ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 510 (075.5)

ОБРАЩЕНИЕ ЗАДАЧИ

О.М. Абрамова, М.И. Зайкин

Арзамасский филиал ННГУ им. Н.И. Лобачевского

olesia144@mail.ru

Поступила в редакцию 18.09.2014

Дано целостное представление о процессе обращения задачи как об одном из эффективных средств развития гибкости мышления учащихся при обучении математике. Предложено модельное представление процесса обращения задачи в графической и символической форме. Указаны семантические различия терминов «обращённая задача» и «обратная задача». Введены показатели, характеризующие процесс обращения и обращённые задачи. Описана процедура обращения задачи, выделены методические особенности её основных стадий. Предложено алгоритмическое предписание для самостоятельного обращения школьниками математической задачи.

Ключевые слова: математические задачи, гибкость мышления, обращение задачи, обращённые и обратные задачи, характеристики обращения, процедура обращения, алгоритмическое предписание по обращению задач.

В условиях усиления внимания педагогической общественности к развивающей ценности математического образования возрастает значение методик продуктивного обучения, обеспечивающих не только усвоение системы математических знаний и умений, но и обретение опыта творческой деятельности, всемерное развитие интеллектуальных способностей школьников, и в особенности такого важного умственного качества, как гибкость мышления.

В качестве одного из эффективных средств развития гибкости мышления в теории обучения математике признаётся решение наряду с задачами прямыми задач, обратных им. Указания на этот счёт имеются в работах многих известных психологов и педагогов-математиков (В.А. Крутецкий, Д. Пойа, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман, П.М. Эрдниев и др.).

Наиболее последовательно этого положения придерживается автор теории укрупнения дидактических единиц, академик П.М. Эрдниев. Призывая к временно́му сближению постановки и решения прямых и обратных задач, он считает, что такая работа, способствует, во-первых, лучшему пониманию структуры математической задачи, во-вторых, более глубокому осознанию тех взаимосвязей и отношений, которые свойственны задачной ситуации, наилучшему пониманию её логической структуры и предметного содержания, и, в-третьих, приобщает школьников к творческой деятельности, поскольку любую сконструированную обратную задачу, по мнению ученого, можно считать «продуктом творчества учащихся» [1, с. 29].

Автор неоднократно подчёркивает, что ценность решения прямых и обратных задач состоит ещё и в том, что при их решении осуществляется переключение с прямого хода мысли на обратный, а это способствует развитию мышления обучаемых.

Разделяя данное мнение, добавим, что при этом получает развитие такое фундаментальное умственное качество, как гибкость мышления. В условиях развивающей образовательной парадигмы современной школы данное обстоятельство представляется нам особенно важным.

Если развивающее значение и дидактическая ценность так называемых обратных задач признаны повсеместно, то сам термин «обратная задача» всё же нуждается в обосновании и уточнении.

В методике обучения геометрии чаще всего говорят об обратных теоремах (утверждениях) по отношению к рассматриваемым (прямым), записывая их, соответственно, как ($A \to B$) и ($B \to A$), где A и B – условие и заключение прямой теоремы. Истинность обоих утверждений важна не только в познавательном отношении, но ещё и в семантическом – получаем признак, свойственный лишь тому объекту/объектам, о которором/которых говорится в теореме (признаки равенства и подобия треугольников, признак параллелограмма, признак параллельности прямых, признак параллельности прямой и плоскости, признак параллельности плоскостей, признак перпендикулярности прямой и плоскости, признак перпендикулярности плоскостей и т.п.).

В методике арифметики и алгебры об обратных задачах говорят не столько в контексте установления истинности прямых и обратных утверждений, сколько в контексте получения новых задач (посредством приема обращения) и их дидактических и развивающих возможностей в обучении. Суть этого приёма заключается в том, что при сохранении сюжета часть или даже все данные из условия прямой задачи извлекаются и включаются в её требование, а из него, соответственно, что исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в её условие (Е.С. Канин, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман, П.М. Эрдниев и др.) Очевидно, что последовательно применяя данный приём, из исходной задачи можно получить не одну, а несколько новых задач, взаимосвязанных друг с другом по условию и требованию. В методической литературе все их также называют обратными задачами по отношению к исходной.

Но закономерен вопрос: почему, чему и насколько «обратны» вновь получаемые задачи и каково их дидактическое и развивающее значение? Ведь в одних случаях вновь получаемая задача претерпевает сравнительно небольшие структурные изменения, когда из прямой задачи лишь малая часть данных переходит в её требование и, наоборот, из него исключено всего лишь одно (и не самое значимое!) из нескольких искомых и введено в её условие. А в других случаях, напротив, эти изменения значительные либо даже происходит полная перестановка местами условия и заключения исходной задачи.

Здесь уместно заметить, что в научно-методической литературе наряду с термином «обратная задача» можно встретить (правда, редко!) и другой термин – «обращённая задача», которым также называются задачи, полученных из исходной путём полной или частичной замены её условий требованиями, а последних – условиями.

Именно так называет Е.С. Канин новые задачи, «полученные из исходной, в которых часть данных исходной задачи принимается за искомые, а некоторые искомые считаются данными» [2, с. 11]. Справедливости ради следует отметить всё же, что автор употребляет в своих рассуждениях и термин «обращённая задача», и термин «обратная задача», не делая между ними никакого различия.

Имеется и ещё одна, расширительная, трактовка обращённой задачи, которая принадлежит И.Е. Дразнину. Автор справедливо полагает, что не стоит заканчивать работу над задачей с получением ответа или с завершением доказательства, а следует, «рассмотреть обратную задачу, противоположную, расширенную, т.е. обогащённую каким-то дополнительным условием или, наоборот, обобщённую – такую, из которой какое-либо условие удалено». Все такие дополнительные задачи он называет «обращёнными, поскольку они не совсем оригинальны, а придуманы (превращены, обращены) на основе каких-то других задач» [3, с. 52].

С таким пониманием обращённой задачи вряд ли можно согласиться, ведь им охватывается весьма широкой класс задач, полученных из данной посредством того или иного её видоизменения. Исследователи уже неоднократно отмечали и разводили задачи, получаемые путём изменения того или иного вида (к примеру, различаются задачи-обобщения, задачи-обращения, задачи-аналогии и т.п.).

Попытаемся разобраться в сложившейся ситуации.

Для большей убедительности применим моделирование самого процесса замены условий задачи её требованиями и наоборот.

Совокупность условий задачи *У* представим в виде множества $\{y_i\}$, а совокупность её требований T – в виде множества $\{t_j\}$. Если одно данное из условия (например, y_i) исходной задачи переводится в искомые и одно найденное значение (например, t_j) – в условие, то процесс обращения задачи схематично можно представить так, как это сделано на рис. 1а. Если же таковых элементов будет взято больше (к примеру, y_1, y_2, и t_1, t_2, t_3), то схематичное представление процесса обращения задачи будет несколько иным (рис. 1б). Действуя таким образом можно перебрать все различные комбинации из элементов условия и требования исходной задачи, включая и тот самый случай, когда вся совокупность $\{t_j\}$ перейдет в условие *У*, а вся совокупность $\{y_i\}$ перейдет в требование T (рис. 1в).

На предложенной модели не трудно увидеть своеобразный оборот (обращение) элементов условия и требования исходной (прямой) задачи, а потому каждую вновь получаемую задачу логичнее всего было бы назвать обращённой, а не обратной, как она традиционно называется в методической литературе.

Отметим, что среди обращённых задач есть одна, которая занимает особое положение: она

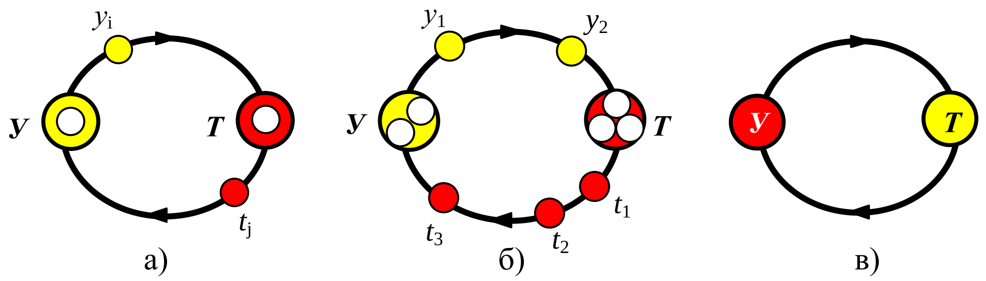

Рис. 1. Модельное представление процесса обращения задачи

соответствует тому случаю, когда все до одного элемента из $\{y_i\}$ перешли в $Т$ и все до одного элемента из $\{t_j\}$ перешли в $У$, т.е. обращение элементов условия и требования задачи выполнено по максимуму (то, что в исходной задаче было известно (дано), в ней необходимо найти, а то, что требовалось определить, наоборот, – стало известным). Фактически здесь имеет место предельный случай обращения задачи. Он соответствует тем представлениям, которые утвердились в методике геометрии ($У \to Т$) и ($Т \to У$) о прямых и обратных утверждениях. А потому эту обращённую задачу логично называть обратной по отношению к исходной (прямой).

Комментируя изложенное выше, выскажем мнение о том, что, несмотря на традиционно закрепившееся в методике математики одинаковое название для всех задач, получаемых в результате осуществления частичного или полного обращения элементов условия и требования исходной задачи – «обратная задача», в условиях проектирования высокоэффективных методик обучения современных школьников целесообразнее было бы различать получаемые при этом задачи и употреблять разные термины – «обращённая задача» и «обратная задача».

Для более глубокого проникновения в сущность процесса обращения математической задачи и оценки значения вновь получаемых задач в достижении цели развития гибкости мышления учащихся введём несколько его характеристик. Поскольку обращённые задачи, как уже говорилось, получаются в результате своеобразного оборота (обращения) элементов условия и требования исходной задачи, то для отражения этих изменений можно ввести специальную характеристику – *меру обращённости* задачи. Для её выражения обозначим число элементов условия исходной задачи через $N_д$, а число искомых в её требовании через $N_и$; число данных, перешедших после процесса обращения задачи в её требование, примем за $N'_д$; а число искомых, включенных в её условие, – за $N'_и$, тогда меру обращённости задачи (обозначим её буквой m) можно будет условно выразить формулой:

$$m = \frac{N'_д + N'_и}{N_д + N_и} \cdot 100\%. \quad (1)$$

Очевидно, что мера обращённости будет максимальна у обратной задачи (она равняется 100%). Если же имело место не полное, а частичное обращение исходной задачи, то мера обращённости будет меньше 100%. Диапазон варьирования меры обращённости определяется промежутком $0 < m \le 100\%$.

Понятно, что введённая таким образом мера обращённости является внешней характеристикой, показывающей величину «оборота» структурных элементов исходной задачи и мало что даёт в оценке тех перемен в задачной ситуации, которые связаны с внутренними процессами, происходящими при её решение. Для отражения развивающей ценности обращения задач нужна характеристика, показывающая изменения в мыслительных процессах. Так, для оценки обращения как средства, развивающего гибкость мышления, таким показателем может выступать число переходов мысли с прямого на обратный ход в решении исходной и обращённой задач. Такие переходы могут быть связаны, например, с использованием в решениях взаимно обратных мыслительных операций, математических действий, видов математической деятельности. Если, к примеру, при решении прямой задачи по значениям двух слагаемых определялось значение их суммы, а при решении обращённой задачи по значению суммы и одного из слагаемых находилось значение другого слагаемого, то можно констатировать, что переход мысли изменился с прямого на обратный.

В школьном курсе математики изучается немало взаимно обратных действий арифметического, алгебраического, логического характера: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, логарифмирование и потенцирование, нахождение корней уравнения и составление уравнения по значениям его корней, раскрытие скобок и заключение в скобки, дифференцирование и интегрирование и т.д. Взаимосвязь обратных действий выражается в том, что они показывают две различные стороны одного и того же процесса. Они существуют в синтезе, взаимно дополняя друг в друга.

Характеристику обращения, показывающую изменения, связанные с переключением с прямого хода мысли на обратный в решениях исходной и обращённой задачи логично назвать *мерой обратимости*. Для её численного выражения реальное количество переключений с прямого хода мысли на обратный в решениях исходной и обращённой задачи обозначим как $N'_{n/o}$, а возможное количество переключений хода мысли с прямого на обратный – как $N_{n/o}$. Тогда математически меру обратимости задачи (обозначим её буквой M) можно записать так:

$$M = \frac{N'_{n/o}}{N_{n/o}} \cdot 100\%. \qquad (2)$$

Ещё одной не менее важной характеристикой можно считать *потенциал обращения задачи P*, показывающий максимально возможное количество обращений исходной задачи. Заметим, что количество обращений задачи зависит от числа данных y_i условия $У$ исходной задачи и числа её искомых t_j требования T. Как было показано, процесс обращения задачи строится на всевозможных комбинациях элементов y_i условия $У$ задачи, переходящих в её требование T, и различных комбинациях элементов t_j требования исходной задачи поступающих в её условие $У$. Значит, комбинацию элементов из множества $У$ можно выбрать $2^n - 1$ способами, а комбинацию элементов из множества T, аналогично, – $2^k - 1$ способами, где n и k, соответственно, число элементов условия и требования исходной задачи. Тогда потенциал обращения любой задачи можно определять по формуле:

$$P = (2^n - 1)\cdot(2^k - 1), \qquad (3)$$

где n – число данных задачи, k – число её искомых.

Поскольку реально не все обращённые задачи получаются корректно поставленными, то считаем необходимой ещё одну характеристику – *продуктивность обращения задачи* $\widetilde{P}$, отражающую меру полезности использования этой задачи с целью получения обращённых задач. Для её определения можно использовать формулу:

$$\widetilde{P} = \frac{P^+}{P} \cdot 100\%, \qquad (4)$$

где P^+ – количество разрешимых обращённых задач, P – потенциал обращения задачи.

Перейдём теперь к более детальному рассмотрению практического осуществления процесса обращения задачи.

В методических целях процесс обращения математической задачи целесообразно разбить на пять основных этапов: этап анализа содержания прямой задачи; этап решения прямой задачи и его проверки; этап подготовки к обращению задачи; этап осуществления обращения задачи; этап исследования обращённой задачи. Обобщённая структурная схема процедуры обращения задачи изображена на рис. 2.

Пять основных этапов процедуры обращения задачи, приведённые на схеме 2, детализированы по содержанию. Они дают лишь общее представление о процессе обращения математической задачи как о сложном и многоплановом явлении и, вообще говоря, важны скорее для учителя, нежели для учащихся.

Для практической работы с учащимися гораздо полезнее иметь дело не с общим описанием процедуры, а с конкретным предписанием алгоритмического типа, наглядно представляющим ту последовательность действий, которую необходимо выполнить для обращения математической задачи (рис. 3).

Предложенное алгоритмическое предписание состоит из шести шагов, облегчающих деятельность школьников по самостоятельному выполнению процедуры обращения математической задачи. Менее способным к математике школьникам оно, как нить Ариадны, указывает «спасительный путь в лабиринте сомнений и догадок», а более способным – даёт общую ориентацию в выборе каждого последующего шага, то есть развивает важнейшее для математика умение определять значимые факты и перспективные направления исследования.

В качестве иллюстрации обращения конкретной задачи приведём следующий пример.

Пусть исходной является следующая задача.

***Задача* 1.** *Скорость катера по течению реки равна 22 км/ч, а собственная скорость катера – 20 км/ч. Найдите скорость катера против течения реки и скорость течения реки.*

Прежде всего отметим, что и условие $У$, и заключение T исходной задачи состоят из двух элементов. Тогда потенциал обращения этой задачи, определяемый по формуле (3), будет равняться

$$P = (2^2 - 1)\cdot(2^2 - 1) = 3\cdot 3 = 9.$$

Согласно алгоритмическому предписанию, выполняем последовательность шагов.

Рис. 2. Основные этапы процесса обращения задачи

Шаг 1: решаем данную задачу 1.

Решение:

1) 22 – 20 = 2 (км/ч) – скорость течения реки;

2) 20 – 2 = 18 (км/ч) – скорость катера против течения реки.

Ответ: 18 км/ч, 2 км/ч.

Шаг 2: составляем числовую цепочку из структурных элементов решённой задачи 1.

Для того чтобы упорядочить и облегчить процесс составления новых задач, полезно после решения исходной задачи записать поэлементный состав условия и требования этой задачи в виде числовой цепочки, присоединив к нему и найденное искомое (ответ) в следующем виде:

22 км/ч 20 км/ч $\boxed{18\text{ км/ч}}$ $\boxed{2\text{ км/ч}}$.

Следуя рекомендациям П.М. Эрдниева [1], будем заключать искомое в числовой цепочке в рамочку: такое оформление позволит школьникам более наглядно увидеть заданные и искомые элементы задачи, поскольку весь поэлементный состав задачи целостно предстаёт перед их глазами. А это, в свою очередь, увеличит степень осознанности учащимися возможных вариантов образования новых обращённых задач на базе исходной.

Шаг 3: составляем всевозможные числовые цепочки обращённых задач, в которых искомым элементом последовательно выступает каждый элемент данной задачи или их комбинация.

В результате последовательной реализации этого шага обращения задачи появляется сле-

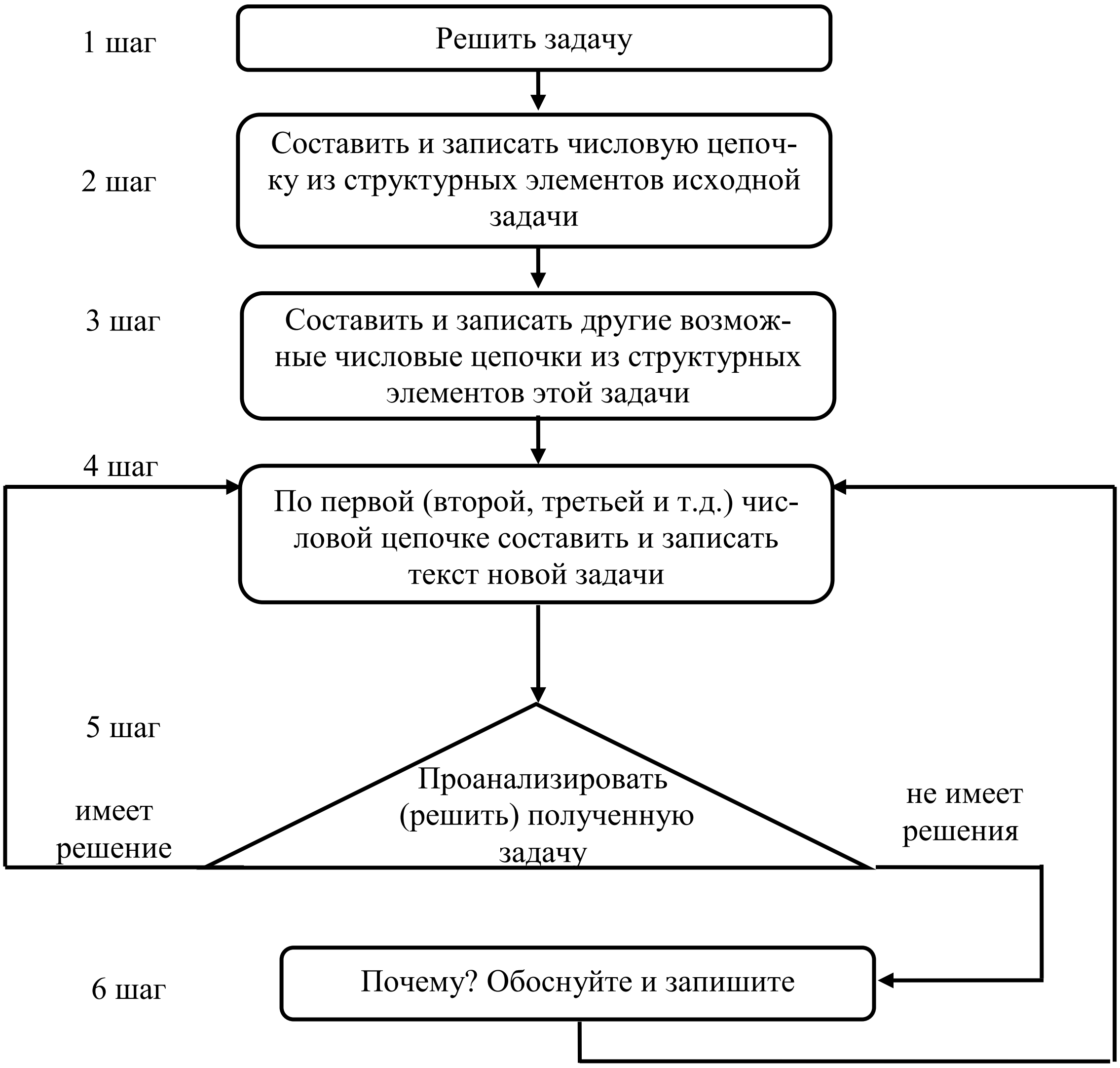

Рис. 3. Алгоритмическое предписание процесса обращения задачи

дующая совокупность числовых цепочек из её структурных элементов:

1. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ 20 км/ч $\boxed{\text{18 км/ч}}$ 2 км/ч;
2. 22 км/ч $\boxed{\text{20 км/ч}}$ $\boxed{\text{18 км/ч}}$ 2 км/ч;
3. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ 20 км/ч 18 км/ч $\boxed{\text{2 км/ч}}$;
4. 22 км/ч $\boxed{\text{20 км/ч}}$ 18 км/ч $\boxed{\text{2 км/ч}}$;
5. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ 20 км/ч 18 км/ч 2 км/ч;
6. 22 км/ч $\boxed{\text{20 км/ч}}$ 18 км/ч 2 км/ч;
7. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ $\boxed{\text{20 км/ч}}$ $\boxed{\text{18 км/ч}}$ 2 км/ч;
8. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ $\boxed{\text{20 км/ч}}$ 18 км/ч $\boxed{\text{2 км/ч}}$;
9. $\boxed{\text{22 км/ч}}$ $\boxed{\text{20 км/ч}}$ 18 км/ч 2 км/ч.

Шаг 4 (1): по первой числовой цепочке, в которой в качестве искомых выбраны расстояние, пройденное катером по течению реки, и скорость течения реки, составляем текст новой обращённой задачи 1.

Прежде чем сформулировать вопрос задачи, школьникам необходимо проанализировать новые данные, связать их между собой, выяснить, какие величины в принципе можно найти при таком условии, а затем уже составлять нужный вопрос. Одно из требований, предъявляемых к формулируемым задачам, – это обязательная включенность всех элементов задачи в содержание её текста. Второе требование – это лаконичность вопроса (многословные, витиеватые, трудно воспринимаемые формулировки подлежат редактированию). Если учащиеся затрудняются самостоятельно составить грамотный вопрос, учитель может привести несколько его вариантов и предложить выбрать из них наиболее подходящий и обосновать свой выбор. Затем уже целесообразно практиковать самостоятельное выдвижение вопросов учащимися.

В итоге такой деятельности может быть составлена следующая обращённая задача:

***Задача* 1.1.** *Собственная скорость катера равна* 20 *км/ч, а скорость течения реки* – 2 *км/ч. Найдите скорость катера по течению и против течения реки.*

Шаг 5 (1): решаем полученную задачу 1.1.

Решение:

1) 20 + 2 = 22 (км/ч) – скорость катера по течению реки;

2) 20 – 2 =18 (км/ч) – скорость катера против течения реки.

Ответ: 22 км/ч, 18 км/ч.

Как видим, объективно степень сложности обращённой задачи 1.1 не превосходит степени сложности прямой задачи 1, поскольку она содержит столько же данных, те же отношения и связи, только неизвестным выступает другой компонент этих отношений.

Итак, найдя ответ задачи 1.1 и сопоставив его с тем числом, которое заключено в рамочку в соответствующей этой обращённой задаче числовой цепочке, заключаем, что задача решена верно.

Шаг 4 (2): по второй числовой цепочке составляем и записываем текст новой обращённой задачи 1.2.

***Задача* 1.2.** *Скорость катера по течению реки равна* 22 *км/ч, а скорость течения реки* – 2 *км/ч. Найдите собственную скорость катера и скорость катера против течения реки.*

Шаг 5 (2): решаем обращённую задачу 1.2.

Решение:

1) 22 – 2 = 20 (км/ч) – собственная скорость катера;

2) 20 – 2 = 18 (км/ч) – скорость катера против течения реки.

Ответ: 20 км/ч, 18 км/ч.

Шаг 4 (3): по третьей числовой цепочке составляем и записываем текст обращённой задачи 1.3.

***Задача* 1.3.** *Скорость катера против течения реки равна* 18 *км/ч, а собственная скорость катера* – 20 *км/ч. Найдите скорость течения реки и скорость катера по течению реки.*

Шаг 5 (3): решаем полученную задачу.

Решение:

1) 20 – 18 = 2 (км/ч) – скорость течения реки;

2) 20 + 2 = 22 (км/ч) – скорость катера по течению реки.

Ответ: 2 км/ч, 22 км/ч.

Шаг 4 (4): по четвёртой числовой цепочке формулируем условие и требование задачи 1.4.

***Задача* 1.4.** *Скорость катера по течению реки равна* 22 *км/ч, а против течения* – 18 *км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера.*

Шаг 5 (4): решаем полученную задачу.

Решение:

1) 22 – 18 = 4 (км/ч) – удвоенная скорость течения реки;

2) 4 : 2 = 2 (км/ч) – скорость течения реки;

3) 18 + 2 = 20 (км/ч) – собственная скорость катера.

Ответ: 2 км/ч, 20 км/ч.

Шаг 4 (5): по пятой числовой цепочке формулируем условие и требование задачи 1.5.

***Задача* 1.5.** *Скорость катера против течения реки равна* 18 *км/ч, собственная скорость катера* – 20 *км/ч, а скорость течения реки* – 2 *км/ч. Найдите скорость катера по течению реки.*

Шаг 5 (5): решаем полученную задачу.

Замечаем, что эта задача с избыточными данными и благодаря этой особенности, представляется возможным её решить несколькими способами. Приведём следующий вариант решения этой обращённой задачи.

Решение:

1) 20 + 2 = 22 (км/ч) – скорость катера по течению реки.

Ответ: 22 км/ч.

Аналогичным образом, осуществляя и далее данную процедуру обращения исходной задачи 1, учащиеся могут получить следующую задачу:

***Задача* 1.6.** *Скорость катера по течению реки равна* 22 *км/ч, а против течения* – 18 *км/ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки* – 2 *км/ч.*

Шаг 5 (6): решаем полученную задачу.

Очевидно, и эта задача с избыточными данными.

Решение:

1) 18 + 2 = 20 (км/ч) – собственная скорость катера.

Ответ: 20 км/ч.

Шаг 4 (7): по седьмой числовой цепочке формулируем условие и требование задачи 1.7.

По структурным цепочкам 7 и 8 можно увидеть, что соответствующие им обращённые задачи невозможно будет решить, поскольку недостаточно указанно данных, чтобы найти выделенные искомые. Но, несмотря на это, сразу же отбрасывать такие обращённые задачи учителю не стоит, а следует попытаться извлечь из них всё полезное в плане интеллектуального развития обучаемых. Даже если такие задачи и не прибавляют новых знаний учащимся, не оказывают должного влияния на развитие их гибкости мышления, то они будут полезны по крайне мере тем, что поддерживают интерес учеников к процессу обращения задачи, а также способствуют развитию таких качеств мышления, как логичность и критичность, которые, несомненно, нужно активно развивать у школьников в процессе обучения математике.

Шаг 6 (7, 8): укажем, почему невозможно однозначно решить данные задачи. На данном шаге обращения задачи учитель может нацелить учащихся на указание недостающих данных, задавая вопросы следующего плана: «Почему нельзя дать ответ на вопрос задачи?»; «Какого известного или нескольких известных не хватает?»; «Что необходимо добавить?»; «А можно ли что-нибудь определить даже по этим данным?».

Шаг 4 (9): по девятой числовой цепочке формулируем условие и требование задачи 1.9.

***Задача* 1.9.** *Скорость катера против течения реки равна* 18 *км/ч, а скорость течения реки –* 2 *км/ч. Найдите скорость катера по течению реки и собственную скорость катера.*

Шаг 5 (9): решаем полученную задачу.

Решение:

1) 18 + 2 = 20 (км/ч) – собственная скорость катера;

2) 20 + 2 = 22 (км/ч) – скорость катера по течению реки.

Ответ: 20 км/ч, 22 км/ч.

В итоге в результате обращения исходной задачи 1 получена окрестность этой задачи, состоящая из шести разрешимых обращённых задач (1.1–1.6), двух неразрешимых обращённых задач (1.7–1.8) и одной *обратной* задачи (1.9).

Продуктивность обращения исходной задачи $\tilde{P}$, определяемая по формуле (4), достаточно высока: $\tilde{P} = \frac{7}{9} \cdot 100\% \approx 77.8\%$, что говорит об удачном выборе этой задачи в качестве объекта обращения.

Для сопоставления можно также определить значения меры обращения (1) и меры обратимости (2) каждой из вновь полученных семи обращённых задач (см. табл. 1).

Таблица 1

Значения характеристик обращения	Обращённые задачи						
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.9
Мера обращённости задачи (m)	50%	50%	50%	50%	75%	75%	100%
Мера обратимости задачи (M)	50%	0%	50%	50%	50%	50%	100%

Отметим также, что решение задач лишь тогда обеспечивает интенсивное умственное развитие и поднимает на качественно новый уровень интеллектуальные способности учащихся, когда поисковая деятельность мотивируется живым детским интересом к предмету познания, когда её результаты, выраженные словами, символами, образами или моделями, личностно или социально значимы для решающего, вызывают у него естественную потребность в общении с другими, чувство восхищения или даже восторга, когда сам процесс работы над задачей окрыляет личность, что во всей полноте относится к использованию обращения задач в процессе обучения математике.

Список литературы

1. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. М.: Просвещение, 1970. 319 с.
2. Канин Е.С. Развитие темы задачи // Математика в школе. 1991. № 3. С. 8–12.
3. Дразнин И.Е. Обращение условий планиметрических задач // Математика в школе. 2001. № 8. С. 52–55.
4. Градштейн И.С. Прямая и обратная теоремы. Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.
5. Зайкин М.И. От задания к заданию – в глубину познания: Опыт приобщения к математическому творчеству. Арзамас: АГПИ, 2009. 148 с.
6. Зайкин М.И. Преобразование сложных радикалов. Элективный курс по математике. Арзамас: АГПИ, 2008. 132 с.
7. Хрестоматия по методике математики. Т. 1. Обучение через задачи / Сост. М.И. Зайкин, С.В. Арюткина. Арзамас: АГПИ, 2005. 300 с.
8. Цукарь А.Я. Метод взаимно обратных задач в обучении математике. Новосибирск: Наука, 1989. 40 с.

PROBLEM INVERSION

O.M. Abramova, M.I. Zaykin

The authors present a coherent picture of the process of problem inversion as an effective tool for developing flexibility of thinking in school students when teaching mathematics. The process of problem inversion is represented as a model in a graphic and symbolical form. Semantic differences between the terms "inverse problem" and "inverted problem" are shown. Some indicators characterizing the process of inversion and inverted problems are introduced. The procedure of problem inversion is described, some methodological features of its main stages are identified. An algorithmic instruction for mathematical problem inversion by school students is proposed.

Keywords: mathematical problems, flexibility of thinking, problem inversion, inverted and inverse problems, inversion characteristics, inversion procedure, algorithmic instruction on problem inversion.

References

1. Erdniev P.M. Metodika uprazhneniy po matematike. M.: Prosveshchenie, 1970. 319 s.
2. Kanin E.S. Razvitie temy zadachi // Matematika v shkole. 1991. № 3. S. 8–12.
3. Draznin I.E. Obrashchenie usloviy planimetricheskikh zadach // Matematika v shkole. 2001. № 8. S. 52–55.
4. Gradshteyn I.S. Pryamaya i obratnaya teoremy. L.: Gosudarstvennoe izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 80 s.
5. Zaykin M.I. Ot zadaniya k zadaniyu – v glubinu poznaniya: Opyt priobshcheniya k matematicheskomu tvorchestvu. Arzamas: AGPI, 2009. 148 s.
6. Zaykin M.I. Preobrazovanie slozhnykh radikalov. Elektivnyy kurs po matematike. Arzamas: AGPI, 2008. 132 s.
7. Khrestomatiya po metodike matematiki. T. 1. Obuchenie cherez zadachi / Sost. M.I. Zaykin, S.V. Aryutkina. Arzamas: AGPI, 2005. 300 s.
8. Tsukar' A.Ya. Metod vzaimno obratnykh zadach v obuchenii matematike. Novosibirsk: Nauka, 1989. 40 s.