УДК 519.6

ОПТИМИЗАЦИЯ РИТМИЧНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА С ДВУМЯ ТИПАМИ СЫРЬЯ

А.А. Боровков, В.П. Савельев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vpsavelyev@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.11.2012

Решены две задачи, связанные с планированием ритмичной работы предприятия, перерабатывающего два типа сырья. При этом решение первой задачи (оптимизация общей ритмичности производства), формулируемой в виде задачи выпуклого программирования, существенно облегчает решение второй (оптимизация ритмичности переработки каждого типа сырья).

Ключевые слова: выпуклое программирование, условия оптимальности.

Введение

В работе решается задача планирования ритмичной переработки сырья двух типов. Решение задачи разбивается на два этапа. На первом этапе решается задача планирования суммарной ритмичной переработки сырья, которую при известных на период $I = \{1, 2, ..., n\}$ поставках сырья и ограниченном объеме складов (резервуаров) для хранения можно сформулировать [1] как задачу нахождения пары допустимых векторов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, принадлежащих соответственно множествам

$$D = \{X \in R^n : A_j \le \sum_{i=1}^{i=j} x_i \le B_j,\ A_j < B_j,$$
$$j = \overline{1, n-1};\ \sum_{i=1}^{n} x_i = B_n\},$$
$$G = \{Y \in R^n : C_j \le \sum_{i=1}^{i=j} y_i \le D_j,\ C_j < D_j,$$
$$j = \overline{1, n-1};\ \sum_{i=1}^{n} y_i = D_n\}$$

и доставляющих минимальное значение функции $F(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i + y_i)$. Функция $f(z)$ предполагается строго выпуклой и дважды дифференцируемой, то есть $f''(z) > 0$. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности суммарного плана. Показано, что процесс решения сводится к разбиению исходной задачи на подзадачи такого же типа, но меньшей размерности, причем решение каждой подзадачи обладает свойством $x_i + y_i = \text{const}$. Поскольку последнее условие оставляет свободу выбора для компонент x_i и y_i, то на втором этапе решается задача ритмичной переработки сырья каждого типа при условии $x_i + y_i = \text{const}$.

Решение задачи планирования суммарной ритмичной переработки сырья

Теорема 1. Для того чтобы пара допустимых векторов (X,Y) доставляла минимум функции $F(X,Y)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух соседних компонент этих векторов выполнялось одно из следующих трех условий:

A) $x_j + y_j = x_{j+1} + y_{j+1}$;

B) $x_j + y_j < x_{j+1} + y_{j+1}$, при этом $\sum_{i=1}^{i=j} x_i = B_j$, $\sum_{i=1}^{i=j} y_i = D_j$;

C) $x_j + y_j > x_{j+1} + y_{j+1}$, при этом $\sum_{i=1}^{i=j} x_i = A_j$, $\sum_{i=1}^{i=j} y_i = C_j$.

Доказательство необходимости условий A), B), C) проведем методом от противного. Пусть пара допустимых векторов (X,Y) доставляет минимум функции $F(X,Y)$, но нашлась пара соседних компонент, для которых не выполнено ни одно из этих условий. Это значит, что либо $x_j + y_j < x_{j+1} + y_{j+1}$, но при этом выполнено по крайней мере одно из неравенств $\sum_{i=1}^{i=j} x_i < B_j$, $\sum_{i=1}^{i=j} y_i < D_j$, либо $x_j + y_j > x_{j+1} + y_{j+1}$, но при этом выполнено по крайней мере одно из неравенств $\sum_{i=1}^{i=j} x_i > A_j$, $\sum_{i=1}^{i=j} y_i > C_j$. Рассмотрим первый случай (второй случай рассматривается аналогично) в предположении, что выполнено неравенство $\sum_{i=1}^{i=j} x_i < B_j$. Построим пару вспомогательных допустимых векторов (X^1,Y), $X^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_j+\delta, x_{j+1}-\delta, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где δ выбрано следующим образом: $0 < \delta < B_j - \sum_{i=1}^{i=j} x_i$. Подсчитаем и оценим разность $F(X^1,Y) - F(X,Y)$:

$$F(X^1,Y) - F(X,Y) = f(x_j+\delta+y_j) - f(x_j+y_j) +$$
$$+f(x_{j+1}-\delta+y_{j+1}) - f(x_{j+1}+y_{j+1}) = f'(\theta_1)\delta - f'(\theta_2)\delta =$$
$$= \delta(f'(\theta_1) - f'(\theta_2)),$$

где

$$\theta_1 \in (x_j+y_j,\ x_j+\delta+y_j),$$
$$\theta_2 \in (x_{j+1}-\delta+y_{j+1},\ x_{j+1}+y_{j+1}).$$

При достаточно малом положительном δ будем иметь $x_j+y_j+\delta < x_{j+1}+y_{j+1}-\delta$, то есть $\theta_1 < \theta_2$, $f'(\theta_1) < f'(\theta_2)$ и $F(X^1,Y) - F(X,Y) < 0$, что противоречит оптимальности пары (X,Y).

Доказательство достаточности условий A), B), C) проведем также методом от противного. Пусть для любых двух соседних компонент допустимых векторов (X,Y) выполняется одно из указанных трех условий A), B), C), но минимум функции $F(X,Y)$ доставляет другая пара допустимых векторов (U,V). Докажем, что для всех $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ будет выполняться соотношение $x_i + y_i = u_i + v_i$, то есть $F(X,Y) = F(U,V)$. Предположим, что $x_i + y_i = u_i + v_i$ для $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ $(k < n-1)$, но $x_{k+1} + y_{k+1} > u_{k+1} + v_{k+1}$ (случай $x_{k+1} + y_{k+1} < u_{k+1} + v_{k+1}$ рассматривается аналогично). Так как $\sum_{i=1}^{i=n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{i=n}(u_i + v_i) = B_n + D_n$, то найдется такой номер m $(m < n)$, что $x_i + y_i \geq u_i + v_i$ для $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{i=m}(x_i + y_i) > \sum_{i=1}^{i=m}(u_i + v_i), \qquad (1)$$

но $x_{m+1} + y_{m+1} < u_{m+1} + v_{m+1}$. Если при этом $u_{m+1} + v_{m+1} \leq u_m + v_m$, то получим неравенство $x_m + y_m > x_{m+1} + y_{m+1}$, а это означает в силу условия C), что $\sum_{i=1}^{i=m}(x_i + y_i) = A_m + C_m$, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{i=m}(u_i + v_i) < A_m + C_m$, что противоречит допустимости пары векторов (U,V). Если же выполнено противоположное неравенство $u_{m+1} + v_{m+1} > u_m + v_m$, то оно означает в силу условия B), что $\sum_{i=1}^{i=m}(u_i + v_i) = B_m + D_m$, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{i=m}(x_i + y_i) > B_m + D_m$, что противоречит допустимости пары векторов (X,Y). Итак, предположение, что начиная с некоторого номера мы имеем $x_i + y_i \neq u_i + v_i$, приводит к противоречию с допустимостью либо пары векторов (U,V), либо пары векторов (X,Y).

Следствие. Необходимые и достаточные условия теоремы 1 позволяют разбить исходную задачу на $p+1$ подзадачу такого же типа, определяемую наличием p $(0 \leq p \leq n-1)$ активных [2] ограничений вида $\sum_{i=1}^{i=j_k}(x_i + y_i) = M_{j_k}$, $0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_p < n$, где M_{j_k} равно $A_{j_k} + C_{j_k}$ или $B_{j_k} + D_{j_k}$. Оптимальный вектор $Z = X + Y$ имеет $p+1$ постоянное значение (режим работы) z_k:

$$z_k = \frac{M_{j_k} - M_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}},\ k = \overline{1, p+1}, \qquad (2)$$

где введены обозначения $j_0=0$, $M_0=0$, $j_{p+1}=n$, $M_n=B_n$.

Таким образом, в каждой из указанных выше подзадач для всех номеров $i \in \{j_k+1, j_k+2,\ldots,j_{k+1}\}$ имеем условие $x_i + y_i = z_k =$ const. При этом дополнительном условии можно поставить вторую задачу – задачу оптимизации ритмичности переработки каждого из двух видов сырья. Для простоты формулировки этой задачи будем считать, что в первой задаче число p активных ограничений равно нулю, то есть $x_i + y_i = z_1 = \frac{B_n + D_n}{n}$ для всех $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Тогда вторая задача будет состоять в нахождении такой пары векторов $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D$, $Y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in G$ (при дополнительном условии $x_i + y_i = \frac{B_n + D_n}{n}$ = const для всех $i \in \{1,2,\ldots,n\}$), которая доставляет минимальное значение функции $\Phi(X,Y) = \sum_{i=1}^{i=n}(f(x_i) + f(y_i))$.

Решение задачи ритмичной переработки каждого типа сырья

Теорема 2. Для того чтобы пара допустимых векторов (X,Y) доставляла минимум функции $\Phi(X,Y)$ в задаче 2, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух соседних компонент вектора X выполнялось одно из следующих трех условий:

a) $x_j = x_{j+1}$;

b) $x_j < x_{j+1}$; при этом выполнено хотя бы одно из следующих равенств:

$$\sum_{i=1}^{i=j}x_i = B_j,\quad \sum_{i=1}^{i=j}y_i = C_j,$$

c) $x_j > x_{j+1}$; при этом выполнено хотя бы одно из следующих равенств:

$$\sum_{i=1}^{i=j}x_i = A_j,\quad \sum_{i=1}^{i=j}y_i = D_j.$$

Доказательство необходимости условий a), b), c) проведем методом от противного. Пусть пара допустимых векторов (X,Y) доставляет минимум функции $\Phi(X,Y)$, но нашлась пара соседних компонент вектора X, для которых не выполнено ни одно из этих условий. Это значит, что либо $x_j < x_{j+1}$, но при этом выполняются неравенства $\sum_{i=1}^{i=j}x_i < B_j$, $\sum_{i=1}^{i=j}y_i > C_j$, либо $x_j > x_{j+1}$, но при этом выполняются неравенства $\sum_{i=1}^{i=j}x_i > A_j$, $\sum_{i=1}^{i=j}y_i < D_j$.

Рассмотрим первый вариант (второй рассматривается аналогично). Поскольку выполняется условие $x_i + y_i = \dfrac{B_n + D_n}{n}$ = const для всех $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, в этом случае имеем также неравенство $y_j > y_{j+1}$. Построим пару вспомогательных допустимых векторов (X^1,Y^1), $X^1 = (x_1, x_2,\ldots, x_j+\delta, x_{j+1}-\delta,\ldots, x_n)$, $Y^1 = (y_1, y_2\ldots, y_j - \delta, y_{j+1} + \delta,\ldots, y_n)$, где δ выбрано следующим образом: $0 < \delta < \min\{B_j - \sum_{i=1}^{i=j} x_i, \sum_{i=1}^{i=j} y_i - C_j\}$. Подсчитаем и оценим разность $F(X^1,Y^1) - F(X,Y)$:

$$F(X^1,Y^1) - F(X,Y) = f(x_j+\delta) - f(x_j) + f(x_{j+1} - \delta) - f(x_{j+1}) + f(y_j-\delta) - f(y_j) + f(y_{j+1}+ \delta) - f(y_{j+1}) = f'(\theta_1)\delta - f'(\theta_2)\delta - f'(\theta_3)\delta + f'(\theta_4)\delta = \delta(f'(\theta_1) - f'(\theta_2)) + \delta(f'(\theta_4) - f'(\theta_3)),$$

где

$$\theta_1 \in (x_j, x_j+\delta),\ \theta_2 \in (x_{j+1}- \delta, x_{j+1}),\ \theta_3 \in (y_j-\delta, y_j),\ \theta_4 \in (y_{j+1}, y_{j+1}+ \delta).$$

При достаточно малом положительном δ будем иметь $x_j + \delta < x_{j+1} - \delta$ и $y_j - \delta > y_{j+1} +\delta$, то есть $\theta_1 < \theta_2$, $\theta_4 < \theta_3$ и $F(X^1,Y^1) - F(X,Y) < 0$, что противоречит оптимальности пары (X,Y).

Доказательство достаточности условий a), b), c) проведем также методом от противного. Пусть для любых двух соседних компонент допустимых векторов (X,Y) выполняется одно из указанных трех условий a), b), c), но минимум функции $\Phi(X,Y)$ доставляет другая пара допустимых векторов (U,V). Докажем, что для всех $i \in \{1,2,\ldots n\}$ будет выполняться соотношение $x_i = u_i$, то есть $(X,Y) = (U,V)$. Предположим, что $x_i = u_i$ для $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ $(k < n - 1)$, но $x_{k+1} > u_{k+1}$ (случай $x_{k+1} < u_{k+1}$ рассматривается аналогично). Так как $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} u_i = B_n$, то найдется такой номер m $(m < n)$, что $x_i \geq u_i$ для $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_i > \sum_{i=1}^{i=m} u_i, \tag{3}$$

но $x_{m+1} < u_{m+1}$. Если при этом $u_{m+1} \leq u_m$, то получим неравенство $x_m > x_{m+1}$, а это означает в силу условия c), что $\sum_{i=1}^{i=m} x_i = A_m$, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{i=m} u_i < A_m$, что противоречит допустимости пары векторов (U,V). Если же выполнено противоположное неравенство $u_{m+1} > u_m$, то оно означает в силу условия b), что $\sum_{i=1}^{i=m} u_i = B_m$, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{i=m} x_i > B_m$, что противоречит допустимости пары векторов (X,Y). Итак, предположение, что начиная с некоторого номера мы имеем $x_i \neq u_i$, приводит к противоречию с допустимостью либо пары векторов (U,V), либо пары векторов (X,Y). Отметим, что в доказательстве необходимых и достаточных условий теоремы 2 практически указан алгоритм последовательных приближений нахождения оптимальных планов переработки каждого типа сырья.

Заключение

Задача ритмичной переработки сырья двух типов при неритмичных поставках и ограниченных объемах складов решена в два этапа. На первом решена задача суммарной ритмичной переработки сырья. Решение этой задачи позволило решить и вторую задачу – задачу оптимальной ритмичной переработки каждого из двух типов сырья.

Список литературы

1. Савельев В.П. Оптимизация производства в смысле ритмичности и минимального числа переключений режимов работы // Вестник ННГУ. 2007. № 4. С. 115–119.

2. Карманов В.П. Математическое программирование. М.: Наука, 1980. 256 с.

OPTIMIZATION OF SMOOTH PRODUCTION FLOW WITH TWO TYPES OF RAW MATERIALS

A.A. Borovkov, V.P. Savelyev

Two production planning problems (optimization of an overall smooth production flow and optimization of the smooth production flow of each raw material) have been solved for an enterprise processing two types of raw materials. The solution of the first problem as a problem of convex programming essentially facilitates the solution of the second one.

Keywords: convex programming, optimality conditions.