

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 534.1

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГО-ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

© 2013 г.

В.И. Ерофеев,^{1,2} Д.А. Колесов,¹ Е.Е. Лисенкова³¹Нижегородский филиал Института проблем машиностроения им. А.А. Благонравова РАН²Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского³Нижегородский институт управления

erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 01.04.2013

Рассматривается распространение поперечных волн в струне, лежащей на упруго-инерционном основании. Проанализировано влияние параметров основания на дисперсионные характеристики волн (в частности, на зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа). Исследованы закономерности генерации волн источником нулевой частоты, равномерно движущимся по струне.

Ключевые слова: струна, упруго-инерционное основание, поперечная волна, дисперсия, движущийся источник.

Введение

Многие элементы машиностроительных конструкций, в частности, несущих движущиеся нагрузки (путевая структура, контактный провод) рассматриваются в виде одномерной системы (струна, балка), взаимодействующей с деформируемым основанием. Основание задается упругим (основание Винклера) или вязкоупругим, что позволяет учитывать возможность его сопротивления силовому воздействию. При этом основание как динамическая система, как правило, не рассматривается.

А.И. Весницкий [1] предложил математическую модель, обобщающую модель Винклера путем учета инерционности упругого основания, с которым взаимодействует струна, совершающая малые поперечные колебания.

Математическая модель

Задача Весницкого рассматривается в следующей постановке: одномерная гибкая нерастяжимая струна (ее объемная плотность ρ_0 ; площадь поперечного сечения S) находится на упруго-инерционном основании, жесткость которого γ , а погонная масса ρ_g . Через u_1 и u_2 обозначены поперечные отклонения струны и средней линии «постели» от равновесного положения (рис. 1).

В начальный момент времени струна натянута с силой N и ее положение совпадает с осью X .

При отклонении струны от положения равновесия ее бесконечно малый элемент dx растягивается и переходит в элемент dl . При этом предполагается, что при малых амплитудах колебаний струны ($\frac{\partial u_1}{\partial x} \ll 1$) ее натяжение остается неизменным и равным N . Плотности потенциальной и кинетической энергий системы «струна–упругое основание» будут соответственно равны

$$W = \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2];$$

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2,$$

и лагранжиан системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 S \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_g \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 - N \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 - \gamma [u_2^2 + (u_1 - u_2)^2] \right\}. \quad (1)$$

Используя уравнения динамики (континуальный аналог системы уравнений Лагранжа второго рода)

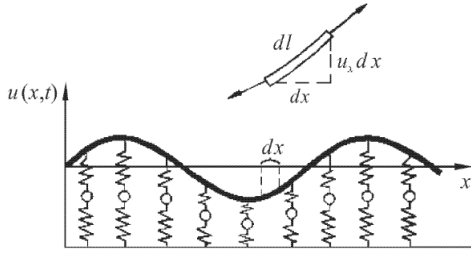


Рис. 1

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{j,t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{j,x}} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0,$$

где j принимает значения 1 и 2, а запятая после индекса подразумевает дифференцирование, с учетом (1) получим систему уравнений, описывающих колебания струны на упруго-инерционном основании:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 S} (u_1 - u_2) = \frac{1}{\rho_0 S} F(x,t), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{\rho_g} u_2 = \frac{\gamma}{\rho_g} u_1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $F(x,t)/(\rho_0 S)$ – погонная плотность внешней силы, действующей на струну, $c = \sqrt{N/(\rho_0 S)}$.

Первое из уравнений системы (2) описывает волны, распространяющиеся вдоль струны, а второе – вибрации массива осцилляторов, взаимодействующих с колебаниями струны. Как частный случай можно получить уравнение, описывающее колебания струны, лежащей на упругом основании. Для этого необходимо перейти к пределу $\rho_g \rightarrow 0$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $u_1 = 2u_2$, и в пренебрежении внешней силой получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2\rho_0 S} u_1 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется уравнением Клейна–Гордона. Оно описывает, в частности, распространение волн

$$u(x,t) = (Ae^{i(\omega t - kx)} + A^* e^{-i(\omega t - kx)})/2, \quad (4)$$

где $A = ae^{i\phi}$ – комплексная амплитуда волны; a – действительная амплитуда; $\omega t - kx + \phi$ – полная фаза волны; ϕ – фазовый сдвиг; $\omega = 2\pi/T$ – частота волны; T – период волны; $k = 2\pi/\Lambda$ – волновое число; Λ – длина волны.

Дисперсионные зависимости

Согласно (3) частота и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне,

лежащей на линейно-упругом (безынерционном) основании, связаны соотношением

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_*^2 = 0, \quad \omega_* = \sqrt{\gamma/(2\rho_0 S)}. \quad (5)$$

Разрешая уравнение (5) относительно частоты ω , получим $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_*^2}$.

Наличие упругого основания приводит к существованию критической частоты ω_* (частота отсечки), при превышении которой колебания струны носят волновой характер.

В пренебрежении действующей на струну внешней силой система уравнений (2) может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного перемещения частиц струны u_1 :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{2c^2 \rho_0 S}{\rho_g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \\ & + \frac{\rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \frac{c^2 \rho_0 S}{\gamma} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho_g} u_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отыскивая его решения в виде (4), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновое число поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\gamma}{\rho_0 S} + \frac{2\gamma}{\rho_g} + c^2 k^2 \right) + \\ & + \frac{2\gamma c^2}{\rho_g} k^2 + \frac{\gamma^2}{\rho_g \rho_0 S} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Разрешая это уравнение относительно частоты в безразмерных переменных

$\tilde{k} = ck\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\rho_0 S/\gamma}$, $\alpha = \sqrt{\rho_g/\rho_0 S}$, получим

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} = & \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} \left(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и ниже для краткости записи опущен знак «тильда» над безразмерными переменными.

Из (8) следует, что учет инерционности основания приводит к наличию двух критических частот

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^* = & \left(\frac{\gamma}{2\rho_0 S} \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g} \right) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4\rho_0^2 S^2} \left(1 + \frac{2\rho_0 S}{\rho_g} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{\rho_g \rho_0 S}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая эти частоты с критической частотой ω_* , характерной для безынерционного основания, определим, что их значения связаны между собой двойным неравенством $\omega_2^* <$

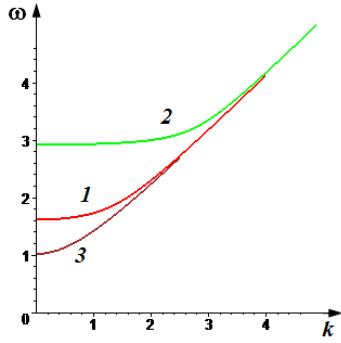


Рис. 2а

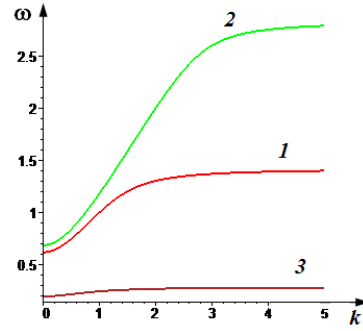


Рис. 2б

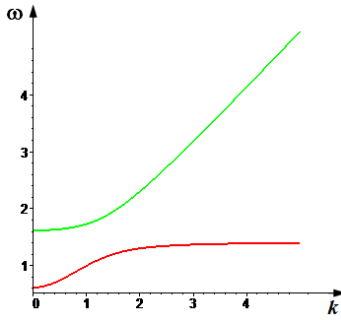


Рис. 3а

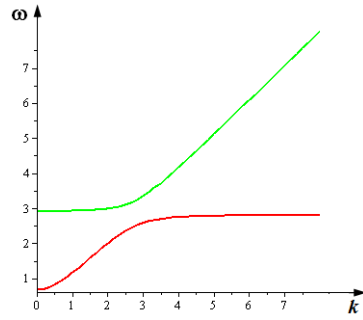


Рис. 3б

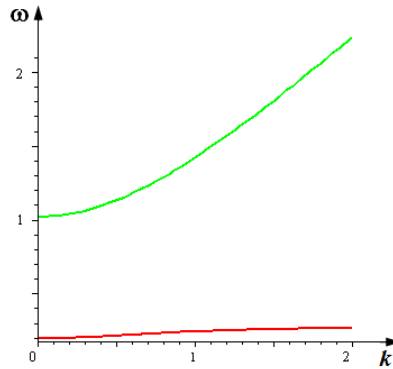


Рис. 3в

$\omega < \omega_* < \omega_1^*$. В плоскости (ω, k) при этом имеется уже не одна, а две дисперсионные ветви, одна из которых исходит из точки $(0, \omega_1^*)$, а другая – из точки $(0, \omega_2^*)$. Знак «+» в (8) соответствует верхней, а «-» – нижней ветви дисперсионной кривой. При больших волновых числах кривые (8) стремятся к асимптотам $\omega = ck$ и $\omega = \sqrt{2\gamma/\rho_g}$ соответственно.

Точка перегиба нижней ветви дисперсионной кривой определяется из уравнения

$$6\alpha^8 k^8 + 2\alpha^6 k^6 (7\alpha^2 + 2) + 9\alpha^4 k^4 (\alpha^4 + 4) - (\alpha^4 + 4)^2 = 0. \quad (10)$$

На рис. 2, 3 приведены дисперсионные кривые при различных соотношениях погонной массы струны и основания.

На рис. 2а показана верхняя дисперсионная ветвь при $\alpha = 1$ (линия 1), $\alpha = 0.5$ (линия 2) и $\alpha = 5$ (линия 3).

На рис. 2б при тех же соотношениях масс показана нижняя дисперсионная ветвь.

На рис. 3 приведены обе дисперсионные ветви для случаев $\alpha = 1$ (а); $\alpha = 0.5$ (б); $\alpha = 5$ (в).

Фазовые скорости ($v_{ph} = \omega/k = c\tilde{\omega}/\tilde{k}$) поперечных волн, распространяющихся в струне, лежащей на упруго-инерционном основании, определяются выражениями

$$\frac{v_{ph}}{c} = \frac{1}{\alpha k \sqrt{2}} (\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)})^{1/2}. \quad (11)$$

На рис. 4 показан качественный вид фазовых скоростей, соответствующих верхней (линия 1) и нижней (линия 2) дисперсионным ветвям, в зависимости от волнового числа.

Групповые скорости волн ($v_{gr} = d\omega/dk = c d\tilde{\omega}/d\tilde{k}$) описываются выражениями

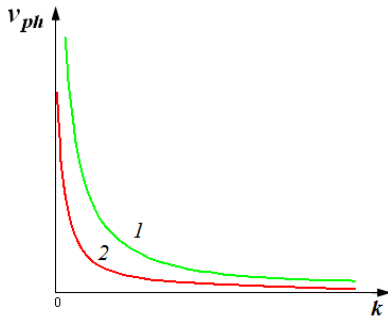


Рис. 4

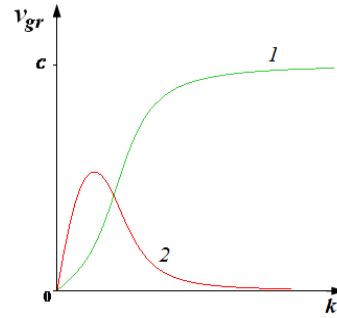


Рис. 5

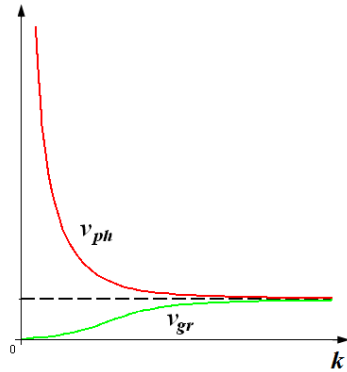


Рис. 6а

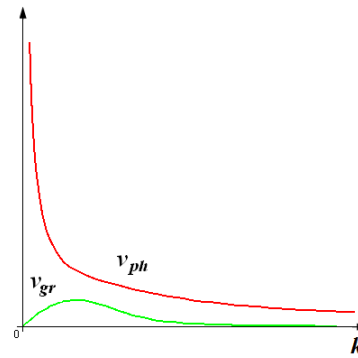


Рис. 6б

$$\frac{v_{gr}}{c} = \frac{\alpha k}{\sqrt{2\beta}} \frac{\beta \pm (\alpha^2 k^2 + \alpha^2 - 2)}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2 \pm \beta}},$$

$$\beta = \sqrt{(\alpha^2 k^2 + \alpha^2 + 2)^2 - 4\alpha^2(2k^2 + 1)}. \quad (12)$$

Их зависимости от волнового числа представлены на рис. 5. Кривая 1 соответствует верхней дисперсионной ветви; кривая 2 – нижней. Значение длины волны, при котором кривая 2 достигает своего максимума, определяется на основе решения уравнения (10).

На рис. 6 сравниваются значения фазовых скоростей с групповыми скоростями при изменении волнового числа от нуля до бесконечности для верхней (а) и нижней (б) дисперсионных ветвей.

Видно, что во всем диапазоне волновых чисел значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно, дисперсия является нормальной. При $k \rightarrow \infty$ для верхней дисперсионной ветки $v_{ph} \rightarrow c$ и $v_{gr} \rightarrow c$; для нижней дисперсионной ветки $v_{ph} \rightarrow 0$ и $v_{gr} \rightarrow 0$.

Заметим, что система (2) совпадает с системой уравнений, введенной в [2] для описания длинноволновых динамических процессов в метаматериале, моделируемом, как решетка «масса-в-массе».

В [3] выявлены общие закономерности, присущие упругим системам, лагранжианы которых зависят от обобщенных координат и их производных до второго порядка включительно. Заметим, что струна, лежащая на упруго-инерционном основании (2), относится к этому классу систем.

Излучение волн движущейся нагрузкой

Если на струну, лежащую на упруго-инерционном основании, действует равномерно движущаяся нагрузка, величина которой постоянна, то смещение под нагрузкой тоже должно быть постоянным, т.е. $u(Vt, t) = \text{const}$, где V – скорость движения нагрузки. Это условие возможно, когда

$$\omega - kV = 0 \quad (13)$$

или в безразмерных переменных $\tilde{\omega} - \tilde{k}\tilde{V} = 0$, где $\tilde{V} = V/c$. В результате частоты и волновые числа возникающих в направляющей волн будут связаны не только дисперсионным уравнением (7), но и посредством так называемого кинематического инварианта (13).

Физически реализуемыми будут лишь те волны, которые удовлетворяют условию ограниченности прогибов струны на бесконечности и условию излучения Мандельштама [1, 4].

Определяя из системы уравнений (7), (13) частоты и волновые числа и отбирая только физически реализуемые решения, получим, что в зависимости от скорости движения нагрузки возможны два качественно различных режима волнообразования. Критическая скорость, разделяющая эти случаи, равна c , т.е. совпадает со скоростью распространения волн в струне без учета упруго-инерционного основания.

У неподвижной нагрузки поле поперечных смещений локализовано около источника, т.е. спадает по мере удаления от него, а $k_{1,2}$ имеют

вид $k_{1,2} = \pm i/\sqrt{2}$. При движении нагрузки со скоростью $0 < V < 1$ слева от нее ($x < Vt$)

$$k_1 = i \left(\alpha^2 V^2 - 2(1 - V^2) + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} \times \left(2\alpha^2 V^2 (1 - V^2) \right)^{-1/2},$$

$$k_{3,4} = \pm \left(2(1 - V^2) - \alpha^2 V^2 + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} \times \left(2\alpha^2 V^2 (1 - V^2) \right)^{-1/2},$$

а справа при $x > Vt$

$$k_2 = -i \left(\alpha^2 V^2 - 2(1 - V^2) + \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(1 - V^2)^2} \right)^{1/2} \times \left(2\alpha^2 V^2 (1 - V^2) \right)^{-1/2},$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4} V.$$

Отсюда следует, что движение источника нулевой частоты приводит к возникновению, наряду с собственным полем, двух бегущих вслед волн.

Источник нулевой частоты, движущийся со скоростью $V > 1$, собственного поля не создает, но зато излучает четыре волны, бегущие ему вслед, волновые числа и частоты которых определяются формулами

$$k_{1-4} = \pm \left(\alpha^2 V^2 + 2(V^2 - 1) \pm \sqrt{\alpha^4 V^4 + 4(V^2 - 1)^2} \right)^{1/2} \times \left(2\alpha^2 V^2 (V^2 - 1) \right)^{-1/2},$$

$$\omega_{1-4} = k_{1-4} V.$$

Справа от нагрузки при $x > Vt$ направляющая остается невозмущенной.

Таким образом, наличие инерционности в основании струны приводит к тому, что даже при «докритических» скоростях движения нагрузки ($0 < V < 1$) возникают бегущие волны. Однако для очень малых ($\Lambda \rightarrow 0$) длин волн $v_{gr} \rightarrow 0$.

Следует отметить, что решение задачи кинематики (нахождение частот, волновых чисел и критических скоростей) определяет лишь необходимые условия излучения волн, но не достаточные. Так, может оказаться, что амплитуды прогнозируемых волн будут равны нулю.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 12-08-00888-а, № 12-08-90032-Бел_а, № 12-08-31066-мол_а).

Список литературы

1. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
2. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. of Engineering Science. 2009. V. 47. P. 610–617.
3. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. № 2. С. 315–321.
4. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Н. Новгород: ИД «Наш дом», 2010. 248 с.

CALCULATION OF THE DISPERSION CHARACTERISTICS OF A STRING RESTING ON AN ELASTIC-INERTIAL FOUNDATION

V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, E.E. Lisenkova

The propagation of transverse waves in a string resting on an elastic-inertial foundation is considered. The influence of the foundation parameters on the wave dispersion characteristics is analyzed (in particular, on the wave number dependences of phase and group velocities). The wave patterns generated by a zero-frequency source uniformly moving along the string are studied.

Keywords: string, elastic-inertial base, transverse wave, dispersion, moving source.