УДК 519.217

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ НАЛОЖЕНИЯ ОЧЕРЕДЕЙ

 Н.М. Голышева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

ptv@vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 26.05.2013

Рассмотрена система массового обслуживания (СМО) с тремя входными потоками. Первый и второй из них являются конфликтными. Первый и третий между собой, а также второй и третий между собой не имеют конфликта при обслуживании, поэтому имеется возможность суммирования (или наложения) очередей этих потоков в процессе функционирования СМО. Построена и исследована математическая модель системы, предложен алгоритм управления входными потоками, учитывающий их особенности.

Ключевые слова: система массового обслуживания, конфликтные потоки, алгоритмическое управление, марковская последовательность.

Описание системы на содержательном уровне

В данной работе рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида. Пусть в СМО поступают 3 потока Π_1, Π_2, Π_3 однородных требований. Предположим, что потоки являются независимыми и пуассоновскими с постоянными интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Потоки Π_1, Π_2 являются конфликтными. Это означает, что их невозможно объединить в процессе обслуживания (говорят, невозможно их суммирование или наложение очередей). Потоки Π_1, Π_3 и Π_2, Π_3 конфликтными не являются, поэтому требования потоков Π_1 и Π_3, а также Π_2 и Π_3 могут быть обслужены одновременно, в одни и те же интервалы времени.

Пусть в системе для всех трех потоков имеются бункеры-накопители бесконечного объема, следовательно, очереди по каждому потоку не ограничены.

Обслуживающее устройство (ОУ) имеет 3 различных режима работы.

В первом из них оно осуществляет обслуживание трех потоков Π_1, Π_2, Π_3 по циклическому алгоритму с жестким переключением. При этом время V нахождения ОУ в этом режиме последовательно разбивается на времена $\upsilon_0, \upsilon_2, \upsilon_0, \upsilon_3, \upsilon_0, \upsilon_1$. В течение времени υ_1 в системе обслуживаются с интенсивностью μ_1 требования первого потока и никакие другие; в течение времени υ_2 обслуживаются с интенсивностью μ_2 только требования второго потока; в течение времени υ_3 обслуживаются с интенсивностью μ_3 только требования третьего потока; наконец, в течение времени υ_0 потоки не обслуживаются (это время ориентации или переналадки системы).

Второй режим работы ОУ обеспечивает циклическое обслуживание двух потоков: Π_1 и суммы $\Pi_2+\Pi_3$. Время V пребывания ОУ в этом режиме разбивается на 4 части: $\upsilon_0, \upsilon_2+\upsilon_0+\upsilon_3, \upsilon_0, \upsilon_1$. В течение времени υ_1 с интенсивностью μ_1 обслуживаются требования только первого потока; в течение времени $\upsilon_2+\upsilon_0+\upsilon_3$ обслуживаются заявки объединенного потока $\Pi_2+\Pi_3$ с интенсивностью $\mu_2'+\mu_3'$ ($\mu_2'<\mu_2$, $\mu_3'<\mu_3$); в течение времени υ_0 потоки не обслуживаются.

При нахождении в третьем режиме ОУ осуществляет циклическое обслуживание двух потоков: Π_2 и суммы $\Pi_1+\Pi_3$. Время V пребывания ОУ в этом режиме разбивается на части: $\upsilon_0, \upsilon_2, \upsilon_0, \upsilon_3+\upsilon_0+\upsilon_1$. В течение времени υ_2 в системе с интенсивностью μ_2 обслуживаются только требования второго потока; в течение времени $\upsilon_3+\upsilon_0+\upsilon_1$ с интенсивностью $\mu_1'+\mu_3'$ ($\mu_1'<\mu_1$) обслуживаются требования объединенного потока $\Pi_1+\Pi_3$; время υ_0 – время ориентации системы.

Смена режимов работы ОУ в процессе функционирования СМО происходит в зависимости от соотношения длин очередей по потокам. Предположим, что загрузка по первому потоку, равная λ_1/μ_1, и загрузка по второму потоку, равная λ_2/μ_2, значительно больше загрузки λ_3/μ_3 по третьему потоку. В силу этого условия тенденция к накоплению очереди по Π_1 или Π_2 выше, чем по потоку Π_3. С учетом данного предположения смену режимов ОУ осуществим в зависимости от соотношения длин очередей только по потокам Π_1 и Π_2. Для этого зададим числа N_1, N_2, характеризующие некоторые «критические» размеры очередей по потокам Π_1, Π_2 соответственно, и примем следующие условия. Если в некоторый момент принятия решения о смене режима работы очередь по Π_1 не больше N_1 и очередь по Π_2 не больше N_2, то следующим режимом будет первый режим. Если очередь по Π_1 не больше N_1 и очередь по Π_2 больше N_2, то следующим режимом будет второй. Если очередь по Π_1 больше N_1 и очередь по Π_2 не больше N_2, то следующим режимом будет третий. В случае, когда очереди по обоим потокам превышают N_1 или N_2 соответственно, найдем разницу между длиной очереди и критическим уровнем для каждого потока. Если эта разница больше или равна для первого потока, то следующим режимом будет третий. В противном случае следующим будет второй режим.

При выборе параметров СМО будем руководствоваться естественными и общеизвестными условиями, а именно:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + \dfrac{\lambda_3}{\mu_3} < 1, \\ \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2 + \lambda_3}{\mu_2' + \mu_3'} < 1, \\ \dfrac{\lambda_1 + \lambda_3}{\mu_1' + \mu_3'} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \upsilon_1 > \lambda_1 V, \\ \mu_2 \upsilon_2 > \lambda_2 V, \\ \mu_3 \upsilon_3 > \lambda_3 V, \\ (\mu_2' + \mu_3')(\upsilon_2 + \upsilon_0 + \upsilon_3) > (\lambda_2 + \lambda_3) V, \\ (\mu_1' + \mu_3')(\upsilon_1 + \upsilon_0 + \upsilon_3) > (\lambda_1 + \lambda_3) V, \end{cases}$$

где V – период обслуживающего устройства. Как было сказано ранее, его величина равна $\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + 3\upsilon_0$.

Исследуемую в работе модель можно применить при управлении транспортными потоками в районе площади Лядова города Нижнего Новгорода. В данной реальной системе поток Π_1 – это поток машин, следующих с площади Лядова на проспект Гагарина; поток Π_2 – поток машин со стороны Молитовского моста на улицу Тимирязева; поток Π_3 – поток машин с Молитовского моста на проспект Гагарина. Обслуживающее устройство – светофор, υ_0 – длительность фазы желтого света, $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ – длительности фаз зеленого света по потокам Π_1, Π_2, Π_3 соответственно.

Построение математической модели

Все случайные объекты, применяемые далее при построении и анализе математической модели, будем конструктивно задавать на некотором полном вероятностном пространстве (Ω, F, P) элементарных исходов $\omega \in \Omega$ с вероятностной мерой $P(\cdot)$ на σ-алгебре F.

Представим рассмотренную систему в виде СМО с переменной структурой обслуживания [1, 2]. Для этого введем строго возрастающую последовательность $\tau = \{\tau_i;\, i \geq 0\}$ точек на оси времени. Положим $\tau_i = i$ для всех $i \geq 0$ и зададим таким образом неслучайную шкалу тактов времени функционирования системы, для которой величина единицы времени постоянна и равна 1.

Обозначим через $\eta_{j,i}$ количество поступающих заявок по потоку Π_j на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ для всех $j = \overline{1,3}$ и $i \geq 0$. Выполним описание пуассоновских входных потоков с помощью четырехмерной случайной последовательности $\{(\tau_i, \eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i});\, i \geq 0\}$ с выделенной дискретной компонентой $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i})$. При этом случайные величины $\eta_{j,i}$, $j = \overline{1,3}$, $i \geq 0$, окажутся независимыми в совокупности и будут иметь распределение вида

$$P(\eta_{j,i} = y) = e^{-\lambda_j} \frac{(\lambda_j)^y}{y!},$$

$y \in \{0, 1, 2, \ldots\} = N_0$ для всех $j = \overline{1,3}$ и всех $i \geq 0$.

Для описания структуры и функционирования обслуживающего устройства необходимо указать множество Γ его состояний и алгоритм α смены этих состояний с течением времени. Назовем первый режим работы ОУ его состоянием $\Gamma^{(1)}$, второй режим – состоянием $\Gamma^{(2)}$ и третий режим – состоянием $\Gamma^{(3)}$. Таким образом, Γ представляет собой множество $\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}\}$ из трех элементов.

Выберем теперь моменты наблюдения за состоянием ОУ и моменты наблюдения за очередями по потокам. Для этого из последовательности $\{\tau_i;\, i \ge 0\}$ выделим 3 подпоследовательности $\{\theta_{j,i} = \tau_{\zeta_{j,i}};\, i \ge 0\}$, $j = \overline{1,3}$. При этом последовательность $\{\theta_{1,i};\, i \ge 0\}$ будет определять моменты наблюдения за состоянием ОУ и одновременно за длиной очереди по первому потоку; последовательность $\{\theta_{2,i};\, i \ge 0\}$ – моменты наблюдения за длиной очереди по второму потоку; последовательность $\{\theta_{3,i};\, i \ge 0\}$ – моменты наблюдения за длиной очереди по третьему потоку. Положим

$$\upsilon_2(\Gamma_i) = \begin{cases} \upsilon_0 + \upsilon_2 \text{ при } \Gamma_i = \Gamma^{(1)} \text{ или } \Gamma_i = \Gamma^{(3)}, \\ 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + \upsilon_3 \text{ при } \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \end{cases}$$

$$\upsilon_3(\Gamma_i) = \begin{cases} 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + \upsilon_3 \text{ при } \Gamma_i = \Gamma^{(1)} \text{ или } \Gamma_i = \Gamma^{(2)}, \\ V \text{ при } \Gamma_i = \Gamma^{(3)} \end{cases}$$

и зададим номера $\zeta_{j,i}$ при $j = \overline{1,3}$ и всех $i \ge 0$ по правилу:

$$\zeta_{1,0} = 0,\ \zeta_{1,i+1} = \zeta_{1,i} + V,$$
$$\zeta_{2,0} = \zeta_{1,i} + \upsilon_2(\Gamma_i),$$
$$\zeta_{3,0} = \zeta_{1,i} + \upsilon_3(\Gamma_i).$$

Выбранные таким образом моменты являются моментами окончания обслуживания потоков, в которые, как правило, очереди в системе минимальны. Приняв обозначения: $\Gamma(t)$ – состояние ОУ в момент t, $\Gamma_i = \Gamma(\theta_{1,i}) = \Gamma(\theta_{1,i+1} - 0)$, $k_j(t)$ – длина очереди по потоку Π_j в момент t, $k_{j,i} = k_j(\theta_{j,i})$, $j = \overline{1,3}$, $i \ge 0$, можно получить соотношения, определяющие алгоритм α изменения состояний обслуживающего устройства в моменты $\theta_{1,i}$, $i \ge 0$:

$$\Gamma_{i+1} = U(k_{1,i}, k_{2,i}) =$$
$$= \begin{cases} \Gamma^{(1)} \text{ при } k_{1,i} \le N_1,\ k_{2,i} \le N_2; \\ \Gamma^{(2)} \text{ при } k_{1,i} \le N_1,\ k_{2,i} > N_2 \\ \quad \text{или при условии } k_{1,i} - N_1 < k_{2,i} - N_2; \\ \Gamma^{(3)} \text{ при } k_{1,i} > N_1,\ k_{2,i} \le N_2 \\ \quad \text{или при условии } k_{1,i} - N_1 \ge k_{2,i} - N_2. \end{cases}$$

Для описания потоков насыщения введем случайную величину $\xi_{j,i}$ ($j = \overline{1,3}$, $i \ge 0$) – максимально возможное число обслуженных заявок за интервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ по потоку Π_j. Положив $\Gamma_i' = \Gamma(\tau_i)$, рассмотрим последовательность $\{(\tau_i, \Gamma_i', \xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i});\, i \ge 0\}$ с выделенной дискретной компонентой $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i})$. Для этой последовательности примем ограничения

$$P(\xi_{j,i} = z_{j,i}, j = \overline{1,3},\ i = i_0, i_1, \ldots, i_m \mid \Gamma_k' = G_k,\ k = 0,1,\ldots) =$$
$$= \prod_{i = i_0, i_1, \ldots, i_m} \prod_{j=1}^{3} P(\xi_{j,i} = z_{j,i} \mid \Gamma_k' = G_k, k \ge 0);$$
$$P(\xi_{j,i} = z \mid \Gamma_k' = G_k, k \ge 0) = P(\xi_{j,i} = z \mid \Gamma_i' = G_i)$$

при всех возможных значениях величин, входящих в равенства.

Нетрудно показать, что для случайных величин $\xi_{j,i}$, $j = \overline{1,3}$, $i \ge 0$, будут справедливы следующие выражения для условных вероятностей:

$$P(\xi_{1,i} = z \mid \Gamma_i' = \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i \in I_1,\ z = \mu_1,\ r \in \{1,2\}; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} I_1,\ z = 0,\ r \in \{1,2\}; \\ 1 \text{ при } i \in I_2,\ z = \mu_1',\ r = 3; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} I_2,\ z = 0,\ r = 3; \end{cases}$$

$$P(\xi_{2,i} = z \mid \Gamma_i' = \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i \in J_1,\ z = \mu_2,\ r \in \{1,3\}; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} J_1,\ z = 0,\ r \in \{1,3\}; \\ 1 \text{ при } i \in J_2,\ z = \mu_2',\ r = 2; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} J_2,\ z = 0,\ r = 2; \end{cases}$$

$$P(\xi_{3,i} = z \mid \Gamma_i' = \Gamma^{(r)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i \in L_1,\ z = \mu_3,\ r = 1; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} L_1,\ z = 0,\ r = 1; \\ 1 \text{ при } i \in L_2,\ z = \mu_3',\ r = 2; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} L_2,\ z = 0,\ r = 2; \\ 1 \text{ при } i \in L_3,\ z = \mu_3',\ r = 3; \\ 1 \text{ при } i \overline{\in} L_3,\ z = 0,\ r = 3. \end{cases}$$

Здесь множества $I_1, I_2, J_1, J_2, L_1, L_2, L_3$ определяются равенствами:

$$I_1 = \{i : kV - \upsilon_1 \le i < kV,\ k = 1,2,\ldots\};$$
$$I_2 = \{i : kV - (\upsilon_3 + \upsilon_0 + \upsilon_1) \le i < kV,\ k = 1,2,\ldots\};$$
$$J_1 = \{i : \upsilon_0 + kV \le i < \upsilon_0 + \upsilon_2 + kV,\ k = 0,1,\ldots\};$$
$$J_2 = \{i : \upsilon_0 + kV \le i < 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + kV,$$
$$k = 0,1,\ldots\};$$
$$L_1 = \{i : 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + kV \le i < 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + kV,$$
$$k = 0,1,\ldots\};$$
$$L_2 = \{i : \upsilon_0 + kV \le i < 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + kV,$$
$$k = 0,1,\ldots\};$$
$$L_3 = \{i : 2\upsilon_0 + \upsilon_2 + kV \le i < (k+1)V,\ k = 0,1,\ldots\}.$$

В качестве стратегии механизма обслуживания требований будем использовать экстремальную стратегию. Для нее функциональная зависимость между случайной величиной $\overline{\xi_{j,i}}$ и случайными величинами $k_{j,i}$, $\eta_{j,i}^{+}$ и $\xi_{j,i}^{+}$, где $\overline{\xi_{j,i}}$, $\eta_{j,i}^{+}$ и $\xi_{j,i}^{+}$ означают соответственно число фактически обслуженных системой заявок, число поступивших заявок и максимально возможное число обслуженных заявок по потоку Π_j на интервале $[\theta_{j,i},\theta_{j,i+1})$, имеет вид: $\overline{\xi_{j,i}} = \min\{k_{j.i}+\eta^+_{j,i},\xi^+_{j,i}\}$, $j=\overline{1,3}$, $i\geq 0$.

Для такой стратегии закон формирования очереди задается равенством

$$k_{j.i+1}=\max\{0,k_{j,i}+\eta^+_{j,i}-\xi^+_{j,i}\},\ j=\overline{1,3},\ i\geq 0.$$

Изучение свойств последовательности $\gamma=\{(\Gamma_i,k_{1,i},k_{2,i},k_{3,i});\ i\geq 0\}$

На основном вероятностном пространстве (Ω,F,P) зададим случайный вектор $(\Gamma_0,k_{1,0},k_{2,0},k_{3,0})$ и рассмотрим случайную последовательность $\gamma=\{(\Gamma_i,k_{1,i},k_{2,i},k_{3,i});\ i\geq 0\}$, элементы которой, как уже было показано ранее, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\Gamma_{i+1}=U(k_{1,i},k_{2,i}),$$

$$k_{j.i+1}=\max\{0,k_{j,i}+\eta^+_{j,i}-\xi^+_{j,i}\},\ j=\overline{1,3}$$

при всех $i\geq 0$.

Закон распределения случайных величин $\eta^+_{j,i}$, $\xi^+_{j,i}$, $j=\overline{1,3}$, $i\geq 0$, найдем с учетом вида распределения для $\eta_{j,i}$, $j=\overline{1,3}$, $i\geq 0$, вида условных вероятностей для $\xi_{j,i}$, $j=\overline{1,3}$, $i\geq 0$, и, наконец, с учетом алгоритма α смены состояний обслуживающего устройства.

Для сокращения записи и удобства чтения формул введем обозначения:

$$V_2^0=V,\ V_2^+=V+\upsilon_0+\upsilon_3,\ V_2^-=V-(\upsilon_0+\upsilon_3),$$

$$V_3^0=V,\ V_3^+=V+\upsilon_0+\upsilon_1,\ V_3^-=V-(\upsilon_0+\upsilon_1),$$

$$\varphi(T_2,T_3;n_1,n_2,n_3)=\exp(-\lambda_1V-\lambda_2T_2-\lambda_3T_3)\times$$
$$\times(\lambda_1V)^{n_1}(\lambda_2T_2)^{n_2}(\lambda_3T_3)^{n_3}(n_1!n_2!n_3!)^{-1}$$

при всех $n_1,n_2,n_3\in N_0$,

$$l_1^{(1)}=[\mu_1\upsilon_1],\ l_2^{(1)}=[\mu_2\upsilon_2],\ l_3^{(1)}=[\mu_3\upsilon_3],$$

$$l_1^{(2)}=[\mu_1\upsilon_1],\ l_2^{(2)}=[\mu_2^{l}(\upsilon_2+\upsilon_0+\upsilon_3)],$$

$$l_3^{(2)}=[\mu_3^{l}(\upsilon_2+\upsilon_0+\upsilon_3)],$$

$$l_1^{(3)}=[\mu_1^{l}(\upsilon_3+\upsilon_0+\upsilon_1)],\ l_2^{(3)}=[\mu_2\upsilon_2],$$

$$l_3^{(3)}=[\mu_3^{l}(\upsilon_3+\upsilon_0+\upsilon_1)].$$

Тогда условная вероятность $P(\eta^+_{j,i}=n_j, j=\overline{1,3}\mid \Gamma_i=\Gamma^{(r)},k_{1,i}=x_1,k_{2,i}=x_2)$ будет равна:

а) $\varphi(V_2^0,V_3^0;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1\leq N_1,\ x_2\leq N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(2)},\ x_1\leq N_1,\ x_2> N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(2)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1<x_2-N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(3)},\ x_1> N_1,\ x_2\leq N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(3)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1\geq x_2-N_2);$$

б) $\varphi(V_2^+,V_3^0;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1\leq N_1,\ x_2> N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1<x_2-N_2);$$

в) $\varphi(V_2^0,V_3^+;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1\geq x_2-N_2);$$

г) $\varphi(V_2^-,V_3^0;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(2)},\ x_1\leq N_1,\ x_2\leq N_2);$$

д) $\varphi(V_2^-,V_3^+;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(2)},\ x_1> N_1,\ x_2\leq N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(2)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1\geq x_2-N_2);$$

е) $\varphi(V_2^0,V_3^-;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(3)},\ x_1\leq N_1,\ x_2\leq N_2);$$

ж) $\varphi(V_2^+,V_3^-;n_1,n_2,n_3)$, если

$$(\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(3)},\ x_1\leq N_1,\ x_2> N_2)\ \vee$$
$$\vee\ (\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(3)},\ x_1> N_1,\ x_2> N_2,\ x_1-N_1<x_2-N_2).$$

Условная вероятность $P(\xi^+_{j,i}=k_j, j=\overline{1,3}\mid \Gamma_i=\Gamma^{(r)},k_{1,i}=x_1,k_{2,i}=x_2)$ будет равна 1 при выполнении условий:

– из пункта а) предыдущей формулы и при $k_j=l_j^{(r)}$, $j=\overline{1,3}$, $r=\overline{1,3}$;

– из пункта б) и при $k_1=l_1^{(1)}$, $k_2=l_2^{(2)}$, $k_3=l_3^{(2)}$;

– из пункта в) и при $k_1=l_1^{(1)}$, $k_2=l_2^{(3)}$, $k_3=l_3^{(3)}$;

– из пункта г) и при $k_1=l_1^{(2)}$, $k_2=l_2^{(1)}$, $k_3=l_3^{(1)}$;

– из пункта д) и при $k_1=l_1^{(2)}$, $k_2=l_2^{(3)}$, $k_3=l_3^{(3)}$;

– из пункта е) и при $k_1=l_1^{(3)}$, $k_2=l_2^{(1)}$, $k_3=l_3^{(1)}$;

– из пункта ж) и при $k_1=l_1^{(3)}$, $k_2=l_2^{(2)}$, $k_3=l_3^{(2)}$.

Отсюда непосредственно следует равенство

$$P(\eta^+_{j,i}=n_j,\xi^+_{j,i}=k_j, j=\overline{1,3}\mid \Gamma_a=G_a,$$
$$k_{j,a}=x_{j,a}, a=\overline{0,i}, j=\overline{1,3})=$$
$$=P(\eta^+_{j,i}=n_j,\xi^+_{j,i}=k_j, j=\overline{1,3}\mid$$
$$\Gamma_i=G_i,k_{j,i}=x_{j,i}, j=\overline{1,3}),$$

где $n_j, k_j, x_{j,a} \in N_0$, $G_a \in \Gamma$ при $a = \overline{0,i}$, $j = \overline{1,3}$, $i \ge 0$. В силу этого последовательность γ является марковской. Найдем для нее вероятности $p((G, x_1, x_2, x_3), (\overline{G}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3))$ перехода за один шаг из состояния $(G, x_1, x_2, x_3) \in S$ в состояние $(\overline{G}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in S$, где $S = \{(G, x_1, x_2, x_3) : G \in \Gamma,$ $x_1, x_2, x_3 \in N_0\}$ – пространство состояний марковской цепи γ:

$$p((G, x_1, x_2, x_3), (\overline{G}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)) = P(\Gamma_{i+1} = \overline{G},$$
$$k_{j,i+1} = \overline{x}_j, j = \overline{1,3} \,|\, \Gamma_i = G, k_{j,i} = x_j, j = \overline{1,3}) =$$
$$= \sum_{n_j, k_j \in N_0, j = \overline{1,3}} P(\eta^+_{j,i} = n_j, \xi^+_{j,i} = k_j, \Gamma_{i+1} = \overline{G},$$
$$k_{j,i+1} = \overline{x}_j, j = \overline{1,3} \,|\, \Gamma_i = G, k_{j,i} = x_j, j = \overline{1,3}) =$$
$$= \sum_{n_j, k_j \in N_0, j = \overline{1,3}} P(\eta^+_{j,i} = n_j, j = \overline{1,3} \,|$$
$$\Gamma_i = G, k_{1,i} = x_1, k_{2,i} = x_2) \times$$
$$\times P(\xi^+_{j,i} = k_j, j = \overline{1,3} \,|\, \Gamma_i = G, k_{1,i} = x_1, k_{2,i} = x_2) \times$$
$$\times P(\Gamma_{i+1} = \overline{G} \,|\, k_{1,i} = x_1, k_{2,i} = x_2) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{3} P(k_{j,i+1} = \overline{x}_j \,|\, k_{j,i} = x_j, \eta^+_{j,i} = n_j, \xi^+_{j,i} = k_j).$$

Принимая во внимание вид условных распределений случайных величин $\eta^+_{j,i}$, $\xi^+_{j,i}$, $j = \overline{1,3}$, $i \ge 0$, а также равенство

$$P(k_{j,i+1} = \overline{x}_j \,|\, k_{j,i} = x_j, \eta^+_{j,i} = n_j, \xi^+_{j,i} = k_j) =$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ при } n_j = \overline{x}_j + k_j - x_j,\ \overline{x}_j \ne 0, \\ 1 \text{ при } n_j \le k_j - x_j,\ \overline{x}_j = 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

можно показать, что вероятность $p((G, x_1, x_2, x_3), (\overline{G}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3))$ (если она отлична от нуля) будет находиться по одной из следующих формул:

1. $\varphi(T_2, T_3; l_1 + \overline{x}_1 - x_1, l_2 + \overline{x}_2 - x_2, l_3 + \overline{x}_3 - x_3)$

при $\overline{x}_1 \ne 0,\ \overline{x}_2 \ne 0,\ \overline{x}_3 \ne 0$;

2. $\sum_{a=0}^{l_1 - x_1} \varphi(T_2, T_3; a, l_2 + \overline{x}_2 - x_2, l_3 + \overline{x}_3 - x_3)$

при $\overline{x}_1 \ne 0,\ \overline{x}_2 \ne 0,\ \overline{x}_3 \ne 0$;

3. $\sum_{a=0}^{l_2 - x_2} \varphi(T_2, T_3; l_1 + \overline{x}_1 - x_1, a, l_3 + \overline{x}_3 - x_3)$

при $\overline{x}_1 \ne 0,\ \overline{x}_2 = 0,\ \overline{x}_3 \ne 0$;

4. $\sum_{a=0}^{l_3 - x_3} \varphi(T_2, T_3; l_1 + \overline{x}_1 - x_1, l_2 + \overline{x}_2 - x_2, a)$

при $\overline{x}_1 \ne 0,\ \overline{x}_2 \ne 0,\ \overline{x}_3 = 0$;

5. $\sum_{a_1=0}^{l_1 - x_1} \sum_{a_2=0}^{l_2 - x_2} \varphi(T_2, T_3; a_1, a_2, l_3 + \overline{x}_3 - x_3)$

при $\overline{x}_1 = 0,\ \overline{x}_2 = 0,\ \overline{x}_3 \ne 0$;

6. $\sum_{a_1=0}^{l_1 - x_1} \sum_{a_3=0}^{l_3 - x_3} \varphi(T_2, T_3; a_1, l_2 + \overline{x}_2 - x_2, a_3)$

при $\overline{x}_1 = 0,\ \overline{x}_2 \ne 0,\ \overline{x}_3 = 0$;

7. $\sum_{a_2=0}^{l_2 - x_2} \sum_{a_3=0}^{l_3 - x_3} \varphi(T_2, T_3; l_1 + \overline{x}_1 - x_1, a_2, a_3)$

при $\overline{x}_1 \ne 0,\ \overline{x}_2 = 0,\ \overline{x}_3 = 0$;

8. $\sum_{a_1=0}^{l_1 - x_1} \sum_{a_2=0}^{l_2 - x_2} \sum_{a_3=0}^{l_3 - x_3} \varphi(T_2, T_3; a_1, a_2, a_3)$

при $\overline{x}_1 = 0,\ \overline{x}_2 = 0,\ \overline{x}_3 = 0$ и при общем для всех вариантов условии: $x_j \le l_j + \overline{x}_j$, $j = \overline{1,3}$.

Очевидно, что параметры $T_2, T_3; l_1, l_2, l_3$ будут зависеть от значений $G, \overline{G}$ и при каждом наборе $(G, \overline{G})$ должны быть определены особо.

Рассмотрим теперь отдельно несколько случаев в зависимости от значения $\overline{G} \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}\}$.

1. $\overline{G} = \Gamma^{(1)}$. Вероятность перехода за один шаг здесь будет отлична от нуля при обязательном выполнении требований: $x_1 \le N_1$, $x_2 \le N_2$.

Если $G = \Gamma^{(1)}$, то в приведенных выше формулах следует положить $T_2 = V_2^0$, $T_3 = V_3^0$, $l_1 = l_1^{(1)}$. Если $G = \Gamma^{(2)}$, то $T_2 = V_2^-$, $T_3 = V_3^0$, $l_1 = l_1^{(2)}$. Наконец, если $G = \Gamma^{(3)}$, то $T_2 = V_2^0$, $T_3 = V_3^-$, $l_1 = l_1^{(3)}$. При любом $G \in \Gamma$ нужно взять $l_2 = l_2^{(1)}$, $l_3 = l_3^{(1)}$.

2. $\overline{G} = \Gamma^{(2)}$. Переход за один шаг в состояние $(\Gamma^{(2)}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ с положительной вероятностью возможен лишь при условии, когда $x_1 \le N_1$, $x_2 > N_2$ или $x_1 > N_1$, $x_2 > N_2$, $x_1 - N_1 < x_2 - N_2$.

При $G = \Gamma^{(1)}$ параметры T_2, T_3, l_1 будут равны соответственно $V_2^+, V_3^0, l_1^{(1)}$. Если $G = \Gamma^{(2)}$, то $T_2 = V_2^0$, $T_3 = V_3^0$, $l_1 = l_1^{(2)}$. Если $G = \Gamma^{(3)}$, то $T_2 = V_2^+$, $T_3 = V_3^-$, $l_1 = l_1^{(3)}$. Во всех случаях $l_2 = l_2^{(2)}$, $l_3 = l_3^{(2)}$.

3. $\overline{G} = \Gamma^{(3)}$. Для того чтобы вероятность $p((G, x_1, x_2, x_3), (\Gamma^{(3)}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3))$ была отлична от

нуля, необходимо $x_1 > N_1$, $x_2 \le N_2$ или $x_1 > N_1$, $x_2 > N_2$, $x_1 - N_1 \ge x_2 - N_2$.

При $G = \Gamma^{(1)}$ следует взять параметры $T_2 = V_2^0$, $T_3 = V_3^+$, $l_1 = l_1^{(1)}$. Если $G = \Gamma^{(2)}$, то $T_2 = V_2^-$, $T_3 = V_3^+$, $l_1 = l_1^{(2)}$. При условии, что $G = \Gamma^{(3)}$, положим $T_2 = V_2^0$, $T_3 = V_3^0$, $l_1 = l_1^{(3)}$. Для всех $G = \Gamma$: $l_2 = l_2^{(3)}$, $l_3 = l_3^{(3)}$.

Список литературы

1. Федоткин М.А. Построение модели и исследование нелинейных алгоритмов управления интенсивными конфликтными потоками в системе с переменной структурой обслуживания заявок, 1 // Литовский матем. сб. 1977. Т. 17. № 1. С. 193–204.

2. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, 1 // Литовский матем. сб. 1988. Т. 28. № 4. С.783–794.

A TRAFFIC FLOW QUEUING SYSTEM WITH THE ABILITY TO OVERLAY THE QUEUES

N.M. Golysheva

The article considers a queuing system (QS) with three input flows. The first and the second ones are conflicting. The first and the third one, as well as the second and the third one are in no conflict in servicing, so it is possible to summarize (or overlay) the queues of these flows in the process of the QS operation. A mathematical model of the system is proposed and studied, as well as an algorithm to control the input flows with the account of their specific features.

Keywords: queuing system, conflicting flows, algorithmic control, Markov sequence.