УДК 519.6

ПОРЯДКОВАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Л. Калашников

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

allk123@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.04.2013

Рассматривается задача оптимального управления в КВ-линеале с единицей. На основе метода Тихонова строится регуляризирующая последовательность. Приводятся условия её порядковой сходимости к оптимальному множеству управлений в КВ-линеале ограниченных элементов.

Ключевые слова: оптимальное управление, КВ-линеал, регуляризация, порядковая сходимость.

Введение

В работе рассматривается задача минимизации функционала при операторном и функциональных ограничениях на состояние x и управление u. Пространство управлений U здесь – КВ-линеал с единицей e. Отметим, что к такой постановке приводят многие задачи оптимального управления, в которых банахово пространство управлений является и полуупорядоченным пространством, например, задача оптимального управления для динамической системы с интегральными ограничениями и интегральным целевым функционалом, в которой $U = L_2^n[t_0, t_1]$, а за e берётся вектор-функция $e(t) = (1,1,\ldots,1)^T$. Как известно [1], в КВ-линеале с единицей можно ввести КВ-линеал e-ограниченных элементов U_e. При этом из сходимости в U_e следует сходимость в U к тому же пределу, что означает более сильную метрику в U_e, чем в U. Если для оптимального множества U^0 управлений исходной задачи будет $U_e \bigcap U^0 \neq \varnothing$, то целесообразно строить минимизирующие последовательности, сходящиеся ко множеству U^0 в метрике U_e. В этом случае возможно сужение пространства управлений, например, до U_e. Так, при $U = L_2^n[t_0, t_1]$ подлинеал $U_e = L_\infty^n[t_0, t_1]$, и сходимость в U_e будет почти всюду равномерная. Но при замене пространства U на U_e возникает вопрос о корректности исходной задачи оптимизации в U_e. Это связано с тем, что хотя в U корректность может быть, но в более «узком» пространстве U_e она отсутствует [2]. Тем более подобное относится к случаю, когда в U задача оптимизации некорректна. Для некорректных задач оптимизации разработаны методы регуляризации [2]. В настоящей работе на основе метода А.Н. Тихонова приведены условия порядковой сходимости в U_e регуляризирующей последовательности, а также e-ограниченности оптимальных управлений. Отметим, что такая усиленная (в порядковом смысле) регуляризация получена без стабилизатора.

Порядковая ограниченность оптимального множества

Рассматривается 0-задача: $g_0(x,u) \to \inf$,

$$F(x,u) = 0,\ g_j(x,u) \le 0,\ x \in X,\ u \in U,\ j = \overline{1,n}.$$

Здесь операция $F : X \times U \to Z$, где X, Z – банаховы пространства, а U является КВ-линеалом с единицей e. Функционалы g_0, g_j и операция F класса C^1 определены на $X \times U$. В дальнейшем будем называть U пространством управлений, а X – пространством состояний. Пусть для всех $u \in U$ уравнение $F(x,u) = 0$ имеет единственное решение $x = x(u)$ класса C^1. Такое, в частности, будет при выполнении условий теоремы о существовании неявной функции в банаховом пространстве. Тогда 0-задача сводится к задаче минимизации функционала $g_0(x(u),u)$ с ограничениями $g_j(x(u),u) \le 0$, $j = \overline{1,n}$, $u \in U$. Очевидно, все функционалы $g_j(x(u),u)$ для $j = \overline{0,n}$ непрерывны и принадлежат классу C^1 на U. Предположим также, что $D \neq \varnothing$, где D – допустимое множество управлений в 0-задаче, и существует некоторое множество $S \subset U$, для которого $D \subset S$. Например, такое S может быть получено на основе одного из неравенств $g_j(x(u),u) \le 0$. Обозначим U^0 множество оптимальных управлений в 0-задаче, и пусть $U^0 \ne \varnothing$. Достаточные условия этого имеются, например, в [2]. Очевидно, для оптимального управления $u_0 \in U^0$ оптимальное состояние $x_0 = x(u_0)$.

Исходная 0-задача может быть некорректна в пространстве U или в более «узком» подпространстве U_e при наличии дополнительной информации об оптимальном управлении, в частности, его ограниченности. Поэтому здесь применимы методы регуляризации, например, метод А.Н. Тихонова [2] с его функцией $T_k(x(u),u) = g_0(x(u),u) + \alpha_k \omega(u)$ при $u \in U$ и $k \ge 1$, где функционал $\omega(u) \ge 0$ и принадлежит классу C^1 на U, а числовая последовательность $\alpha_k \to +0$. Введём k-задачи: $T_k(x(u),u) \to \inf$,

$$g_j(x(u),u) \le 0,\ j = \overline{1,n},\ u \in U.$$

Пусть, теперь, $g_j(x,u) = a_j(u) + b_j(x,u)$ для $j = \overline{0,n}$, где $a_j(u)$, $b_j(x,u)$ – некоторые функционалы класса C^1 на $X \times U$. Предположим также, что сопряженное пространство U^* является КВ-линеалом с единицей a. Введём U_a^* – КВ-линеал a-ограниченных элементов в U^*. Обозначим $\|\cdot\|_e$ норму в U_e, а $\|\cdot\|_a$ – норму в U_a^*. Их определение имеется в [1], и по [1] из сходимости последовательности в U_e следует её сходимость в U к тому же пределу. Аналогичное же относится и к U_a^*. Поэтому функционалы $g_j(x(u),u)$, $\omega(u)$, при $j = \overline{0,n}$ непрерывные в U, будут непрерывны и в U_e. Обозначим $|u|$ модуль элемента $u \in U$, а числом d_0 – inf в 0-задаче и $\{v_{k_m}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{v_k\}$. Введем для $u \in U_e$ и множества $Q \subset U_e$ расстояние $\rho_e(u,Q) = \inf_{v \in Q} \| u - v \|_e$.

Лемма. Пусть последовательность $\{s_k\} \subset U_e$ и компактна в U_e, а любая её предельная точка $v \in Q \subset U_e$. Тогда $\lim_k \rho_e(s_k,Q) = 0.$

Доказательство. Так как $\rho_e(s_k,Q) \ge 0$, то $0 \le \le \underline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q)$ По определению верхнего предела существует $\{s_{k_m}\}$, для которой $\overline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) = \lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m},Q)$. В силу компактности $\{s_k\}$ считаем для удобства обозначения $\{s_{k_m}\}$ сходящейся к некоторой предельной точке $v = \lim_{k_m} s_{k_m}$ в U_e. На основе условия леммы $v \in Q$. Нетрудно установить неравенство: $\rho_e(s_{k_m},Q) = \inf_{u \in Q} \| s_{k_m} - u \|_e \le \| s_{k_m} - v \|_e$. Но $\lim_{k_m} \| s_{k_m} - v \|_e = 0$. Тогда $\lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m},Q) = 0$, и поэтому $\overline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) = \lim_{k_m} \rho_e(s_{k_m},Q) = 0$. Поскольку $0 \le \underline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) \le \le \overline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) = 0$, то получаем $\underline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) = \overline{\lim}_k \rho_e(s_k,Q) = 0$. Отсюда $\lim_k \rho_e(s_k,Q) = 0.$ Лемма доказана.

Обозначим U_e^0 множество e-ограниченных оптимальных управлений u_0 в 0-задаче.

Теорема 1. Пусть 1) существуют числа $\mu, \gamma > 0$, для которых при $j = \overline{0,n}$ и всех $u \in S$ модули $|a'_{j,u}(0)| \le \mu a$ и $|b'_{j,u}(x(u),u)| \le \gamma a$; 2) существует линейный оператор $B > 0 : U^* \to U$ с $0 < Ba < \beta e$ для некоторого числа $\beta > 0$ и такой, что при всех $u, v \in S$ для чисел $\lambda_j \ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$ будет $|u - v| \le B |\varphi'_u(u,\bar\lambda) - \varphi'_u(v,\bar\lambda)|$, где $\varphi(u,\bar\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j(u)$ и вектор $\bar\lambda \in R^{n+1}$.

Тогда $U_e^0 \ne \varnothing$ и $|u_0| \le (\gamma + \mu)\beta e$, а любое $u_0 \in U_e^0$.

Доказательство. Введём функцию Лагранжа $L(x(u),u,\bar\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j (a_j(u) + b_j(x(u),u))$. Тогда по [3] для любого $u_0 \in U^0$ существуют множители $\lambda_j^0 \ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^0 = 1$, для которых $L'_u(x(u_0),u_0,\bar\lambda^0) = 0$. Отсюда $\varphi'_u(u_0,\bar\lambda^0) = -\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0),u_0)$. Поскольку $u_0 \in S$, то по условию 1) $b'_{j,u}(x(u_0),u_0) \in U_a^*$. Поэтому $\left(-\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^0 b'_{j,u}(x(u_0),u_0) \right) \in U_a^*$.

Тогда и $\varphi'_u(u_0,\overline{\lambda}^0) \in U_a^*$. На основе условия 1) получаем неравенства

$$|\varphi'_u(0,\overline{\lambda^0})| \le \sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0 \times |a'_{j,u}(0)| \le \left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0\mu\right)a = \mu a$$

и

$$|\varphi'_u(u_0,\overline{\lambda}^0)| \le \sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0 \, |b'_{j,u}(x(u_0),u_0)| \le$$
$$\le \left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0\gamma\right)a = \gamma a.$$

Используя же условие 2) доказываемой теоремы, выводим неравенства

$$|u_0| \le B\,|\varphi'_u(u_0,\overline{\lambda^0}) - \varphi'_u(0,\overline{\lambda^0})| \le$$
$$\le B(|\varphi'_u(u_0,\overline{\lambda^0})| + |\varphi'_u(0,\overline{\lambda^0})|) \le \left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0(\gamma+\mu)\right)Ba.$$

Но так как $0 < Ba < \beta e$ и $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^0 = 1$, то $|u_0| \le$ $\le (\gamma+\mu)\beta e$. Отсюда u_0 будет e-ограниченным. Таким образом, множество $U_e^0 \ne \varnothing$, и любое оптимальное $u_0 \in U_e^0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В теореме 1 приводятся условия, когда $U^0 \subset U_e$ и содержится в некотором порядковом отрезке, или e-ограниченность оптимальных управлений 0-задачи, а также условия локализации области поиска U^0. Отсюда возможно построение минимизирующих последовательностей в более сильной метрике пространства U_e.

Обозначим $a_{0,k}(u) = a_0(u) + \alpha_k\omega(u)$. Тогда $T_k(x(u),u) = a_{0,k}(u) + b_0(x(u),u)$. Введём при $k \ge 1$ функции Лагранжа

$$L_k(x,u,\overline{\lambda}) = \lambda_0 \times T_k(x,u) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j(x,u)$$

с $\overline{\lambda} = (\lambda_j)|_{j=0}^n$ и

$$\theta_k(u,\overline{\lambda}) = \lambda_0 a_{0,k}(u) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j(u),$$

$$p(x,u,\overline{\lambda}) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j b_j(x,u).$$

Очевидно,

$$L_k(x,u,\overline{\lambda}) = \theta_k(u,\overline{\lambda}) + p(x,u,\overline{\lambda}). \qquad (1)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и 1) в любой k-задаче существует оптимальное управление u_k^0; 2) существует число $\eta > 0$, для которого при $j = \overline{0,n}$ и всех $u \in S$ модули $|a'_{0,k,u}(0)|, |a'_{j,u}(0)| \le \eta a$; 3) существует линейный оператор $C > 0 : U^* \to U$ с $0 < Ca \le$ $\le \xi e$ для некоторого числа $\xi > 0$, такой, что при всех $u, v \in S$ и $\overline{\lambda} \in R^{n+1}$ с $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j = 1$ и $\lambda_j \ge 0$ имеем неравенство

$$|u - v| \le C\,|\theta'_{k,u}(u,\overline{\lambda}) - \ - \theta'_{k,u}(v,\overline{\lambda})|.$$

Тогда I) $u_k^0 \in U_e$, и модуль $|u_k^0| \le (\gamma+\eta)\xi e$; II) $\lim_k g_0(x(u_k^0),u_k^0) = d_0$, и $\{u_k^0\}$ — минимизирующая в 0-задаче; III) для всех $k \ge 1$ значение $\omega(u_k^0) \le \inf_{u_0 \in U_0}\omega(u_0)$.

Доказательство. Поскольку условия теоремы 2 аналогичны условиям теоремы 1, то доказательство I) проводится также аналогично. Докажем II). Имеем неравенства:

$$d_0 \le g_0(x(u_k^0),u_k^0) \le g_0(x(u_k^0),u_k^0) + \alpha_k\omega(u_k^0) =$$
$$= T_k(x(u_k^0),u_k^0) \le T_k(x(u_0),u_0) = \qquad (2)$$
$$= g_0(x(u_0),u_0) + \alpha_k\omega(u_0) = d_0 + \alpha_k\omega(u_0).$$

Из (2) $d_0 \le g_0(x(u_k^0),u_k^0) \le d_0 + \alpha_k\omega(u_0)$. Тогда $\lim_k g_0(x(u_k^0),u_k^0) = d_0$ при $\alpha_k \to +0$, и $\{u_k^0\}$ будет минимизирующей в 0-задаче. Из (2) получаем $g_0(x(u_k^0),u_k^0) + \alpha_k\omega(u_k^0) \le d_0 + \alpha_k\omega(u_0)$. Но $d_0 \le$ $\le g_0(x(u_k^0),u_k^0)$. Тогда $\alpha_k\omega(u_k^0) \le \alpha_k\omega(u_0)$ и $\omega(u_k^0) \le \omega(u_0)$. Отсюда $\omega(u_k^0) \le \inf_{u_0 \in U_0}\omega(u_0)$. Тем самым установлена справедливость III), и теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, и для всякой $\{v_k\} \subset S$ и $j = \overline{0,n}$ последовательность $\{b'_{j,u}(x(v_k),v_k)\}$ компактна в U_a^*.

Тогда $\{u_k^0\}$ компактна в U_e, а любая её предельная точка $v \in U_e^0$.

Доказательство. Поскольку $\{u_k^0\} \subset S$, то на основе условия теоремы 3 получаем компактность $\{b'_{j,u}(x(u_k^0),u_k^0)\}$ в U_a^*. Согласно [3] существуют $0 \le \overline{\lambda}_k^0$ с $\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j,k}^0 = 1$, для которых $L'_{k,u}(x(u_k^0),u_k^0,\overline{\lambda}_k^0) = 0$. Отсюда $\theta'_{k,u}(u_k^0,\overline{\lambda}_k^0) =$ $= -p'_u(x(u_k^0),u_k^0,\overline{\lambda}_k^0)$. Так как $0 \le \lambda_{j,k}^0 \le 1$, то нетрудно установить компактность $\{-p'_u(x(u_k^0),$ $u_k^0,\overline{\lambda}_k^0)\}$ в U_a^*, а с ней и компактность $\{\theta'_{k,u}(u_k^0,\overline{\lambda}_k^0)\}$ в U_a^*. Обозначим $w_k = \theta'_{k,u}(u_k^0,\overline{\lambda}_k^0)$. Тогда $\{w_k\} \subset U_a^*$ и компактна в U_a^*. На основе неравенства условия 3) теоремы 2 получаем $|u_k^0 - u_m^0| \le C\,|w_k - w_m|$. Для компактности $\{u_k^0\}$

в U_e достаточно показать, что у всякой ее $\{u^0_{k_j}\}$ существует сходящаяся в U_e подпоследовательность. По компактности $\{w_k\}$ для $\{w_{k_j}\}$ существует $\{w_{k_{jm}}\}$, сходящаяся в U^*_a, которая, очевидно, будет фундаментальной в U^*_a. Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $k_{j_{m1}}, k_{j_{m2}} \geq N$ получаем $| w_{k_{j_{m1}}} - w_{k_{j_{m2}}} | < \varepsilon a$. Следовательно, $| u^0_{k_{j_{m1}}} - u^0_{k_{j_{m2}}} | \leq$ $\leq C | w_{k_{j_{m1}}} - w_{k_{j_{m2}}} | < \varepsilon Ca < \varepsilon \xi e$, так как $0 <$ $< Ca \leq \xi e$ для некоторого числа $\xi > 0$, что доказывает фундаментальность $\{u^0_{k_{j_m}}\}$ в U_e и, тем самым, ее сходимость в U_e. Таким образом, $\{u^0_k\}$ компактна в U_e, а все её предельные точки принадлежат U_e. Пусть v – любая предельная точка для $\{u^0_k\}$. Тогда существует $\{u^0_{k_m}\}$ с $\lim\limits_{k_m} u^0_{k_m} = v$ в U_e. По непрерывности функционалов $a_j(u)$, $b_j(x(u),u)$ в U_e при $j = \overline{0,n}$ получаем при $k_m \to \infty$ сходимости

$$a_j(u^0_{k_m}) \to a_j(v),$$

$$b_j(x(u^0_{k_m}), u^0_{k_m}) \to b_j(x(v),v).$$

Так как $g_j(x,u) = a_j(u) + b_j(x,u)$, то $g_j(x(u^0_{k_m}),$ $u^0_{k_m}) \to g_j(x(v),v)$. Но поскольку верны неравенства $g_j(x(u^0_{k_m}), u^0_{k_m}) \leq 0$ при $j = \overline{1,n}$, то в пределе $g_j(x(v),v) \leq 0$. Следовательно, любая предельная точка v – допустимое управление в 0-задаче.

По теореме 2 $\{u^0_k\}$ – минимизирующая в 0-задаче. Тогда $\{u^0_{k_m}\}$ – тоже минимизирующая. Из непрерывности функционала $g_0(x(u),u)$ и $\lim\limits_{k_m} u^0_{k_m} =$ $= v$ в KB-линеале U_e получаем $\lim\limits_{k_m} g_0(x(u^0_{k_m}),$ $u^0_{k_m}) = d_0$. Но $\lim\limits_{k_m} g_0(x(u^0_{k_m}), u^0_{k_m}) = g_0(x(v),v)$. Отсюда $g_0(x(v),v) = d_0$. Так как предельная точка v является e-ограниченным допустимым управлением в 0-задаче, то v будет оптимально в ней. Следовательно, $v \in U^0_e$. Теорема 3 доказана.

Порядковая сходимость регуляризирующей последовательности

Теорема 4. Пусть 1) выполнены условия теоремы 3; 2) для всех $k \geq 1$ существует $v_k \in D$ при $(v_k - u^0_k) \in U_e$ и $\left\| v_k - u^0_k \right\|_e \leq \delta_k$, где $\delta_k \to +0$. Тогда A) последовательность $\{v_k\} \subset U_e$, компактна в U_e, а любая её предельная точка $v \in U^0_e$; B) $\lim\limits_k \rho_e(u^0_k, U^0_e) = \lim\limits_k \rho_e(v_k, U^0_e) = 0$; C) $\lim\limits_k g_0(x(v_k), v_k) = d_0$.

Доказательство. По теоремам 2, 3 $u^0_k \in U_e$ и $\{u^0_k\}$ компактна в U_e, а любая её предельная точка $u \in U^0_e \neq \varnothing$. Из условия 2) теоремы 4 $(v_k - u^0_k) \in U_e$ и $\left\| v_k - u^0_k \right\|_e \leq \delta_k$ с $\delta_k \to +0$. Тогда $\{v_k\} \subset U_e$ и $\lim\limits_k \| v_k - u^0_k \|_e = 0$. Отсюда $\{v_k\}$ компактна в U_e, а все ее предельные точки v совпадают с предельными для $\{u^0_k\}$. Тогда $v \in U^0_e$, и тем самым A) доказано.

Используя A) и применяя лемму для случаев $s_k = u^0_k$ и $s_k = v_k$ для множества $Q = U^0_e$, получаем $\lim\limits_k \rho_e(u^0_k, U^0_e) = \lim\limits_k \rho_e(v_k, U^0_e) = 0$, что и доказывает B).

По доказанному в A) последовательность $\{v_k\} \subset U_e$ и компактна в U_e, а любая её предельная точка $v \in U^0_e$. Тогда для v существует $\{v_{k_j}\}$ с $\lim\limits_{k_j} v_{k_j} = v$ в U_e, а по [1] $\lim\limits_{k_j} v_{k_j} = v$ и в U. Из непрерывности функционала $g_0(x(u),u)$ получаем $g_0(x(v),v) = \lim\limits_{k_j} g_0(x(v_{k_j}), v_{k_j})$. Но так как по A) $v \in U^0_e$, то $g_0(x(v),v) = d_0$. Отсюда имеем компактность последовательности $\{g_0(x(v_k), v_k)\}$ и, как нетрудно установить, число d_0 есть ее единственный частичный предел. Следовательно, $\lim\limits_k g_0(x(v_k), v_k) = d_0$. Таким образом, верно C), и теорема 4 доказана.

Замечание 2. Приближение v_k можно получить каким-либо методом минимизации. Из теоремы 4 получаем усиленную регулярность в U_e минимизирующей $\{u^0_k\}$. Тогда с учетом терминологии [2] такую регулярность в U_e можно назвать e-регулярностью.

Рассмотрим минимизацию функционала $\omega(u)$ на U_0. Введём число $\omega_n = \inf\limits_{u \in U_0} \omega(u)$. Поскольку $\omega(u) \geq 0$, то существует $\omega_n \geq 0$. Определим ω-нормальное решение $u^0_n \in U_0$ как $\omega(u^0_n) = \omega_n$. Если же $u^0_n \in U^0_e$, то u^0_n назовем ω_e-нормальным решением, а $U^0_{e,n}$ – множеством ω_e-нормальных решений.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда $U^0_{e,n} \neq \varnothing$, и любая предельная в U_e точка последовательностей $\{u^0_k\}$, $\{v_k\}$ принадлежит $U^0_{e,n}$, и

$$\lim_k \rho_e(u^0_k, U^0_{e,n}) = \lim_k \rho_e(v_k, U^0_{e,n}) = 0.$$

Доказательство. Согласно теоремам 3, 4 $\{u^0_k\}$, $\{v_k\}$ компактны в U_e, а любая их предельная точка принадлежит U^0_e. Пусть u_p – любая предельная точка для $\{u^0_k\}$. Тогда существует $\{u^0_{k_m}\}$, такая, что $\lim_{k_m} u^0_{k_m} = u_p$ в U_e. Поскольку по [1] из сходимости в U_e следует сходимость в U, то существует $\lim_{k_m} u^0_{k_m} = u_p$ в U. Из непрерывности функционала $\omega(u)$ в U получаем $\lim_{k_m} \omega(u^0_{k_m}) = = \omega(u_p)$. На основе заключения III) теоремы 2 $\omega(u^0_{k_m}) \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0)$. Тогда в пределе $\omega(u_p) \leq \leq \inf_{u_0 \in U_0} \omega(u_0) = \omega_n$. На основе теоремы 3 $u_p \in U^0_e$. Отсюда $\omega(u_p) = \omega_n$. Следовательно, любая для $\{u^0_k\}$ предельная точка u_p будет e-ограниченным ω-нормальным решением. Поэтому $U^0_{e,n} \neq \varnothing$, а $u_p \in U^0_{e,n}$. По условию теоремы 4 $\left\| u^0_k - v_k \right\|_e \leq \delta_k$, где $\delta_k \to +0$. Тогда $\lim_k \| u^0_k - -v_k \|_e = 0$. По заключению A) теоремы 4 $\{v_k\} \subset U_e$ и компактна в U_e. Тогда нетрудно показать, что $\{v_k\}$ имеет такие же предельные точки, как и $\{u^0_k\}$. Отсюда все предельные точки для $\{v_k\}$ принадлежат $U^0_{e,n}$. Применяя лемму для случаев $s_k = u^0_k$, $s_k = v_k$ и множества $Q = U^0_{e,n}$, получаем $\lim_k \rho_e(u^0_k, U^0_{e,n}) = 0$, $\lim_k \rho_e(u^0_k, U^0_{e,n}) = 0$. Теорема 5 доказана.

Вышеизложенная теория порядковой регуляризации применима к 0-задаче оптимального управления:

$$g_0(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} (a_0(u,t) + b_0(x,t))\, dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = A(x,t) + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{3}$$

$$g_j(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} (a_j(u,t) + b_j(x,t))dt \leq 0, \quad j = \overline{1,N},$$

где состояние $x \in X = C([t_0,t_1], R^m)$, управление $u \in U = L^n_2[t_0,t_1]$, а все функции, входящие в задачу (3), достаточно гладкие. Здесь вектор-функция $e(t) = (1,1,\ldots,1)^T$ является единицей e в KB-линеале $L^n_2[t_0,t_1]$. Функционал $\omega(u)$ можно взять, например, как $\omega(u) = \|u\|^2$ в $L^n_2[t_0,t_1]$. В работе [4] приведены условия на функции задачи (3), при которых применимы теоремы 1–5. В частности, это сведение дифференциальной задачи к интегральной форме, ограниченность по норме в $L^n_2[t_0,t_1]$ допустимого множества управлений и непрерывная дифференцируемость функционалов $\int_{t_0}^{t_1} a_j(u,t)dt$ и $\int_{t_0}^{t_1} b_j(x,t))dt$ при $j = \overline{0,N}$. Для $U = L^n_2[t_0,t_1]$ пространство $U_e = L^n_\infty[t_0,t_1]$. Поэтому сходимость регуляризирующей последовательности будет в $L^n_\infty[t_0,t_1]$, то есть в более сильной метрике по сравнению с $L^n_2[t_0,t_1]$.

Список литературы

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

2. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.

3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

4. Калашников А.Л. Аппроксимация и ограниченность оптимального множества управлений для динамической системы // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1(26). С. 138–141.

ORDINAL REGULARIZATION IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A.L. Kalashnikov

An optimal control problem in a KB-lineal with unit e is considered. Based on the Tikhonov method, a regularizing sequence is built. The conditions of its order convergence to the set of optimal controls are given in the KB-lineal of e-limited elements.

Keywords: optimal control, KB-lineal, regularization, order convergence.