют базис группы $H_2(D_i)$.

Шаг 3. Построим объединение P_3 всех трехмерных симплексов полиэдра P и выделим компоненты сильной связности $K_1, \ldots, K_m$ подполиэдра $P_3 \subset P$.

Шаг 4. Для каждого $k = 1, \ldots, m$ найдем компоненты сильной связности $L_k^0, L_k^1, \ldots, L_k^{p_k}$ края ∂K_k и в списке $X = \{x_i^j \mid i = 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, r_i\}$ пометим один элемент, совпадающий с циклом $y_k^0 = S^2(L_k^0)$.

Шаг 5. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ из списка $X_i = \{x_i^j \mid j = 0, 1, \ldots, r_i\}$ удалим один непомеченный цикл. Полученный список обозначим символом X_i^*.

Шаг 6. Из объединения $X^* = X_1^* \cup \ldots \cup X_n^*$ удалим все помеченные циклы. Полученный список обозначим буквой Z.

Теорема 3. Гомологические классы найденных с помощью алгоритма циклов из списка Z образуют базис группы гомологий $H_2(P)$.

Доказательство. Сначала отметим, что использованный выше алгоритм из [4] основан на теореме Александера–Понтрягина. Поэтому найденные с его помощью циклы из списка X представляют собой границы областей, на которые поверхность ∂P делит пространство R^3. Отсюда следует, что все циклы $y_k^{j_k} = S^2(L_k^{j_k})$, $j_k = 0, 1, \ldots, p_k$, $k = 1, \ldots, m$, принадлежат X. Таким образом, шаг 4 алгоритма настоящей работы определен корректно.

По построению циклы из списка X^* образуют базис группы $H_2(\partial P)$. В частности, $\mathrm{rank} H_2(\partial P) = \mathrm{card} X^*$.

Пусть $y_k = \partial Q_k$ для $k = 1, \ldots, m$. Тогда согласно теореме 2

$$\mathrm{rank} H_2(P) = \mathrm{rank} H_2(\partial P) - \mathrm{rank} \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$$

и

$$\mathrm{rank} \langle y_1, \ldots, y_m \rangle = m .$$

Из полученных равенств вытекает, что $\mathrm{rank} H_2(P) = \mathrm{card} X^* - m$. Так как список Z получен из X^* удалением циклов $y_1^0, \ldots, y_m^0$, то $\mathrm{card} X^* - m = \mathrm{card} Z$. Следовательно,

$$\mathrm{rank} H_2(P) = \mathrm{card} Z. \tag{3}$$

Допустим, что гомологические классы в полиэдре P циклов из списка Z линейно зависимы. Тогда найдутся циклы $z_1, \ldots, z_l \in Z$, для которых сумма $z = z_1 + \ldots + z_l$ гомологична нулю. Согласно точности последовательности (2) это возможно в том и только том случае, если $z \in \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$. В такой ситуации с точностью до нумерации элементов списка $\{y_1, \ldots, y_m\}$ для некоторого $q \le m$ имеет место равенство

$$z = y_1 + \ldots + y_q . \tag{4}$$

Поскольку $z_1, \ldots, z_l \in Z \subset X^*$, то равенство $z = z_1 + \ldots + z_l$ представляет собой разложение цикла z по базису X^* группы $H_2(\partial P)$. При этом согласно шагам 4 и 6 алгоритма $z_i \ne y_1^0$ для всех $i = 1, \ldots, l$.

С другой стороны,

$$y_1 + \ldots + y_q = \sum_{j_1=0}^{p_1} {y_1}^{j_1} + \ldots + \sum_{j_q=0}^{p_q} {y_q}^{j_q} ,$$

где $y_k^{j_k} = S^2(L_k^{j_k})$ для всех $k = 1, \ldots, m$ и $j_k = 0, 1, \ldots, p_k$. Поэтому разложение правой части равенства (4) по базису X^* группы $H_2(\partial P)$ цикл y_1^0 содержит.

Полученное противоречие означает, что наше допущение неверно и на самом деле гомологические классы циклов из списка Z линейно независимы. Но тогда в силу (3) они образуют базис группы $H_2(P)$. Теорема доказана.

Оценка сложности

Пусть n_E, n_T и n_W – количества ребер, треугольников и тетраэдров полиэдра P соответственно. Для каждого $m = 1,...,6$ символом N_m обозначим число операций, выполняемых на шаге с номером m.

Оценим величины N_m и просуммируем, чтобы получить итоговое время работы алгоритма.

При построении края ∂P для каждого треугольника $t \in T$ необходимо сравнить размер списка $\partial^{-1}(t)$ с единицей. На это потребуется $O(n_T)$ операций. Выделение компонент сильной связности полиэдра ∂P является процедурой, аналогичной обходу графа со списком вершин $V_0 = S^1(\partial P)$ и списком ребер $E_0 = S^2(\partial P)$. Очевидно, $\mathrm{card} V_0 \le n_E$ и $\mathrm{card} E_0 \le n_T$. Поэтому в худшем случае указанная процедура может быть выполнена за время $O(n_E + n_T)$ [6]. В итоге $N_1 = O(n_E + n_T)$.

Применяемый на шаге 2 алгоритм имеет сложность $N_2 = O(n_T^2)$ [4].

Объединение P_3 содержит не более чем n_T треугольников и не более чем n_W тетраэдров. Алгоритм выделения его компонент сильной связности на шаге 3 справится со своей задачей за время $N_3 = O(n_T + n_W)$.

Пусть E_k и T_k – списки ребер и треугольников поверхности ∂K_k, $k = 1,\dots,m$. Для выделения ее компонент сильной связности потребуется $O(n_{E_k} + n_{T_k})$ действий, где $n_{E_k} = \mathrm{card} E_k$ и $n_{T_k} = \mathrm{card} T_k$. Найти элемент y_k^0 в списке $X = \{x_i^j \mid i = 1,...,n; j = 0,1,...,r_i\}$ можно за время $O(r_1 + \dots + r_n + n)$. Так как $n_{E_1} + \dots + n_{E_m} \le n_E$, $n_{T_1} + \dots + n_{T_m} \le n_T$ и $r_1 + \dots + r_m + n \le n_T$, то $N_4 = O(n_E + m n_T)$.

Поскольку $\mathrm{card} X_1 + \dots + \mathrm{card} X_n \le n_T$ и $\mathrm{card} X^* \le n_T$, то для выполнения преобразований списков X_i и X^*, предусмотренных шагами 5 и 6, достаточно $N_5 = N_6 = O(n_T)$ элементарных операций.

Поскольку $m < n_T$, то из полученных результатов вытекает следующая асимптотическая оценка эффективности разработанного алгоритма.

Теорема 4. Базис группы двумерных гомологий подполиэдра $P \subset R^3$ с помощью описанного выше алгоритма может быть найден, в наихудшем случае, за время $O(n_*^2)$, где $n_* = \max\{n_E, n_T, n_W\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“, контракт №14.B37.21.0361.

Список литературы

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. Ижевск: НИЦ РХД, 2001. 448 с.

2. Dey T.K., Guha S. Computing homology groups of simplicial complexes in R^3 // Journal of the ACM. 1998. V. 45. № 2. P. 266–287.

3. Яковлев Е.И. Вычислительная топология. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 214 с.

4. Яковлев Е.И., Ценова А.А. Алгоритм вычисления базисов групп двумерных гомологий разветвленных триангулированных поверхностей // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2012. № 2(95). С. 331–338.

5. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974. 208 с.

6. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960 с.

A COMPUTING ALGORITHM FOR TWO-DIMENSIONAL BASIC CYCLES OF POLYHEDRONS IN THE THREE-DIMENSIONAL SPACE

E.I. Yakovlev, A.A. Tsenova, V.Yu. Epifanov

A new method for computing the bases of two-dimensional homology groups of polyhedrons in the three-dimensional space has been developed. Its idea goes back to the Alexander-Pontryagin theorem. In contrast to the standard approach, our algorithm does not use matrices. Moreover, the basic cycles found with the use of this approach have a clear geometrical meaning.

Keywords: simplex, polyhedron, homology group, algorithm.