Математическое моделирование и оптимальное управление
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2007, № 3, с. 124–129

УДК 517.988.68

МЕТОД ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОНОТОННЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н.В. Юрова

Нижегородский государственный технический университет

vestnik_nngu@mail.ru

Поступила в редакцию 16.04.2007

Построен метод итеративной регуляризации первого порядка для нелинейного операторного уравнения с монотонным оператором в банаховом пространстве, равномерно выпуклом вместе со своим сопряженным. При приближенном задании данных получены достаточные условия сильной сходимости метода, содержащие некоторые требования на геометрию банахова пространства и его сопряженного в терминах модулей выпуклости этих пространств.

Пусть X – банахово пространство, равномерно выпуклое вместе со своим сопряженным. Рассмотрим в X нелинейное операторное уравнение

$$Ax = f \qquad (1)$$

с монотонным хеминепрерывным [1] оператором $A : X \to X^*$, $D(A) = X$, $f \in X^*$. Считаем, что множество N решений (1) непусто, x^* – нормальное решение (1), т.е. решение, имеющее минимальную норму. Пусть существует возрастающая функция $m(R)$ на $[0,+\infty)$ такая, что для всех x и y из X выполняется неравенство

$$\|Ax-Ay\| \le m(R)\|x-y\|^{\sigma}, \qquad (2)$$

где $s \in (0, 1]$, $R = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Заметим, что из (2) следует ограниченность отображения A.

Пусть вместо оператора $A : X \to X^*$ известно семейство монотонных хеминепрерывных операторов $\{A^k\}$, $A^k : X \to X^*$ таких, что

$$\left\|Ax - A_x^k\right\| \le h_k g(\|x\|) \quad \forall x \in X, \qquad (3)$$

где $g(s)$ $(s \ge 0)$ – некоторая ограниченная функция, т.е. переводящая ограниченное множество в ограниченное, $0 \le h_k \le \bar{h}$, а вместо элемента f известны его d_k – приближения f_k такие, что

$$\|f - f_k\| \le d_k, \qquad (4)$$

где $0 \le d_k \le \bar{d}$. В этих условиях доказать непрерывную зависимость решения (1) от возмущений A и f не удается, поэтому задачу (1) следует отнести к классу некорректных и для ее решения использовать какой-либо метод регуляризации.

В работе [2] для решения (1) используется непрерывный метод регуляризации первого порядка следующего вида

$$\frac{dJx(t)}{dt} + A(t)x(t) + a(t)Jx(t) = f(t), \qquad (5)$$

$$Jx(t_0) = z_0, \qquad (6)$$

где z_0 – некоторый фиксированный элемент из X^*, $t \ge t_0 \ge 0$, $A(t)$ и $f(t)$ – некоторые приближения A и f соответственно, $a(t)$ – положительная непрерывная функция, $J : X \to X^*$ – дуальное отображение в X. Всякая дискретизация непрерывного метода (5), (6) порождает итерационный метод и позволяет построить последовательность с некоторыми свойствами. Аппроксимируя производную $dJx(t)/dt$ разделенной разностью, построим регуляризованный итерационный процесс следующего вида

$$\frac{Jx_k - Jx_{k-1}}{t_k} + A^k x_k + a_k Jx_k = f^k, \quad k=1,2,..., \qquad (7)$$

где $Jx_0 = z_0$ есть произвольный элемент из X^*, который задается, $\{a_k\}$, $\{t_k\}$ – последовательности положительных чисел, причем $\{a_k\}$ убывает, а $\{t_k\}$ не возрастает. Для исследования поведения последовательности $\{x_k\}$ при $k \to \infty$ используем метод замороженных коэффициентов [3], поэтому наряду с (7) рассмотрим вспомогательную задачу с точными данными

$$\frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k} + A y_k^m + a_m J y_k^m = f, \qquad (8)$$

где $Jy_0^m = z_0$ при каждом фиксированном m, $k = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$. Докажем однозначную разрешимость уравнений (7), (8). Для этого приведем уравнение (7) к виду

$$A^k x_k + m_1 J x_k = v_k, \quad m_1 = a_k + 1/t_k > 0,$$

$$v_k = \frac{Jx_{k-1}}{t_k} + f^k,$$

а (8) перепишем в следующей форме

$$A y_k^m + m_2 J y_k^m = v_k^m,$$

$$m_2 = a_m + 1/t_k > 0, \quad v_k^m = \frac{Jy_{k-1}^m}{t_k} + f.$$

Известно [1], что $R(A^k + m_1 J) = X^*$ и $R(A + m_2 J) = X^*$, т.е. уравнения (7) и (8) разрешимы. Однозначная разрешимость этих уравнений следует из строгой монотонности операторов $A^k + m_1 J$ и $A + m_2 J$ [1].

Известно [4], что последовательность $\{z^m\}$ решений операторного уравнения

$$Az^m + a_m J z^m = f, \tag{9}$$

при $m \to \infty$ сходится по норме к решению x^* уравнения (1) с минимальной нормой. Значит, можно считать, что $\|z^m\| \le d_1$ при $m = 1, 2, \dots$, $d_1 > 0$.

Предположим, что элементы последовательности $\{x_k\}$, определяемые (7), ограничены, т.е.

$$\|x_k\| \le d_2, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

где d_2 – положительная постоянная.

Введем величину

$$r_k^m = V(y_k^m, z^m) = \|Jy_k^m\|^2/2 - \left\langle Jy_k^m, z^m \right\rangle,$$

$$z^m + \|z^m\|^2/2\,. \tag{10}$$

Здесь и далее $\langle u, v \rangle$ – значение функционала $u \to X^*$ на элементе $v \to X$. Вычислив значения функционалов, стоящих в обеих частях равенства (8), на элементе $y_k^m - z^m$ и приняв во внимание (9), будем иметь

$$\left\langle \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k}, y_k^m - z^m \right\rangle + $$
$$+ \left\langle Ay_k^m - Az^m, y_k^m - z^m \right\rangle +$$
$$+ a_m \left\langle Jy_k^m - Jz^m, y_k^m - z^m \right\rangle = 0\,. \tag{11}$$

Воспользовавшись неравенством [5]

$$V(x,y) \le \langle Jx - Jy, x - y \rangle \; \forall x, y \in X,$$

примененным при $x = y_k^m$ и $y = z^m$, получим

$$\left\langle Jy_k^m - Jz^m,\; y_k^m - z^m \right\rangle \ge r_k^m\,. \tag{12}$$

Используя неравенство

$$j(x) - j(y) \le \langle \operatorname{grad} j(x), x - y \rangle \; \forall\, x, y \in X, \tag{13}$$

справедливое для любого выпуклого дифференцируемого по Гато функционала j : $X \to R^1$, $D(j) = X$ [1], и применив его к функционалу $V(x,y) = \|Jx\|^2/2 - \langle Jx, y\rangle + \|y\|^2/2$ по переменной Jx, запишем неравенство

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} \le \left\langle \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k}, y_k^m - z^m \right\rangle. \tag{14}$$

Используя (12) и (14), от (11) переходим к неравенству

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} + a_m r_k^m \le -\left\langle Ay_k^m - Az^m, y_k^m - z^m \right\rangle,$$

что с учетом монотонности оператора A дает

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} + a_m r_k^m \le 0\,,$$

откуда легко прийти к соотношению

$$r_k^m \le \left(1 - \frac{a_m t_k}{1 + a_m t_k}\right) r_{k-1}^m\,. \tag{15}$$

Пусть $e_k^m = a_m t_k / (1 + a_m t_k)$, $T_k = \sum_{i=1}^k t_i$, $\tilde{a}_m = a_m / (1 + a_1 t_1)$. Оценим величину r_0^m сверху. Из определения дуального отображения без труда получаем, что

$$r_0^m \le \left(\|z_0\| + \|z^m\|\right)^2/2 \le \left(\|z_0\| + d_1\right)^2/2 = r_0\,.$$

Теперь из (15) выводим неравенство [6, 7]

$$r_k^m \le r_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^k e_i^m\right) \le r_0 \exp\left(-\tilde{a}_m T_k\right). \tag{16}$$

При $k = m$ неравенство (16) примет следующий вид

$$r_m^m \le r_0 \exp\left(-\tilde{a}_m T_m\right).$$

Из (16) следует, что $r_k^m \le r_0$ при всех натуральных k и m. Из неравенства [5]

$$\left(\|x\| - \|y\|\right)^2/2 \le V(x, y) \; \forall x, y \in X\,,$$

следует, что

$$\|y_k^m\| \le \|z^m\| + \sqrt{2r_0} \le d_1 + \sqrt{2r_0} = d_3 \; k, m,$$

т.е. последовательности $\{y_k^m\}$ ограничены в совокупности.

Предположим, что

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\alpha_m - \alpha_{m-1}}{t_m \alpha_m \alpha_{m-1}} = 0, \qquad (17)$$

$$\lim_{m\to+\infty} T_m = +\infty. \qquad (18)$$

Используя теорему Штольца [8], нетрудно проверить, что при наших условиях (17), (18) $\tilde{\alpha}_m T_m \to +\infty$ при $m\to+\infty$. Тем самым установлено, что $r_m^m \to 0$ при $m\to+\infty$.

Пусть $d_X(s)$ и $d_{X^*}(s)$ – модули выпуклости пространств X и X^* соответственно [9, 10]. Отметим, что функции $d_X(s)$ и $d_{X^*}(s)$ возрастают и являются непрерывными на [0, 2], $d_X(0) = d_{X^*}(0) = 0$. Поэтому можно утверждать, что функция $d_X(s)$ имеет обратную $d_X^{-1}(e)$.

Свойства функционала $V(x, y)$ зависят от геометрических свойств пространства X. Далее будем использовать одно такое свойство функционала $V(x, y)$ [5]

$$V(x,y) \ge L^{-1} d_X\left(\|x-y\|/(2\tilde{c}_1)\right) \ \forall\, x, y\in X, \qquad (19)$$

где $\tilde{c}_1 = 2\max\{1, \|x\|, \|y\|\}$, L – постоянная Фигеля. Свойства функции $d_X(s)$ из (19) позволяют получить оценку

$$\| y_m^m - z^m \| \le 2\tilde{c}_2\, d_X^{-1}(L\, r_m^m) \qquad (20)$$

при $\tilde{c}_2 = 2\max\{1, d_1, d_3\}$. Поскольку функция $d_X^{-1}(e)$ непрерывна при $e \ge 0$ и $d_X^{-1}(0) = 0$, то на основании доказанной сходимости r_m^m к нулю при $m\to\infty$ и (20) делаем вывод о том, что

$$\lim_{m\to+\infty} \| y_m^m - z^m \| = 0. \qquad (21)$$

Учитывая неравенство

$$\|x_m - x^*\| \le \|x_m - y_m^m\| + \| y_m^m - z^m\| + \|z^m - x^*\|,$$

сходимость к нулю $\|z^m - x^*\|$ при $m\to\infty$ и (21), делаем вывод о том, что сходимость x_m к решению x^* уравнения (1) при $m\to\infty$ будет доказана, если установим, что

$$\lim_{m\to+\infty} \|x_m - y_m^m\| = 0. \qquad (22)$$

Поэтому введем величину

$$r_k^m = V(x_k, y_k^m) = \|Jx_k\|^2/2 - \left\langle Jx_k, y_k^m \right\rangle + \| y_k^m \|^2/2. \qquad (23)$$

Вычтем из (7) равенство (8), найдем значения полученных функционалов на элементе $x_k - y_k^m$ и, сделав простые преобразования, имеем

$$\left\langle \frac{Jx_k - Jx_{k-1}}{t_k} - \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k}, x_k - y_k^m \right\rangle + \alpha_k \left\langle Jx_k - Jy_k^m, x_k - y_k^m \right\rangle + (\alpha_k - \alpha_m) \times$$
$$\times \left\langle Jy_k^m, x_k - y_k^m \right\rangle + \left\langle A^k x_k - A^k y_k^m, x_k - y_k^m \right\rangle + \left\langle A^k y_k^m - Ay_k^m, x_k - y_k^m \right\rangle - \left\langle f^k - f, x_k - y_k^m \right\rangle = 0. \qquad (24)$$

Отметим, что из (3), ограниченности оператора A и ограниченности $\{h_k\}$ вытекает ограниченность в совокупности семейства операторов $\{A^k\}$, т.е. для любого $M > 0$ существует число $M_1(M) > 0$ такое, что при всех $u\in X$, $\|u\|\le M_1$ выполняется неравенство $\|A^k u\| \le M$ при всех натуральных k. Теперь, учитывая предполагаемую ограниченность последовательности $\{x_k\}$ и доказанную ограниченность в совокупности последовательностей $\{y_k^m\}$, монотонность и ограниченность в совокупности операторов $\{A^k\}$, условия (3), (4), от (24) перейдем к следующему неравенству

$$\left\langle \frac{Jx_k - Jx_{k-1}}{t_k} - \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k}, x_k - y_k^m \right\rangle + \alpha_k \left\langle Jx_k - Jy_k^m, x_k - y_k^m \right\rangle \le c_1 w_k^m, \ c_1 > 0, \qquad (25)$$

где

$$w_k^m = h_k + d_k + |\alpha_k - \alpha_m|.$$

Поскольку

$$r_k^m - r_{k-1}^m = V(x_k, y_k^m) - V(x_{k-1}, y_{k-1}^m) =$$
$$= V(x_k, y_k^m) - V(x_{k-1}, y_k^m) + V(x_{k-1}, y_k^m) - V(x_{k-1}, y_{k-1}^m),$$

то применяя дважды неравенство (13) к функционалу $V(x, y)$ по переменным Jx и y, приходим к оценке

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} \le \left\langle \frac{Jx_k - Jx_{k-1}}{t_k}, x_k - y_k^m \right\rangle + \left\langle Jy_k^m - Jx_{k-1}, \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\rangle,$$

т.е. из (25) вытекает неравенство

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} + a_k r_k^m \le c_2 \left(\frac{\left\| Jy_k^m - Jy_{k-1}^m \right\|}{t_k} + \frac{\left\| y_k^m - y_{k-1}m \right\|}{t_k} + w_k^m \right), \quad c_2 > 0 . \tag{26}$$

Оценим сверху величины $\| Jy_k^m - Jy_{k-1}^m \| / t_k$ и $\| y_k^m - y_{k-1}^m \| / t_k$. Из уравнения (8) с учетом (9) выводим неравенство

$$\frac{\left\| Jy_k^m - Jy_{k-1}^m \right\|}{t_k} \le \left\| Ay_k^m - Az^m \right\| + a_m \left\| Jy_k^m - Jz^m \right\| . \tag{27}$$

Определим функцию $g_{X*}(s) = d_{X*}(s)/s$. Известно [10], что эта функция непрерывна и не убывает на [0, 2], $g_{X*}(0)=0$. В то же время для достаточно широкого круга равномерно выпуклых банаховых пространств можно найти непрерывную возрастающую функцию $\tilde{g}_{X*}(e)$ такую, что $g_{X*}(s) \ge \tilde{g}_{X*}(s)$ при $s \in [0, 2]$, $\tilde{g}_{X*}(0)=0$. Значит, существует непрерывная функция $\tilde{g}_{X*}^{-1}(e)$, $\tilde{g}_{X*}^{-1}(0)=0$. В наших дальнейших рассуждениях замена $g_{X*}(s)$ на $\tilde{g}_{X*}(s)$ не нарушает получаемых оценок, поэтому далее в записях вместо $\tilde{g}_{X*}(s)$ будем использовать $g_{X^*}(s)$. Справедливо неравенство [5]

$$\left\| Jx - Jy \right\| \le \tilde{c}_1 g_{X^*}^{-1} (2\tilde{c}_1 L \left\| x - y \right\|) . \tag{28}$$

Используя (28) и (19), свойство неубывания функции $g_{X*}^{-1}(s)$ и определение (10) величины r_k^m, имеем

$$\left\| Jy_k^m - Jz^m \right\| \le \tilde{c}_2 g_{X^*}^{-1} \left(2\tilde{c}_2 L \left\| y_k^m - z^m \right\| \right) \le \tilde{c}_2 g_{X^*}^{-1} \left(\tilde{c}_3 d_X^{-1} \left(L r_k^m \right) \right), \quad \tilde{c}_3 = (2\tilde{c}_2)^2 L . \tag{29}$$

Кроме того, свойство (2) оператора A и (19) дают следующую оценку

$$\left\| Ay_k^m - Az^m \right\| \le m(d) \left\| y_k^m - z^m \right\|^s \le m(d) \left[2\tilde{c}_2 d_X^{-1} (L r_k^m) \right]^s , \quad d = \max\{d_1, d_2\} . \tag{30}$$

Теперь (29), (30) позволяют от (27) перейти к неравенству

$$\frac{\left\| Jy_k^m - Jy_{k-1}^m \right\|}{t_k} \le M_1 \left\{ \left[d_X^{-1} \left(L r_k^m \right) \right]^s + a_m g_{X^*}^{-1} \left(\tilde{c}_3 d_X^{-1} \left(L r_k^m \right) \right) \right\}, \; M_1 > 0 .$$

Поскольку функции $d_X^{-1}(s)$, $g_{X*}^{-1}(s)$ не убывают, то из последнего неравенства с учетом (16) имеем

$$\frac{\left\| Jy_k^m - Jy_{k-1}^m \right\|}{t_k} \le M_1 \left\{ \left[d_X^{-1} (L b_k^m) \right]^s + a_m g_{X^*}^{-1} \left(\tilde{c}_3 d_X^{-1} (L b_k^m) \right) \right\} = M_1 g_k^m , \tag{31}$$

где $b_k^m = r_0 \exp(-\tilde{a}_m T_k)$.

Пусть дуальное отображение $J : X \to X^*$ на последовательностях $\{ y_k^m \}$ обладает свойством

$$\left\langle \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k}, \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\rangle \ge \Psi \left(\left\| \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\| \right) \left\| \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\| , \tag{32}$$

где $\Psi(s)$ – неотрицательная возрастающая непрерывная функция при $s \ge 0$, $\Psi(0) = 0$. Используя (32), с учетом (31) получим

$$\Psi \left(\left\| \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\| \right) \le \left\| \frac{Jy_k^m - Jy_{k-1}^m}{t_k} \right\| \le M_1 g_k^m ,$$

т.е.

$$\left\| \frac{y_k^m - y_{k-1}^m}{t_k} \right\| \le \Psi^{-1} (M_1 g_k^m) = \bar{g}_k^m . \tag{33}$$

Принимая во внимание (31) и (33), из (26) выводим оценку

$$\frac{r_k^m - r_{k-1}^m}{t_k} + a_k r_k^m \le M_2 \left(g_k^m + \bar{g}_k^m + w_k^m \right) = M_2 h_k^m , \quad M_2 > 0 . \tag{34}$$

Отсюда имеем

$$r_k^m \le \left(1 - \frac{a_k t_k}{1 + a_k t_k} \right) r_{k-1}^m + M_3 t_k h_k^m , \quad M_3 > 0 .$$

Поскольку $1/(1 + a_k t_k) > 1/(1 + a_1 t_1) = l$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$r_k^m \le (1 - l\, a_k t_k) r_{k-1}^m + M_3 t_k h_k^m .$$

Оператор $J^{-1} = J^*$ является дуальным отображением в пространстве X^* [11] и $z_0 = J y_0^m = Jx_0$, то

$$x_0 = y_0^m = J^* z_0 . \tag{35}$$

Теперь из (23) согласно (35) получим

$$r_0^m = V(x_0, y_0^m) = \|z_0\|^2/2 - \langle z_0, J^* z_0 \rangle + \|z_0\|^2/2 = 0.$$

Вновь обращаясь к работам [6, 7], имеем

$$r_k^m \le M_3 \sum_{i=1}^{k} h_i^m \exp\left(-l \sum_{j=i+1}^{k} a_j t_j\right) t_i =$$

$$= M_3 \sum_{j=i+1}^{k} a_j t_j \exp\left(-l\left(\tilde{T}_k - \tilde{T}_i\right)\right) t_i,$$

$$\tilde{T}_j = \sum_{i=1}^{j} a_i t_i.$$

При $k = m$ из последнего неравенства получим

$$r_m^m \le M_3 \sum_{i=1}^{m} h_i^m \exp(-l(\tilde{T}_m - \tilde{T}_i)) t_i. \qquad (36)$$

Предположим, что последовательность $\{(a_{k-1} - a_k)/t_k\}$ возрастает, а, следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$a_i - a_m = \sum_{k=i+1}^{m} t_k \frac{a_{k-1} - a_k}{t_k} \le \frac{a_{m-1} - a_m}{t_m} \times$$

$$\times (t_i + t_{i+1} + \ldots + t_m) = \frac{a_m - a_{m-1}}{t_m}(T_i - T_m),$$

$$\forall i \le m. \qquad (37)$$

С учетом определения величины h_k^m в (34) и соотношения (37) неравенство (36) перепишем в следующем виде

$$r_m^m \le M_3 \Bigg[\sum_{i=1}^{m} (g_i^m + \bar{g}_i^m) \exp\left(-l(\tilde{T}_m - \tilde{T}_i)\right) t_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (h_i + d_i) \exp\left(-l(\tilde{T}_m - \tilde{T}_i)\right) t_i + \qquad (38)$$

$$+ \frac{a_m - a_{m-1}}{t_m} \sum_{i=1}^{m} (T_i - T_m) \exp\left(-l(\tilde{T}_m - \tilde{T}_i)\right) t_i \Bigg].$$

С помощью теоремы Штольца нетрудно убедиться, что вторая сумма в правой части неравенства (38) при $m \to \infty$ стремится к нулю, если

$$\lim_{m\to\infty} \frac{h_m + d_m}{a_m} = 0. \qquad (39)$$

Вновь применив теорему Штольца к третьей сумме в правой части неравенства (38), а также учитывая условия (17) и (18), заключаем, что при $m \to \infty$

$$\frac{a_m - a_{m-1}}{t_m} \sum_{i=1}^{m} (T_i - T_m) \exp\left(-l(T_i - T_m)\right) t_i \sim$$

$$\sim -\frac{a_m - a_{m-1}}{l^2 t_m a_m a_{m-1}} \to 0$$

при $m \to \infty$. Предполагая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (g_i^m + \bar{g}_i^m) \exp(-l(\tilde{T}_m - \tilde{T}_i))\, t_i = 0, \quad (40)$$

из неравенства (38) имеем сходимость $r_m^m \to 0$ при $m \to \infty$. Теперь, используя еще раз свойство (19) функционала $V(x, y)$, получаем, что $\|x_m - y_m^m\| \to 0$ при $m \to 0$. Тем самым справедливость соотношения (22) доказана. Следовательно, установлено утверждение.

Теорема. Пусть пространство X и его сопряженное X^* равномерно выпуклы, уравнение (1) имеет непустое множество решений, $A : X \to X^*$ – монотонный оператор, обладающий свойством (2), вместо элемента f известны его приближения $\{f_k\}$, отображение A аппроксимируется семейством $\{A^k\}$ монотонных непрерывных операторов, при этом выполнены неравенства (3), (4). Пусть убывающая бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{a_k\}$ и невозрастающая последовательность положительных чисел $\{t_k\}$ удовлетворяют условиям (17), (18), (39), причем последовательность $\{(a_{k-1} - a_k)/t_k\}$ возрастает. Предположим, что последовательность $\{x_k\}$, определяемая уравнением (7), ограничена, геометрии пространств X и X^* таковы, что справедливо (40), и дуальное отображение на последовательностях $\{y_k^m\}$ обладает свойством (32). Тогда последовательность $\{x_k\}$ сходится по норме пространства X при $m \to \infty$ к нормальному решению x^* уравнения (1).

Замечание 1. Условие (40) налагает некоторые требования на функции $d_X^{-1}(e)$, $g_{X^*}^{-1}(e)$, т.е. на геометрию пространств X и X^*. Покажем, что класс пространств, в которых для некоторых последовательностей $\{a_k\}$ можно добиться справедливости (40), непуст.

Пусть $a_k = k^{-a}$, $a > 0$. Предположим, что $d_X(s) \ge O(s^{b_1})$, $d_{X^*}(s) \ge O(s^{b_2})$, $\Psi(s) \ge O(s^{b_3})$, $b_1 > 1$, $b_2 > 1$, $b_3 > 0$. Тогда

$$g_k^m \le O\left(\exp\left[-\frac{s}{b_1}\tilde{a}_m T_k\right]+\right.$$

$$\left.+a_m \exp\left[\frac{1}{b_1(b_2-1)}\tilde{a}_m T_k\right]\right).$$

Применив теорему Штольца, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\lim_{m\to\infty} S_m =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i \exp\left[-\frac{s}{b_1}\tilde{a}_m \sum_{j=1}^{i} t_j\right] \exp\left[l\sum_{j=1}^{i} a_j t_j\right]}{\exp\left[l\sum_{j=1}^{m} a_j t_j\right]} \le$$

$$\le \frac{s}{b_1} a \lim_{m\to\infty} S_m .$$

Отсюда легко видеть, что если $as/b_1<1$, то $\lim_{m\to\infty} S_m = 0$. Значит, в наших предположениях для справедливости (40) достаточно выполнения неравенств

$$\bar{t}_1 = \frac{sa}{b_1} < 1, \quad \bar{t}_2 = \frac{a}{b_1(b_2-1)} < 1,$$

$$\frac{\bar{t}_1}{b_3} < 1, \quad \frac{\bar{t}_2}{b_3} < 1. \qquad (41)$$

Пусть $X=L^p$ или $X=l^p$. Известно, что при $1<p<2$ имеем $b_1=2$, $b_2=q$, $1/p+1/q=1$, т.е. $b_2=p/(p-1)$ [9, 12]. Тогда условия (41) в наших предположениях примут вид

$$\frac{sa}{2} < 1, \quad \frac{a(p-1)}{2} < 1, \quad s\in(0,1],$$

$$a\in(0,1), \quad 1<p<2,$$

т.е. выполнение (40) обеспечено. Пусть $p > 2$, тогда $b_1 = p$, $b_2 = 2$ [9, 12], и требования (41) сводятся к неравенствам

$$t_1 = \frac{sa}{p} < 1, \quad t_2 = \frac{a}{p} < 1, \quad \frac{t_1}{b_3} < 1, \quad \frac{t_2}{b_3} < 1.$$

Замечание 2. При доказательстве теоремы использованы свойства последовательности $\{x_k\}$, являющиеся дискретным аналогом некоторых свойств решения $x(t)$ задачи Коши (5), (6). Сходимость итеративного метода (7) при иных условиях установлена в [13].

Список литературы

1. Вайнберг, М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Рязанцева, И.П. Непрерывный метод регуляризации первого порядка для нелинейных монотонных уравнений / И.П. Рязанцева // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 1. – С. 45–53.
3. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. Рязанцева, И.П. Устойчивые методы решения нелинейных монотонных некоректных задач: Дисс. ...д-ра физ.-мат. наук. / И.П. Рязанцева. – Новосибирск, 1996. – 344 с.

ITERATIVE FIRST-ORDER REGULARIZATION METHOD FOR NONLINEAR MONOTONIC EQUATIONS IN A BANACH SPACE

N.V. Yurova

We develop an iterative first-order regularization method for a nonlinear operator equation with monoto operator in a Banach space which is uniformly convex with its conjugate. In the case where the data approximate, the sufficient conditions for strong convergence of the method are obtained. The conditions inclu certain requirements for the geometry of the Banach space and its conjugate in terms of the convex modules of th spaces.

5. Alber, Ya. Metric and generalized projection operator in Banach spaces: properties and applications / Ya. Alber // Funct. Differential Equations. – 1994. – V. 1, № 1. – P. 1–21.

6. Апарцин, А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве / А.С. Апарцин // Труды по прикладной математике и кибернетике. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.

7. Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Уральская издательская фирма «Наука», 1993. – 262 с.

8. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970. Т. 1. – 607 с.

9. Дистель, Д. Геометрия банаховых пространств / Д. Дистель. – Киев: Вища школа, 1980. – 215 с.

10. Figel, T. On the modul of convexity and smoothness / T. Figel // Studia Math. – 1976. – V. 56, № 2. – P. 121–155.

11. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

12. Альбер, Я.И. Методы решения нелинейных операторных уравнений и вариационных неравенств в банаховых пространствах: Дисс. ...д-ра физ.-мат. наук / Я.И. Альбер. – Новосибирск, 1986. – 314 с.

13. Рязанцева, И.П. Регуляризованный проксимальный алгоритм для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве / И.П. Рязанцева // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2002. – Т. 42, № 9. – С. 1295–1303.