УДК 517.938

УСРЕДНЕННАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ

 Н.В. Кротов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

nkrotov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.05.2013

Для приближенного решения нелинейного операторного уравнения производится усредненная линеаризация уравнения и аппроксимация линейных уравнений поиска минус-поправок в подпространствах. Результат конкретизирован в случае двухточечной задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Ключевые слова: усреднение, линеаризация, подпространства.

1. В *KB*-линеале (см. [1]) X выделены множества E, C и определена операция F:

$$E, C \subset X, \quad F: E \mapsto C.$$

Производится поиск приближенного решения нелинейного уравнения

$$x = F(x). \tag{1}$$

С целью усредненной линеаризации этого уравнения вводится линейный ограниченный (далее – л. о.) оператор $\Gamma: X \to X$. Операция $F(.) - \Gamma$ имеет модулярную мажоранту – л. о. оператор $B: X \to X$, удовлетворяющий неравенству:

$$\left|F(x+\Delta x) - F(x) - \Gamma\Delta x\right| \le B\left|\Delta x\right| \quad (x, x+\Delta x \in E).$$

Оператор B положительный, $B > 0$ в порядковом смысле: $B \ne 0,\ (x > 0) \Rightarrow (Bx \ge 0)$.

Оператор Γ мажорируется л. о. положительным оператором *A,* нормы итераций которого ограничиваются сверху элементами сходящегося числового ряда:

$$A: X \to X, \quad \left|\Gamma x\right| \le A\left|x\right|,$$
$$\left\|A^n\right\| \le a_n \ (n \ge 1), \ \ a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \tag{2}$$

Следовательно, существуют л. о. операторы $(I-\Gamma)^{-1},\ (I-A)^{-1}: X \to X$ (где I – тождественный оператор: $Ix \equiv x$), причем $(I-A)^{-1} > 0$.

Пусть л. о. положительный оператор L удовлетворяет следующим условиям:

$$L: X \to X, \ \ L \ge (I-A)^{-1}B,$$
$$\left\|L^n\right\| \le l_n \ \ (n \ge 1), \ \ l = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l_n < \infty. \tag{3}$$

Если оператор $(I-\Gamma)^{-1}$ известен (осуществим), то, при выполнении некоторых условий, может быть применен модифицированный метод касательных, когда минус-поправки $\Delta_n = x_n - x_{n+1}$ являются решениями линейных уравнений $\Delta_n - \Gamma\Delta_n = x_n - F(x_n)$. Здесь же рассматривается случай, когда обратный оператор неизвестен, и данные линейные уравнения метода аппроксимируются.

Вводится серия линейных замкнутых подпространств *B*-пространства X:

$$X_n \subset X_{n+1} \ \ (n = \overline{0,\infty}),$$

удовлетворяющих следующим условиям. Имеется серия л. о. операторов

$$P_n: C \to X_n, \ \ P_n x \to x \ \ (n \to \infty, \ \forall x), \tag{4}$$

и серия таких л. о. операторов $\Gamma_n: X_n \to X_n$, для которых существуют и известны л. о. операторы $(I_n - \Gamma_n)^{-1}: X_n \to X_n$ (где $I_n x = x,\ x \in X_n$). Требуется, чтобы в соответствующих *B*-пространствах $X_n \to X_n,\ X_n \to X$ л. о. операторов следующие нормы удовлетворяли приведенным условиям:

$$\left\|(I_n - \Gamma_n)^{-1}\right\| \le \text{const}, \ \forall n, \tag{5}$$

$$\left\|\Gamma_n - \Gamma\right\| \to 0 \ \ (n \to \infty). \tag{6}$$

Подбираются неубывающая последовательность номеров

$$0 \le m(n) \le m(n+1) \to \infty \ \ (n \to \infty) \tag{7}$$

и первоначальное приближение $x_0 \in (E \cap X_{m(0)})$. Обозначим (см. (2))

$$h = a\left\|x_0 - F(x_0)\right\|. \tag{8}$$

Выберем числа $c_n > 0 \ (n \ge 0)$ – элементы сходящегося ряда и введем величину (см. (3))

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n-1} l_{n-1-k} c_k \ \ (n \ge 1). \tag{9}$$

Следовательно, $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \to 0$ и существует $\max \varphi_n$.

Введем число r (см. (3)) и метрический шар S:

$$r = hl + \max \varphi_n, \tag{10}$$

$$S = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}. \tag{11}$$

Потребуем включение

$$S \subset E.$$

Построим процесс вычисления минус-поправок $\Delta x_n = (x_n - x_{n+1}) \in X_{m(n)}$:

$$\Delta x_n - \Gamma_{m(n)} \Delta x_n = x_n - P_{m(n)} F(x_n) \quad (n \geq 0) \tag{12}$$

(обозначение операторов P_n см. (4)). Тогда при обозначениях (3), (8), (9) верна

Теорема 1. В шаре (11) существует и единственно решение x^* уравнения (1). Возможен такой выбор номеров (7), что вычисление минус-поправок по формуле (12) приводит к процессу, сходящемуся в этом шаре к решению, $x_n \to x^*$. Оценка погрешности приближения $\|x_n - x^*\| \leq hll_n + \varphi_n \to 0 \quad (n \geq 1,\, n \to \infty)$.

Доказательство теоремы приведено в диссертации [2], см. также работы [3, 4].

2. Применим эту схему к краевой задаче при $0 \leq t \leq 1$:

$$-y'' = f(t, y, y'),\ y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta, \tag{13}$$

где функция f непрерывна по совокупности 3 переменных. Действуем в B-пространстве $X = L_\infty$. Здесь C означает B-пространство непрерывных функций. Введем обозначение $x = -y''$. Следовательно,

$$\begin{gathered} y(s) = \alpha + (\beta - \alpha)s + \int_0^1 G(s,t)x(t)dt, \\ y'(s) = \beta - \alpha + \int_0^1 G'_s(s,t)x(t)dt, \end{gathered} \tag{14}$$

где функция Грина $G = (1-s)t \ (t \leq s)$, $G = (1-t)s \ (t \geq s)$. Ясно, что $y \in C^1$.

Указано множество $E \subset X$. Обозначим

$$Y = \{y : y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta,\ -y'' \in E\}. \tag{15}$$

Следовательно, при обозначении $(f[x])(s) = f(s, y(s), y'(s))$

$$(y \in Y) \Rightarrow (f[x] \in C).$$

Задача (13) эквивалентна функционально-интегральному уравнению $x = f[x]$.

С целью усредненной линеаризации этого уравнения введем непрерывную функцию $V(s,t)$, определенную на квадрате $Q = [0,1] \times [0,1]$:

$$|V(s,t)| \leq v < 1. \tag{16}$$

Пусть выполняется условие: если $y, y + \Delta y \in Y$ (15), то п. в. на отрезке $[0,1]$

$$\left| (f[x + \Delta x] - f[x])(s) - \int_0^1 V(s,t)\Delta x(t)dt \right| \leq$$

$$\leq b\int_0^1 |\Delta x(t)|dt, \quad b + v < 1.$$

Для применения теоремы 1 введем в рассмотрение операции

$$\begin{gathered} F(x) = f[x],\ (\Gamma x)(s) = \int_0^1 V(s,t)x(t)dt, \\ (Ax)(s) = v\int_0^1 x(t)dt, \quad (Bx)(s) = b\int_0^1 x(t)dt, \\ L = (I - A)^{-1}B. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда

$$((I - A)^{-1}x)(s) = x(s) + \frac{v}{1-v}\int_0^1 x(t)dt,$$

$$(Lx)(s) = q\int_0^1 x(t)dt, \quad q = \frac{b}{1-v} < 1.$$

Здесь использованы числа (см. (2), (3), (8)):

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{1-v},\ l_n = q^n,\ l = \frac{1}{1-q}, \\ h = a \cdot \sup_s |(x_0 - f[x_0])(s)|. \end{gathered} \tag{18}$$

Введем узлы разбиения отрезка $[0,1]$ и интервалы, соответствующие номеру *n*:

$$t_0 = 0,\quad t_k = 2^{-n}k, \quad \Delta_k = (t_{k-1}, t_k)$$
$$(1 \leq k \leq 2^n).$$

Подпространство X_n составим из ступенчатых функций вида

$$x_n(t) = \xi_k \quad (t \in \Delta_k),\ \forall k.$$

Следовательно, $X_n \subset X_{n+1}$ – линейные замкнутые подпространства в B-пространстве X.

Введем операторы (4) через значения непрерывных функций x в центрах интервалов:

$$\tau_k = (t_{k-1} + t_k)/2,$$

$$(P_n x)(t) = x(\tau_k) \quad (t \in \Delta_k),\ \forall k.$$

Непрерывная функциях x, определенная на отрезке, равномерно непрерывна, поэтому последовательность ступенчатых функций $(P_n x)(t) \to x(t)$ п. в. равномерно, то есть по норме B-пространства X.

Аналогично обозначены для переменных s узлы разбиения и центры интервалов: координаты s_i, σ_i вместо t_k, τ_k. Выделим в квадрате Q квадраты

$$\Delta_{ik} = \{(s,t) : s \in \Delta_i, t \in \Delta_k\},\ \forall i,k,$$

и через значения непрерывной функции V в центрах квадратов определим ступенчатое ядро и оператор:

$$V_n(s,t) = V(\sigma_i, \tau_k) \quad ((s,t) \in \Delta_{ik}), \ \forall i,k,$$

$$(\Gamma_n x)(s) = \int_0^1 V_n(s,t)x(t)dt.$$

Очевидно, $|V_n(s,t)| \le v, \ |\Gamma_n x| \le A|x|$ (см. (16), (17)). Поэтому $\|(I_n - \Gamma_n)^{-1}\| \le \|(I - A)^{-1}\|, \ \forall n$, выполнено условие (5).

Непрерывная функция V, определенная на замкнутом квадрате, равномерно непрерывна, поэтому последовательность ступенчатых функций $V_n(s,t) \to V(s,t)$ п. в. равномерно. Следовательно, $\|\Gamma_n - \Gamma\| = \sup_s \int_0^1 |V_n - V|(s,t)dsdt \to 0$, условие (6) выполнено.

Подбирается последовательность номеров (7). Номеру $m = m(n)$ соответствуют совокупности узлов $t_{m0} = 0, \ \ t_{mk} = 2^{-m}k$, интервалов Δ_{mk}, квадратов Δ_{mik} и их центров $(\sigma_{mi}, \tau_{mk}), \ \forall k$.

Выберем первоначальное приближение – ступенчатую функцию $x_0 \in E$:

$$x_0(t) = \xi_{mk} \quad (t \in \Delta_{mk}, \ m = m(0)), \ \forall k.$$

Радиус (10) вычисляется по формулам (9), (18). Шар (11) принимает вид

$S = \{x : |x(t) - x_0(t)| \le r$, п. в. t }. Обозначим множество

$$Y_0 = \{y : y(0) = \alpha, \ y(1) = \beta, \ -y'' \in S\}. \quad (19)$$

Требование $S \subset E$ означает условие: множество $Y_0 \subset Y$ (см. (15)).

При $m = m(n)$ в процессе (12) на интервалах Δ_{mk} приближение $x_n(t) = \xi_{mk}$ и минус-поправка

$$\Delta x_n(t) = \delta_{mk}, \quad (20)$$

правые части уравнений (12) – ступенчатые функции со значениями на интервалах Δ_{mi}:

$$\eta_{mi} = \xi_{mi} - (f[x_n])(\sigma_{mi}).$$

Уравнения (12) являются линейной алгебраической системой уравнений

$$\delta_{mi} - 2^{-m} \sum_{k=1}^{2^m} v_{mik}\delta_{mk} = \eta_{mi} \quad (1 \le i \le 2^m), \quad (21)$$

где $m = m(n)$, коэффициенты v_{mik} – значения функции V в центрах квадратов Δ_{mik}.

Приближения y_n, y'_n выражаются через функции x_n по формулам (14).

Решение $x^* = f[x^*] \in C, \ -x^* = (y^*)''$, где y^* – решение задачи (13). Итак, $y^* \in C^2$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. На множестве (19) существует и единственно решение $y^* \in C^2$ задачи (13). Возможен такой выбор номеров (7), что вычисление минус-поправок (20) по формулам (21) приводит к процессу, сходящемуся на множестве (19) к решению вместе с производными: $-x_n \to (y^*)''$ п. в. равномерно, $y'_n(s) \to (y^*)'(s)$, $y_n(s) \to y^*(s)$ равномерно. Оценки погрешности приближений при $n \ge 1$ (см. (9), (18)):

$$|x_n + (y^*)''|(s) \le d_n = hll_n + \varphi_n \to 0 \quad (\text{п. в. } s),$$

$$|y'_n - (y^*)'|(s) \le d_n(s^2 - s + 1/2),$$

$$|y_n - y^*|(s) \le d_n(s - s^2)/2, \ \ \forall s.$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», соглашение № 14.B37.21.0393.

Список литературы

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. 407 с.
2. Кротов Н.В. Композиция методов линеариазации и аппроксимации операторных, интегральных и дифференциальных уравнений. Дисс. к.ф.-м.н. Н. Новгород, 2006. 113 с.
3. Слугин С.Н., Кротов Н.В. Модификация метода касательных в серии подпространств // Вестник ННГУ. Математика. 2004. Вып. 1(2). С. 171–177.
4. Слугин С.Н., Кротов Н.В. Прямой метод приближенного решения нелинейного уравнения в серии подпространств // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2005. № 9. С. 89–98.

AVERAGE LINEARIZATION AND APPROXIMATION OF EQUATIONS IN THE SUBSPACES

N.V. Krotov

The average linearization of an equation and the approximation of linear equations for minus-corrections in the subspaces are carried out for the approximate solution of a nonlinear operator equation. The result has been specified in the case of a two point problem for a second order differential equation.

Keywords: averaging, linearization, subspaces.