

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект "Образование"
Инновационная образовательная программа ННГУ
Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы:
физические основы и математическое обеспечение"

Д.В. Баландин, М.М. Коган

Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления

*Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации
"Информационные технологии и компьютерная математика"*

Нижний Новгород
2006

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр "Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение"

Баландин Д.В., Коган М.М. Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления. Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации "Информационные технологии и компьютерная математика". Нижний Новгород, 2006, 135 с.

В учебно-методических материалах изложен единый подход к синтезу регуляторов для динамических объектов, задаваемых дифференциальными или разностными уравнениями, который использует аппарат линейных матричных неравенств и пакет прикладных программ MATLAB. Получены уравнения регуляторов по состоянию и по измеряемому выходу, которые обеспечивают устойчивость замкнутой системы, оптимальность переходных процессов, заданный уровень гашения внешних возмущений.

Для специалистов в области теории управления, аспирантов и студентов старших курсов университетов и технических вузов, специализирующихся в области прикладной математики, информационных технологий, системного анализа и теории управления.

Оглавление

Введение	5
I Линейные матричные неравенства	9
1 Определения и свойства	11
2 Основные задачи	15
3 Неравенство $\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0$	19
3.1 Условия разрешимости	19
3.2 Параметризация всех решений	22
3.3 Система неравенств	25
4 Решение линейных матричных неравенств в пакете MATLAB	29
II Синтез законов управления	31
5 Стабилизация	33
5.1 Стабилизация по состоянию	33
5.2 Одновременная стабилизация нескольких объектов	37
5.3 Стабилизация по выходу	38
5.4 Стабилизация с использованием наблюдателей	47
5.5 Стабилизация дискретных объектов	51
6 Модальное управление	55
6.1 LMI-области	55
6.2 Синтез модального управления	58
7 Оптимальное линейно-квадратичное управление	61
7.1 Вычисление H_2 -нормы передаточной матрицы	62
7.2 Синтез γ -оптимальных регуляторов по состоянию	65
7.3 Синтез γ -оптимальных регуляторов по выходу	70
8 Оптимальное гашение возмущений	77
8.1 Уровень гашения возмущений в непрерывном объекте	77
8.2 H_∞ -регуляторы для непрерывных объектов	80
8.3 Уровень гашения возмущений в дискретном объекте	89

8.4	H_∞ -регуляторы для дискретных объектов	92
9	Алгоритм поиска взаимнообратных матриц	99
III	Приложения	105
A	Блочные матрицы	107
B	Линейные матричные уравнения	113
C	Линейные уравнения и псевдообратные матрицы	115
D	Структурные системные свойства	119
E	Расширенная лемма Ляпунова	121
F	Кронекерово произведение	125
G	S-процедура	127
H	Частотная теорема	129
	Литература	131

Введение

Цель этих учебно-методических материалов – показать, как на основе численного решения линейных матричных неравенств в пакете MATLAB можно синтезировать законы управления динамическими объектами.

В теории управления линейные матричные неравенства применялись очень давно. Уже известное уравнение Ляпунова [22] в теории устойчивости

$$A^T X + X A = -Q$$

при произвольной симметрической положительно определенной матрице Q можно рассматривать как линейное матричное неравенство

$$A^T X + X A < 0$$

относительно неизвестной матрицы X . Условия абсолютной устойчивости динамических систем, уравнения которых содержат неизвестную нелинейную функцию, расположенную в заданном секторе (так называемые системы Лурье), также были выражены в виде линейных матричных неравенств [40, 28]. Однако только после того, как были развиты соответствующие вычислительные методы в конце 20-го века, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации появились алгоритмы и программное обеспечение [71, 59], линейные матричные неравенства стали активно применяться в различных областях теории систем и теории управления [51, 77]. В частности, в [58, 62] было показано, как синтез H_∞ -регуляторов сводится к решению линейных матричных неравенств.

Синтезу регуляторов на основе линейных матричных неравенств в последние годы было посвящено огромное число публикаций в таких известных журналах как IEEE Transactions on Automatic Control, Automatica, Systems and Control Letters, International Journal of Control и многих других, а также в трудах всех последних конференций по теории управления (World IFAC Congresses, IEEE Conferences on Decision and Control, European Control Conferences и других).

Линейные матричные неравенства позволяют с единых позиций рассматривать и решать многие проблемы теории управления и, в частности, такие важные как стабилизация неустойчивого объекта по состоянию и по измеряемому выходу, модальное управление, оптимальное линейно-квадратичное управление, оптимальное гашение внешних возмущений в рамках теории H_∞ -управления, робастная устойчивость и стабилизация, абсолютная устойчивость и стабилизация, робастное H_∞ -управление.

В качестве объектов управления рассматриваются линейные непрерывные и дискретные динамические системы с известными постоянными. Синтезируемые регуляторы выбираются в классе линейных, в общем случае, динамических обратных связей.

Основная идея, положенная в основу синтеза, заключается в следующем. Цель управления формулируется в виде неравенства относительно квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы $V(x) = x^T X x$ с симметрической положительно определенной матрицей $X = X^T > 0$. Для задачи стабилизации это просто неравенство Ляпунова, а для задачи H_∞ -управления это неравенство непосредственно получается путем преобразования на основе частотной теоремы [13] целевого условия, выраженного в частотной области, в эквивалентное ему матричное неравенство. В любом случае получающееся неравенство может быть представлено в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестной матрицы параметров регулятора Θ некоторого специального вида

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (\text{I})$$

где P , Q и Ψ – матрицы соответствующих порядков, зависящие от исходных данных, причем симметрическая матрица Ψ зависит также от неизвестной матрицы X функции Ляпунова. Это неравенство имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда выполнены два неравенства

$$W_P^T \Psi W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0, \quad (\text{II})$$

в которых столбцы матриц W_P и W_Q образуют базисы ядер матриц P и Q соответственно. Последние два неравенства уже не содержат переменных Θ , и для регуляторов по состоянию или регуляторов по выходу полного порядка (когда порядок регулятора совпадает с порядком объекта) эти неравенства являются линейными матричными неравенствами относительно матрицы X . Таким образом, исходная задача разделяется на две задачи: сначала находится матрица X , удовлетворяющая линейным матричным неравенствам (II), а затем найденная матрица подставляется в линейное матричное неравенство (I) и находятся параметры регулятора Θ .

В более сложных случаях, когда состояние объекта не измеряется и строится регулятор по выходу пониженного порядка (когда порядок регулятора меньше порядка объекта), одна из матриц P или Q также зависит от матрицы X , и это приводит к тому, что соответствующие неравенства (II) содержат как матрицу X , так и обратную к ней матрицу $Y = X^{-1}$. Теперь эти неравенства оказываются линейными матричными неравенствами относительно двух взаимнообратных матриц X и Y , и задача сводится к оптимизации некоторой невыпуклой функции при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами. Указанное обстоятельство принципиальным образом усложняет синтез регуляторов, так как отсутствуют регулярные методы оптимизации невыпуклых функций. К настоящему времени разработаны различные алгоритмы численного решения данной задачи [4, 7, 8, 9, 43, 44, 46, 48, 60, 64, 65, 79, 80]. Во многих практически важных случаях удается осуществить требуемый синтез, хотя ни один из известных алгоритмов не гарантирует решения любой задачи.

При написании этого пособия авторы ставили перед собой задачу познакомить читателя с одним из современных направлений теории управления, которое в основном развивалось не в России, хотя фундамент этой теории был заложен в СССР в трудах А.И. Лурье и В.А. Якубовича. С этой целью авторы систематизировали обширный материал, содержащийся в зарубежных журнальных публикациях, привели собственные доказательства некоторых утверждений и собственные результаты, а также проиллюстрировали предлагаемые процедуры синтеза регуляторов на многочисленных примерах управления механическими системами.

Следует добавить, что некоторые из обсуждаемых вопросов частично отражены в русскоязычной литературе в двух монографиях [27, 39] и небольшом числе журнальных статей [17, 18, 19, 20, 10, 11, 4, 7, 26, 30, 9].

Пособие организовано следующим образом. В части I приводятся основные сведения о линейных матричных неравенствах: определение и основные свойства; задачи разрешимости, оптимизации и обобщенного собственного значения, которые используются в синтезе регуляторов; подробное исследование специального линейного матричного неравенства (**I**); описание основных используемых команд LMI Toolbox пакета Matlab.

Часть II посвящена синтезу законов управления линейными непрерывными и дискретными динамическими объектами. Рассматриваются задачи стабилизации по состоянию и по измеряемому выходу, модальное управление, оптимальное линейно-квадратичное управление, H_∞ -оптимальное управление.

Часть III состоит из приложений, содержащих необходимые факты из линейной алгебры и матричного анализа [12, 33], а также частотную теорему [42, 13], которые используются для обоснования приводимых в книге теоретических результатов.

Список литературы включает только ключевые публикации, связанные с излагаемым материалом, и не претендует на полноту.

Учебно-методическое пособие адресуется студентам старших курсов и аспирантам университетов и технических вузов, специализирующимся в области прикладной математики, информационных технологий, системного анализа и теории управления.

Часть I

Линейные матричные неравенства

Глава 1

Определения и свойства

Линейным матричным неравенством называется неравенство относительно неизвестных переменных $x = (x_1, \dots, x_m)$ следующего вида

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m > 0, \quad (1.1)$$

в котором F_0, F_1, \dots, F_m – действительные симметрические матрицы размера $n \times n$, т.е. $F_i = F_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Знак > 0 означает положительную определенность матрицы в левой части неравенства, т.е.

$$u^T F(x) u > 0 \quad \forall u \in \mathcal{R}^n, u \neq 0.$$

Условие положительной определенности матрицы $F(x)$ может быть эквивалентно выражено в виде $\lambda_{\min}(F(x)) > 0$, где $\lambda(\cdot)$ обозначает собственное значение соответствующей матрицы.

В линейном матричном неравенстве $F(x) > 0$ функция $F(x)$ является аффинной (в связи с этим выражению $F(x) > 0$ был бы более адекватен термин "аффинное матричное неравенство") и отображает конечно-мерное векторное пространство \mathcal{V} в множество $\mathcal{S}^n = \{M \mid M = M^T \in \mathcal{R}^{n \times n}\}$ действительных симметрических матриц.

Пусть имеется аффинное отображение

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + L(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где $F_0 \in \mathcal{S}^n$ и $L(\mathbf{x})$ – линейное отображение $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}^n$, а $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Тогда, выбирая базис $\{e_1, \dots, e_m\}$ в \mathcal{V} , можем записать

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m x_j F_j,$$

где

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m x_j e_j, \quad F_j = L(e_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

и неравенство $F(\mathbf{x}) > 0$ примет вид (1.1).

В приложениях часто встречаются линейные матричные неравенства, записанные относительно матричных переменных. Таковым, например, является неравенство

$$A^T X + X A + Q > 0, \quad (1.3)$$

в котором $A, Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ – заданные матрицы, а $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$ – неизвестная матрица. Заметим, что это неравенство будет линейным матричным неравенством только в случае симметрической матрицы Q . В этом случае векторное пространство \mathcal{V} совпадает с пространством \mathcal{S}^n симметрических $(n \times n)$ -матриц или с изоморфным ему евклидовым пространством \mathcal{R}^m , где $m = n(n+1)/2$. Выбирая в этом пространстве базис $\{E_1, \dots, E_m\}$ и записывая $X = \sum_{j=1}^m x_j E_j$, представим это неравенство в виде

$$Q + \sum_{j=1}^m x_j (A^T E_j + E_j A) > 0 ,$$

т.е. в виде (1.1). Например, неравенство (1.3) при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

сводится к линейному матричному неравенству

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} > 0 .$$

В нестрогих линейных матричных неравенствах знак $>$ заменяется на \geq . Матричные неравенства $F(x) < 0$ и $F(x) > G(x)$ с аффинными функциями $F(x)$ и $G(x)$ записываются как линейные матричные неравенства $-F(x) > 0$ и $F(x) - G(x) > 0$ соответственно.

Линейное матричное неравенство (1.1) определяет нелинейное, но выпуклое ограничение на x , т.е. множество $\mathcal{F} = \{x \mid F(x) > 0\}$ является выпуклым. Действительно, если $x_1, x_2 \in \mathcal{F}$ и $\alpha \in [0, 1]$, то, учитывая, что функция $F(x)$ аффинная, имеем

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) > 0 .$$

Системой линейных матричных неравенств называется конечное множество линейных матричных неравенств

$$F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0 . \tag{1.4}$$

Важно отметить, что любая система линейных матричных неравенств может быть записана как одно линейное матричное неравенство. А именно, (1.4) выполняется тогда и только тогда, когда

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{pmatrix} > 0 .$$

Это следует из того факта, что множество собственных значений матрицы $F(x)$ есть объединение множеств собственных значений матриц $F_1(x), \dots, F_k(x)$, и минимальное

собственное значение матрицы $F(x)$ совпадает с минимумом из всех минимальных собственных чисел матриц $F_i(x), i = 1, \dots, k$. Следовательно, любой x , для которого $F(x) > 0$, также удовлетворяет системе (1.4) и наоборот.

В приложениях встречаются задачи с так называемыми комбинированными ограничениями, которые задаются линейными матричными неравенствами и линейными уравнениями. Например, рассматриваются области, определяемые условиями

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x = Ay + b \end{cases}$$

для произвольного y . Каждое из этих ограничений может быть представлено одним линейным матричным неравенством. Действительно, обобщая эти случаи, рассмотрим условия

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x \in \mathcal{M}, \end{cases} \quad (1.5)$$

где \mathcal{M} – аффинное подмножество \mathcal{R}^n , т.е.

$$\mathcal{M} = x_0 + \mathcal{M}_0 = \{x_0 + m \mid m \in \mathcal{M}_0\},$$

$x_0 \in \mathcal{R}^n$ и \mathcal{M}_0 – подпространство \mathcal{R}^n . Пусть $\{e_1, \dots, e_k\}$ – базис в \mathcal{M}_0 и пусть, как и в (1.2), $F(x) = F_0 + L(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 < F(x) &= F_0 + L(x_0 + \sum_{j=1}^k x_j e_j) = F_0 + L(x_0) + \sum_{j=1}^k x_j L(e_j) = \\ &= \bar{F}_0 + x_1 \bar{F}_1 + \dots + x_k \bar{F}_k = \bar{F}(\bar{x}), \end{aligned}$$

где $\bar{F}_0 = F_0 + L(x_0)$, $\bar{F}_j = L(e_j)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$. Таким образом, $x \in \mathcal{R}^n$ удовлетворяет (1.5) тогда и только тогда, когда $\bar{F}(\bar{x}) > 0$, где x и \bar{x} связаны соотношением $x = x_0 + \sum_{j=1}^k x_j e_j$.

Следующее свойство линейных матричных неравенств очень важно для преобразования нелинейных неравенств в эквивалентные им линейные неравенства. Пусть симметрическая и невырожденная матрица M представлена в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{pmatrix}$$

и блок $M_{11} = M_{11}^T$ невырожденный. Сделаем следующие выкладки

$$\begin{aligned} x^T M x &= x_1^T M_{11} x_1 + 2x_1^T M_{12} x_2 + x_2^T M_{22} x_2 = \\ &= (x_1 + M_{11}^{-1} M_{12} x_2)^T M_{11} (x_1 + M_{11}^{-1} M_{12} x_2) + x_2^T (M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12}) x_2, \end{aligned}$$

где разбиение $x = \text{col}(x_1, x_2)$ соответствует разбиению матрицы M . Отсюда следует, что $M > 0$ тогда и только тогда, когда $M_{11} > 0$ и $S = M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} > 0$. Это утверждение носит название леммы Шура (см. леммы А.2 и А.3 в Приложении), а матрица S называется дополнением по Шуру матрицы M_{11} в матрице M . Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение для линейных матричных неравенств.

Утверждение 1.1 Пусть $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S}^n$ – аффинная функция, которая представлена в блочном виде

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{12}^T(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где $F_{22}(x)$ квадратная. Неравенство $F(x) > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$F_{22}(x) > 0, \quad F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{12}^T(x) > 0. \quad (1.6)$$

Отметим, что второе неравенство в (1.6) является нелинейным относительно переменных x . Таким образом, используя утверждение 1.1, нелинейные неравенства указанного вида могут быть преобразованы в линейные матричные неравенства. Кроме того, из этого утверждения также следует, что нелинейные неравенства вида (1.6) определяют выпуклые ограничения по переменным x .

В качестве примера преобразования нелинейного матричного неравенства в линейное матричное неравенство рассмотрим следующее квадратичное матричное неравенство Риккати, характерное для задач H_∞ -управления

$$A^T X + XA + XBR^{-1}B^T X + Q < 0. \quad (1.7)$$

Применяя лемму Шура, представим это неравенство в виде

$$\begin{pmatrix} -A^T X - XA - Q & XB \\ B^T X & R \end{pmatrix} > 0.$$

Это означает, что нелинейное неравенство (1.7) является выпуклым по X , что было далеко не очевидно.

Еще один пример: матричное неравенство $X > Y^{-1} > 0$ в силу леммы Шура эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0$$

относительно матриц X и Y .

Глава 2

Основные задачи

Решение многих проблем в теории управления, как будет показано в последующих главах, сводится к решению определенных математических задач, включающих линейные матричные неравенства. Из многообразия таких задач можно выделить три основные, которые эффективно решаются с помощью LMI Toolbox пакета MATLAB.

Задача разрешимости: существует или нет решение x линейного матричного неравенства $F(x) > 0$. Если нет, то задача называется неразрешимой.

Задача оптимизации с линейными матричными ограничениями: для $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$ вычислить

$$\mu_{opt} = \inf_{F(x) > 0} f(x) .$$

Эта задача включает нахождение ε -оптимального решения x , для которого $F(x) > 0$ и $f(x) \leq \mu_{opt} + \varepsilon$ с заданной точностью ε .

Задача на обобщенное собственное значение: найти минимальное $\lambda \in \mathcal{R}$, для которого

$$\begin{cases} \lambda F(x) - G(x) > 0 , \\ F(x) > 0 , \\ H(x) > 0 , \end{cases}$$

где $F(x), G(x), H(x) \in \mathcal{S}^n$ – аффинные функции.

Приведем несколько проблем, для решения которых применяются сформулированные задачи.

Пример 2.1 Согласно теореме Ляпунова (см. лемму E.1) линейная динамическая система

$$\dot{x} = Ax , \tag{2.1}$$

где $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, асимптотически устойчива, т.е. все собственные значения матрицы A лежат в открытой левой комплексной полуплоскости, тогда и только тогда, когда существует $X = X^T > 0$ такая, что

$$A^T X + X A < 0 .$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость системы (2.1) эквивалентна разрешимости следующего линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -A^T X - X A \end{pmatrix} > 0 .$$

Пример 2.2 Согласно теореме Ляпунова (см. лемму Е.2) линейная дискретная динамическая система

$$x_{t+1} = Ax_t \quad (2.2)$$

асимптотически устойчива, т.е. все собственные значения матрицы A лежат в открытом единичном круге комплексной плоскости, тогда и только тогда, когда существует $X = X^T > 0$ такая, что

$$A^T X A - X < 0 .$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость системы (2.2) эквивалентна разрешимости следующего линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X - A^T X A \end{pmatrix} > 0 .$$

Пример 2.3 Уровнем гашения возмущений в устойчивом линейном объекте

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv , & x(0) &= 0 , \\ z &= Cx + Dv , \end{aligned}$$

на который действует ограниченное по норме L_2 возмущение $v(t)$, т.е.

$$\|v\| = \left(\int_0^{\infty} |v(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty ,$$

называется величина

$$\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} .$$

Как будет показано в разделе 8.1, уровень гашения возмущений равен минимальному γ , для которого справедливо линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 .$$

Пример 2.4 Пусть $F(x) = F^T(x) > 0$ – аффинная функция. Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x) = \lambda_{\max}(F(x))$.

Так как $\lambda_{\max}(F(x)) = \lambda_{\max}^{1/2}(F^T(x)F(x))$, то, применяя лемму А.2, имеем

$$\lambda_{\max}(F^T(x)F(x)) < \gamma \iff \gamma I - F^T(x)F(x) > 0 \iff \begin{pmatrix} \gamma I & F^T(x) \\ F(x) & I \end{pmatrix} > 0 .$$

Если определить

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \gamma \end{pmatrix} , \quad \bar{F}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \gamma I & F^T(x) \\ F(x) & I \end{pmatrix} , \quad \bar{f}(\bar{x}) = \gamma ,$$

то $\bar{F}(\bar{x})$ – аффинная функция, и задача минимизации максимального собственного значения матрицы $F(x)$ эквивалентна минимизации функции $\bar{f}(\bar{x})$ при ограничениях $\bar{F}(\bar{x}) > 0$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче оптимизации с линейными матричными ограничениями.

Пример 2.5 Рассмотрим задачу нахождения степени устойчивости асимптотически устойчивой линейной системы

$$\dot{x} = Ax .$$

Эта задача сводится к поиску минимального значения $\lambda_* < 0$, при котором выполняется неравенство

$$A^T X + XA - \lambda X < 0$$

для $X = X^T > 0$, т.е. к задаче на обобщенное собственное значение. При этом степень устойчивости будет равна $|\lambda_*|/2$.

Пример 2.6 Для устойчивого объекта

$$\dot{x} = Ax + Fv , \quad x(0) = 0$$

рассмотрим обратную задачу наилучшего возмущения: когда возмущение

$$v = \gamma^{-2} Hx ,$$

где H и $\gamma > 0$ – заданные матрица и число, является наилучшим по отношению к функционалу вида

$$J(v) = \int_0^{\infty} (x^T Qx - \gamma^2 v^T v) dt \quad (2.3)$$

при некоторой $Q = Q^T \geq 0$ (подробнее об обратных задачах наилучшего возмущения и минимаксного управления см. [16, 68, 69]). Напомним, что наилучшее возмущение, максимизирующее функционал (2.3) с заданной матрицей $Q = Q^T \geq 0$, определяется выражением

$$v_* = \gamma^{-2} F^T Xx ,$$

в котором матрица $X = X^T \geq 0$ – стабилизирующее решение уравнения Риккати

$$A^T X + XA + \gamma^{-2} XFF^T X + Q = 0 ,$$

т.е. такое, что матрица $A + \gamma^{-2} FFF^T X$ гурвицева. Таким образом, рассматриваемая обратная задача эквивалентна задаче разрешимости линейных матричных неравенств

$$A^T X + XA + \gamma^{-2} H^T H \leq 0 ,$$

$$(A + \gamma^{-2} FH)^T X_1 + X_1(A + \gamma^{-2} FH) < 0$$

относительно матрицы $X_1 = X_1^T > 0$ и матрицы $X = X^T \geq 0$, удовлетворяющей линейному матричному уравнению

$$F^T X = H ,$$

т.е. задаче разрешимости комбинированных линейных матричных неравенств.

Глава 3

Неравенство $\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0$

3.1 Условия разрешимости

В задачах синтеза регуляторов, рассматриваемых в данной книге, ключевую роль будет играть линейное матричное неравенство вида

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (3.1)$$

в котором Ψ – заданная симметрическая матрица порядка $(n \times n)$, а P и Q – заданные матрицы порядков $(l \times n)$ и $(k \times n)$ соответственно. Нас будут интересовать условия разрешимости этого неравенства относительно неизвестной матрицы Θ порядка $(k \times l)$.

Если ранги матриц P и Q равны n , т.е. эти матрицы имеют линейно независимые столбцы, то неравенство (3.1) всегда разрешимо. В самом деле, в этом случае уравнение $Q^T \Theta P = K$ разрешимо относительно матрицы Θ при любой матрице K соответствующего порядка (см. лемму В.2), а неравенство (3.1) выполняется, например, при $K < -(1/2)\Psi$. В этой главе будут получены условия разрешимости неравенства (3.1) и представлены в параметрической форме все его решения в двух других случаях: ранг одной из матриц P или Q равен n , а ранг другой – меньше n ; ранги обеих матриц P и Q меньше n .

Утверждение 3.1 Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l \times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k \times n}$, причем $\text{rank } P = n$ и $\text{rank } Q = r_Q < n$. Линейное матричное неравенство (3.1) разрешимо относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k \times l}$ тогда и только тогда, когда

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0, \quad (3.2)$$

где столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q .

Доказательство. Необходимость. Умножив (3.1) слева на W_Q^T и справа на W_Q , получим (3.2).

Достаточность. Разложим пространство \mathcal{R}^n в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(Q^T) \oplus \mathcal{N}(Q),$$

где $\mathcal{R}(Q^T)$ – образ матрицы Q^T , а $\mathcal{N}(Q)$ – ядро матрицы Q , и выберем соответствующий базис. В этом базисе Q будет соответствовать матрица следующего блочного вида

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где Q_1 имеет размеры $k \times r_Q$, а нулевой блок $-k \times (n - r_Q)$. Представим также P и Ψ в этом базисе в виде

$$P = (P_1 \ P_2), \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица W_Q должна быть решением уравнения $QW_Q = 0$ и иметь максимальный ранг, поэтому, учитывая структуру матрицы Q , возьмем $W_Q^T = (0 \ I)$. Тогда условие $W_Q^T \Psi W_Q < 0$ сведется к неравенству $\Psi_{22} < 0$, а неравенство (3.1) примет вид

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} + Q_1^T \Theta P_1 + P_1^T \Theta^T Q_1 & \Psi_{12} + Q_1^T \Theta P_2 \\ \Psi_{12}^T + P_2^T \Theta^T Q_1 & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.3)$$

Для заданной матрицы $K = (K_1 \ K_2)$ рассмотрим следующее матричное уравнение относительно матрицы Θ

$$Q_1^T \Theta (P_1 \ P_2) = (K_1 \ K_2). \quad (3.4)$$

Согласно лемме В.2 это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеют решения Y и Z следующие два матричных уравнения

$$Q_1^T Y = K, \quad Z(P_1 \ P_2) = K.$$

Так как $(r_Q \times k)$ -матрица Q_1^T имеет ранг $r_Q \leq k$ и $(l \times n)$ -матрица $(P_1 \ P_2)$ имеет ранг n , то оба эти уравнения разрешимы. Следовательно, для любых $K_i, i = 1, 2$ найдется матрица Θ такая, что верно (3.4). Таким образом, матрица в левой части (3.3) имеет отрицательно определенный блок Ψ_{22} , а все ее остальные блоки могут быть сделаны произвольными за счет соответствующего выбора матрицы Θ . Выбирая их такими, чтобы выполнялись условия леммы А.2, убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

Утверждение 3.2 Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l \times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k \times n}$, причем $\text{rank } P = r_P < n$ и $\text{rank } Q = r_Q < n$. Линейное матричное неравенство (3.1) разрешимо относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k \times l}$ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \Psi W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0, \quad (3.5)$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис ядра матрицы P , а столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q .

Доказательство. Необходимость. Умножив (3.1) сначала слева на W_P^T и справа на W_P , а затем слева на W_Q^T и справа на W_Q , получим (3.5).

Достаточность. Разложим пространство \mathcal{R}^n в прямую сумму

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^n = & \{ \mathcal{N}(P) \setminus [\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)] \} \oplus [\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)] \oplus \\ & \oplus \{ \mathcal{N}(Q) \setminus [\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)] \} \oplus \mathcal{M}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матриц P и Q , а \mathcal{M} – дополнение $\mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$ до \mathcal{R}^n , и выберем соответствующий базис. В этом базисе P и Q будут иметь следующий блочный вид

$$P = (0 \ 0 \ P_1 \ P_2), \quad Q = (Q_1 \ 0 \ 0 \ Q_2).$$

Представим также Ψ в этом базисе в виде $\Psi = (\Psi_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, что в качестве матриц W_P и W_Q могут быть взяты

$$W_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и тогда условия (3.5) сводятся к неравенствам

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{23}^T & \Psi_{33} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.6)$$

Требуется теперь установить разрешимость относительно Θ матричного неравенства (3.1), которое принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} + K_{11} & \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{13}^T + K_{11}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} & \Psi_{34} + K_{21}^T \\ \Psi_{14}^T + K_{12}^T & \Psi_{24}^T & \Psi_{34}^T + K_{21}^T & \Psi_{44} + K_{22} + K_{22}^T \end{pmatrix} < 0, \quad (3.7)$$

где $K_{ij} = Q_i^T \Theta P_j$, $i, j = 1, 2$.

Покажем сначала, что матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \Theta (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

разрешимо относительно Θ для любой соответствующего размера матрицы в правой части. Действительно, согласно лемме В.2 для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно разрешимости относительно Y и Z следующих двух уравнений

$$\begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad Z (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $(k \times r_Q)$ -матрица $(Q_1 \ Q_2)$ имеет ранг $r_Q \leq k$ и $(l \times r_P)$ -матрица $(P_1 \ P_2)$ имеет ранг $r_P \leq l$, то оба эти уравнения разрешимы. Следовательно, для любых K_{ij} , $i, j = 1, 2$ найдется матрица Θ такая, что верно (3.8).

Обозначим

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} + K_{11} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{13}^T + K_{11}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} \end{pmatrix}$$

левую верхнюю (3×3) -блочную подматрицу матрицы в левой части (3.7). Тогда согласно лемме А.2 для выполнения (3.7) необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\Pi < 0, \quad (\Psi_{44} + K_{22} + K_{22}^T) - \begin{pmatrix} \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{24} \\ \Psi_{34} + K_{21}^T \end{pmatrix}^T \Pi^{-1} \begin{pmatrix} \Psi_{14} + K_{12} \\ \Psi_{24} \\ \Psi_{34} + K_{21}^T \end{pmatrix} < 0.$$

Выполнение второго из этих неравенств при данных K_{11}, K_{12}, K_{21} всегда может быть обеспечено за счет соответствующего выбора K_{22} . Поэтому осталось показать, что $\Pi < 0$ при некоторой K_{11} .

Для этого сделаем следующие преобразования квадратичной формы с матрицей Π при $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} x^T \Pi x &= (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1)^T \Psi_{22} (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1) + \\ &+ x_1^T (\Psi_{11} - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T) x_1 + 2x_1^T (\Psi_{13} + K_{11}^T) x_3 + 2x_2^T \Psi_{23} x_3 + x_3^T \Psi_{33} x_3 = \\ &= (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} x_3)^T \Psi_{22} (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} x_3) + \\ &+ x_1^T (\Psi_{11} - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T) x_1 + x_3^T (\Psi_{33} - \Psi_{23}^T \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23}) x_3 + \\ &+ 2x_1^T (\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23}) x_3 . \end{aligned}$$

Представим полученное выражение в виде

$$\begin{aligned} x^T \Pi x &= (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} x_3)^T \Psi_{22} (x_2 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T x_1 + \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} x_3) + \\ &+ \begin{pmatrix} x_1^T & x_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{12}^T & \Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} \\ (\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23})^T & \Psi_{33} - \Psi_{23}^T \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Первое слагаемое этого выражения неположительно, т.к. в силу (3.6) и леммы А.2 имеем $\Psi_{22} < 0$, а в матрице, определяющей второе слагаемое, диагональные блоки – отрицательно определенные матрицы в силу (3.6). Ясно, что за счет выбора K_{11} , положив, например,

$$\Psi_{13} + K_{11}^T - \Psi_{12} \Psi_{22}^{-1} \Psi_{23} = 0 ,$$

все это выражение может быть сделано отрицательным для любого ненулевого x . Тем самым, справедливость утверждения 3.2 доказана.

Отметим, что с учетом леммы А.8 условия (3.5) разрешимости линейного матричного неравенства (3.1) относительно матрицы Θ могут быть эквивалентно выражены неравенствами

$$\Psi - \mu P^T P < 0 , \quad \Psi - \mu Q^T Q < 0 , \quad (3.9)$$

которые должны выполняться при некотором $\mu > 0$.

3.2 Параметризация всех решений

Пусть теперь условия, сформулированные в утверждении 3.2, выполняются и неравенство (3.1) разрешимо. Представим $P = P_L P_R$ и $Q = Q_L Q_R$ в виде произведения множителей полного ранга, взяв, например, в качестве столбцов левых сомножителей любые r_P и r_Q линейно независимых столбцов матриц P и Q соответственно, через которые линейно выражаются все остальные столбцы. Тогда произвольный j -й столбец, скажем, матрицы P будет линейной комбинацией столбцов матрицы P_L с коэффициентами, образующими j -й столбец матрицы P_R . Так как сомножители имеют максимальный ранги, то матрицы $P_L^T P_L$, $P_R P_R^T$, $Q_L^T Q_L$, $Q_R Q_R^T$ являются невырожденными. Общий вид всех решений неравенства (3.1) в параметрической форме дается в следующем утверждении.

Утверждение 3.3 Пусть даны симметрическая матрица $\Psi = \Psi^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l \times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k \times n}$, причем $\text{rank } P = r_P < n$ и $\text{rank } Q = r_Q < n$. Пусть также выполнены условия

$$W_P^T \Psi W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0, \quad (3.10)$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис ядра матрицы P , а столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q . Тогда существуют такие соответствующего размера матрицы Z и L , причем $\|L\| < 1$, а также число $\mu > 0$, что произвольное решение линейного матричного неравенства (3.1) представляется в виде

$$\Theta = (Q_L^T)^+ K P_L^+ + Z - (Q_L^T)^+ Q_L^T Z P_L P_L^+, \quad (3.11)$$

где

$$K = \mu S^{1/2} L (P_R \Phi P_R^T)^{-1/2} - \mu Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1},$$

$$\Phi = (\mu Q_R^T Q_R - \Psi)^{-1} > 0,$$

$$S = \mu^{-1} I - Q_R [\Phi - \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} P_R \Phi] Q_R^T,$$

а верхний индекс $+$ отвечает операции псевдообращения.

Доказательство. Пусть Θ – решение неравенства (3.1). Тогда матрица $K = Q_L^T \Theta P_L$ удовлетворяет неравенству

$$\Psi + P_R^T K^T Q_R + Q_R^T K P_R < 0,$$

и, значит, существует такое достаточно большое $\mu > 0$, что выполняется неравенство

$$\Psi + P_R^T K^T Q_R + Q_R^T K P_R + \mu^{-1} P_R^T K^T K P_R < 0.$$

Преобразуем это неравенство к виду

$$\mu(\mu^{-1} K P_R + Q_R)^T (\mu^{-1} K P_R + Q_R) + (\Psi - \mu Q_R^T Q_R) < 0, \quad (3.12)$$

обозначим $\mu Q_R^T Q_R - \Psi = \Phi^{-1}$ и покажем, что эта матрица положительно определенная.

Из второго условия (3.10) следует, что $x^T \Psi x < 0$ для всех x , принадлежащих $\mathcal{N}(Q)$ – ядру матрицы Q . Так как $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(Q^T Q)$ и из $x^T Q_R^T Q_L^T Q_L Q_R x = 0$ в силу того, что матрица $Q_L^T Q_L$ невырожденная, следует $Q_R x = 0$, то $x^T \Psi x < 0$ для всех x , удовлетворяющих уравнению $Q_R x = 0$. Поэтому, применяя лемму А.8, получим, что для достаточно большого $\mu > 0$ имеем $\Psi - \mu Q_R^T Q_R < 0$, т.е. введенная выше матрица Φ положительно определенная.

Согласно лемме А.2 два неравенства $\Phi > 0$ и (3.12) эквивалентны неравенству

$$\begin{pmatrix} \mu^{-1} I & \mu^{-1} K P_R + Q_R \\ (\mu^{-1} K P_R + Q_R)^T & \Phi^{-1} \end{pmatrix} > 0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\mu^{-1} I > (\mu^{-1} K P_R + Q_R) \Phi (\mu^{-1} K P_R + Q_R)^T.$$

Раскрывая скобки в правой части этого неравенства и "выделяя полный квадрат", преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} & [\mu^{-1} K + Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1}] (P_R \Phi P_R^T) [\mu^{-1} K + Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1}]^T < \\ & < \mu^{-1} I - Q_R [\Phi - \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} P_R \Phi] Q_R^T. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \mu^{-1}K + Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1}, \\ S &= \mu^{-1}I - Q_R [\Phi - \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1} P_R \Phi] Q_R^T,\end{aligned}\tag{3.13}$$

запишем последнее неравенство как

$$\bar{L} (P_R \Phi P_R^T) \bar{L}^T < S.\tag{3.14}$$

Покажем, что матрица в правой части этого неравенства является положительно определенной. Действительно, неравенство $S > 0$ эквивалентно неравенству

$$\mu^{-1}I - Q_R [\Phi - \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T + \nu^{-1}I)^{-1} P_R \Phi] Q_R^T > 0$$

при достаточно большом $\nu > 0$. Учитывая лемму А.5 об обращении матрицы специального вида, перепишем это неравенство в виде

$$\mu^{-1}I > Q_R (\Phi^{-1} + \nu P_R^T P_R)^{-1} Q_R^T.$$

С учетом леммы А.2 это неравенство, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\Phi^{-1} + \nu P_R^T P_R - \mu Q_R^T Q_R = \nu P_R^T P_R - \Psi > 0,$$

которое выполняется при достаточно большом $\nu > 0$ в силу первого из условий (3.10) и леммы А.8.

Таким образом, исходное неравенство (3.1) эквивалентно неравенству (3.14). Обозначая

$$L = S^{-1/2} \bar{L} (P_R \Phi P_R^T)^{1/2},$$

запишем неравенство (3.14) как

$$\|L\| < 1.$$

Из (3.13) найдем

$$K = \mu S^{1/2} L (P_R \Phi P_R^T)^{-1/2} - \mu Q_R \Phi P_R^T (P_R \Phi P_R^T)^{-1}.$$

Наконец, так как $K = Q_L^T \Theta P_L$, то с учетом того, что матрицы P_L и Q_L имеют линейно независимые столбцы и, следовательно (см. Приложение),

$$P_L^+ = (P_L^T P_L)^{-1} P_L^T, \quad (Q_L^T)^+ = Q_L (Q_L^T Q_L)^{-1},$$

непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\Theta = (Q_L^T)^+ K P_L^+ + Z - (Q_L^T)^+ Q_L^T Z P_L P_L^+$$

для некоторой матрицы Z размера матрицы Θ . Таким образом, мы установили, что формула (3.11) задает все решения неравенства (3.1), и утверждение доказано.

Согласно этому утверждению для получения какого-либо решения неравенства (3.1) требуется выбрать параметр $\mu > 0$ из условия $\mu Q_R^T Q_R - \Psi > 0$, выбрать матрицу L из условия $\|L\| < 1$, задать матрицу Z и вычислить Θ по формуле (3.11). Заметим, что в дальнейшем указанная параметризация не используется, т.к. при синтезе законов управления нас будет интересовать одно из решений рассматриваемого неравенства, вычисляемое с помощью команды `basidmi` в LMI Toolbox MATLAB.

3.3 Система неравенств

В некоторых задачах управления таких, например, как одновременная стабилизация нескольких объектов или гашение возмущений при одновременном ограничении нескольких функционалов, проблема синтеза сводится к проверке разрешимости системы линейных матричных неравенств

$$\Psi_i + P_i^T \Theta^T Q_i + Q_i^T \Theta P_i < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

в которых Ψ_i – заданные симметрические матрицы порядков $(n_i \times n_i)$, а P_i и Q_i – заданные матрицы порядков $(l \times n_i)$ и $(k \times n_i)$ соответственно. Нас будут интересовать условия разрешимости этой системы неравенств относительно неизвестной матрицы Θ порядка $(k \times l)$.

Отметим, что система (3.15) не может быть представлена в виде одного неравенства такого типа с матрицей Θ общего вида, а значит, к этой системе не могут быть применены утверждения 3.1 и 3.2. Непосредственное обобщение этих утверждений для системы (3.15), состоящее в том, что она разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$W_{P_i}^T \Psi_i W_{P_i} < 0, \quad W_{Q_i}^T \Psi_i W_{Q_i} < 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

является невозможным, как показывает следующий контрпример [73].

Пусть

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_i = P = (0 \ 1), \quad Q_i = Q = (1 \ 0), \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, что $W_P = Q^T$, $W_Q = P^T$ и

$$W_P^T \Psi_i W_P = W_Q^T \Psi_i W_Q = -1 < 0, \quad i = 1, 2.$$

Если бы обобщение утверждения 3.2 для данной системы неравенств было справедливо, то из последнего неравенства следовало бы, что существует параметр Θ , для которого справедливы неравенства

$$\Psi_1 + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P = \begin{pmatrix} -1 & \Theta + 4 \\ \Theta + 4 & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

$$\Psi_2 + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P = \begin{pmatrix} -1 & \Theta - 4 \\ \Theta - 4 & -1 \end{pmatrix} < 0.$$

Однако, первое неравенство эквивалентно неравенству $|\Theta + 4| < 1$, а второе – неравенству $|\Theta - 4| < 1$, и не существует Θ , удовлетворяющего обоим этим неравенствам.

Вместе с тем, в [73] были выделены два частных случая, для которых некоторое обобщение утверждений 3.1 и 3.2 возможно. Первый из них относится к системе неравенств (3.15), в которой $P_i = P$ и $Q_i = Q$ для всех $i = 1, \dots, N$, т.е. к системе

$$\Psi_i + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

и требует введения некоторой дополнительной матричной переменной Ψ_0 , мажорирующей все матрицы Ψ_i .

Утверждение 3.4 Пусть даны симметрические матрицы $\Psi_i = \Psi_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ и две матрицы $P \in \mathcal{R}^{l \times n}$ и $Q \in \mathcal{R}^{k \times n}$, причем $\text{rank } P = r_P < n$ и $\text{rank } Q = r_Q < n$. Система линейных матричных неравенств (3.16) разрешима относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k \times l}$ тогда и только тогда, когда существует симметрическая матрица $\Psi_0 \geq \Psi_i$, $i = 1, \dots, N$ такая, что

$$W_P^T \Psi_0 W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi_0 W_Q < 0, \quad (3.17)$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис ядра матрицы P , а столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q .

Доказательство. Пусть условия (3.17) выполнены. Тогда согласно утверждению 3.2 существует такая матрица Θ , что

$$\Psi_0 + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0.$$

Так как $\Psi_0 \geq \Psi_i$, $i = 1, \dots, N$, то

$$\Psi_i + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P \leq \Psi_0 + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0.$$

Пусть теперь система неравенств (3.16) имеет решение Θ . Тогда существует $\varepsilon > 0$, что

$$\Psi_i + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P + \varepsilon I < 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Если определить

$$\Psi_0 = -(P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P + \varepsilon I),$$

то из последнего неравенства следует, что $\Psi_0 \geq \Psi_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Кроме того, так как

$$\Psi_0 + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P = -\varepsilon I < 0,$$

то, умножая это неравенство сначала слева на W_P^T и справа на W_P , а затем слева на W_Q^T и справа на W_Q , получим (3.17).

Сделаем одно замечание. Если в системе (3.16) одна из матриц P или Q полного ранга (например, Q), то утверждение 3.4 остается справедливым при замене неравенств в (3.17) на одно неравенство

$$W_P^T \Psi_0 W_P < 0. \quad (3.18)$$

Второй частный случай касается системы (3.16), в которой одна из матриц P или Q совпадает с единичной матрицей (без ограничения общности положим $Q = I$), т.е. системы неравенств

$$\Psi_i + P^T \Theta^T + \Theta P < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

Для этого случая наряду с условием (3.18) можно привести другие необходимые и достаточные условия разрешимости этой системы, не включающие новых переменных.

Утверждение 3.5 Пусть даны симметрические матрицы $\Psi_i = \Psi_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ и матрица $P \in \mathcal{R}^{l \times n}$, причем $\text{rank } P = r_P < n$. Система линейных матричных неравенств (3.19) разрешима относительно матрицы $\Theta \in \mathcal{R}^{k \times l}$ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \Psi_i W_P < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Доказательство. Необходимость условия (3.20) доказывается так же, как и в утверждении 3.1. Для доказательства достаточности заметим, что согласно лемме А.8 неравенства (3.20) эквивалентны неравенствам

$$\Psi_i - \mu_i P^T P < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

для некоторых $\mu_i > 0$. Обозначим $\mu = \max_i \mu_i$. Тогда

$$\Psi_i - \mu P^T P < 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задавая $\Theta = -(1/2)\mu P^T$, получим

$$\Psi_i + P^T \Theta^T + \Theta P < 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Глава 4

Решение линейных матричных неравенств в пакете MATLAB

В основу численных методов решения линейных матричных неравенств положены методы выпуклой оптимизации. В пакете MATLAB используются так называемые методы внутренней точки (interior point methods), разработанные в [71]. Изложим основную идею этих методов на примере задачи минимизации выпуклой функции $f(x)$ на множестве $\mathcal{F} = \{x : F(x) > 0\}$, определяемом линейным матричным неравенством. Эта задача условной оптимизации сводится к задаче безусловной оптимизации функции

$$f_r(x) = rf(x) + \phi(x) ,$$

где $r > 0$ - штрафной параметр, а штрафная функция определяется следующим образом

$$\phi(x) = \begin{cases} \log \det F^{-1}(x), & x \in \mathcal{F} \\ \infty, & x \notin \mathcal{F} \end{cases} .$$

Решение задачи безусловной оптимизации представляет собой итерационный процесс, на n -й итерации которого применяется метод Ньютона-Рафсона для нахождения минимума x_n функции $f_r(x)$ при $r = r_n$. Для соответствующим образом построенной последовательности $r_n \rightarrow \infty$ последовательность x_n стремится к точке x_* , являющейся решением исходной задачи условной оптимизации.

Задача разрешимости линейного матричного неравенства $F(x) < 0$ сводится к минимизации параметра t , для которого выполняется линейное матричное неравенство $F(x) - tI \leq 0$. Если $t_{min} \leq 0$, то исходное линейное матричное неравенство разрешимо и строго разрешимо, если $t_{min} < 0$; в противном случае, $t_{min} > 0$, неравенство неразрешимо. Для численного решения используется команда

$$[tmin, xfeas]=feasp(lmisys, options, target) ,$$

в которой $tmin$ и $xfeas$ суть минимальное значение параметра t и отвечающее ему решение линейного матричного неравенства. Аргументы команды `feasp`: `lmisys` – описание линейного матричного неравенства (размерность и структура матричных переменных, задание известных матриц); `options` – описание параметров алгоритма оптимизации; `target` – назначаемое значение параметра $tmin$ такое, что при $t < target$ алгоритм оптимизации останавливается (по умолчанию `target=0`).

Для решения задачи минимизации линейной функции при ограничении, задаваемом линейным матричным неравенством, используется команда

$$[\text{copt}, \text{хопт}] = \text{mincx}(\text{lmsys}, c, \text{options}, \text{xinit}, \text{target}) ,$$

в которой copt и хопт суть минимальное значение минимизируемой линейной функции и отвечающее ей значение переменных x . Аргументы команды `mincx`: `lmsys` – описание линейного матричного неравенства; `c` – описание вектора c , определяющего минимизируемую линейную функцию; `options` – описание параметров алгоритма оптимизации; `xinit` – вектор начального приближения для хопт (удачное задание этого вектора может ускорить получение результата); `target` – назначаемое значение параметра для величины $c^T x$ такое, что при $c^T x < \text{target}$ алгоритм оптимизации останавливается.

Для решения задачи на обобщенное собственное значение используется команда

$$[\text{lopt}, \text{хопт}] = \text{gevp}(\text{lmsys}, \text{nfc}, \text{options}, \text{linit}, \text{xinit}, \text{target}) ,$$

в которой lopt и хопт суть минимальное обобщенное собственное значение и отвечающее ему значение переменных x . Аргументы команды `gevp`: `lmsys` – описание линейных матричных неравенств; `nfc` – число ограничений, задаваемых линейными матричными неравенствами; `options` – описание параметров алгоритма оптимизации; `linit` и `xinit` – начальные приближения для lopt и хопт ; `target` – назначаемое значение параметра для величины λ такое, что при $\lambda \leq \text{target}$ алгоритм оптимизации останавливается.

Для решения неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 ,$$

которое неоднократно будет использоваться в дальнейшем изложении, используется команда

$$Xc = \text{basiclmi}(\Psi, Q, P) ,$$

результатом выполнения которой является решение Xc . Добавление аргумента ' $Xmin$ ' в команду

$$X = \text{basiclmi}(\Psi, Q, P, 'Xmin')$$

позволяет найти решение этого неравенства, имеющее минимальную норму.

Отметим также, что матрица W_M , столбцы которой образуют базис ядра матрицы M , находится с помощью команды

$$W_M = \text{null}(M) .$$

Все детали относительно использования этих и других команд в LMI Toolbox содержатся в [59].

Часть II

Синтез законов управления

Глава 5

Стабилизация

5.1 Стабилизация по состоянию

Задача стабилизации по состоянию линейного стационарного динамического объекта, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.1)$$

где $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, состоит в выборе закона управления из класса линейных обратных связей по состоянию вида

$$u = \Theta x, \quad (5.2)$$

где Θ – матрица параметров регулятора соответствующего порядка, при котором состояние равновесия $x = 0$ замкнутой системы (5.1), (5.2) является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Классический подход к синтезу линейных обратных связей в пространстве состояний, во всяком случае для управляемой пары (A, B) (см. Приложение D о свойствах управляемости и стабилизируемости линейных объектов), связан с каноническим представлением управляемого объекта и построением модального управления, обеспечивающего заданные собственные значения (моды) матрицы замкнутой системы. Построение модального управления сводится к нахождению характеристического полинома матрицы A , выбору канонического базиса и решению системы линейных уравнений. Вместе с тем, возможен альтернативный путь синтеза стабилизирующих регуляторов, основанный на применении теории линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения, реализованных в пакете MATLAB. Далее на различных примерах и, в частности, на примере задачи управления высотным сооружением будет показано, что алгоритмы синтеза регуляторов, основанные на решении линейных матричных неравенств, оказываются более предпочтительными.

Изложим этот альтернативный подход. Запишем уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x, \quad A_c = A + B\Theta \quad (5.3)$$

и переформулируем задачу стабилизации как существование у этой системы квадратичной функции Ляпунова, т.е. такой $V(x) = x^T X x$ с $X = X^T > 0$, для производной которой в силу системы (5.3) выполняется

$$\dot{V} = x^T (A_c^T X + X A_c) x < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (5.4)$$

Перепишем неравенство (5.4) в виде

$$A^T X + X A + \Theta^T B^T X + X B \Theta < 0, \quad (5.5)$$

или, умножая это неравенство слева и справа на матрицу X^{-1} и обозначая $Y = X^{-1}$, в виде

$$Y A^T + A Y + Y \Theta^T B^T + B \Theta Y < 0, \quad Y > 0. \quad (5.6)$$

Теперь перед нами стоит задача нахождения пары матриц (Y, Θ) , удовлетворяющих матричным неравенствам (5.6). Рассмотрим последовательно два способа ее решения путем приведения нелинейного матричного неравенства к линейным матричным неравенствам, решаемым в пакете MATLAB.

Первый способ состоит в том, чтобы ввести новую матричную переменную $Z = \Theta Y$ и записать неравенства (5.6) в виде линейных матричных неравенств

$$Y A^T + A Y + Z^T B^T + B Z < 0, \quad Y > 0 \quad (5.7)$$

относительно переменных Y и Z . Находя пару (Y, Z) , удовлетворяющую (5.7), вычислим параметры искомой обратной связи $\Theta = Z Y^{-1}$. Таким образом, верно следующее.

Утверждение 5.1 *Объект (5.1) или пара (A, B) стабилизируемы тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства (5.7) разрешимы относительно переменных Y и Z . В случае стабилизируемости параметры линейной обратной связи по состоянию находятся так: $\Theta = Z Y^{-1}$.*

Второй способ состоит в представлении неравенства (5.6) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0$$

с $\Psi = Y A^T + A Y$, $P = Y$, $Q = B^T$. Тогда согласно утверждению 3.1, условия которого выполнены в силу того, что $\det P \neq 0$, это неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$W_{B^T}^T (Y A^T + A Y) W_{B^T} < 0, \quad Y > 0. \quad (5.8)$$

Здесь W_{B^T} обозначает матрицу, столбцы которой составляют базис ядра матрицы B^T , т.е. матрица W_{B^T} удовлетворяет матричному уравнению $B^T W_{B^T} = 0$ и имеет максимальный ранг среди всех его решений. Подставляя решение Y неравенств (5.8) в (5.6), приходим к линейному матричному неравенству относительно параметров Θ , решая которое находим параметры линейной обратной связи. Итак, имеет место следующее.

Утверждение 5.2 *Объект (5.1) стабилизируем тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства (5.8) разрешимы относительно переменной Y . В случае стабилизируемости параметры линейной обратной связи по состоянию находятся как решения линейного матричного неравенства (5.6) с найденным Y относительно переменной Θ .*

Отметим, что с учетом леммы А.8 неравенства (5.8) выполняются при некоторой матрице Y тогда и только тогда, когда разрешимы линейные матричные неравенства

$$Y A^T + A Y - \mu B B^T < 0, \quad Y > 0 \quad (5.9)$$

относительно переменных Y и $\mu > 0$. При выполнении этих неравенств параметры регулятора могут быть выбраны в виде

$$\Theta = -(\mu/2) B^T Y^{-1}. \quad (5.10)$$

Пример 5.1 Стабилизация перевернутого маятника: объект описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u .$$

Введем вектор $x = \text{col}(x_1, x_2)$, где $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, и запишем это уравнение как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u , \end{aligned}$$

т.е. в виде (5.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

В данном случае неравенства (5.7) принимают вид

$$\begin{pmatrix} 2y_{12} & y_{11} + y_{22} + z_1 \\ * & 2(y_{12} + z_2) \end{pmatrix} < 0 , \quad \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ * & y_{22} \end{pmatrix} > 0 , \quad (5.11)$$

где $Z = (z_1 \ z_2)$. Согласно критерию Сильвестра эти неравенства эквивалентны следующей системе нелинейных неравенств:

$$\begin{aligned} y_{12} < 0 , \quad 4y_{12}(y_{12} + z_2) - (y_{11} + y_{22} + z_1)^2 > 0 , \\ y_{11} > 0 , \quad y_{11}y_{22} - y_{12}^2 > 0 , \end{aligned}$$

решение которых представляет определенную трудность. Вместе с тем, Y и Z удовлетворяют линейным матричным неравенствам (5.7) и, следовательно, эти матрицы, а значит, и параметры регулятора Θ , могут быть найдены с использованием LMI Toolbox (команда `feasp`):

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 90,9732 & -30,3244 \\ * & 90,9732 \end{pmatrix} , \quad Z = (-181,9464 \quad -15,1622) , \\ \Theta &= (-2,3125 \quad -0,9375) . \end{aligned}$$

Таким образом, один из регуляторов по состоянию, который стабилизирует перевернутый маятник, задается уравнением

$$u = -2,3125\varphi - 0,9375\dot{\varphi} .$$

Решение этой задачи вторым способом предполагает нахождение матрицы W_{BT} , т.е. матрицы максимального ранга, удовлетворяющей уравнению

$$B^T W_{BT} = 0 .$$

Очевидно, что одним из его решений в данном случае будет

$$W_{BT} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Тогда первое неравенство в (5.8) примет вид

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2y_{12} & y_{11} + y_{22} \\ * & 2y_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2y_{12} < 0 .$$

Теперь, подставляя в (5.6) любую матрицу $Y > 0$, у которой $y_{12} < 0$, получим линейное матричное неравенство относительно Θ . Решение этого неравенства с помощью команды `feasp` дает требуемый результат. Например, для

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \star & 1 \end{pmatrix}$$

было найдено $\Theta = (-3, 4963 \quad -3, 9925)$. Итак, регулятор

$$u = -3, 4963\varphi - 3, 9925\dot{\varphi}$$

также стабилизирует перевернутый маятник.

Конечно, в связи с этим примером может возникнуть законный вопрос: зачем нужны здесь линейные матричные неравенства, когда при линейной обратной связи $u = \Theta_1\varphi + \Theta_2\dot{\varphi}$ характеристический полином замкнутой системы, равный $s^2 - \theta_2s - (1 + \theta_1)$, имеет корни слева от мнимой оси при $\Theta_1 < -1$, $\Theta_2 < 0$. Однако, следующий пример уже не такой тривиальный, и он показывает, что линейные матричные неравенства являются эффективным средством для синтеза регуляторов.

Пример 5.2 Стабилизация двухзвенного перевернутого маятника: объект описывается уравнением

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= 2\varphi_1 - \varphi_2 + u, \\ \ddot{\varphi}_2 &= -2\varphi_1 + 2\varphi_2. \end{aligned}$$

Введем вектор $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $x_3 = \dot{\varphi}_1$, $x_4 = \dot{\varphi}_2$, и запишем это уравнение как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2, \end{aligned}$$

т.е. в виде (5.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи синтеза первым способом дало следующие результаты:

$$Y = \begin{pmatrix} 136,0315 & 95,7016 & -35,9087 & -4,6735 \\ 95,7016 & 97,7976 & 3,4852 & -32,1794 \\ -35,9087 & 3,4852 & 270,8664 & 34,0661 \\ -4,6735 & -32,1794 & 34,0661 & 55,9804 \end{pmatrix},$$

$$Z = (-447,2277 \quad -127,6716 \quad -7,7261 \quad -101,6202),$$

$$\Theta = (-18,0248 \quad 19,9613 \quad -4,0071 \quad 10,5928),$$

а второй способ дал ту же самую матрицу Y и

$$\Theta = (-17,7036 \quad 19,5432 \quad -3,8653 \quad 10,2930).$$

5.2 Одновременная стабилизация нескольких объектов

Задача одновременной стабилизации нескольких объектов заключается в построении единого регулятора, при котором цель управления достигается для каждого из этих объектов. Такая задача возникает, например, при управлении технической системой, которая может функционировать в нескольких режимах.

Пусть имеются N линейных управляемых объектов

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.12)$$

Требуется построить регулятор по состоянию $u = \Theta x$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость всех N замкнутых систем.

Для этого достаточно установить условия существования N квадратичных функций $V_i(x) = x^T X_i x$, где $X_i = X_i^T > 0$, являющихся функциями Ляпунова для каждой из замкнутых систем, т.е. таких, что

$$(A_i + B_i \Theta)^T X_i + X_i (A_i + B_i \Theta) < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.13)$$

В отличие от задачи стабилизации одного объекта в данном случае не удастся сформулировать конструктивные условия разрешимости системы этих неравенств. Однако, если ограничиться единой для всех N систем функцией Ляпунова, т.е. в (5.13) положить $X_i = X$, $i = 1, \dots, N$, то такие условия могут быть получены. В такой постановке эта задача называется задачей квадратичной стабилизации нескольких объектов.

Для ее решения умножим обе части неравенства (5.13) слева и справа на X^{-1} , обозначим $Y = X^{-1}$, $Z = \Theta Y$ и получим систему неравенств

$$Y A_i^T + A_i Y + Z^T B_i^T + B_i Z < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

разрешимость которой и определяет условия квадратичной стабилизируемости нескольких объектов.

Утверждение 5.3 *Для одновременной квадратичной стабилизации объектов (5.12) необходимо и достаточно, чтобы система линейных матричных неравенств (5.14) была разрешима относительно $Y = Y^T > 0$ и Z и в этом случае $\Theta = ZY^{-1}$.*

Другой возможный подход к решению этой задачи мог бы быть основан на приведении системы неравенств (5.13) к виду

$$\Psi_i + Q_i^T \Theta P_i + P_i^T \Theta^T Q_i < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.15)$$

Однако, как отмечалось в разделе 3.3, в общем случае отсутствуют конструктивные условия разрешимости систем неравенств такого вида. Они известны только для частных случаев, описанных в том же разделе. Один из этих случаев в применении к задаче квадратичной стабилизации рассматривается ниже.

Приведем систему неравенств (5.13), когда $B_i = B$, $i = 1, \dots, N$, к виду

$$\Psi_i + Q^T \Theta + \Theta^T Q < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.16)$$

где $\Psi_i = A_i^T X + X A_i$, $Q = B^T X$. Согласно утверждению 3.5 эта система неравенств разрешима относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда $W_Q^T \Psi_i W_Q < 0$, $i = 1, \dots, N$, где W_Q обозначает матрицу, столбцы которой составляют базис нуль-пространства матрицы Q . Так как $W_Q = X^{-1} W_{BT}$, то для одновременной квадратичной стабилизации объектов (5.12) необходимо и достаточно, чтобы система линейных матричных неравенств

$$W_{BT}^T (Y A_i^T + A_i Y) W_{BT} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.17)$$

была разрешима относительно матрицы $Y = Y^T > 0$. В этом случае параметры Θ находятся из решения системы линейных матричных неравенств $Y A_i^T + A_i Y + Y \Theta^T B^T + B \Theta Y < 0$, $i = 1, \dots, N$, в которых Y – решение системы (5.17).

5.3 Стабилизация по выходу

Рассмотрим управляемый объект с неизмеряемым состоянием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (5.18)$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k -го порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $x_r \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.18), (5.19). В частном случае $k = 0$ имеем статический регулятор $u = D_r y$.

Уравнение замкнутой системы (5.18), (5.19) при $k \neq 0$ имеет вид

$$\dot{x}_c = A_c x_c, \quad A_c = \begin{pmatrix} A + B D_r C & B C_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

где $x_c = \text{col}(x, x_r)$.

Переформулируем цель управления в виде существования квадратичной функции Ляпунова $V(x_c) = x_c^T X x_c$, где $X^T = X > 0$, такой, что по любой траектории замкнутой системы имеет место

$$\dot{V} < 0.$$

Это условие эквивалентно следующему матричному неравенству

$$A_c^T X + X A_c < 0. \quad (5.21)$$

Вводя матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

представим матрицу замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + B_0 \Theta C_0, \quad (5.23)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix},$$

выделяя тем самым слагаемое, содержащее матрицу Θ неизвестных параметров регулятора.

Заметим здесь, что синтез стабилизирующего регулятора по выходу k -го порядка в случае $k \neq 0$ сводится к синтезу статического регулятора по выходу для вспомогательного объекта

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_0 \bar{x} + B_0 \bar{u}, \\ \bar{y} &= C_0 \bar{x}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где матрицы A_0 , B_0 и C_0 определены в (5.24). В самом деле, пусть $\bar{u} = \Theta \bar{y}$. Тогда матрица замкнутой системы будет совпадать с матрицей (5.23), и соответствующие блоки матрицы Θ будут определять параметры динамического регулятора k -го порядка.

Представим далее неравенство (5.21) в виде

$$A_0^T X + X A_0 + C_0^T \Theta^T B_0^T X + X B_0 \Theta C_0 < 0 \quad (5.26)$$

или, умножая это неравенство слева и справа на матрицу X^{-1} и обозначая $Y = X^{-1}$, в виде

$$Y A_0^T + A_0 Y + Y C_0^T \Theta^T B_0^T + B_0 \Theta C_0 Y < 0, \quad Y > 0. \quad (5.27)$$

Попытаемся, как и в случае измеряемого состояния, применить два способа решения этого неравенства. В соответствии с первым способом мы должны ввести новую матричную переменную

$$Z = \Theta C_0 Y \quad (5.28)$$

и получить линейные матричные неравенства

$$Y A_0^T + A_0 Y + Z^T B_0^T + B_0 Z < 0, \quad Y > 0$$

относительно Y и Z . Пусть (Y, Z) – некоторое решение этой системы. Тогда для нахождения элементов матрицы Θ мы должны решить систему (5.28), которая представляет собой систему $(n_u + k)(n_x + k)$ уравнений с $(n_u + k)(n_y + k)$ неизвестными. Как правило, размерность вектора состояния превышает размерность вектора измерений ($n_x > n_y$), поэтому для найденной пары (Y, Z) эта система может оказаться несовместной, даже если требуемый регулятор и существует.

Переходим ко второму способу решения рассматриваемой задачи. Представим неравенство (5.26) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0$$

с $\Psi = A_0^T X + X A_0$, $P = C_0$, $Q = B_0^T X$. Тогда согласно утверждению 3.2 это неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$W_{B_0^T X}^T (A_0^T X + X A_0) W_{B_0^T X} < 0, \quad W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} < 0, \quad (5.29)$$

в которых столбцы матриц $W_{B_0^T X}$ и W_{C_0} образуют базисы ядер матриц $B_0^T X$ и C_0 соответственно. Замечая, что $W_{B_0^T X} = X^{-1} W_{B_0^T}$, где столбцы $W_{B_0^T}$ образуют базис ядра матрицы B_0^T , и подставляя это выражение в (5.29), приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 5.4 *Объект (5.18) стабилизируем с помощью регулятора по выходу (5.19) заданного порядка $k \leq n_x$ тогда и только тогда, когда существует $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрица $X = X^T$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{aligned} W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} &< 0, \quad X > 0, \\ W_{B_0^T}^T (X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1}) W_{B_0^T} &< 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Если условия (5.30) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора (5.19) находятся как решения линейного матричного неравенства (5.26) относительно переменной Θ .

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (5.30) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y :

$$\begin{aligned} W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0) W_{C_0} &< 0, \quad X > 0, \\ W_{B_0^T}^T (Y A_0^T + A_0 Y) W_{B_0^T} &< 0, \quad Y > 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Тогда рассматриваемая проблема синтеза стабилизирующих регуляторов по выходу заданного порядка сводится к **задаче А**: найти две взаимнообратные $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрицы $X = X^T$ и Y ($XY = I$), удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.31), или установить, что таких матриц не существует.

В части IV будут приведены алгоритмы решения **задачи А**, применение которых позволяет синтезировать регуляторы по выходу.

Пример 5.3 Стабилизация по выходу перевернутого маятника: объект описывается уравнениями (см. также пример 5.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Требуется синтезировать динамический регулятор по выходу первого порядка вида (5.19).

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ являются четыре параметра регулятора: A_r, B_r, C_r, D_r . Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.26) относительно Θ , в котором

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица X порядка 3×3 в свою очередь должна удовлетворять системе неравенств (5.30), где

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска требуемой матрицы X применялся алгоритм нахождения взаимнообратных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (5.31). В результате были получены

$$X = \begin{pmatrix} 0.7549 & -0.0001 & -0.6737 \\ * & 1.5655 & 1.0186 \\ * & * & 4.1051 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1.6050 & -0.2044 & 0.3141 \\ * & 0.7878 & -0.2290 \\ * & * & 0.3520 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -0.1819 & 0.1197 \\ 0.5487 & -1.5601 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый регулятор описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -0.1819x_r + 0.1197y, \\ u &= 0.5487x_r - 1.5601y, \end{aligned}$$

и матрица замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5601 & 0 & 0.5487 \\ 0.1197 & 0 & -0.1819 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -0.0582 \pm 0.7410i, \quad \lambda_3 = -0.0655,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Пример 5.4 Стабилизация по выходу двухзвенного перевернутого маятника: объект описывается уравнениями (см. также пример 5.2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Требуется синтезировать динамический регулятор по выходу первого порядка вида (5.19).

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ являются шесть параметров регулятора: $A_r, B_r = (B_r^{(1)} B_r^{(2)}), C_r, D_r = (D_r^{(1)} D_r^{(2)})$. Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.26) относительно Θ , в котором

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

а матрица X порядка 5×5 удовлетворяет системе неравенств (5.30), где

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска требуемой матрицы X применялся алгоритм нахождения взаимнообратных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (5.31). В результате были получены

$$X = \begin{pmatrix} 3.4330 & -5.3960 & -0.0027 & -0.7563 & 2.1220 \\ * & 13.1102 & 0.8556 & -1.5000 & -8.2465 \\ * & * & 0.4706 & -0.9072 & -1.0650 \\ * & * & * & 3.2732 & 3.0418 \\ * & * & * & * & 7.0358 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3.0358 & 2.7483 & -0.1135 & -0.3296 & 2.4310 \\ * & 3.2966 & -0.4087 & -1.2210 & 3.5011 \\ * & * & 4.9399 & 1.4611 & -0.3288 \\ * & * & * & 1.8501 & -1.9104 \\ * & * & * & * & 4.2886 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -8.4770 & -3.8599 & 11.3614 \\ -22.7817 & -21.4799 & 40.8038 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый регулятор описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -8.4770x_r - 3.8599y_1 + 11.3614y_2, \\ u &= -22.7817x_r - 21.4799y_1 + 40.8038y_2, \end{aligned}$$

и матрица замкнутой системы имеет собственные значения

$$\lambda_1 = -7.0975, \quad \lambda_{2,3} = -0.2964 \pm 2.6608i, \quad \lambda_4 = -0.7098, \quad \lambda_5 = -0.0770,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Возможен и другой путь использования условий (5.31) для синтеза стабилизирующих регуляторов. Так как

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}$$

и матрицы максимального ранга $W_{B_0^T}$ и W_{C_0} должны удовлетворять уравнениям $B_0^T W_{B_0^T} = 0$ и $C_0 W_{C_0} = 0$ соответственно, то непосредственно проверяется, что мы можем взять

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} W_C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с блочной структурой матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

представим матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Тогда неравенства (5.31) примут вид

$$\begin{aligned} W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A) W_C &< 0, \\ W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11}) W_{B^T} &< 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Заметим, что в силу критерия Сильвестра из условий $X > 0$ и $Y > 0$ следует $X_{11} > 0$ и $Y_{11} > 0$. Таким образом, возникает задача о нахождении положительно определенных матриц X_{11} и Y_{11} , удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (5.34) и являющихся соответствующими блоками взаимнообратных положительно определенных матриц X и Y .

Распишем условие $XY = I$ в блочном виде

$$\begin{aligned} X_{11} Y_{11} + X_{12} Y_{12}^T &= I, \\ X_{11} Y_{12} + X_{12} Y_{22} &= 0, \\ X_{12}^T Y_{11} + X_{22} Y_{12}^T &= 0, \\ X_{12}^T Y_{12} + X_{22} Y_{22}^T &= I. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Из первого уравнения получим

$$I - X_{11} Y_{11} = X_{12} Y_{12}^T.$$

Так как ранг каждой из матриц в правой части этого равенства не превышает k и, следовательно, ранг произведения этих матриц также не превышает k , то отсюда следует условие

$$\text{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \leq k. \quad (5.36)$$

Далее, из формулы Фробениуса для обращения блочной матрицы (см. лемму А.1), следует, что должно выполняться следующее равенство

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T. \quad (5.37)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} \geq 0,$$

которое в силу леммы А.3 выражается в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (5.38)$$

Оказывается (см. лемму А.7), что условия $X_{11} > 0$, $Y_{11} > 0$, (5.36) и (5.38) являются необходимыми и достаточными условиями существования взаимнообратных матриц $X > 0$, $Y > 0$ с данными блоками X_{11} , Y_{11} . В доказательстве леммы А.7 также показано, как при выполнении указанных условий по данным блокам X_{11} , Y_{11} получить соответствующую матрицу X . А именно, применяя лемму А.6 о сингулярном разложении и учитывая, что матрица $X_{11} - Y_{11}^{-1}$ симметрическая и неотрицательно определенная, представим

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = (U_1U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix},$$

где $U_1 \in \mathcal{R}^{n \times r}$, $U_2 \in \mathcal{R}^{n \times (n-r)}$, $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) > 0$. Правую часть этого равенства запишем эквивалентно в виде

$$S \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(k-r) \times r} & I_{k-r} \end{pmatrix} S^T, \quad S = (U_1U_2) \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (k-r)} \end{pmatrix}$$

и выберем

$$X_{12} = S, \quad X_{22} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, 1, \dots, 1). \quad (5.39)$$

Затем выбранная матрица X подставляется в (5.26), и параметры искомого регулятора находятся как решения этого линейного матричного неравенства относительно Θ .

Таким образом, синтез стабилизирующих регуляторов по выходу заданного порядка может быть также осуществлен в результате решения **задачи В**: найти две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.34) и (5.38), а также условию (5.36), или установить, что таких матриц не существует.

Рассмотрим отдельно важный частный случай стабилизирующего регулятора полного порядка, т.е. когда $k = n_x$. Очевидно, что тогда условие (5.36) всегда выполнено. Следовательно, в этом случае рассматриваемая задача связана только с решениями линейных матричных неравенств, а потому является задачей выпуклого программирования. А именно, имеет место следующее.

Утверждение 5.5 *Объект (5.18) стабилизируем с помощью регулятора по выходу (5.19) полного порядка $k = n_x$ тогда и только тогда, когда существуют две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам*

$$\begin{aligned} W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A) W_C &< 0, \\ W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11}) W_{B^T} &< 0, \\ \begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Заметим, что равенство (5.37) может быть также обеспечено при выборе, например, $X_{12} = X_{22} = V > 0$ и в этом случае $V = X_{11} - Y_{11}^{-1}$. Таким образом, если условия (5.40) выполнены, матрицы X_{11} и Y_{11} найдены и $X_{11} - Y_{11}^{-1} > 0$, то параметры Θ регулятора полного порядка могут быть найдены как решения линейного матричного неравенства (5.26), в котором

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & V \\ V & V \end{pmatrix}, \quad V = X_{11} - Y_{11}^{-1}.$$

Пример 5.5 Стабилизация по выходу двухзвенного перевернутого маятника регулятором полного порядка: объект описывается уравнениями (см. также примеры 5.2 и 5.4)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Синтезируем динамический регулятор полного (четвертого) порядка по углу отклонения нижнего маятника.

В данном случае неизвестными элементами матрицы Θ являются двадцать пять параметров регулятора, являющихся элементами матриц $A_r^{(i,j)}$, $i, j = 1, \dots, 4$; $B_r^{(i)}$, $i = 1, \dots, 4$; $C_r^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$; D_r . Они могут быть найдены как решение линейного матричного неравенства (5.26) относительно Θ , в котором матрицы A_0 , B_0 , C_0 определены в (5.32), а блочная матрица X вида (5.33) порядка 8×8 находится следующим образом. Решается система линейных матричных неравенств (5.34) и (5.38), где

$$W_{B^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

относительно неизвестных матриц X_{11} и Y_{11} порядков 4×4 и далее матрицы X_{12} и X_{22} определяются согласно формулам (5.39).

Для данного примера были получены следующие результаты

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 1871.7 & 165.9 & -329.8 & -51.7 \\ * & 544.1 & 44.2 & -340.5 \\ * & * & 1434.8 & 522.1 \\ * & * & * & 445.7 \end{pmatrix},$$

$$X_{12} = \begin{pmatrix} -0.8125 & 0.5733 & 0.0660 & -0.0819 \\ -0.1152 & 0.0103 & -0.8299 & 0.5458 \\ 0.5323 & 0.7412 & -0.2679 & -0.3090 \\ 0.2076 & 0.3491 & 0.4849 & 0.7745 \end{pmatrix},$$

$$X_{22} = \begin{pmatrix} 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0917 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = 10^4 \begin{pmatrix} -6.0558 & 6.3583 & 1.1637 & -58.602 & 16132.0 \\ -5.6231 & 5.9042 & 1.0805 & -54.416 & 14979.0 \\ 1.0674 & -1.1207 & -0.2052 & 10.329 & -2843.0 \\ 0.0180 & -0.0189 & -0.0035 & 0.175 & -48.0 \\ 0.0054 & -0.0056 & -0.0010 & 0.052 & -14.0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица замкнутой системы имеет следующие собственные значения

$$\lambda_1 = -1813.1, \quad \lambda_2 = -5.4, \quad \lambda_{3,4} = -0.4 \pm 0.9i, \\ \lambda_{5,6} = -0.3 \pm 0.6i, \quad \lambda_7 = -1.1, \quad \lambda_8 = -1.2,$$

лежащие слева от мнимой оси.

Полученный регулятор содержит большие по величине коэффициенты, что затрудняет его практическую реализацию. Существует возможность построить регулятор, матрица Θ которого имеет минимальную норму. В этом случае следует использовать команду

$$\Theta = \text{basiclmi}(\Psi, Q, P, X_{\min}).$$

В рассматриваемом примере это приводит к следующему результату

$$\Theta = \begin{pmatrix} 2.2561 & -4.4298 & -6.7194 & 1091.4 & 691.67 \\ 3.2879 & -3.3957 & -7.2738 & 982.0 & -686.88 \\ -0.4228 & 0.3313 & -0.1676 & -185.2 & 360.80 \\ -0.1479 & 0.1586 & 0.0361 & -4.5 & 381.11 \\ -0.0023 & 0.0029 & 0.0066 & -0.9 & -2.16 \end{pmatrix},$$

и тогда матрица замкнутой системы будет иметь следующие собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.5847, & \lambda_2 &= -1.1216, & \lambda_{3,4} &= -0.7534 \pm 2.3388i, \\ \lambda_{5,6} &= -0.5314 \pm 1.9128i, & \lambda_7 &= -0.2723, & \lambda_8 &= -0.2206. \end{aligned}$$

Рассмотрим ещё один важный частный случай – стабилизация с помощью статического регулятора по выходу. В этом случае в уравнениях регулятора (5.19) имеем $A_r = 0$, $B_r = 0$, $C_r = 0$, $\Theta = D_r$, условие (5.38) автоматически выполняется, и формулировка задачи **A** совпадает с формулировкой задачи **B**.

Утверждение 5.6 Объект (5.18) стабилизируем с помощью статического регулятора по выходу тогда и только тогда, когда существуют две взаимнообратные $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам

$$\begin{aligned} W_C^T(A^T X + X A)W_C &< 0, & X &> 0, \\ W_{B^T}^T(Y A^T + A Y)W_{B^T} &< 0, & Y &> 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.4 Стабилизация с использованием наблюдателей

Рассмотрим ещё один подход к синтезу стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу, основанный на построении наблюдателей состояния объекта. Начнём с наблюдателя полного порядка. Для управляемого объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (5.42)$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход, выберем регулятор в форме наблюдателя состояния полного порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= Ax_r + Bu + L(Cx_r - y), \\ u &= Kx_r, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где $x_r \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние регулятора. Требуется определить матрицы K и L так, чтобы замкнутая система (5.42), (5.43) была асимптотически устойчивой.

Введем вектор невязки $e = x - x_r$ и в качестве состояния замкнутой системы выберем вектор $\text{col}(x, e)$, который удовлетворяет уравнению

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}.$$

Для асимптотической устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A + BK$ и $A + LC$ были гурвицевы или, другими словами, чтобы пары матриц (A, B) и (A^T, C^T) были стабилизируемы. Применяя теперь утверждение 5.1, в котором на языке линейных матричных неравенств приведён критерий стабилизируемости и дана параметризация всех обратных связей, стабилизирующих данную пару, приходим к следующему результату.

Утверждение 5.7 *Объект (5.42) стабилизируем с помощью регулятора по выходу вида (5.43) тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства*

$$\begin{aligned} Y_1 A^T + A Y_1 + Z_1^T B^T + B Z_1 &< 0, \\ Y_2 A + A^T Y_2 + Z_2^T C + C^T Z_2 &< 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

разрешимы относительно переменных $Y_1 = Y_1^T > 0$, Z_1 и $Y_2 = Y_2^T > 0$, Z_2 . В случае разрешимости этих неравенств параметры регулятора находятся следующим образом

$$K = Z_1 Y_1^{-1}, \quad L = Y_2^{-1} Z_2^T.$$

Теперь синтезируем регулятор на основе наблюдателя Люенбергера [70]. Пусть в объекте управления (5.42) ранг матрицы C равен $n_y < n_x$. Обозначим $n_z = n_x - n_y$. Напомним необходимые сведения из теории наблюдателей Люенбергера (см. также [2]).

Рассмотрим наблюдатель

$$\dot{z} = Fz + TBu + Qu, \quad (5.45)$$

где $z \in \mathcal{R}^{n_z}$ – состояние наблюдателя, y и u – измеряемый выход и управление в объекте (5.42), а матрицы F , T и Q удовлетворяют матричному уравнению

$$TA - FT = QC. \quad (5.46)$$

Введём вектор $e = z - Tx$ и заметим, что в силу уравнений объекта и наблюдателя для него выполняется

$$\dot{e} = Fe.$$

Таким образом, если матрица F гурвицева, то вектор z асимптотически отслеживает вектор Tx и в совокупности с вектором y даёт оценку вектора состояния объекта.

Не умаляя общности, примем, что

$$C = \begin{pmatrix} I_{n_y} & 0_{n_y \times n_z} \end{pmatrix}.$$

Это всегда может быть достигнуто путём соответствующей замены переменных. Разобьём матрицы A и B на блоки

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

где A_{11} – $(n_y \times n_y)$ -матрица, а B_1 – $(n_y \times n_u)$ -матрица (порядки остальных блоков определяются единственным образом). Выберем матрицы F , T и Q , удовлетворяющие уравнению (5.46), следующим образом

$$F = A_{22} + LA_{12}, \quad T = (L \quad I_{n_z}), \quad Q = A_{21} + LA_{11} - (A_{22} + LA_{12})L, \quad (5.47)$$

где матрицу L следует определить из условия, что матрица F гурвицева. Заметим, что это возможно тогда и только тогда, когда пара (A_{22}^T, A_{12}^T) стабилизируема.

В соответствии со сделанным выбором возьмём регулятор в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= (A_{22} + LA_{12})x_r + (B_2 + LB_1)u + [A_{21} + LA_{11} - (A_{22} + LA_{12})L]y, \\ u &= K_1x_r + K_2y, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где матрицы K_1 и K_2 подлежат определению из условия асимптотической устойчивости замкнутой системы (5.42), (5.48). Подставляя управление в исходную систему и учитывая, что $x_r = Tx + e$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x - BK_1e, \\ \dot{e} &= Fe, \end{aligned}$$

где

$$K = (K_2 + K_1L \quad K_1).$$

Таким образом, матрица K находится из условия, что матрица $A + BK$ должна быть гурвицевой, а затем с учётом уже найденной матрицы L определяются матрицы регулятора K_1 и K_2 .

Применяя теперь снова утверждение 5.1, приходим к следующему результату.

Утверждение 5.8 *Объект (5.42) стабилизируем с помощью регулятора по выходу пониженного порядка вида (5.48) тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства*

$$\begin{aligned} Y_1A^T + AY_1 + Z_1^TB^T + BZ_1 &< 0, \\ Y_2A_{22} + A_{22}^TY_2 + Z_2^TA_{12} + A_{12}^TZ_2 &< 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

разрешимы относительно переменных $Y_1 = Y_1^T > 0$, Z_1 и $Y_2 = Y_2^T > 0$, Z_2 . В случае разрешимости этих неравенств параметры регулятора находятся следующим образом

$$K = (K_2 + K_1L \quad K_1) = Z_1Y_1^{-1}, \quad L = Y_2^{-1}Z_2^T.$$

Таким образом, применение наблюдателя Люенбергера позволяет осуществлять синтез регуляторов по выходу пониженного порядка на основе решения только линейных матричных неравенств.

Пример 5.6 Стабилизация по выходу двухзвенного перевернутого маятника с помощью наблюдателя Люенбергера: объект описывается уравнениями (см. также пример 5.5)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Синтезируем динамический регулятор по выходу третьего порядка на основе наблюдателя Люенбергера.

В данном случае

$$C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Представим

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 \\ 2 & & & -1 & 0 & 0 \\ -2 & & & 2 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение линейных матричных неравенств (5.49) дает следующие результаты

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 102.195 & 71.981 & -27.278 & -3.674 \\ * & 73.319 & 2.119 & -24.064 \\ * & * & 203.296 & 25.975 \\ * & * & * & 41.835 \end{pmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} -335.704 & -96.619 & -5.270 & -75.512 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 46.007 & -6.289 & -27.506 \\ * & 339.231 & 81.770 \\ * & * & 44.784 \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} -175.690 & -61.945 & 6.288 \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$K = \begin{pmatrix} -18.180 & 20.162 & -4.044 & 10.707 \end{pmatrix},$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 10.372 & -2.786 & 11.598 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый регулятор описывается уравнениями

$$\dot{x}_r = \begin{pmatrix} 0 & 10.372 & 1 \\ -1 & -2.786 & 0 \\ 2 & 11.598 & 0 \end{pmatrix} x_r + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 17.298 \\ 4.610 \\ 9.567 \end{pmatrix} y,$$

$$u = (20.162 \quad -4.044 \quad 10.707)x_r - 362.730y,$$

и матрица замкнутой системы имеет собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.903, & \lambda_{2,3} &= -0.941 \pm 2.405i, \\ \lambda_{4,5} &= -1.457 \pm 2.862i, & \lambda_{6,7} &= -0.564 \pm 0.510i, \end{aligned}$$

лежащие слева от мнимой оси.

5.5 Стабилизация дискретных объектов

Рассмотрим дискретный управляемый объект

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t, \\ y_t &= Cx_t, \end{aligned} \quad (5.50)$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $u_t \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $y_t \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k -го порядка вида

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(r)} &= A_r x_t^{(r)} + B_r y_t, \\ u_t &= C_r x_t^{(r)} + D_r y_t, \end{aligned} \quad (5.51)$$

где $x_t^{(r)} \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (5.50), (5.51).

Представим уравнение замкнутой системы (5.50), (5.51) в виде

$$\bar{x}_{t+1} = A_c \bar{x}_t, \quad A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix},$$

где $\bar{x}_t = \text{col}(x_t, x_t^{(r)})$. Переформулируем цель управления в виде существования квадратичной функции Ляпунова $V_t(\bar{x}_t) = \bar{x}_t^T X \bar{x}_t$ с $X^T = X > 0$ такой, что по любой траектории замкнутой системы имеет место

$$V_{t+1} - V_t = \bar{x}_{t+1}^T X \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_t^T X \bar{x}_t = \bar{x}_t^T (A_c^T X A_c - X) \bar{x}_t < 0.$$

Это условие эквивалентно следующему матричному неравенству

$$A_c^T X A_c - X < 0,$$

которое с учетом леммы А.2 представимо в виде

$$\begin{pmatrix} -X^{-1} & A_c \\ A_c^T & -X \end{pmatrix} < 0. \quad (5.52)$$

Вводя матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$$

и представляя матрицу замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + B_0 \Theta C_0,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

перепишем неравенство (5.52) в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (5.53)$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix}, \quad P = (0 \quad C_0), \quad Q = \begin{pmatrix} B_0^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Так как в этом случае

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

то, применяя утверждение 3.2, приходим к справедливости следующего.

Утверждение 5.9 *Дискретный объект (5.50) стабилизируем с помощью регулятора по выходу (5.51) заданного порядка тогда и только тогда, когда существует $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Если условия (5.55) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры искомого регулятора (5.51) находятся как решения линейного матричного неравенства (5.53).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (5.55) в виде линейных матричных неравенств относительно матриц X и Y :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ W_{C_0} & 0 \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 \\ A_0^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B_0^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к поиску взаимнообратных матриц X и Y ($XY = I$), удовлетворяющих неравенствам (5.56), т.е. к задаче **A**, сформулированной выше.

Так как

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}$$

и матрицы максимального ранга $W_{B_0^T}$ и W_{C_0} должны удовлетворять уравнениям $B_0^T W_{B_0^T} = 0$ и $C_0 W_{C_0} = 0$ соответственно, то непосредственно проверяется, что можно взять

$$W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{C_0} = \begin{pmatrix} W_C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом блочной структуры матриц A_0 , B_0 , C_0 и соответствующего блочного представления матриц X и Y в виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}$$

неравенства (5.56) приводятся к виду

$$\begin{aligned} W_C^T (A^T X_{11} A - X_{11}) W_C &< 0 \\ W_{B^T}^T (A Y_{11} A^T - Y_{11}) W_{B^T} &< 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Таким образом, задача синтеза регуляторов по выходу для дискретных объектов может быть также сведена к сформулированной выше **задаче В**: найти две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (5.57) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0,$$

и условию

$$\text{rank}(I - X_{11} Y_{11}) \leq k,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Для статического регулятора по выходу в уравнениях регулятора (5.51) имеем $A_r = 0$, $B_r = 0$, $C_r = 0$ и, следовательно, $\Theta = D_r$. В этом случае неравенство (5.52) примет вид (5.53), где

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A \\ A^T & -X \end{pmatrix}, \quad P = (0 \ C), \quad Q = (B^T \ 0).$$

Тогда условия стабилизируемости (5.55) примут вид

$$\begin{aligned} W_C^T (A^T X A - X) W_C &< 0, \\ W_{B^T}^T (A X^{-1} A^T - X^{-1}) W_{B^T} &< 0, \end{aligned}$$

где X – матрица порядка $(n_x \times n_x)$, и формулировка **задачи А** совпадает с формулировкой **задачи В**.

В частности, когда состояние объекта полностью измеряется, т.е. $C = I$ и $\text{rank}(0 \ C) = n_x$, неравенство (5.52) примет вид (5.53), в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A \\ A^T & -X \end{pmatrix}, \quad P = (0 \ I), \quad Q = (B^T \ 0).$$

Условия стабилизируемости (5.55) в этом случае сводятся к выполнимости двух неравенств

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A \\ A^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} &< 0, \\ \begin{pmatrix} W_{B^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A \\ A^T & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{B^T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} &< 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

первое из которых дает $X^{-1} > 0$, а второе по лемме Шура эквивалентно неравенству

$$W_{B^T}^T (AX^{-1}A^T - X^{-1})W_{B^T} < 0 .$$

Таким образом, с учетом утверждения 3.2 получим, что объект (5.50) стабилизируем по состоянию тогда и только тогда, когда неравенство

$$W_{B^T}^T (AY A^T - Y)W_{B^T} < 0$$

разрешимо относительно положительно определенной матрицы $Y = Y^T$.

Глава 6

Модальное управление

Задача модального управления связана с построением регулятора, при котором полюса замкнутой системы располагаются в заданных точках или заданных областях комплексной плоскости. Значения таких характеристик замкнутой системы как время переходного процесса, демпфирование, скорость переходных процессов в регуляторе и других определяются расположением собственных значений матрицы замкнутой системы в определенных областях комплексной плоскости. Здесь мы будем рассматривать задачи модального управления относительно таких областей, которые могут быть характеризованы системой линейных матричных неравенств - такие области в дальнейшем будем называть *LMI*-областями (см. [52, 53]). Мы увидим, что к этим областям относятся вертикальные и горизонтальные полосы, круги, конические секторы, а также пересечения таких областей.

6.1 LMI-области

Пусть D - некоторая область левой комплексной полуплоскости. Динамическую систему $\dot{x} = Ax$ будем называть D -устойчивой, если все ее полюса, т.е. все собственные значения матрицы A , лежат в области D . В этом случае матрицу A также будем называть D -устойчивой. В частном случае, когда D совпадает со всей левой комплексной полуплоскостью, D -устойчивость сводится к асимптотической устойчивости, которая характеризуется неравенством Ляпунова, являющимся линейным матричным неравенством. А именно, матрица A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует симметрическая матрица X , удовлетворяющая неравенствам

$$AX + XA^T < 0, \quad X > 0. \quad (6.1)$$

Определим класс областей, которые характеризуются в терминах линейных матричных неравенств. Для этого введем в рассмотрение матричные функции комплексного переменного, принимающие значения в пространстве эрмитовых $(m \times m)$ -матриц

$$f(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T, \quad (6.2)$$

где $\alpha = \alpha^T \in \mathcal{R}^{m \times m}$ и $\beta \in \mathcal{R}^{m \times m}$.

Определение. Область

$$D = \{z \in \mathcal{C} : f(z) < 0\} \quad (6.3)$$

будем называть *LMI*-областью, порождаемой функцией $f(z)$.

Из этого определения следует, что *LMI*-область – это подмножество комплексной плоскости, которое представимо линейным матричным неравенством относительно переменных $x = \operatorname{Re}(z)$ и $y = \operatorname{Im}(z)$. Следовательно, *LMI*-области – выпуклые. Кроме того, так как для любого $z \in D$ имеет место

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} < 0 ,$$

то *LMI*-области симметричны относительно действительной оси.

Самое существенное свойство *LMI*-областей состоит в том, что они полностью определяются в терминах линейных матричных неравенств относительно симметрической положительно определенной матрицы. Для того, чтобы написать эти неравенства, поставим в соответствие функции $f(z)$ следующую $(m \times m)$ -блочную матрицу

$$M(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T , \quad (6.4)$$

блоки которой, используя операцию кронекерова произведения \otimes (см. Приложение F), можно записать в виде

$$M_{ij}(A, X) = \alpha_{ij}X + \beta_{ij}AX + \beta_{ji}XA^T , \quad i, j = 1, \dots, m .$$

Отметим, что $M(A, X)$ в (6.4) и $f(z)$ в (6.2) связаны подстановкой

$$(X, AX, XA^T) \leftrightarrow (1, z, \bar{z}) .$$

Утверждение 6.1 Пусть D - *LMI*-область. Тогда матрица A является D -устойчивой, если и только если существует матрица $X = X^T$, удовлетворяющая линейным матричным неравенствам

$$M(A, X) < 0 , \quad X > 0 . \quad (6.5)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть λ и v – собственное значение и соответствующий ему левый собственный вектор матрицы A , то есть $v^*A = \lambda v^*$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$(I \otimes v)^* M(A, X) (I \otimes v) = (v^* X v) f(\lambda) .$$

Так как по условию левая часть этого равенства – отрицательно определенная матрица и $X > 0$, то отсюда следует $f(\lambda) < 0$, т.е. $\lambda \in D$.

Необходимость. Приведем, ради простоты, доказательство только для диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, собственные значения которой лежат в области D . Распространим область определения функции $M(A, X)$ на множество комплексных матриц A и эрмитовых матриц $X = X^*$:

$$M(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^* .$$

Непосредственно проверяется, что

$$M(A, I) = U^T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) U ,$$

где U – матрица перестановок. Так как по условию $f(\lambda_i) < 0$, $i = 1, \dots, n$, то отсюда следует, что $M(A, X) < 0$ при $X = I$. Доказательство для произвольной матрицы A приведено в [52].

Рассмотрим несколько примеров. В качестве первого примера *LMI*-области возьмем множество $D_1 = \{z : \operatorname{Re} z < -\mu\}$, которое соответствует асимптотически устойчивым системам со степенью устойчивости не меньшей μ . Очевидно, что эту область порождает функция $f_1(z) = z + \bar{z} + 2\mu$, и согласно утверждению 6.1 матрица A является асимптотически устойчивой со степенью устойчивости не меньшей μ , тогда и только тогда, когда существует $X = X^T$, удовлетворяющая линейным матричным неравенствам

$$AX + XA^T + 2\mu X < 0, \quad X > 0. \quad (6.6)$$

Другой пример *LMI*-области – $D_2 = \{z : |z + q| < r\}$ – внутренность круга радиуса r с центром в точке $(-q, 0)$. Для этой области

$$f_2(z) = \begin{pmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{pmatrix} < 0,$$

и линейные матричные неравенства (6.5), характеризующие эту область, принимают вид

$$\begin{pmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (6.7)$$

Вертикальной полосе $D_3 = \{z : -\mu_2 < \operatorname{Re} z < -\mu_1\}$ отвечает функция

$$f_3(z) = \begin{pmatrix} (z + \bar{z}) + 2\mu_1 & 0 \\ 0 & -(z + \bar{z}) - 2\mu_2 \end{pmatrix}$$

и, соответственно, линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} AX + XA^T + 2\mu_1 X & 0 \\ 0 & -AX - XA^T - 2\mu_2 X \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0,$$

а горизонтальной полуполосе $D_4 = \{z : \operatorname{Re} z < 0, -\nu < \operatorname{Im} z < \nu\}$ – функция

$$f_4(z) = \begin{pmatrix} -2\nu & z - \bar{z} \\ -(z - \bar{z}) & -2\nu \end{pmatrix}$$

и линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -2\nu X & AX - XA^T \\ -AX + XA^T & -2\nu X \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0.$$

Наконец, коническому сектору $D_5 = \{z : \operatorname{Re} z \operatorname{tg} \varphi < -|\operatorname{Im} z|\}$ соответствует функция

$$f_5 = \begin{pmatrix} (z + \bar{z}) \sin \varphi & (z - \bar{z}) \cos \varphi \\ -(z - \bar{z}) \cos \varphi & (z + \bar{z}) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

и линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} (AX + XA^T) \sin \varphi & (AX - XA^T) \cos \varphi \\ (XA^T - AX) \cos \varphi & (AX + XA^T) \sin \varphi \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (6.8)$$

Отметим важное свойство *LMI*-областей – они замкнуты относительно операции пересечения, т.е. пересечение *LMI*-областей – *LMI*-область. Действительно, пересечение $D_1 \cap D_2$ двух данных *LMI*-областей D_1 и D_2 с функциями f_1 и f_2 порождается функцией

$$f = \text{diag}(f_1, f_2)$$

и, следовательно,

$$M(A, X) = \text{diag}(M_1(A, X), M_2(A, X)) .$$

Таким образом, условие того, что собственные значения матрицы A одновременно принадлежат двум заданным *LMI*-областям D_1 и D_2 , выражается в терминах одной матрицы X , удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств. А именно, матрица A является одновременно D_1 -устойчивой и D_2 -устойчивой тогда и только тогда, когда существует $X = X^T > 0$, для которой $M_1(A, X) < 0$ и $M_2(A, X) < 0$.

6.2 Синтез модального управления

Покажем теперь, как синтез модального управления по состоянию для заданной *LMI*-области сводится к решению линейных матричных неравенств. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu , \quad (6.9)$$

где $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление. Задача состоит в выборе закона управления из класса линейных обратных связей по состоянию вида

$$u = \Theta x , \quad (6.10)$$

где Θ – матрица параметров регулятора соответствующего порядка, при котором матрица замкнутой системы (6.9), (6.10) будет D -устойчивой, т.е. все ее собственные значения лежат в заданной *LMI*-области.

Согласно утверждению 6.1 задача сводится к нахождению матриц $X = X^T > 0$ и Θ , удовлетворяющих неравенству $M(A + B\Theta, X) < 0$. Обозначая $Z = \Theta X$, представим последнее неравенство как линейное матричное неравенство

$$M(A, X) + \beta \otimes BZ + \beta^T \otimes Z^T B^T < 0 \quad (6.11)$$

относительно неизвестных матриц X и Z . После того, как эти матрицы будут найдены, искомая матрица параметров регулятора находится как $\Theta = ZX^{-1}$.

Пример 6.1 Модальная стабилизация двухзвенного перевернутого маятника: объект описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 , \\ \dot{x}_2 &= x_4 , \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + u , \\ \dot{x}_4 &= -2x_1 + 2x_2 . \end{aligned}$$

Синтезируем регулятор по состоянию, при котором все собственные значения матрицы замкнутой системы лежат внутри круга с центром в точке $z = -1$ и радиусом, равным 0.1.

Данная область является LMI-областью вида D_2 , и соответствующее линейное матричное неравенство (6.11) примет вид

$$\begin{pmatrix} -0.1X & X + AX + BZ \\ X + XA^T + Z^T B^T & -0.1X \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате были получены следующие параметры регулятора

$$\Theta = (-10.0067, \quad 9.5078, \quad -4.0023, \quad 6.0056),$$

при которых собственные значения матрицы замкнутой системы равны

$$\lambda_{1,2} = -0.9890 \pm 0.0111i, \quad \lambda_3 = -1.0104, \quad \lambda_4 = -1.0140.$$

Глава 7

Оптимальное линейно-квадратичное управление

В 20-м веке оптимальному управлению линейным динамическим объектом по квадратичному критерию качества было уделено, наверное, столько внимания, сколько ни одной другой теме в теории управления. В частности, были сформулированы условия существования оптимальных законов управления как в детерминированном, так и в стохастическом случаях, и получены формулы вычисления их параметров в терминах решений нелинейных матричных уравнений Риккати [14, 15, 2].

В рамках этого подхода наибольшую сложность представляет синтез оптимального линейно-квадратичного управления в случае неизмеряемого состояния объекта, когда для измерения доступен только вектор выходных переменных, имеющий меньшую размерность, чем вектор состояния. Особый интерес здесь вызывает синтез оптимальных регуляторов заданного порядка (в частности, стационарных регуляторов по выходу). Кроме того, как правило, рассматриваются только невырожденные задачи, когда весовая матрица управления в функционале является невырожденной, хотя это ограничение иногда выглядит искусственным.

В качестве альтернативы методу уравнений Риккати для синтеза оптимального линейно-квадратичного управления может быть применен метод линейных матричных неравенств. Применение линейных матричных неравенств для построения оптимальных регуляторов основано на следующей идее. Известно [54, 56, 63], что оптимальное линейно-квадратичное управление может трактоваться как H_2 -оптимальное управление линейным объектом, на вход которого подается импульсное воздействие или белый шум. В свою очередь, условие ограниченности H_2 -нормы передаточной матрицы объекта может быть выражено в терминах линейных матричных неравенств. Основанная на этой идее процедура синтеза оптимальных регуляторов в общем случае приводит к задаче **A**: поиску двух взаимнообратных матриц, удовлетворяющих линейным матричным неравенствам.

В данной главе показано, что необходимые и достаточные условия существования оптимального регулятора полного порядка по выходу, минимизирующего квадратичный функционал (вырожденный или невырожденный), и его параметры выражаются в терминах линейных матричных неравенств. Вводится понятие γ -оптимального закона управления, при котором отношение значения квадратичного функционала к квадрату нормы начального состояния объекта не превышает заданное число γ^2 для любого начального состояния. Такие законы управления можно рассматривать как обеспечи-

вающие гашение в заданном отношении γ возмущений объекта, вызванных отклонением его начального состояния. Показано, что синтез γ -оптимальных регуляторов пониженного порядка сводится к решению упомянутой выше задачи поиска двух взаимно обратных матриц, удовлетворяющих линейным матричным неравенствам, а синтез γ -оптимальных регуляторов полного порядка может быть осуществлен в терминах только линейных матричных неравенств. В случае, когда оптимальное линейно-квадратичное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы, оно с любой заданной степенью точности совпадает с γ -оптимальным управлением при значении γ , сколь угодно близком к предельному минимальному значению.

7.1 Вычисление H_2 -нормы передаточной матрицы

Введем пространство RL_2 передаточных матриц $H(s)$, для которых выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H^T(-j\omega)H(j\omega)] d\omega < \infty .$$

В этом пространстве H_2 -норма определяется следующим образом

$$\|H\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H^T(-j\omega)H(j\omega)] d\omega \right\}^{1/2} . \quad (7.1)$$

Пусть

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B .$$

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую и устойчивую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv , & x(0) &= 0 \\ z &= Cx , \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $x \in \mathcal{R}^{n_x}$, $v \in \mathcal{R}^{n_v}$ и $z \in \mathcal{R}^{n_z}$, реализующую эту передаточную матрицу в пространстве состояний. Приведем две интерпретации H_2 -нормы, которые в последующем будут применяться для нахождения оптимального управления в детерминированном и стохастическом случаях (см., например, [54]).

Сначала подадим на вход (7.2) последовательно импульсные сигналы $v^{(i)}(t) = \delta(t) e_i$, где $\delta(t)$ – импульсная функция, e_i – i -й столбец $(n_v \times n_v)$ -единичной матрицы, $i = 1, 2, \dots, n_v$, и обозначим через $z^{(i)}$ соответствующий выход, а через $Z^{(i)}(j\omega)$ – его Фурье-изображение. Как известно, $Z^{(i)}(j\omega) = H(j\omega)e_i$. Применяя равенство Парсеваля, получим

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H^T(-j\omega)H(j\omega)] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_v} e_i^T H^T(-j\omega)H(j\omega)e_i d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_v} Z^{(i)T}(-j\omega)Z^{(i)}(j\omega) d\omega = \\ &= \sum_{i=1}^{n_v} \int_0^{\infty} z^{(i)T} z^{(i)} dt . \end{aligned}$$

Таким образом, значение квадрата H_2 -нормы совпадает с суммой интегралов от квадрата нормы выходов, соответствующих входным импульсным сигналам.

Так как $z^{(i)}(t) = Ce^{At}Be_i$, $t > 0$, то с учетом того, что $\text{tr}(K^T SK) = \text{tr}(SKK^T)$ для произвольной матрицы K и произвольной симметрической матрицы S , отсюда получим

$$\begin{aligned}
 \|H\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n_v} \int_0^{\infty} e_i^T B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B e_i dt = \\
 &= \sum_{i=1}^{n_v} \int_0^{\infty} \text{tr}(e^{A^T t} C^T C e^{At} B e_i e_i^T B^T) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \text{tr}(e^{A^T t} C^T C e^{At} \sum_{i=1}^{n_v} B e_i e_i^T B^T) dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \text{tr}(e^{A^T t} C^T C e^{At} B B^T) dt = \\
 &= \text{tr}(B^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt B) = \text{tr}(C \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt C^T).
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Как известно, значения последних двух интегралов могут быть найдены как решения соответствующих уравнений Ляпунова. А именно, в предположении, что матрица A гурвицева, непосредственно проверяется, что матрица

$$P = P_o = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

удовлетворяет уравнению

$$A^T P + P A + C^T C = 0, \tag{7.4}$$

а матрица

$$P = P_r = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

удовлетворяет уравнению

$$A P + P A^T + B B^T = 0. \tag{7.5}$$

Согласно лемме Е.1 эти уравнения в рассматриваемом случае имеют единственные неотрицательно определенные решения, и тогда искомая H_2 -норма вычисляется одним из двух следующих образов

$$\|H\|_2^2 = \text{tr}(B^T P_o B), \tag{7.6}$$

где P_o – решение уравнения (7.4), или

$$\|H\|_2^2 = \text{tr}(C P_r C^T), \tag{7.7}$$

где P_r – решение уравнения (7.5).

Теперь подадим на вход системы (7.2) белый шум v единичной интенсивности, т.е. $E[v(t)v^T(t + \tau)] = \delta(\tau)I$, и введем критерий

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E |z(t)|^2,$$

где E – знак математического ожидания. Проведем следующие очевидные выкладки

$$\begin{aligned}
J &= \lim_{t \rightarrow \infty} E \operatorname{tr} (zz^T) = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr} E \left[\int_0^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau \int_0^t v^T(\sigma) \Phi^T(t, \sigma) d\sigma \right] = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr} \left[\int_0^t \Phi(t, \tau) \int_0^t E [v(\tau)v^T(\sigma)] \Phi^T(t, \sigma) d\sigma d\tau \right] = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr} \left[\int_0^t \Phi(t, \tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau \right],
\end{aligned}$$

где $\Phi(\xi, \nu) = Ce^{A(\xi-\nu)}B$. Полагая теперь $\mu = t - \tau$ и сравнивая с (7.3), получим

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tr} \left[C \int_0^t e^{A\mu} B B^T e^{A^T \mu} d\mu C^T \right] = \operatorname{tr} \left[C \int_0^\infty e^{A\mu} B B^T e^{A^T \mu} d\mu C^T \right] = \|H\|_2^2.$$

Таким образом, квадрат H_2 -нормы совпадает также с предельным значением математического ожидания квадрата модуля выхода линейной системы, когда на ее вход поступает белый шум.

Следующее утверждение позволяет характеризовать H_2 -норму в терминах решений линейных матричных неравенств.

Утверждение 7.1 Пусть в объекте (7.2) матрица A гурвицева. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(a) $\|H\|_2 < \gamma$;

(b) существуют такие матрицы $X = X^T > 0$ и $S = S^T$, что

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A & X B \\ B^T X & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} X & C^T \\ C & S \end{pmatrix} > 0, \quad \operatorname{tr}(S) < \gamma; \quad (7.8)$$

(c) существуют такие матрицы $Y = Y^T > 0$ и $R = R^T$, что

$$\begin{pmatrix} AY + Y A^T & Y C^T \\ C Y & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & B \\ B^T & R \end{pmatrix} > 0, \quad \operatorname{tr}(R) < \gamma. \quad (7.9)$$

Доказательство. Пункт (a) эквивалентен тому, что выполнено неравенство $\operatorname{tr}(B^T P_o B) < \gamma^2$, где P_o – решение уравнения (7.4). Так как это уравнение имеет единственное решение, то это эквивалентно существованию $X = X^T > 0$ такой, что

$$A^T X + X A + C^T C < 0, \quad \operatorname{tr}(B^T X B) < \gamma^2. \quad (7.10)$$

Действительно, рассмотрим уравнение

$$A^T X + X A + C^T C + \varepsilon^2 I = 0,$$

которое имеет единственное решение $X > P_o$. Отсюда следует, что $\text{tr}(B^T P_o B) \leq \text{tr}(B^T X B) < \gamma^2$. С другой стороны, если $\text{tr}(B^T P_o B) < \gamma^2$, то найдется такое ε , что $\text{tr}(B^T X B) < \gamma^2$.

Возьмем теперь в (7.10) $X = Y^{-1}$, умножим первое из неравенств слева и справа на Y , введем вспомогательную матрицу R и получим

$$YA^T + AY + YC^T CY < 0, \quad B^T Y^{-1} B < R, \quad \text{tr}(R) < \gamma^2.$$

Заменяя в этих неравенствах Y на $\gamma^{-1}Y$ и R на γR и не меняя обозначений, с учетом леммы Шура получим (с). Эквивалентность пунктов (b) и (с) следует из принципа двойственности и того, что $\|H\|_2 = \|H^T\|_2$.

7.2 Синтез γ -оптимальных регуляторов по состоянию

Рассмотрим задачу γ -оптимального линейно-квадратичного управления объектом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + Du \end{aligned} \quad (7.11)$$

в случае измеряемого состояния, состоящую в нахождении стабилизирующего управления вида

$$u = \Theta x, \quad (7.12)$$

которое для заданного значения $\gamma > 0$ обеспечивает выполнение неравенства

$$J = \int_0^{\infty} |z(t)|^2 dt < \gamma^2 |x_0|^2, \quad \forall x_0 \neq 0. \quad (7.13)$$

Этот закон управления можно рассматривать как обеспечивающий гашение в заданном отношении γ возмущений объекта, вызванных отклонением его начального состояния.

Заметим, что оптимальное линейно-квадратичное управление объектом (7.11), минимизирующее функционал J , с любой заданной степенью точности совпадает с γ -оптимальным управлением при значении γ , сколь угодно близком к предельному минимальному значению γ в (7.13). Так, в случае $C^T D = 0$, $D^T D > 0$ и при условии, что пара (A, B) стабилизируема, а пара (A, C) детектируема, это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы и определяется выражением

$$u = -(D^T D)^{-1} B^T P x,$$

где матрица $P = P^T \geq 0$ является решением уравнения Риккати

$$A^T P + PA - PB(D^T D)^{-1} B^T P + C^T C = 0, \quad (7.14)$$

и при этом $\min J = x_0^T P x_0$ (см., например, [2]). Таким образом, точная нижняя грань множества значений γ^2 , для которых существует γ -оптимальное управление, совпадает с максимальным собственным значением матрицы P .

Представим синтез γ -оптимальных управлений в терминах линейных матричных неравенств. Для этого вместо системы (7.11) рассмотрим систему с нулевыми начальными условиями и импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + x_0 \delta(t) + Bu, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция, выход которой совпадает с выходом системы (7.11). Подставим закон управления (7.12) в (7.15) и запишем уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B\Theta)x + x_0\delta(t), \quad x(0) = 0, \\ z &= (C + D\Theta)x. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Согласно приведенной интерпретации H_2 -нормы значение функционала J совпадает с квадратом H_2 -нормы передаточной матрицы этого объекта, поэтому цель управления (7.13) эквивалентно выражается неравенством

$$\|(C + D\Theta)[sI - (A + B\Theta)]^{-1}x_0\|_2 < \gamma|x_0|, \quad \forall x_0 \neq 0.$$

Применяя теперь утверждение 7.1, получим, что для выполнения цели управления необходимо и достаточно, чтобы существовали матрицы $Y = Y^T > 0$ и $R = R^T$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A + B\Theta)Y + Y(A + B\Theta)^T & Y(C + D\Theta)^T \\ (C + D\Theta)Y & -\gamma|x_0|I \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} Y & x_0 \\ x_0^T & R \end{pmatrix} > 0, \quad \text{tr } R < \gamma|x_0|. \end{aligned}$$

Учитывая, что в данном случае R скалярная величина, и заменяя в этих неравенствах Y на $|x_0|Y$, R на $|x_0|R$, получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A + B\Theta)Y + Y(A + B\Theta)^T & Y(C + D\Theta)^T \\ (C + D\Theta)Y & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} Y|x_0| & x_0 \\ x_0^T & R|x_0| \end{pmatrix} > 0, \quad R < \gamma. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Вводим теперь в первом неравенстве (7.17) новую матричную переменную $Z = \Theta Y$ и с учетом того, что согласно леммы Шура два последних неравенства эквивалентны неравенству

$$\frac{x_0^T Y^{-1} x_0}{|x_0|^2} < \gamma, \quad \forall x_0 \neq 0,$$

которое записывается в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} Y & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0,$$

приходим к следующему результату.

Утверждение 7.2 *Параметры Θ для γ -оптимального закона управления объектом (7.11) вычисляются как $\Theta = ZY^{-1}$, где $Y = Y^T > 0$ и Z удовлетворяют линейным матричным неравенствам*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} AY + YA^T + BZ + Z^T B^T & YC^T + Z^T D^T \\ CY + DZ & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} Y & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Так как параметр γ входит в эти неравенства линейно, то оптимальное управление численно находится путем решения стандартной задачи, реализованной в LMI Toolbox пакета MATLAB, – минимизации линейной функции (γ) при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (7.18).

Другой способ построения γ -оптимального регулятора по состоянию на основе линейных матричных неравенств состоит в представлении первого неравенства в (7.17) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (7.19)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} YA^T + AY & YC^T \\ CY & -\gamma I \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$P = (Y \ 0), \quad Q = (B^T \ D^T).$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & YC^T \\ CY & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (7.21)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & YC^T \\ CY & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0,$$

где

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} \\ W_Q^{(2)} \end{pmatrix},$$

а матрицы $W_Q^{(1)}$ и $W_Q^{(2)}$ удовлетворяют уравнению

$$B^T W_Q^{(1)} + D^T W_Q^{(2)} = 0.$$

Так как первое из неравенств (7.21) очевидно выполняется, приходим к следующему.

Утверждение 7.3 *Параметры Θ для γ -оптимального закона управления объектом (7.11) вычисляются как решения первого неравенства в (7.17), в котором $Y = Y^T > 0$ удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$W_Q^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & YC^T \\ CY & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0, \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} Y & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0.$$

Пример 7.1 γ -оптимальное управление по состоянию линейным осциллятором с демпфированием. Линейный осциллятор описывается уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + u, \\ z_1 &= x_1, \\ z_2 &= u,\end{aligned}$$

т.е. в виде (7.11), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\omega_0 = 10$ и $\delta = 0.1$. Численное решение задачи минимизации γ при ограничениях (7.18) приводит к следующим результатам:

$$Y = \begin{pmatrix} 0.4914 & -0.0593 \\ -0.0593 & 49.1460 \end{pmatrix}, \quad Z = (0 \quad -2.0354),$$

а соответствующие параметры регулятора $\Theta = (-0.005 \quad -0.0414)$ при $\gamma = 2.0354$.

Для сравнения приведем значения параметров регулятора, полученные на основе решения матричного уравнения Риккати (7.14):

$$P = \begin{pmatrix} 4.1428 & 0.0050 \\ 0.0050 & 0.0414 \end{pmatrix}, \quad \Theta = -(D^T D)^{-1} B^T P = (-0.005 \quad -0.0414).$$

Наконец, заметим, что задача γ -оптимального управления формулируется с дополнительным требованием асимптотической устойчивости замкнутой системы, в то время как для оптимального линейно-квадратичного управления такое требование отсутствует. Для иллюстрации указанного различия рассмотрим объект

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ z &= (0 \quad 1) x + u.\end{aligned}$$

Непосредственно убеждаемся в том, что оптимальное линейно-квадратичное управление для него имеет вид

$$u = -(0 \quad 1) x,$$

и при этом замкнутая система будет неустойчивой. Этот закон управления отвечает решению уравнения Риккати (7.14) – матрице

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместе с тем, для этого объекта оптимальное стабилизирующее управление будет

$$u = -(4 \quad 3)x .$$

Этот закон управления соответствует стабилизирующему решению уравнения (7.14) – матрице

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

В заключение этого раздела рассмотрим задачу линейно-квадратичного управления при учете стохастических воздействий. Для объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1v + B_2u , & x(0) &= 0 , \\ z &= Cx + Du , \end{aligned} \quad (7.23)$$

где v – белый шум единичной интенсивности, в случае измеряемого состояния задача состоит в нахождении стабилизирующего управления вида

$$u = \Theta x , \quad (7.24)$$

которое для заданного значения $\gamma > 0$ обеспечивает выполнение неравенства

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E|z(t)|^2 dt < \gamma^2 . \quad (7.25)$$

Подставим закон управления (7.24) в (7.23) и запишем уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2\Theta)x + B_1v , \\ z &= (C + D\Theta)x . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Согласно интерпретации H_2 -нормы передаточной матрицы этой системы в стохастическом случае условие $J < \gamma^2$ с учетом утверждения 7.1 выражается следующими матричными неравенствами:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (A + B_2\Theta)Y + Y(A + B_2\Theta)^T & Y(C + D\Theta)^T \\ (C + D\Theta)Y & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 , \\ &\begin{pmatrix} Y & B_1 \\ B_1^T & R \end{pmatrix} > 0 , \quad \text{tr } R < \gamma . \end{aligned} \quad (7.27)$$

Вводя новую матричную переменную $Z = \Theta Y$, приходим к следующему.

Утверждение 7.4 *Параметры Θ для γ -оптимального закона управления стохастическим объектом (7.23) вычисляются как $\Theta = ZY^{-1}$, где $Y = Y^T > 0$ и Z удовлетворяют линейным матричным неравенствам*

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_2Z + Z^TB_2^T & YC^T + Z^TD^T \\ CY + DZ & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 , \\ &\begin{pmatrix} Y & B_1 \\ B_1^T & R \end{pmatrix} > 0 , \quad \text{tr } R < \gamma \end{aligned} \quad (7.28)$$

относительно переменных Y , Z и R .

7.3 Синтез γ -оптимальных регуляторов по выходу

Рассмотрим теперь задачу γ -оптимального линейно-квадратичного управления в случае неизмеряемого состояния для объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ z &= C_1x + Du, \\ y &= C_2x, \end{aligned} \quad (7.29)$$

где $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Она состоит в нахождении стабилизирующего регулятора k -го порядка по выходу вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, & x_r(0) &= 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где $x_r \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора, который обеспечивает выполнение неравенства

$$J = \int_0^{\infty} |z(t)|^2 dt < \gamma^2 |x_0|^2, \quad \forall x_0 \neq 0. \quad (7.31)$$

Уравнения замкнутой системы (7.29), (7.30) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \bar{x}_0 \delta(t), & x_c(0) &= 0, \\ z &= C_c x_c, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где $x_c = \text{col}(x, x_r)$,

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{pmatrix} A + BD_r C_2 & BC_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}, & \bar{x}_0 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ C_c &= (C_1 + DD_r C_2 \quad DC_r). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Для выполнения цели управления передаточная матрица объекта (7.32) от входа $\delta(t)$ к выходу z

$$H_c(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} \bar{x}_0$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_2 < \gamma |x_0|, \quad \forall x_0 \neq 0.$$

Согласно утверждению 7.1 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} A_c Y + Y A_c^T & Y C_c^T \\ C_c Y & -\gamma |x_0| I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \bar{x}_0 \\ \bar{x}_0^T & R \end{pmatrix} > 0, \quad \text{tr } R < \gamma |x_0|$$

были разрешимы относительно переменных $Y = Y^T > 0$ и $R = R^T$. Учитывая, что в данном случае R скалярная величина, и заменяя в этих неравенствах Y на $|x_0|Y$, R на $|x_0|R$, получим

$$\begin{pmatrix} A_c Y + Y A_c^T & Y C_c^T \\ C_c Y & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y |x_0| & \bar{x}_0 \\ \bar{x}_0^T & R |x_0| \end{pmatrix} > 0, \quad R < \gamma. \quad (7.34)$$

Последние два неравенства в (7.34) в силу леммы Шура эквивалентны линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} Y & \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} & \gamma I \end{pmatrix} > 0 .$$

Введем матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

и представим матрицы замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C} , \quad C_c = C_0 + \mathcal{D}\Theta\mathcal{C} ,$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix} , \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix} , \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix} , \quad C_0 = (C_1 \quad 0_{n_z \times k}) , \\ \mathcal{D} &= (0_{n_z \times k} \quad D) . \end{aligned} \quad (7.36)$$

Подставим эти выражения в первое неравенство (7.34) и представим его в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 , \quad (7.37)$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_0 Y + Y A_0^T & Y C_0^T \\ C_0 Y & -\gamma I \end{pmatrix} , \quad (7.38)$$

$$P = (\mathcal{C}Y \quad 0) , \quad Q = (\mathcal{B}^T \quad \mathcal{D}^T) .$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0 Y + Y A_0^T & Y C_0^T \\ C_0 Y & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 , \quad (7.39)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} A_0 Y + Y A_0^T & Y C_0^T \\ C_0 Y & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 ,$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис ядра матрицы P , а столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q . Представим

$$P = (\mathcal{C}Y \quad 0) = G \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} , \quad G = (\mathcal{C} \quad 0) ,$$

откуда следует, что

$$W_P = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} W_G .$$

Подставляя это выражение в (7.39), приходим к следующему.

Утверждение 7.5 *Для существования γ -оптимального регулятора k -го порядка необходимо и достаточно, чтобы существовали две взаимнообратные $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрицы $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие следующим неравенствам*

$$\begin{aligned} W_G^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & C_0^T \\ C_0 & -\gamma I \end{pmatrix} W_G < 0 , \\ W_Q^T \begin{pmatrix} Y A_0 + A_0^T Y & Y C_0^T \\ C_0 Y & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 , \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\begin{pmatrix} Y & \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} & \gamma I \end{pmatrix} > 0 .$$

Если условия (7.40) выполнены и матрица Y найдена, то параметры Θ искомого регулятора находятся как решения линейного матричного неравенства (7.37).

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: поиску взаимнообратных матриц X и Y ($XY = I$), удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (7.40).

Преобразуем первые два неравенства (7.40), учитывая блочную структуру матриц A_0 , C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} .$$

Так как

$$G = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_z} \\ C_2 & 0_{n_y \times k} & 0_{n_y \times n_z} \end{pmatrix} , \quad Q = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_z} \\ B^T & 0_{n_u \times k} & D^T \end{pmatrix} ,$$

то в качестве W_G и W_Q можно взять

$$W_G = \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} , \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} \\ 0 \\ W_Q^{(2)} \end{pmatrix} ,$$

где матрицы $W_Q^{(1)}$, $W_Q^{(2)}$ определяются из следующих уравнений

$$B^T W_Q^{(1)} + D^T W_Q^{(2)} = 0 .$$

С учетом этого левые части первых двух неравенств в (7.40) примут вид

$$\begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & A^T X_{12} & C_1^T \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} W_Q^{(1)} \\ 0 \\ W_Q^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & A Y_{12} & Y_{11} C_1^T \\ * & 0 & Y_{12}^T C_1^T \\ * & * & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} \\ 0 \\ W_Q^{(2)} \end{pmatrix},$$

и, окончательно, первые два неравенства (7.40) сводятся к следующим линейным матричным неравенствам относительно блоков X_{11} и Y_{11} взаимнообратных матриц X и Y :

$$\begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & C_1^T \\ & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \quad (7.41)$$

$$N^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} C_1^T \\ C_1 Y_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} N < 0,$$

где столбцы матриц W_{C_2} и $N = \text{col}(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базисы ядер матриц C_2 и $(B^T \ D^T)$ соответственно.

Согласно лемме А.7 условия $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (7.42)$$

$$\text{rank}(I - X_{11} Y_{11}) \leq k \quad (7.43)$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования взаимнообратных матриц $X > 0$, $Y > 0$ с данными блоками X_{11} , Y_{11} . Покажем теперь, что третье неравенство в (7.40) эквивалентно линейному матричному неравенству

$$X_{11} < \gamma I. \quad (7.44)$$

Действительно, третье неравенство в (7.40), представленное в блочном виде

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & I \\ Y_{12}^T & Y_{22} & 0 \\ I & 0 & \gamma I \end{pmatrix} > 0,$$

согласно лемме А.4 эквивалентно следующим двум неравенствам

$$Y_{22} > 0, \quad \begin{pmatrix} Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{12}^T & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0.$$

Первое из этих неравенств выполняется, т.к. $Y > 0$, а второе неравенство с учетом того, что X_{11} и Y_{11} – соответствующие блоки взаимнообратных матриц, запишем в виде неравенства

$$\begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0,$$

которое согласно лемме Шура эквивалентно неравенству $X_{11} < \gamma I$.

Таким образом, задача синтеза γ -оптимального регуляторов k -порядка может быть также сведена к сформулированной выше задаче **В**: найти две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (7.41), (7.44), (7.42) и ранговому условию (7.43), или установить, что таких матриц не существует.

Синтез γ -оптимальных регуляторов по выходу полного порядка ($k = n_x$) сводится к решению только линейных матричных неравенств, так как ранговое условие очевидно выполняется.

Утверждение 7.6 Для существования γ -оптимального регулятора полного порядка необходимо и достаточно, чтобы существовали две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$ и $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие следующим линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & C_1^T \\ C_1 & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0,$$

$$N^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} C_1^T \\ C_1 Y_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} N < 0, \quad (7.45)$$

$$X_{11} < \gamma I, \quad \begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0,$$

где столбцы матриц W_{C_2} и N образуют базисы ядер матриц C_2 и $(B^T \ D^T)$ соответственно.

Для построения регулятора необходимо достроить блок Y_{11} до матрицы Y и решить неравенство (7.37) относительно параметров Θ . Выбор блоков Y_{12} и Y_{22} , обеспечивающий выполнение равенства (см. лемму А.7)

$$Y_{11} - X_{11}^{-1} = Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{12}^T, \quad (7.46)$$

может быть осуществлен, например, следующим образом: $Y_{12} = Y_{22} = V > 0$, где $V = Y_{11} - X_{11}^{-1}$.

Пример 7.2 γ -оптимальное управление по выходу линейным осциллятором с демпфированием. Уравнения линейного осциллятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + u, \\ z_1 &= x_1, \\ z_2 &= u, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

представим в виде (7.29), где матрицы A , B , D заданы в примере 7.1, а

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = (1 \ 0).$$

В результате решения задачи минимизации по γ для $\omega_0 = 10$ и $\delta = 0.1$ были получены следующие значения: $\gamma = 2.0354$,

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 2.0354 & 0.0011 \\ 0.0011 & 1.5211 \end{pmatrix}, \quad Y_{11} = \begin{pmatrix} 0.4914 & -0.0593 \\ -0.0593 & 49.1470 \end{pmatrix},$$

а уравнения γ -оптимального динамического регулятора по выходу второго порядка имеют вид

$$\dot{x}_r = \begin{pmatrix} -57.8622 & -0.0702 \\ -0.0671 & -0.1424 \end{pmatrix} x_r + \begin{pmatrix} 0.1201 \\ -98.6673 \end{pmatrix} y,$$

$$u = (-0.0255 \ -0.0420)x_r - 0.0050y.$$

Глава 8

Оптимальное гашение возмущений

8.1 Уровень гашения возмущений в непрерывном объекте

Пусть на вход устойчивого линейного объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv \\ z &= Cx + Dv, \quad x(0) = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$, $v \in \mathcal{R}^{n_v}$ и $z \in \mathcal{R}^{n_z}$, действует ограниченное по норме L_2 возмущение $v(t)$ (см. рис. 8.1), т.е.

$$\|v\| = \left(\int_0^{\infty} |v(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Будем называть уровнем гашения возмущений в объекте величину

$$\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|}. \quad (8.2)$$

Заметим, что

$$\gamma_* = \inf_{\gamma} \{ \gamma : \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \forall v, \|v\| \neq 0 \},$$

поэтому представляет интерес выяснить, является ли уровень гашения возмущений в объекте меньшим заданного числа $\gamma > 0$, т.е. выполняется ли условие

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \quad \forall v, \quad \|v\| \neq 0. \quad (8.3)$$

Так как непосредственная проверка неравенства (8.3) не представляется возможной, преобразуем это условие. Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} = \sup_{\omega \in (-\infty, \infty)} \|H(j\omega)\| = \|H\|_{\infty},$$

где $H(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта (8.1) от входа v к выходу z , $j = \sqrt{-1}$, $\|\cdot\|$ обозначает спектральную матричную норму, т.е.

$$\|H\| = \max_i \sigma_i(H),$$

$\sigma_i(H) = \lambda_i^{1/2}(HH^*)$ – i -е сингулярное число матрицы H , $*$ обозначает операцию эрмитова сопряжения, а $\|\cdot\|_\infty$ – ∞ -норма в пространстве $H(s)$ таких, что $\sup_{\text{Re } s \geq 0} \|H(s)\| < \infty$. Следовательно, условие (8.3) эквивалентно неравенству

$$\|H\|_\infty < \gamma \quad (8.4)$$

или, что то же, частотному неравенству

$$H(j\omega)H^T(-j\omega) < \gamma^2 I, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty).$$

В свою очередь, с учетом леммы Шура это неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -I & H^T(-j\omega) \\ H(j\omega) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0,$$

применяя к которому еще раз лемму Шура, получим

$$H^T(-j\omega)H(j\omega) < \gamma^2 I, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty). \quad (8.5)$$

Таким образом, необходимо проверить выполнение этого частотного неравенства для заданного γ .

В случае объекта с одним входом и одним выходом эта задача легко решается графически: на комплексной плоскости строится годограф, т.е. кривая $H(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, и непосредственно проверяется, лежит ли эта кривая внутри круга с центром в начале координат и радиусом γ . В случае объекта со многими входами применим частотную теорему (см. лемму Н.1 Калмана-Якубовича-Попова в Приложении) и сведем проверку выполнения частотного условия (8.5) к задаче о разрешимости линейного матричного неравенства.

Согласно частотной теореме выполнение частотного неравенства

$$\mathcal{L}[(j\omega I - A)^{-1}Bv, v] > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty), \quad \forall |v| \neq 0 \quad (8.6)$$

для заданной эрмитовой формы $\mathcal{L}(x, v)$ векторов $x \in \mathcal{C}^{n_x}$, $v \in \mathcal{C}^{n_v}$ эквивалентно в случае стабилизируемости пары (A, B) существованию квадратичной формы $V(x) = x^T X x$ с эрмитовой матрицей $X = X^*$, для производной которой в силу системы (8.1) выполняется неравенство

$$\dot{V} - \mathcal{L}(x, v) < 0, \quad \forall x, v, \quad |x| + |v| \neq 0$$

или, другими словами, имеет место неравенство

$$2\text{Re } x^* X (Ax + Bv) - \mathcal{L}(x, v) < 0, \quad \forall x, v, \quad |x| + |v| \neq 0. \quad (8.7)$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T) L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

то неравенство (8.7) сводится к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A - L_{11} & X B - L_{12} \\ B^T X - L_{12}^T & -L_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (8.9)$$

а частотное условие (8.6) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (-j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0. \quad (8.10)$$

Имея в виду частотное неравенство (8.5), возьмем эрмитову форму

$$\mathcal{L}(x, v) = \gamma^2 v^* v - (Cx + Dv)^*(Cx + Dv),$$

т.е. такую, чтобы неравенство (8.10) свелось к неравенству

$$\gamma^2 I - H^T(-j\omega)H(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty),$$

эквивалентному (8.5). Это условие согласно частотной теореме выполняется тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$2\operatorname{Re} x^* X(Ax + Bv) + (Cx + Dv)^*(Cx + Dv) - \gamma^2 v^* v < 0.$$

Заменяя здесь X на γX и умножая полученное неравенство на γ^{-1} , придем к неравенству

$$x^*(A^T X + XA + \gamma^{-1}C^T C)x + 2\operatorname{Re} x^*(XB + \gamma^{-1}C^T D)v + v^*(\gamma^{-1}D^T D - \gamma I)v < 0.$$

Так как это неравенство должно выполняться для всех x и v , то оно эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + \gamma^{-1}C^T C & XB + \gamma^{-1}C^T D \\ (XB + \gamma^{-1}C^T D)^T & -\gamma I + \gamma^{-1}D^T D \end{pmatrix} < 0,$$

которое с учетом леммы А.2 сводится к линейному матричному неравенству

$$F_c(X, \gamma) = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (8.11)$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства в силу леммы А.2 должно выполняться

$$A^T X + XA < 0,$$

из которого, учитывая, что матрица A гурвицева, в силу теоремы Ляпунова (см. лемму Е.1 в Приложении) следует, что $X > 0$. Таким образом, на основании частотной теоремы мы приходим к следующему.

Утверждение 8.1 Пусть в объекте (8.1) матрица A гурвицева. Для того, чтобы уровень гашения возмущений в этом объекте был меньше заданного числа γ необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство (8.11) было разрешимо относительно симметрической $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X > 0$.

Заметим, что (8.11) является линейным матричным неравенством относительно переменных X и γ . Поэтому вычисление уровня гашения возмущений в объекте сводится к решению задачи оптимизации линейной функции при ограничении, заданном линейным матричным неравенством.

Утверждение 8.2 *Определенный в (8.2) уровень гашения возмущений в устойчивом объекте (8.1) находится следующим образом*

$$\gamma_* = \inf_{F_c(X,\gamma) < 0} \gamma ,$$

где линейное матричное неравенство $F_c(X, \gamma) < 0$ задано в (8.11).

Пример 8.1 **Уровень гашения возмущений линейного осциллятора с демпфированием.** *Осциллятор описывается уравнением*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v , \\ z &= x_1 , \end{aligned}$$

т.е. в виде (8.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad C = (1 \ 0) , \quad D = 0 .$$

Решая задачу минимизации γ при ограничениях (8.11), для значений $\omega_0 = 10$, $\delta = 1$ получим $\gamma_* = 0.1001$, а для $\omega_0 = 10$, $\delta = 0.1$ имеем $\gamma_* = 1.000$.

8.2 H_∞ -регуляторы для непрерывных объектов

Рассмотрим управляемый объект

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 v + B_2 u , \\ z &= C_1 x + D_{11} v + D_{12} u , \\ y &= C_2 x + D_{21} v , \end{aligned} \tag{8.12}$$

в котором $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathcal{R}^{n_v}$ – возмущение, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $z \in \mathcal{R}^{n_z}$ – управляемый выход, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Синтез H_∞ -управления этим объектом состоит в построении регулятора (см. рис. 8.2), при котором уровень гашения возмущений в асимптотически устойчивой замкнутой системе меньше заданного числа γ , т.е.

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma . \tag{8.13}$$

Такие регуляторы будем называть H_∞ -регуляторами с заданным γ ; H_∞ -оптимальным регулятором будем называть H_∞ -регулятор с минимальным значением γ .

Рассмотрим сначала случай измеряемого состояния в объекте (8.12), когда $C_2 = I$, $D_{21} = 0$, и управление выбирается в виде

$$u = \Theta x . \tag{8.14}$$

Уравнения замкнутой системы (8.12), (8.14) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v, \\ z &= C_c x_c + D_c v,\end{aligned}\quad (8.15)$$

где

$$A_c = A + B_2 \Theta, \quad B_c = B_1, \quad C_c = C_1 + D_{12} \Theta, \quad D_c = D_{11}. \quad (8.16)$$

Для выполнения цели управления (8.13) передаточная матрица замкнутого объекта (8.15) от входа v к выходу z

$$H_c(s) = D_c + C_c(sI - A_c)^{-1} B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma.$$

Согласно утверждению 8.1 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (8.17)$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$.

Умножим неравенство (8.17) слева и справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и с учетом (8.16) получим

$$\begin{pmatrix} Y(A + B_2 \Theta)^T + (A + B_2 \Theta)Y & B_1 & Y(C_1 + D_{12} \Theta)^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12} \Theta)Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad (8.18)$$

где $Y = X^{-1}$. Очевидно, что полученное неравенство представимо в виде следующего линейного матричного неравенства относительно переменных Y , $Z = \Theta Y$ и γ :

$$F(Y, Z, \gamma) = \begin{pmatrix} Y A^T + A Y + Z^T B_2^T + B_2 Z & B_1 & Y C_1^T + Z^T D_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (8.19)$$

Утверждение 8.3 Для существования H_∞ -регулятора по состоянию с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовали $n_x \times n_x$ -матрица $Y = Y^T > 0$ и $n_u \times n_x$ -матрица Z , удовлетворяющие линейному матричному неравенству (8.19). Если такие матрицы Y и Z найдены, то параметры Θ искомого регулятора определяются по формуле $\Theta = ZY^{-1}$. Минимальное значение γ находится из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\gamma_* = \inf_{F(Y, Z, \gamma) < 0, Y > 0} \gamma.$$

Пример 8.2 H_∞ -управление по состоянию линейным осциллятором с демпфированием. Линейный осциллятор описывается уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v + u, \\ z_1 &= x_1, \\ z_2 &= u,\end{aligned}$$

т.е. в виде (8.12), где

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\delta \end{pmatrix}, & B_1 = B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & D_{11} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & D_{12} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Решая задачу минимизации γ при ограничениях (8.19) для значений $\omega_0 = 10$, $\delta = 0.1$, найдем $\gamma_* = 0.7071$ и соответствующие параметры $\Theta = (-0.005, -0.1)$. Таким образом, H_∞ -оптимальный регулятор

$$u = -0.005x_1 - 0.1x_2$$

обеспечивает гашение колебаний осциллятора с минимально возможным уровнем $\gamma_* = 0.7071$.

Другой способ построения H_∞ -регулятора по состоянию состоит в представлении неравенства (8.18) в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (8.20)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

$$P = (Y \ 0 \ 0), \quad Q = (B_2^T \ 0 \ D_{12}^T).$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.22)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & B_1 & YC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0,$$

где

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} & 0 \\ 0 & I \\ W_Q^{(2)} & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицы $W_Q^{(1)}$ и $W_Q^{(2)}$ удовлетворяют уравнению

$$B_2^T W_Q^{(1)} + D_{12}^T W_Q^{(2)} = 0.$$

Первое из неравенств (8.22) сводится к неравенству

$$\begin{pmatrix} -\gamma I & D_{11}^T \\ D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad (8.23)$$

эквивалентное условию $\gamma^2 > \lambda_{\max}(D_{11}^T D_{11})$, а второе – к неравенству

$$\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} YA^T + AY & YC_1^T & | & B_1 \\ C_1Y & -\gamma I & | & D_{11} \\ - & - & - & - \\ B_1^T & D_{11}^T & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0, \quad (8.24)$$

где столбцы матрицы $N_2 = \text{col}(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \ D_{12}^T)$.

Утверждение 8.4 Для существования H_∞ -регулятора по состоянию с заданным γ , удовлетворяющем (8.23), необходимо и достаточно, чтобы существовали $n_x \times n_x$ -матрица $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющая линейному матричному неравенству (8.24). Если такая матрица Y найдена, то параметры Θ искомого регулятора определяются из решения линейного матричного неравенства (8.20). Минимально возможный уровень гашения возмущений находится из решения задачи минимизации γ при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (8.23) и (8.24).

Обратимся теперь к построению H_∞ -регулятора k -го порядка по выходу в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где $x_r \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора. В частном случае $k = 0$ имеем статический регулятор $u = D_r y$. Уравнения замкнутой системы (8.12), (8.25) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c v, \\ z &= C_c x_c + D_c v, \end{aligned} \quad (8.26)$$

где $x_c = \text{col}(x, x_r)$,

$$A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_r D_{21} \\ B_r D_{21} \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

$$C_c = (C_1 + D_{12} D_r C_2 \quad D_{12} C_r), \quad D_c = D_{11} + D_{12} D_r D_{21}.$$

Для выполнения цели управления (8.13) передаточная матрица замкнутого объекта (8.26) от входа v к выходу z

$$H_c(s) = D_c + C_c(sI - A_c)^{-1}B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma.$$

Согласно утверждению 8.1 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X + X A_c & X B_c & C_c^T \\ B_c^T X & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (8.28)$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$.

Введем матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

и представим матрицы замкнутой системы в виде

$$\begin{aligned} A_c &= A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C}, & B_c &= B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_{21}, \\ C_c &= C_0 + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{C}, & D_c &= D_{11} + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{D}_{21}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, & \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}, \\ B_0 &= \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_{k \times n_v} \end{pmatrix}, & C_0 &= (C_1 \quad 0_{n_z \times k}), \\ \mathcal{D}_{12} &= (0_{n_z \times k} \quad D_{12}), & \mathcal{D}_{21} &= \begin{pmatrix} 0_{k \times n_v} \\ D_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Подставим эти выражения в (8.28) и представим полученное неравенство в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (8.31)$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

$$P = (\mathcal{C} \quad \mathcal{D}_{21} \quad 0_{(n_y+k) \times n_z}), \quad Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0_{(n_u+k) \times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T).$$

Согласно утверждению 3.2 полученное неравенство разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.33)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0,$$

где столбцы матрицы W_P образуют базис $\mathcal{N}(P)$ – ядра матрицы P , а столбцы матрицы W_Q образуют базис $\mathcal{N}(Q)$ – ядра матрицы Q . Представим

$$Q = (\mathcal{B}^T X \quad 0 \quad \mathcal{D}_{12}^T) = R \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad R = (\mathcal{B}^T \quad 0_{(n_u+k) \times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T),$$

откуда следует, что

$$W_Q = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} W_R.$$

Подставляя это выражение в (8.33), приходим к следующему.

Утверждение 8.5 *Для существования H_∞ -регулятора k -го порядка с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовала $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим двум неравенствам*

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.34)$$

$$W_R^T \begin{pmatrix} X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 X^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_R < 0.$$

Если условия (8.34) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора находятся как решения линейного матричного неравенства (8.31).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (8.34) в виде линейных матричных

неравенств относительно матриц X и Y :

$$W_P^T \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.35)$$

$$W_R^T \begin{pmatrix} Y A_0^T + A_0 Y & B_0 & Y C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 Y & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_R < 0.$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: поиску взаимнообратных матриц X и Y ($XY = I$), удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (8.35).

Пример 8.3 H_∞ -управление по выходу линейным осциллятором с демпфированием. Уравнения линейного осциллятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - \delta x_2 + v + u, \\ z_1 &= x_1, \\ z_2 &= u, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

представим в виде (8.12), где матрицы A , B_1 , B_2 , C_1 , D_{11} , D_{12} заданы в примере 8.2, а

$$C_2 = (1 \ 0), \quad D_{21} = 0.$$

Построим сначала статический регулятор по выходу ($k = 0$) вида

$$u = \Theta y.$$

В данном случае параметр Θ может быть найден как решение линейного матричного неравенства (8.31), в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} A^T X + X A & X B_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix},$$

$$P = (C_2 \ D_{21} \ 0), \quad Q = (B_2^T X \ 0 \ D_{12}^T),$$

а матрица X получается из решения **задачи А** для линейных матричных неравенств (8.35). В результате для $\omega_0 = 10$ и $\delta = 0.1$ были получены следующие значения: $\gamma_* = 1.001$ и $\Theta = 0.0390$, а при меньших значениях γ решения найти не удалось. Очевидно, что наименьшее допустимое значение должно быть $\gamma_* = 1$ при законе управления $u = 0$ (см. пример 8.1), и полученная разница обусловлена точностью, с которой решаются линейные матричные неравенства в пакете MATLAB.

Расчет, проведенный для динамического регулятора по выходу первого порядка, приводит к следующему результату: регулятор

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -0.9572x_r - 103.25y, \\ u &= -0.092x_r - 0.0945y \end{aligned}$$

обеспечивает гашение возмущений с уровнем $\gamma_* = 0.708$, что с высокой точностью совпадает с минимально возможным значением γ , обеспечиваемым регулятором по состоянию (см. пример 8.2).

Преобразуем неравенства (8.35), учитывая блочную структуру матриц A_0, B_0, C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно (8.30) и (8.32) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_v} & 0_{k \times n_z} \\ C_2 & 0_{n_y \times k} & D_{21} & 0_{n_y \times n_z} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_v} & 0_{k \times n_z} \\ B_2^T & 0_{n_u \times k} & 0_{n_u \times n_v} & D_{12}^T \end{pmatrix},$$

поэтому в качестве W_P и W_R можно взять

$$W_P = \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_R = \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $W_P^{(1)}, W_P^{(2)}$ и матрицы $W_R^{(1)}, W_R^{(2)}$ определяются из следующих уравнений

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{21} W_P^{(2)} = 0, \quad B_2^T W_R^{(1)} + D_{12}^T W_R^{(2)} = 0.$$

С учетом этого левые части в (8.35) примут вид

$$\begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & A^T X_{12} & X_{11} B_1 & C_1^T \\ * & 0 & X_{12}^T B_1 & 0 \\ * & * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_P^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & A Y_{12} & B_1 & Y_{11} C_1^T \\ * & 0 & 0 & Y_{12}^T C_1^T \\ * & * & -\gamma I & D_{11}^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ W_R^{(2)} & 0 \end{pmatrix},$$

и, окончательно, неравенства (8.35) сводятся к следующим линейным матричным неравенствам относительно блоков X_{11} и Y_{11} взаимнообратных матриц X и Y :

$$\begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & X_{11} B_1 & | & C_1^T \\ B_1^T X_{11} & -\gamma I & | & D_{11}^T \\ - & - & - & - \\ C_1 & D_{11} & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0, \quad (8.36)$$

$$\begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} C_1^T & | & B_1 \\ C_1 Y_{11} & -\gamma I & | & D_{11} \\ - & - & - & - \\ B_1^T & D_{11}^T & | & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & I \end{pmatrix} < 0,$$

где столбцы матриц $N_1 = \text{col}(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ и $N_2 = \text{col}(W_R^{(1)}, W_R^{(2)})$ образуют базисы ядер матриц $(C_2 \ D_{21})$ и $(B_2^T \ D_{12}^T)$ соответственно.

Согласно лемме А.7 условия $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0, \quad (8.37)$$

$$\text{rank}(I - X_{11} Y_{11}) \leq k \quad (8.38)$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования взаимнообратных матриц $X > 0$, $Y > 0$ с данными блоками X_{11} , Y_{11} . Таким образом, задача синтеза H_∞ -регуляторов k -порядка может быть также сведена к сформулированной выше задаче **В**: найти две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (8.36), (8.37) и условию (8.38), или установить, что таких матриц не существует.

Заметим, что в важном частном случае $D_{11} = 0$, т.е. когда управляемый выход не содержит в явном виде возмущение v , минимально возможный уровень гашения возмущений обеспечивается регулятором по состоянию. Действительно, в этом случае неравенство (8.23) справедливо для любых $\gamma > 0$, а второе неравенство (8.36) для регуляторов по выходу совпадает с неравенством (8.24) для регуляторов по состоянию.

Заметим также, что синтез H_∞ -регуляторов по выходу полного порядка ($k = n_x$) сводится к решению только линейных матричных неравенств (8.36) и (8.37), так как ранговое условие очевидно выполняется. В этом случае минимально возможный уровень гашения возмущений находится из решения задачи минимизации γ при ограничениях, задаваемых этими линейными матричными неравенствами.

Пример 8.4 H_∞ -регулятор по выходу полного порядка для линейного осциллятора с демпфированием. Уравнения линейного осциллятора такие же, как и в примере 8.3.

Расчет, проведенный для динамического регулятора по выходу полного (второго)

порядка, приводит к следующему результату: регулятор

$$\begin{aligned}\dot{x}_r^{(1)} &= 0.0592x_r^{(1)} - 0.8358x_r^{(2)} - 24.76y, \\ \dot{x}_r^{(2)} &= 1.0667x_r^{(1)} - 0.8604x_r^{(2)} + 20.24y, \\ u &= -0.2586x_r^{(1)} + 0.1836x_r^{(2)} - 0.0389y\end{aligned}$$

обеспечивает гашение возмущений с уровнем $\gamma_* = 0.7072$, что с высокой точностью совпадает с минимально возможным значением γ , обеспечиваемым регулятором по состоянию (см. пример 8.2).

8.3 Уровень гашения возмущений в дискретном объекте

Пусть на вход устойчивого линейного дискретного объекта

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= Ax_t + Bv_t, \\ z_t &= Cx_t + Dv_t,\end{aligned}\tag{8.39}$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$, $v_t \in \mathcal{R}^{n_v}$, $z_t \in \mathcal{R}^{n_z}$ и все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, действует ограниченное по норме l_2 возмущение v_t , т.е.

$$\|v\| = \left(\sum_{t=0}^{\infty} |v_t|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Как и для непрерывных систем, уровнем гашения возмущений в объекте будем называть величину

$$\gamma_* = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|}.\tag{8.40}$$

Ясно, что

$$\gamma_* = \inf_{\gamma} \{\gamma : \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \forall v, \|v\| \neq 0\}.$$

Требуется выяснить, является ли уровень гашения возмущений в объекте меньше заданного числа $\gamma > 0$, т.е. выполняется ли условие

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \quad \forall v, \quad \|v\| \neq 0.\tag{8.41}$$

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} = \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \|H(e^{j\varphi})\| = \|H\|_{\infty},$$

где $H(q) = D + C(qI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта (8.39) от входа v к выходу z , $j = \sqrt{-1}$, $\|\cdot\|$ обозначает спектральную матричную норму, т.е.

$$\|H\| = \max_i \sigma_i(H),$$

σ_i – i -е сингулярное число матрицы H , а $\|\cdot\|_\infty$ – ∞ -норма в пространстве $H(q)$ таких, что $\sup_{|q|\geq 1} \|H(q)\| < \infty$. Следовательно, условие (8.41) эквивалентно неравенству

$$\|H\|_\infty < \gamma \quad (8.42)$$

или, что то же, частотному неравенству

$$H^T(e^{-j\varphi})H(e^{j\varphi}) < \gamma^2 I, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi). \quad (8.43)$$

Таким образом, необходимо проверить выполнение этого частотного неравенства для заданного γ .

В случае объекта с одним входом и одним выходом эта задача легко решается графически: на комплексной плоскости строится годограф, т.е. кривая $H(e^{j\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, и непосредственно проверяется, лежит ли эта кривая внутри круга с центром в начале координат и радиусом γ . В случае объекта со многими входами применим дискретный вариант частотной теоремы (см. лемму Н.2 в Приложении) и сведем проверку выполнения частотного условия (8.43) к задаче о разрешимости линейного матричного неравенства.

Согласно частотной теореме выполнение по траекториям системы (8.39) неравенства

$$V_{t+1} - V_t - \mathcal{L}(x_t, v_t) < 0, \quad \forall x_t, v_t, \quad |x_t| + |v_t| \neq 0$$

для заданной эрмитовой формы $\mathcal{L}(x, v)$ векторов $x \in \mathcal{C}^{n_x}$, $v \in \mathcal{C}^{n_v}$ и некоторой $V_t = V(x_t) = x_t^T X x_t$ с эрмитовой матрицей X или, другими словами, выполнение для некоторой $X = X^*$ неравенства

$$(Ax_t + Bv_t)^* X (Ax_t + Bv_t) - x_t^T X x_t - \mathcal{L}(x_t, v_t) < 0, \quad \forall x_t, v_t, \quad |x_t| + |v_t| \neq 0 \quad (8.44)$$

эквивалентно выполнению частотного неравенства

$$\mathcal{L}[(e^{j\varphi}I - A)^{-1}Bv_t, v_t] > 0, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi), \quad \forall |v_t| \neq 0. \quad (8.45)$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T) L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix},$$

то неравенство (8.44) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T X A - X - L_{11} & A^T X B - L_{12} \\ B^T X A - L_{12}^T & B^T X B - L_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (8.46)$$

а частотное условие (8.45) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (e^{-j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{j\varphi}I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0. \quad (8.47)$$

Принимая во внимание (8.43), выберем эрмитову форму

$$\mathcal{L}(x, v) = \gamma^2 v^* v - (Cx + Dv)^* (Cx + Dv) \quad (8.48)$$

так, чтобы неравенство (8.47) свелось к эквивалентному (8.43) неравенству

$$\gamma^2 I - H^T(e^{-j\varphi})H(e^{j\varphi}) > 0, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi).$$

Согласно частотной теореме для выполнения этого условия необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$(Ax_t + Bv_t)^* X (Ax_t + Bv_t) - x_t^T X x_t + (Cx_t + Dv_t)^* (Cx_t + Dv_t) - \gamma^2 v_t^* v_t < 0.$$

Заменяя здесь X на γX и умножая полученное неравенство на γ^{-1} , получим

$$\begin{aligned} x_t^* (A^T X A - X + \gamma^{-1} C^T C) x_t + 2 \operatorname{Re} x_t^* (A^T X B + \gamma^{-1} C^T D) v_t + \\ + v_t^* (\gamma^{-1} D^T D - \gamma I + B^T X B) v_t < 0. \end{aligned}$$

Так как это неравенство должно выполняться для всех x_t и v_t , то оно эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^T X A - X + \gamma^{-1} C^T C & A^T X B + \gamma^{-1} C^T D \\ (A^T X B + \gamma^{-1} C^T D)^T & -\gamma I + B^T X B + \gamma^{-1} D^T D \end{pmatrix} < 0 \quad (8.49)$$

или, с учетом леммы А.2, неравенству

$$F_d(X, \gamma) = \begin{pmatrix} A^T X A - X & A^T X B & C^T \\ B^T X A & -\gamma I + B^T X B & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad (8.50)$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства в силу леммы А.2 должно выполняться

$$A^T X A - X < 0,$$

из которого, учитывая, что матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости, в силу теоремы Ляпунова для дискретных систем (см. лемму Е.2 в Приложении) следует, что $X > 0$. Таким образом, на основании дискретного варианта частотной теоремы мы приходим к следующему.

Утверждение 8.6 Пусть в объекте (8.39) матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости. Для того, чтобы уровень гашения возмущений в этом объекте был меньше заданного числа γ необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство (8.50) было разрешимо относительно симметрической $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X > 0$.

Отметим, что (8.50) является линейным матричным неравенством относительно переменных X и γ . Поэтому вычисление уровня гашения возмущений в объекте сводится к решению задачи оптимизации линейной функции при ограничении, заданном линейным матричным неравенством.

Утверждение 8.7 Определенный в (8.40) уровень гашения возмущений в устойчивом объекте (8.39) находится следующим образом

$$\gamma_* = \inf_{F_d(X, \gamma) < 0} \gamma,$$

где линейное матричное неравенство $F_d(X, \gamma) < 0$ задано в (8.50).

8.4 H_∞ -регуляторы для дискретных объектов

Рассмотрим дискретный управляемый объект

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1v_t + B_2u_t, \\ z_t &= C_1x_t + D_{11}v_t + D_{12}u_t, \\ y_t &= C_2x_t + D_{21}v_t, \end{aligned} \quad (8.51)$$

в котором $x_t \in \mathcal{R}^{n_x}$ – состояние, $v_t \in \mathcal{R}^{n_v}$ – возмущение, $u_t \in \mathcal{R}^{n_u}$ – управление, $z_t \in \mathcal{R}^{n_z}$ – управляемый выход, $y_t \in \mathcal{R}^{n_y}$ – измеряемый выход. Требуется построить линейный динамический регулятор k -го порядка вида

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(r)} &= A_r x_t^{(r)} + B_r y_t, \\ u_t &= C_r x_t^{(r)} + D_r y_t, \end{aligned} \quad (8.52)$$

где $x_t^{(r)} \in \mathcal{R}^k$ – состояние регулятора, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (8.51), (8.52) и выполнение условия

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \quad \forall v, \quad \|v\| \neq 0 \quad (8.53)$$

для заданного γ .

Уравнения замкнутой системы (8.51), (8.52) примут вид

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(c)} &= A_c x_t^{(c)} + B_c v_t, \\ z_t &= C_c x_t^{(c)} + D_c v_t, \end{aligned} \quad (8.54)$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_r D_{21} \\ B_r D_{21} \end{pmatrix}, \quad (8.55)$$

$$C_c = (C_1 + D_{12} D_r C_2 \quad D_{12} C_r), \quad D_c = D_{11} + D_{12} D_r D_{21}.$$

Введем матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

и представим матрицы замкнутой системы в виде

$$A_c = A_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{C}, \quad B_c = B_0 + \mathcal{B}\Theta\mathcal{D}_{21}, \quad (8.57)$$

$$C_c = C_0 + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{C}, \quad D_c = D_{11} + \mathcal{D}_{12}\Theta\mathcal{D}_{21},$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times k} \\ 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times k} & B_2 \\ I_k & 0_{k \times n_u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k \\ C_2 & 0_{n_y \times k} \end{pmatrix}, \quad (8.58)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_{k \times n_v} \end{pmatrix}, \quad C_0 = (C_1 \quad 0_{n_z \times k}),$$

$$\mathcal{D}_{12} = (0_{n_z \times k} \quad D_{12}), \quad \mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_v} \\ D_{21} \end{pmatrix}.$$

Для выполнения цели управления (8.53) передаточная матрица замкнутого объекта (8.54) от входа v_t к выходу z_t

$$H_c(q) = D_c + C_c(qI - A_c)^{-1}B_c$$

должна удовлетворять условию

$$\|H_c\|_\infty < \gamma .$$

Согласно утверждению 8.6 для этого необходимо и достаточно, чтобы линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 . \quad (8.59)$$

было разрешимо относительно матрицы $X = X^T > 0$. По аналогии с синтезом H_∞ -управления для непрерывного объекта далее требуется превратить это неравенство в линейное матричное неравенство относительно параметров регулятора Θ , подставляя в левую часть (8.59) выражения (8.57) для матриц замкнутой системы. Нетрудно видеть, что при этом блоки полученной матрицы будут содержать квадратичные по Θ слагаемые. Поэтому преобразуем (8.59) к эквивалентному неравенству

$$\begin{pmatrix} -X^{-1} & A_c & B_c & 0 \\ A_c^T & -X & 0 & C_c^T \\ B_c^T & 0 & -\gamma I & D_c^T \\ 0 & C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 , \quad (8.60)$$

в левую часть которого Θ входит линейно. Покажем, что неравенства (8.59) и (8.60) эквивалентны.

Действительно, согласно лемме А.2 неравенство (8.60) выполняется тогда и только тогда, когда

$$X > 0 , \quad \begin{pmatrix} -X & 0 & C_c^T \\ 0 & -\gamma I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c^T \\ B_c^T \\ 0 \end{pmatrix} X (A_c \ B_c \ 0) < 0 . \quad (8.61)$$

Первое из этих неравенств следует из (8.59) с учетом леммы А.2 и теоремы Ляпунова (см. лемму Е.2 в Приложении), так как все собственные значения матрицы A_c должны лежать внутри единичного круга комплексной плоскости. Запишем второе неравенство (8.61) в виде

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c & C_c^T \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 ,$$

которое согласно лемме А.2 выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} A_c^T X A_c - X & A_c^T X B_c \\ B_c^T X A_c & -\gamma I + B_c^T X B_c \end{pmatrix} + \gamma^{-1} \begin{pmatrix} C_c^T \\ D_c^T \end{pmatrix} (C_c \ D_c) < 0 .$$

Очевидно, что полученное неравенство совпадает с неравенством (8.59).

Неравенство (8.60) представимо в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестных параметров Θ

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (8.62)$$

в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix}, \quad (8.63)$$

$$P = (0_{(n_y+k) \times (n_x+k)} \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{D}_{21} \quad 0_{(n_y+k) \times n_z}),$$

$$Q = (\mathcal{B}^T \quad 0_{(n_u+k) \times (n_x+k)} \quad 0_{(n_u+k) \times n_v} \quad \mathcal{D}_{12}^T)$$

и все матрицы определены в (8.58). Согласно утверждению 3.2 относительно разрешимости такого типа неравенств приходим к следующему.

Утверждение 8.8 *Для существования H_∞ -регулятора k -го порядка с заданным γ необходимо и достаточно, чтобы существовала $(n_x + k) \times (n_x + k)$ -матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим двум неравенствам*

$$W_P^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.64)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} -X^{-1} & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0.$$

Если условия (8.64) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры Θ искомого регулятора находятся как решения линейного матричного неравенства (8.62).

Введем матрицу $Y = X^{-1}$ и перепишем условия (8.64) в виде линейных матричных

неравенств относительно матриц X и Y :

$$W_P^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0, \quad (8.65)$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} -Y & A_0 & B_0 & 0 \\ A_0^T & -X & 0 & C_0^T \\ B_0^T & 0 & -\gamma I & D_{11}^T \\ 0 & C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0.$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к **задаче А**: найти две взаимнообратные матрицы X и Y ($XY = I$), удовлетворяющие неравенствам (8.65).

Преобразуем неравенства (8.65), учитывая блочную структуру матриц A_0 , B_0 , C_0 и соответствующее представление матриц X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно (8.58) и (8.63) имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} & 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_v} & 0_{k \times n_z} \\ 0_{n_y \times n_x} & 0_{n_y \times k} & C_2 & 0_{n_y \times k} & D_{21} & 0_{n_y \times n_z} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0_{k \times n_x} & I_k & 0_{k \times n_x} & 0_{k \times k} & 0_{k \times n_v} & 0_{k \times n_z} \\ B_2^T & 0_{n_u \times k} & 0_{n_u \times n_x} & 0_{n_u \times k} & 0_{n_u \times n_v} & D_{12}^T \end{pmatrix},$$

поэтому

$$W_P = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ W_P^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_P^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad W_Q = \begin{pmatrix} W_Q^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ W_Q^{(2)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $W_P^{(1)}$, $W_P^{(2)}$ и матрицы $W_Q^{(1)}$, $W_Q^{(2)}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$C_2 W_P^{(1)} + D_{21} W_P^{(2)} = 0, \quad B_2^T W_Q^{(1)} + D_{12}^T W_Q^{(2)} = 0.$$

С учетом этого неравенства (8.65) примут вид

$$W_P^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_1 & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_1^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_P < 0 ,$$

$$W_Q^T \begin{pmatrix} -Y_{11} & -Y_{12} & A & 0 & B_1 & 0 \\ \star & -Y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -X_{11} & -X_{12} & 0 & C_1^T \\ \star & \star & \star & -X_{22} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\gamma I & D_{11}^T \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma I \end{pmatrix} W_Q < 0 .$$

После умножения первое из этих неравенств запишется в виде

$$\begin{pmatrix} -W_P^{(1)T} X_{11} W_P^{(1)} - \gamma W_P^{(2)T} W_P^{(2)} & \star & \star \\ \begin{pmatrix} A W_P^{(1)} + B_1 W_P^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} & -Y & \star \\ C_1 W_P^{(1)} + D_{11} W_P^{(2)} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 ,$$

которое по лемме А.4 с учетом того, что $Y > 0$, эквивалентно неравенству

$$\begin{pmatrix} -W_P^{(1)T} X_{11} W_P^{(1)} - \gamma W_P^{(2)T} W_P^{(2)} & W_P^{(1)T} C_1^T + W_P^{(2)T} D_{11}^T \\ C_1 W_P^{(1)} + D_{11} W_P^{(2)} & -\gamma I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} W_P^{(1)T} A^T + W_P^{(2)T} B_1^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1} \begin{pmatrix} A W_P^{(1)} + B_1 W_P^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 .$$

Так как $Y^{-1} = X$, то во второе слагаемое в левой части последнего неравенства входит только блок X_{11} . Непосредственной проверкой можно убедиться, что это неравенство сводится к следующему линейному матричному неравенству относительно X_{11} :

$$\hat{W}_P^T \begin{pmatrix} A^T X_{11} A - X_{11} & A^T X_{11} B_1 & | & C_1^T \\ \star & -\gamma I + B_1^T X_{11} B_1 & | & D_{11}^T \\ - & - & | & - \\ \star & \star & | & -\gamma I \end{pmatrix} \hat{W}_P < 0 , \quad (8.66)$$

где

$$\hat{W}_P = \left(\begin{array}{c|c} N_1 & 0 \\ \hline - & - \\ 0 & I \end{array} \right),$$

а столбцы матрицы $N_1 = \text{col}(W_P^{(1)}, W_P^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(C_2 \quad D_{21})$.

Аналогичным образом второе из неравенств (8.65) преобразуется к виду

$$\hat{W}_Q^T \left(\begin{array}{cc|c} AY_{11}A^T - Y_{11} & AY_{11}C_1^T & B_1 \\ * & -\gamma I + C_1Y_{11}C_1^T & D_{11} \\ - & - & - \\ * & * & -\gamma I \end{array} \right) \hat{W}_Q < 0, \quad (8.67)$$

где

$$\hat{W}_Q = \left(\begin{array}{c|c} N_2 & 0 \\ \hline - & - \\ 0 & I \end{array} \right),$$

а столбцы матрицы $N_2 = \text{col}(W_Q^{(1)}, W_Q^{(2)})$ образуют базис ядра матрицы $(B_2^T \quad D_{12}^T)$.

Таким образом, задача синтеза H_∞ -регуляторов k -порядка для дискретных объектов может быть также сведена к сформулированной выше **задаче В**: найти две $(n_x \times n_x)$ -матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (8.66), (8.67) и

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0,$$

и условию

$$\text{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \leq k,$$

или установить, что таких матриц не существует.

Глава 9

Алгоритм поиска взаимнообратных матриц

Как было показано выше, синтез регуляторов во многих случаях состоит из двух этапов: поиск двух взаимнообратных матриц, удовлетворяющих линейным матричным неравенствам, и решение относительно параметров регулятора линейного матричного неравенства, в которое войдут найденные на первом этапе матрицы. При переходе от первого этапа ко второму может возникнуть следующая теоретически невозможная ситуация, когда две требуемые взаимнообратные матрицы найдены, а линейное матричное неравенство для параметров регулятора оказывается неразрешимым.

Такая ситуация может быть обусловлена недостаточной точностью, с которой вычисляются взаимнообратные матрицы. Для возможного устранения этого дефекта нужно повторить вычисления с повышенной точностью. Если и это не приводит к успеху, то вполне вероятно, что линейное матричное неравенство относительно параметров регулятора действительно не имеет решения. Проиллюстрируем это явление на простом примере.

Рассмотрим задачу стабилизации объекта

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \\ y &= x_1\end{aligned}$$

с помощью статической обратной связи по выходу $u = \Theta y$. Согласно утверждению 5.6 статический регулятор по выходу существует тогда и только тогда, когда две взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{aligned}W_C^T(A^T X + X A)W_C &< 0, \\ W_{B^T}^T(Y A^T + A Y)W_{B^T} &< 0.\end{aligned}\tag{9.1}$$

В данном случае

$$\begin{aligned}X &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, & Y &= \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & C &= (1 \quad 0)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$W_{B^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому неравенства (9.1) сводятся к следующим

$$x_{12} < 0, \quad y_{12} < 0.$$

В качестве приближённого решения этой задачи рассмотрим, например, две удовлетворяющие этим неравенствам положительно определенные матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 1 + \delta & -\delta^2 \\ -\delta^2 & 1 + \delta \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 + \delta & -\delta^2 \\ -\delta^2 & 1 + \delta \end{pmatrix},$$

где $|\delta| \ll 1$, произведение которых сколь угодно близко к единичной матрице. Казалось бы, что требуемый регулятор должен существовать. Вместе с тем, как легко проверить, такого регулятора в принципе не существует. В самом деле, подставив управление в уравнения объекта, найдём, что матрица замкнутой системы ни при каком Θ не является гурвицевой.

Кроме того, отметим, что все приводимые ниже алгоритмы весьма чувствительны к заданию начальных условий, поэтому остановка алгоритма, когда $XY \neq I$, еще не означает, что требуемого регулятора не существует. В этом случае целесообразно провести вычисления при других начальных условиях.

Рассматриваемый ниже алгоритм [9] предназначен для решения следующей задачи.

Задача А: найти две взаимнообратные матрицы X и Y ($XY = I$), удовлетворяющие системе линейных матричных неравенств $L_i(X, Y) < 0$, $i = 1, 2$, относительно X и Y .

Для ее решения рассмотрим также другую задачу.

Задача А1: найти

$$\lambda_{min} = \min\{\lambda : X - Y^{-1} < \lambda I, X > 0, Y > 0, L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, 3\}, \quad (9.2)$$

где

$$L_3(X, Y) = \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix}.$$

Дополнительное линейное матричное неравенство $L_3(X, Y) < 0$ в силу леммы Шура эквивалентно неравенству $X > Y^{-1}$. Поэтому в случае, когда в задаче А1 $\lambda_{min} = 0$, соответствующие матрицы X и Y являются также решением задачи А.

Для решения задачи А1 требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых

$$X - Y^{-1} < \lambda I \quad (9.3)$$

не является выпуклым и, следовательно, не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство не позволяет решать задачу А1 методами выпуклой оптимизации. Далее опишем алгоритм решения задачи А1, который может быть реализован в пакете МАТЛАВ.

Для описания алгоритма рассмотрим еще одну задачу.

Задача A2: найти

$$\begin{aligned} \lambda_{min} = \min\{\lambda : \Gamma(X, Y, G_1, G_2) < \lambda I, X > 0, \\ Y > 0, L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2, 3\}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(X, Y, G_1, G_2) = (I G_1) \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G_1 \end{pmatrix} + \\ + (G_2 I) \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_2 \\ I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$G_i = G_i^T, i = 1, 2$ – некоторые заданные матрицы.

Отметим, что в задаче A2 по сравнению с задачей A1 вместо неравенства (9.3) стоит линейное матричное неравенство $\Gamma(X, Y, G_1, G_2) < \lambda I$. Так как

$$\begin{aligned} \Gamma(X, Y, G_1, G_2) = (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) + \\ + (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}) \geq 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

и в силу неравенства $L_3(X, Y) < 0$ выполнено $X > Y^{-1}$, то когда $\lambda_{min} = 0$, соответствующие X и Y являются решением задачи A (при этом $G_1 = -Y^{-1}$ и $G_2 = -X^{-1}$).

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. $j = 0$.
2. Фиксируются матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.
3. Решается задача A2 с помощью команды `mincx` пакета MATLAB и находятся λ_{j+1}, X_j, Y_j .
4. Задаются $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}, G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$ и осуществляется переход к шагу 2 при $j = j + 1$.

Утверждение 9.1 Для любых начальных $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ последовательность λ_j , генерируемая алгоритмом, является неубывающей и существуют следующие пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_* \geq 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = Y_*.$$

Доказательство. Оценим, как будет меняться спектральный радиус матрицы $\Gamma(X, Y, G_1, G_2)$ по траектории алгоритма. Представим

$$\Delta\rho = \rho(\Gamma(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$$

в виде

$$\begin{aligned} \Delta\rho = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 = \\ [\rho(\Gamma(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}))] + \\ + [\rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(\Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))] . \end{aligned}$$

Выражение в первых квадратных скобках неположительно в силу алгоритма, поскольку на $(j + 1)$ -й итерации λ принимает минимальное значение при $X = X_{j+1}, Y = Y_{j+1}$.

Рассмотрим разность двух матриц, фигурирующих во вторых квадратных скобках. Из (9.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) = \\ & = (G_1^{(j+1)} + Y_j^{-1})Y_j(G_1^{(j+1)} + Y_j^{-1}) + (G_2^{(j+1)} + X_j^{-1})X_j(G_2^{(j+1)} + X_j^{-1}) - \\ & - (G_1^{(j)} + Y_j^{-1})Y_j(G_1^{(j)} + Y_j^{-1}) - (G_2^{(j)} + X_j^{-1})X_j(G_2^{(j)} + X_j^{-1}). \end{aligned}$$

Учитывая, что $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$ и $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} & \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - \Gamma(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) = \\ & - (Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1})Y_j(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1}) - (X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1})X_j(X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как из $A - B \leq 0$ следует, что $\rho(A) \leq \rho(B)$, то в результате получим $\Delta\rho \leq 0$. В этом случае последовательность ρ_j ограничена снизу и не возрастает, откуда с учетом непрерывности функции спектрального радиуса следует существование указанных в теореме пределов.

Из этого утверждения следует, что возможны две ситуации. Если $\lambda_* = 0$, то $X_*Y_* = I$ и X_* и Y_* являются решениями задачи A . Если $\lambda_* > 0$, то нельзя сделать определенного вывода о разрешимости задачи A . В последнем случае целесообразно повторить процесс при других начальных условиях $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$, как это обычно применяется в задачах глобальной оптимизации.

При практической реализации алгоритма целесообразно применить следующее правило остановки: при выполнении одного из двух неравенств $\lambda_j < \varepsilon$ или $|\lambda_{j+1} - \lambda_j| < \varepsilon$ работа алгоритма прекращается (из утверждения 9.1 следует, что алгоритм останавливается через конечное число итераций).

Пример 9.1 Рассмотрим синтез статического регулятора по выходу для стабилизации перевернутого маятника, описываемого уравнением

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u$$

с измеряемой переменной $y = \varphi + \dot{\varphi}$. Уравнение имеет вид (5.18), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1).$$

Неравенства $L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2$ определялись как в (5.31). Матрицы $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ выбирались

$$G_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8709 & -0.1795 \\ -0.1795 & 0.7873 \end{pmatrix}, \quad G_2^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.8842 & 0.6263 \\ 0.6263 & -0.9803 \end{pmatrix}.$$

Точность, с которой решаются линейные матричные неравенства, равна 10^{-4} , а параметр алгоритма $\varepsilon = 10^{-3}$. После двух итераций алгоритм остановился, при этом $\lambda = 8 \cdot 10^{-6}$,

$$X = \begin{pmatrix} 0.8425 & 0.0028 \\ 0.0028 & 0.6975 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1.1869 & -0.0047 \\ -0.0047 & 1.4337 \end{pmatrix}$$

и параметр регулятора $\Theta = -2.2263$.

Пример 9.2 Рассмотрим синтез динамического регулятора первого порядка для стабилизации перевернутого маятника. Объект, описываемый уравнением

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u$$

с измеряемой переменной $y = \varphi$, приводится к виду (5.18), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Регулятор выбирался в виде (5.19), где $x_r \in \mathcal{R}^1$. В данном случае неравенства $L_i(X, Y) < 0, i = 1, 2$ определялись следующим образом

$$\begin{aligned} W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0 - \beta X) W_{C_0} &< 0, \quad X > 0, \\ W_{B_0}^T (Y A_0^T + A_0 Y - \beta Y) W_{B_0} &< 0, \quad Y > 0, \end{aligned}$$

где A_0, B_0 и C_0 описаны в примере 5.3, а $\beta/2 = 0,005$ – заданная степень устойчивости замкнутой системы. Проверка эффективности работы алгоритма осуществлялась следующим образом. Элементы начальных симметрических матриц $G_1^{(0)} = G_2^{(0)}$ выбирались как независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$. Алгоритм стартовал 1000 раз. В 996 случаях завершение работы алгоритма было успешным, т.е. минимальное значение λ оказалось равным нулю с принятой точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В подавляющем числе случаев для завершения работы алгоритма потребовалось не более 4 – 6 итераций.

Часть III
Приложения

Приложение А

Блочные матрицы

Лемма А.1 **Формулы Фробениуса для обращения блочной матрицы.** Пусть неособенная квадратная матрица разбита на блоки

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где X_{11} – $(n \times n)$ -матрица, а X_{22} – $(m \times m)$ -матрица.

Если $\det X_{11} \neq 0$, то

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} + X_{11}^{-1}X_{12}H^{-1}X_{21}X_{11}^{-1} & -X_{11}^{-1}X_{12}H^{-1} \\ -H^{-1}X_{21}X_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$H = X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12}.$$

Если $\det X_{22} \neq 0$, то

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -K^{-1}X_{12}X_{22}^{-1} \\ -X_{22}^{-1}X_{21}K^{-1} & X_{22}^{-1} + X_{22}^{-1}X_{21}K^{-1}X_{12}X_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$K = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}.$$

Если $\det X_{11} \neq 0$ и $\det X_{22} \neq 0$, то

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & -X_{11}^{-1}X_{12}H^{-1} \\ -H^{-1}X_{21}X_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix},$$

где K и H определены выше.

Лемма А.2 Пусть

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где X_{11} – $(n \times n)$ -матрица, а X_{22} – $(m \times m)$ -матрица.

Если X_{11} невырождена, то X невырождена тогда и только тогда, когда матрица $H = X_{22} - X_{21}X_{11}^{-1}X_{12}$ невырождена. При этом

$$\det X = \det X_{11} \det H .$$

Если X_{22} невырождена, то X невырождена тогда и только тогда, когда матрица $K = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$ невырождена. При этом

$$\det X = \det X_{22} \det K .$$

Если $X_{11} = X_{11}^T$, $X_{21} = X_{12}^T$, $X_{22} = X_{22}^T$, то следующие три утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} X &> 0 ; \\ X_{11} &> 0 , \quad X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 ; \\ X_{22} &> 0 , \quad X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T > 0 . \end{aligned}$$

Лемма А.3 Пусть

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} ,$$

где X_{11} и X_{22} – квадратные матрицы.

Если $X_{11} > 0$, то $X \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} \geq 0 .$$

Если $X_{22} > 0$, то $X \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T \geq 0 .$$

Лемма А.4 Пусть

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} \end{pmatrix} .$$

Если $X_{22} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{13}^T & X_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{23}^T \end{pmatrix} X_{22}^{-1} (X_{12}^T \quad X_{23}) > 0 . \quad (\text{А.1})$$

Доказательство. В соответствии с блочной структурой матрицы X возьмем $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$ и сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} x^T X x &= (x_2 + X_{22}^{-1} X_{12}^T x_1 + X_{22}^{-1} X_{23} x_3)^T X_{22} (x_2 + X_{22}^{-1} X_{12}^T x_1 + X_{22}^{-1} X_{23} x_3) + \\ &+ x_1^T (X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T) x_1 + x_3^T (X_{33} - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{23}) x_3 + \\ &+ 2x_1^T (X_{13} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{23}) x_3 . \end{aligned}$$

Так как $X_{22} > 0$, то отсюда следует, что $X > 0$ тогда и только тогда, когда выполнено матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T & X_{13} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{23} \\ X_{13}^T - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{12}^T & X_{33} - X_{23}^T X_{22}^{-1} X_{23} \end{pmatrix} > 0 ,$$

эквивалентное (А.1).

Лемма А.5 Пусть матрицы A порядка $n \times n$ и R порядка $r \times r$ невырождены, X и Y имеют порядки $n \times r$ и $r \times n$, соответственно, и матрица $A + XRY$ невырождена. Тогда

$$(A + XRY)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(R^{-1} + YA^{-1}X)^{-1}YA^{-1} .$$

Лемма А.6 Если A – комплексная матрица ($m \times n$) ранга r , то она представима в виде (singular-value decomposition)

$$A = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = U_1 \Sigma V_1^* , \quad (\text{A.2})$$

где $*$ обозначает транспонирование и переход к комплексно сопряженным элементам,

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) , \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 ,$$

$\sigma_i = \lambda_i^{1/2}(AA^*)$ – сингулярные числа матрицы A , $U = (U_1 \ U_2)$ и $V = (V_1 \ V_2)$ – унитарные матрицы, т.е. $U^*U = I$ и $V^*V = I$, причем

$$\mathcal{R}(A) = \text{span}(U_1) , \quad \mathcal{N}(A^*) = \text{span}(U_2) ,$$

$$\mathcal{R}(A^*) = \text{span}(V_1) , \quad \mathcal{N}(A) = \text{span}(V_2) ,$$

где $\mathcal{R}(\cdot)$ и $\mathcal{N}(\cdot)$ обозначают образ и ядро соответствующей матрицы, а $\text{span}(\cdot)$ – линейную оболочку столбцов соответствующей матрицы.

Лемма А.7 Пусть $X_{11} = X_{11}^T > 0$ и $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ – заданные ($n \times n$)-матрицы. Для существования матриц X_{12} и $X_{22} = X_{22}^T$ размеров ($n \times k$) и ($k \times k$), соответственно, таких, что

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} > 0 , \quad \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

для некоторых Y_{12} , Y_{22} , необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 , \quad \text{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \leq k . \quad (\text{A.4})$$

Доказательство. Необходимость. По условию имеем

$$\begin{aligned} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{12}^T &= I , \\ X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} &= 0 , \\ X_{12}^TY_{11} + X_{22}Y_{12}^T &= 0 , \\ X_{12}^TY_{12} + X_{22}Y_{22}^T &= I . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Из первого уравнения получим

$$I - X_{11}Y_{11} = X_{12}Y_{12}^T .$$

Так как ранг каждой из матриц в правой части этого равенства не превышает k и, следовательно, ранг произведения этих матриц также не превышает k , то отсюда следует условие

$$\text{rank}(I - X_{11}Y_{11}) \leq k .$$

Далее, выразим из первого уравнения

$$Y_{11} = X_{11}^{-1}(I - X_{12}Y_{12}^T)$$

и подставим в третье

$$X_{12}^T X_{11}^{-1} + (X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Умножим обе части этого уравнения слева на Y_{12}

$$Y_{12}X_{12}^T X_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Из первого уравнения (А.5) следует, что

$$Y_{12}X_{12}^T = I - Y_{11}X_{11} .$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим

$$(I - Y_{11}X_{11})X_{11}^{-1} + Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T = 0 .$$

Откуда следует

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} = -Y_{12}(X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12})Y_{12}^T .$$

Так как $X > 0$, то из леммы А.2 получим

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0 .$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$X_{11}^{-1} - Y_{11} \leq 0 ,$$

которое в силу леммы А.3 выражается в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \geq 0 .$$

Достаточность. Пусть для данных положительно определенных и симметрических матриц X_{11} и Y_{11} выполнены условия (А.4) и

$$\text{rank}(I - X_{11}Y_{11}) = r \leq k .$$

Покажем, как расширить матрицу X_{11} так, чтобы условия (А.3) имели место для некоторых Y_{12} и Y_{22} . Согласно лемме А.1 должно выполняться равенство

$$Y_{11}^{-1} = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T ,$$

т.е.

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T . \tag{А.6}$$

Матрицы X_{12} размера $n \times k$ и $X_{22} = X_{22}^T > 0$ размера $k \times k$, удовлетворяющие этому равенству, построим следующим образом.

Так как

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = -(I - X_{11}Y_{11})Y_{11}^{-1}$$

и ранг матрицы в правой части этого равенства в силу второго условия (А.4) равен r , то

$$\text{rank}(X_{11} - Y_{11}^{-1}) = r .$$

Применяя лемму А.6 и учитывая, что матрица $X_{11} - Y_{11}^{-1}$ симметрическая и неотрицательно определенная, получим

$$X_{11} - Y_{11}^{-1} = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} ,$$

где $U_1 \in \mathcal{R}^{n \times r}$, $U_2 \in \mathcal{R}^{n \times (n-r)}$, $\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) > 0$. Представим правую часть этого равенства эквивалентно в виде

$$S \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(k-r) \times r} & I_{k-r} \end{pmatrix} S^T , \quad S = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (k-r)} \end{pmatrix} ,$$

из которого следует, что условие (А.6) будет выполняться, если, например, выбрать

$$X_{12} = S , \quad X_{22} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_r^{-1}, 1, \dots, 1) .$$

Таким образом, согласно лемме А.1 второе из условий (А.3) выполняется для данной Y_{11} и некоторых Y_{12} , Y_{22} . Справедливость первого условия (А.3) следует из того факта, что $X_{22} > 0$ и

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T = Y_{11}^{-1} > 0 ,$$

а, следовательно, согласно лемме А.2 имеем $X > 0$.

Лемма А.8 Пусть даны две матрицы $Q = Q^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$, причем $\text{rank } A < n$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

C1:

$$x^T Q x < 0 , \quad \forall x \in \{x | A^T x = 0\} ;$$

C2:

$$\exists \mu > 0 \quad Q - \mu A A^T < 0 .$$

Доказательство. (C1 \longrightarrow C2) Разложим пространство \mathcal{R}^n в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{N}(A^T) \oplus \mathcal{R}(A) ,$$

где $\mathcal{N}(A^T)$ – ядро матрицы A^T и $\mathcal{R}(A)$ – образ матрицы A , и выберем соответствующий базис. По условию в этом базисе матрицы Q и $A A^T$ могут быть представлены в следующем блочном виде:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} , \quad Q_{11} < 0 , \quad A A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D D^T \end{pmatrix} , \quad D D^T > 0 .$$

Тогда для произвольного $x = \text{col}(x_1, x_2)$ имеем

$$\begin{aligned} x^T(Q - \mu AA^T)x &= (x_1^T \ x_2^T) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} - \mu DD^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^T Q_{11} x_1 + 2x_1^T Q_{12} x_2 + x_2^T (Q_{22} - \mu DD^T) x_2 = \\ &= (x_1 + Q_{11}^{-1} Q_{12} x_2)^T Q_{11} (x_1 + Q_{11}^{-1} Q_{12} x_2) + \\ &+ x_2^T (Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} - \mu DD^T) x_2 < 0, \end{aligned}$$

если μ выбрать так, чтобы $Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} - \mu DD^T < 0$, т.е. $\mu > \lambda_{\max}[D^{-1}(Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12})D^{-T}]$.

(C2 \longrightarrow C1) Очевидно, т.к. $x^T(Q - \mu AA^T)x = x^T Q x < 0$ для всех x , для которых $A^T x = 0$.

Приложение В

Линейные матричные уравнения

Лемма В.1 *Если матричное уравнение*

$$AX = C, \quad (\text{В.1})$$

в котором A и C – матрицы порядков $(m \times n)$ и $(m \times q)$, разрешимо относительно неизвестной матрицы X порядка $(n \times q)$, то среди его решений существует решение X_0 минимального ранга, для которого $\text{rang } X_0 = \text{rang } C = r_C$, и это решение представимо в виде

$$X_0 = VC,$$

где V – некоторая матрица соответствующего порядка.

Доказательство. Пусть для конкретности первые r_C столбцов матрицы C линейно независимы, а остальные столбцы являются линейными комбинациями первых. Это означает, что матрица C представима в виде

$$C = (C_1 \ C_2), \quad C_2 = C_1 D$$

для некоторой матрицы D . Пусть $X = (X_1 \ X_2)$, $X_1 \in \mathcal{R}^{n \times r_C}$ – произвольное решение уравнения (В.1). Заметим, что столбцы блока X_1 линейно независимы, так как $AX_1 = C_1$ и столбцы матрицы C_1 линейно независимы. Определим $\bar{X}_2 = X_1 D$. Тогда $A\bar{X}_2 = C_2$ и в качестве решения минимального ранга может быть взята матрица $X_0 = (X_1 \ \bar{X}_2)$.

Из равенства $AX_0 = C$ следует, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы X_0 . Так как $\text{rang } C = \text{rang } X_0 = r_C$, то и, наоборот, строки матрицы X_0 являются линейными комбинациями строк матрицы C , т.е. $X_0 = VC$ для некоторой матрицы V .

Лемма В.2 *Матричное уравнение*

$$AXB = C \quad (\text{В.2})$$

разрешимо относительно неизвестной матрицы X тогда и только тогда, когда матричные уравнения

$$AY = C, \quad ZB = C \quad (\text{В.3})$$

разрешимы относительно неизвестных матриц Y и Z соответственно.

Доказательство. Если уравнение (В.2) имеет решение X , то, очевидно, что $Y = XB$ и $Z = AX$ удовлетворяют уравнениям (В.3). Обратно, пусть существуют решения Y, Z уравнений (В.3). Тогда первое из этих уравнений имеет решение Y_0 минимального ранга r_C , которое согласно лемме В.1 представимо в виде $Y_0 = VC$. Следовательно,

$$C = AY_0 = AVC = AVZB$$

и матрица $X = VZ$ будет решением уравнения (В.2).

Приложение С

Линейные уравнения и псевдообратные матрицы

Пусть имеется линейное уравнение

$$Ax = b, \quad (\text{C.1})$$

в котором A – $(m \times n)$ -матрица и $b \in \mathcal{R}^m$ – заданы, а $x \in \mathcal{R}^n$ – неизвестные переменные.

Если $m = n = \text{rank } A$, то $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T) = \{0\}$ и уравнение (C.1) имеет единственное решение $x = A^{-1}b$.

Если A – не квадратная или не полного ранга, то или $\mathcal{N}(A)$, или $\mathcal{N}(A^T)$, или оба эти множества будут нетривиальны. Рассмотрим возможные варианты.

Пусть $m > n$ и $\text{rank } A = n$, т.е. столбцы матрицы A линейно независимы. Если $b \in \mathcal{R}(A)$, тогда уравнение (C.1) имеет решение. Выразить его можно следующим образом: умножим (C.1) слева на A^T и, учитывая, что в рассматриваемом случае матрица $A^T A$ обратима, найдем решение

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (\text{C.2})$$

Если $b \notin \mathcal{R}(A)$, тогда уравнение (C.1) не имеет решений. В этом случае определяется "решение" в смысле метода наименьших квадратов, минимизирующее квадрат нормы отклонения левой части уравнения (C.1) от правой, т.е.

$$\hat{x} = \arg \min \|Ax - b\|^2.$$

Для его получения представим $b = b_{\mathcal{R}(A)} + b_{\mathcal{N}(A^T)}$, где $b_{\mathcal{R}(A)} \in \mathcal{R}(A)$ и $b_{\mathcal{N}(A^T)} \in \mathcal{N}(A^T)$. Так как $b_{\mathcal{N}(A^T)} \perp \mathcal{R}(A)$, то

$$\|Ax - b_{\mathcal{R}(A)} - b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \|Ax - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2.$$

Это значит, что

$$\min \|Ax - b\|^2 = \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2,$$

и это минимальное значение достигается, когда $Ax = b_{\mathcal{R}(A)}$, т.е. при $x = (A^T A)^{-1} A^T b_{\mathcal{R}(A)}$. Учитывая, что $(A^T A)^{-1} A^T b_{\mathcal{R}(A)} = (A^T A)^{-1} A^T b$, найдем, что оптимальное решение в смысле метода наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b,$$

т.е. определяется той же формулой (C.2).

Пусть теперь $m < n$ и $\text{rank } A = m$, т.е. строки матрицы A линейно независимы. В этом случае уравнение (С.1) будет иметь бесконечное множество решений, так как, если \bar{x} – решение, то $\bar{x} + x_{\mathcal{N}(A)}$ – тоже решение для любого $x \in \mathcal{N}(A)$. Среди всех решений выделим оптимальное в смысле минимума нормы, т.е.

$$\check{x} = \arg \min_{\{Ax=b\}} \|x\| .$$

Если разложить пространство \mathcal{R}^n в прямую сумму

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) ,$$

то минимальное по норме решение будет иметь нулевую проекцию на подпространство $\mathcal{N}(A)$. Представим в соответствии с этим разложением $x = x_{\mathcal{R}(A^T)} + x_{\mathcal{N}(A)}$ и решим уравнение $Ax_{\mathcal{R}(A^T)} = b$. В силу того, что $x_{\mathcal{R}(A^T)} \in \mathcal{R}(A^T)$, существует $\xi \in \mathcal{R}^m$ такой, что $x_{\mathcal{R}(A^T)} = A^T \xi$. Следовательно, требуется решить уравнение $AA^T \xi = b$ относительно ξ . Так как по условию матрица AA^T обратима, его решение имеет вид $\xi = (AA^T)^{-1}b$ и, значит, $x_{\mathcal{R}(A^T)} = A^T(AA^T)^{-1}b$. Таким образом, решение уравнения (С.1) с минимальной нормой равно

$$x = A^T(AA^T)^{-1}b . \quad (\text{С.3})$$

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда $\text{rank } A = r < \min(m, n)$. Будем искать минимальное по норме решение в смысле метода наименьших квадратов. Воспользуемся леммой А.6 и представим матрицу A в виде

$$A = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 \Sigma V_1^T , \quad (\text{С.4})$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) , \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 , \\ \mathcal{R}(A) &= \text{span}(U_1) , \quad \mathcal{N}(A^T) = \text{span}(U_2) , \\ \mathcal{R}(A^T) &= \text{span}(V_1) , \quad \mathcal{N}(A) = \text{span}(V_2) , \\ \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} (U_1 \ U_2) &= I , \quad \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} (V_1 \ V_2) = I . \end{aligned} \quad (\text{С.5})$$

Разложим пространства \mathcal{R}^n и \mathcal{R}^m в прямые суммы

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) , \quad \mathcal{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$$

и представим

$$x = x_{\mathcal{R}(A^T)} + x_{\mathcal{N}(A)} , \quad b = b_{\mathcal{R}(A)} + b_{\mathcal{N}(A^T)} .$$

Так как

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \|Ax - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \\ &= \|Ax_{\mathcal{N}(A)} + Ax_{\mathcal{R}(A^T)} - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 = \\ &= \|Ax_{\mathcal{R}(A^T)} - b_{\mathcal{R}(A)}\|^2 + \|b_{\mathcal{N}(A^T)}\|^2 , \end{aligned}$$

то оптимальные решения по методу наименьших квадратов удовлетворяют уравнению

$$Ax = b_{\mathcal{R}(A)} , \quad (\text{С.6})$$

а минимальное по норме из этих решений \tilde{x} принадлежит $\mathcal{R}(A^T)$.

Из (С.5) следует, что $b_{\mathcal{R}(A)} = U_1\eta_1$, где $\eta_1 \in \mathcal{R}^r$, и $b_{\mathcal{N}(A^T)} = U_2\eta_2$, где $\eta_2 \in \mathcal{R}^{m-r}$. Так как $b = U_1\eta_1 + U_2\eta_2$, то с учетом того, что $U_1^T U_1 = I$ и $U_1^T U_2 = 0$, найдем $\eta_1 = U_1^T b$ и тогда $b_{\mathcal{R}(A)} = U_1 U_1^T b$. Представляя теперь $\tilde{x} \in \mathcal{R}(A^T)$ в виде $\tilde{x} = V_1 \xi$, где $\xi \in \mathcal{R}^r$, запишем (С.6) как

$$AV_1 \xi = U_1 U_1^T b .$$

Заменяя $A = U_1 \Sigma V_1^T$ и умножая обе части этого уравнения слева на U_1^T , вычислим $\xi = \Sigma^{-1} U_1^T b$ и найдем оптимальное решение по методу наименьших квадратов минимальной нормы в виде

$$\tilde{x} = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T b . \quad (\text{С.7})$$

Матрица

$$A^+ = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T \quad (\text{С.8})$$

является псевдообратной для матрицы A с разложением (С.4). По определению псевдообратной для матрицы A называется такая матрица A^+ , которая удовлетворяет следующим условиям:

$$AA^+A = A , \quad A^+AA^+ = A^+ , \quad (AA^+)^T = AA^+ , \quad (A^+A)^T = A^+A .$$

Непосредственно проверяется следующее:

$$\begin{aligned} m = n = \text{rank } A &\longrightarrow A^+ = A^{-1} ; \\ m > n, \quad \text{rank } A = n &\longrightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T ; \\ m < n, \quad \text{rank } A = m &\longrightarrow A^+ = A^T (AA^T)^{-1} . \end{aligned}$$

Таким образом, во всех рассмотренных выше случаях так называемые псевдорешения уравнения (С.1), имеющие минимальную норму среди всех векторов, минимизирующих норму отклонения между правой и левой частями этого уравнения, задаются формулой

$$x = A^+ b .$$

Приложение D

Структурные системные свойства

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathcal{R}^{n_x}, \quad u \in \mathcal{R}^{n_u} \quad (\text{D.1})$$

или, эквивалентно, пара (A, B) управляема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. граммian управляемости

$$\int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

является положительно определенной матрицей для любого $t > 0$;

- 2.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n_x-1}B \end{pmatrix} = n_x;$$

- 3.

$$\text{rank} (sI - A \quad B) = n_x, \quad \forall s \in \mathcal{C};$$

4. для произвольного симметричного относительно действительной оси множества n_x комплексных чисел найдется матрица Θ такая, что спектр матрицы замкнутой системы $A + B\Theta$ совпадет с указанным множеством;

5. для любого левого собственного вектора матрицы A , т.е. ненулевого вектора $e \in \mathcal{C}^{n_x}$, удовлетворяющего $e^* A = \lambda e^*$ при некотором $\lambda \in \mathcal{C}$, выполнено $e^* B \neq 0$.

Система (D.1) или, эквивалентно, пара (A, B) стабилизируема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1.

$$\text{rank} (sI - A \quad B) = n_x, \quad \text{Re } s \geq 0;$$

2. существует матрица Θ такая, что матрица замкнутой системы $A + B\Theta$ гурвицева;

3. все неуправляемые моды являются устойчивыми, т.е. из совместного выполнения условий $e^* A = \lambda e^*$ и $e^* B = 0$ следует, что $\text{Re } \lambda < 0$.

Система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx, \quad x \in \mathcal{R}^{n_x}, \quad y \in \mathcal{R}^{n_y} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

или, эквивалентно, пара (A, C) наблюдаема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. грамммиан наблюдаемости

$$\int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

является положительно определенной матрицей для любого $t > 0$;

- 2.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n_x-1} C^T \end{pmatrix} = n_x;$$

- 3.

$$\text{rank} (sI - A^T \quad C^T) = n_x, \quad \forall s \in \mathcal{C};$$

4. для произвольного симметричного относительно действительной оси множества n_x комплексных чисел найдется матрица Θ такая, что спектр матрицы $A + \Theta C$ совпадает с указанным множеством;

5. для любого правого собственного вектора матрицы A , т.е. ненулевого вектора $e \in \mathcal{C}^{n_x}$, удовлетворяющего $Ae = \lambda e$ при некотором $\lambda \in \mathcal{C}$, выполнено $Ce \neq 0$.

Система (D.2) или, эквивалентно, пара (A, C) детектируема тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1.

$$\text{rank} (sI - A^T \quad C^T) = n_x, \quad \text{Re } s \geq 0;$$

2. существует матрица Θ такая, что матрица замкнутой системы $A + \Theta C$ гурвицева;

3. все ненаблюдаемые моды являются устойчивыми, т.е. из совместного выполнения условий $Ae = \lambda e$ и $Ce = 0$ следует, что $\text{Re } \lambda < 0$.

Приложение Е

Расширенная лемма Ляпунова

Лемма Е.1 Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$A^T X + X A + C^T C = 0 . \quad (\text{E.1})$$

Тогда

- (i) если A гурвицева, то уравнение (E.1) имеет единственное решение – симметрическую и неотрицательно определенную матрицу $X = X^T \geq 0$;
- (ii) если в дополнение к пункту (i) пара (A, C) наблюдаема, то решение является в действительности положительно определенным $X = X^T > 0$;
- (iii) если пара (A, C) детектируема и уравнение (E.1) имеет симметрическое и неотрицательно определенное решение, то матрица A гурвицева.

Доказательство. Пункты (i) и (ii). Если A гурвицева, то матрица

$$X = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (\text{E.2})$$

является неотрицательно определенной. Непосредственная ее подстановка в (E.1) показывает, что она удовлетворяет этому уравнению. Если предположить, что уравнение (E.1) имеет еще другое решение \bar{X} , то

$$A^T (X - \bar{X}) + (X - \bar{X}) A = 0 .$$

Так как A гурвицева, то согласно [22] отсюда следует, что $\bar{X} = X$.

Если пара (A, C) наблюдаема, то матрица (E.2) будет положительно определенной. Действительно, если предположить, что для некоторого $x_0 \neq 0$ выполняется $X x_0 = 0$, тогда

$$x_0^T X x_0 = \int_0^{\infty} x_0^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} x_0 dt = \int_0^{\infty} y^T y dt ,$$

где y – выход системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax , \\ y &= Cx \end{aligned}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Это означает, что $y(t) \equiv 0$, что противоречит наблюдаемости этой системы.

Пункт (iii). Пусть $X_0 = X_0^T \geq 0$ – некоторое решение уравнения (Е.1). Допустим от противного, что матрица A неустойчивая, т.е. $Ax_0 = \lambda x_0$ для некоторого $x_0 \neq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда из уравнения следует

$$0 = x_0^* A^T X_0 x_0 + x_0^* X_0 A x_0 + x_0^* C^T C x_0 = 2(\operatorname{Re} \lambda) x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 .$$

Так как сумма неотрицательных слагаемых может обращаться в ноль, только при условии, что каждое слагаемое нулевое, то отсюда следует $Cx_0 = 0$. Но этот факт с учетом того, что $Ax_0 = \lambda x_0$, $x_0 \neq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, противоречит предположению о детектируемости пары (A, C) .

Лемма Е.2 Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$A^T X A - X + C^T C = 0 . \quad (\text{Е.3})$$

Тогда

- (i) если A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости, то уравнение (Е.3) имеет единственное решение – симметрическую и неотрицательно определенную матрицу $X = X^T \geq 0$;
- (ii) если в дополнение к пункту (i) пара (A, C) наблюдаема, то решение является в действительности положительно определенным $X = X^T > 0$;
- (iii) если пара (A, C) детектируема и уравнение (Е.3) имеет симметрическое и неотрицательно определенное решение, то матрица A имеет все собственные значения внутри единичного круга комплексной плоскости.

Доказательство. Пункты (i) и (ii). Если все собственные значения матрицы A лежат внутри единичного круга, то матрица

$$X = \sum_{t=0}^{\infty} (A^t)^T C^T C A^t \quad (\text{Е.4})$$

является неотрицательно определенной. Непосредственная ее подстановка в (Е.3) показывает, что она удовлетворяет этому уравнению. Если предположить, что уравнение (Е.3) имеет еще другое решение \bar{X} , то

$$A^T (X - \bar{X}) A - (X - \bar{X}) = 0 ,$$

и в силу устойчивости A отсюда следует, что $\bar{X} = X$.

Если пара (A, C) наблюдаема, то матрица (Е.4) будет положительно определенной. Действительно, если предположить, что для некоторого $x_0 \neq 0$ выполняется $Xx_0 = 0$, тогда

$$x_0^T X x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} x_0^T (A^t)^T C^T C A^t x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^T y_t ,$$

где y_t – выход системы

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t , \\ y_t &= Cx_t \end{aligned}$$

с начальным условием x_0 . Это означает, что $y_t \equiv 0$, что противоречит наблюдаемости этой системы.

Пункт (iii). Пусть $X_0 = X_0^T \geq 0$ – некоторое решение уравнения (Е.3). Допустим от противного, что матрица A неустойчивая, т.е. $Ax_0 = \lambda x_0$ для некоторого $x_0 \neq 0$ и $|\lambda| \geq 1$. Тогда из уравнения следует

$$0 = x_0^* A^T X_0 A x_0 - x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 = (|\lambda|^2 - 1)x_0^* X_0 x_0 + x_0^* C^T C x_0 .$$

Так как сумма неотрицательных слагаемых может обращаться в ноль, только при условии, что каждое слагаемое нулевое, то отсюда следует $Cx_0 = 0$. Но этот факт с учетом того, что $Ax_0 = \lambda x_0$, $x_0 \neq 0$ и $|\lambda| \geq 1$, противоречит предположению о детектируемости пары (A, C) .

Приложение F

Кронекерово произведение

Кронекеровым (прямым или тензорным) произведением $(m \times n)$ -матрицы A на $(p \times q)$ -матрицу B называется $(mp \times nq)$ -матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Перечислим несколько элементарных свойств кронекерова произведения:

(i) если произведения AC и BD существуют, то

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD ;$$

(ii) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;

(iii) если A и B – комплексные матрицы, то

$$\overline{A \otimes B} = \bar{A} \otimes \bar{B}, \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* ;$$

(iv) если A и B – невырожденные матрицы, то матрица $A \otimes B$ также невырожденная
и

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} .$$

Приложение G

S-процедура

В теории управления часто используется прием, названный в [1] S-процедурой. Рассмотрим неравенство

$$F(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (\text{G.1})$$

для всех $x \in \mathcal{R}^{n_x}$, удовлетворяющих системе неравенств

$$G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{G.2})$$

где $F(x)$ и все $G_i(x)$ – квадратичные формы. Составим квадратичную форму

$$S(x) = F(x) - \tau_1 G_1(x) - \dots - \tau_m G_m(x)$$

и рассмотрим неравенство

$$S(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (\text{G.3})$$

при некоторых $\tau_i \geq 0$. Замена неравенств (G.1) и (G.2) неравенством (G.3) называется S-процедурой.

Очевидно, что из (G.3) следует выполнение (G.1) при условии (G.2). Если $m = 1$, то при условии, что существует x_0 , для которого $G_1(x_0) < 0$, верно и обратное, т.е. выполнение (G.1) при условии (G.2) влечет существование $\tau_1 > 0$, при котором

$$F(x) - \tau_1 G_1(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

В этом случае говорят, что S-процедура неущербна для одного ограничения [41]. Заметим, что без ограничения общности можно положить $\tau_1 = 1$ (в самом деле, достаточно умножить последнее неравенство на τ_1^{-1} и учесть, что неравенства $F(x) < 0$ и $\tau_1^{-1}F(x) < 0$ эквивалентны).

При $m \geq 2$ в общем случае S-процедура ущербна, т.е. из выполнения (G.1) при условии (G.2) не следует, что существуют такие параметры $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, что справедливо (G.3).

Приложение Н

Частотная теорема

Частотная теорема [42] позволяет установить эквивалентность между матричным неравенством специального вида, часто встречающимся в теории управления, и частотным условием, выраженным в терминах передаточной матрицы непрерывного или дискретного объекта.

Лемма Н.1 Пусть пара (A, B) стабилизируема. Для существования симметрической матрицы X , удовлетворяющей соотношению

$$2\operatorname{Re} x^* X(Ax + Bv) - \mathcal{L}(x, v) < 0, \quad \forall x, v, \quad |x| + |v| \neq 0 \quad (\text{H.1})$$

с заданной квадратичной формой $\mathcal{L}(x, v)$ переменных x, v , необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \neq 0$ выполнялось следующее частотное условие

$$\mathcal{L}[(j\omega I - A)^{-1}Bv, v] > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty). \quad (\text{H.2})$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T) L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix},$$

то неравенство (H.1) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA - L_{11} & XB - L_{12} \\ B^T X - L_{12}^T & -L_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (\text{H.3})$$

а частотное условие (H.2) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (-j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{H.4})$$

Лемма Н.2 Пусть пара (A, B) стабилизируема. Для существования симметрической матрицы X , удовлетворяющей соотношению

$$(Ax + Bv)^* X(Ax + Bv) - x^T Xx - \mathcal{L}(x, v) < 0, \quad \forall x, v, \quad |x| + |v| \neq 0 \quad (\text{H.5})$$

с заданной квадратичной формой $\mathcal{L}(x, v)$ переменных x, v , необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \neq 0$ выполнялось следующее частотное условие

$$\mathcal{L}[(e^{j\varphi} I - A)^{-1}Bv, v] > 0, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi). \quad (\text{H.6})$$

Если

$$\mathcal{L}(x, v) = (x^T, v^T) L \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix},$$

то неравенство (Н.5) примет вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^T X A - X - L_{11} & A^T X B - L_{12} \\ B^T X A - L_{12}^T & B^T X B - L_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (\text{Н.7})$$

а частотное условие (Н.6) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} (e^{-j\varphi} I - A)^{-1} B \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{j\varphi} I - A)^{-1} B \\ I \end{pmatrix} > 0. \quad (\text{Н.8})$$

Литература

- [1] Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
- [2] Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- [3] Баландин Д.В. Об оптимальном гашении колебаний упругих объектов// Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 464-474.
- [4] Баландин Д.В., Коган М.М. Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_∞ -управления по выходу// ДАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759-761.
- [5] Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях// Известия АН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 60-66.
- [6] Баландин Д.В., Коган М.М., Федюков А.А. Предельные возможности гашения колебаний высотных сооружений// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 5. С. 99-103.
- [7] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез оптимального робастного H_∞ -управления методами выпуклой оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 7. С. 71-81.
- [8] Баландин Д.В., Коган М.М. Алгоритм построения функции Ляпунова в синтезе динамических регуляторов заданного порядка// Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1457-1461.
- [9] Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц// Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 82-99.
- [10] Брусин В.А., Коган М.М. Синтез робастных регуляторов по выходу на основе частотных условий// Автоматика и телемеханика. 2002. № 4. С. 133-146.
- [11] Брусин В.А. Существование и предельные возможности центральных регуляторов в задачах с H_∞ -критериями// Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 97-107.
- [12] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1987.
- [13] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

- [14] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- [15] Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
- [16] Коган М.М. Решение обратных задач о наилучшем возмущении и минимаксном управлении для линейных непрерывных систем // Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 22-30.
- [17] Коган М.М. Теоретико-игровой подход к синтезу робастных регуляторов// Автоматика и телемеханика. 1998. № 5. С. 142-151.
- [18] Коган М.М. Линейно-квадратичная динамическая игра в условиях неопределенности и синтез робастных H_∞ -субоптимальных регуляторов// Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 131-143.
- [19] Коган М.М. Минимаксный подход к синтезу абсолютно стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем Лурье// Автоматика и телемеханика. 1999. № 5. С. 78-91.
- [20] Коган М.М. Частотное условие обобщенной возвратной разности в синтезе H_∞ -субоптимальных, децентрализованных и робастных регуляторов// Автоматика и телемеханика. 2001. № 6. С. 95-110.
- [21] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
- [22] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.-М.: ОНТИ, 1935.
- [23] Мейлакс А.М. О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности// Автоматика и телемеханика. 1975. № 2. С. 182-184.
- [24] Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
- [25] Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и D -разбиение// Автоматика и телемеханика. 1992. №7. С. 10-18.
- [26] Пакшин П.В., Рябов А.В. Синтез управления со статической обратной связью по выходу для линейных систем// Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 61-69.
- [27] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [28] Пятницкий Е.С., Скородинский В.И. Численные методы построения функций Ляпунова и критериев абсолютной устойчивости в форме численных процедур// Автоматика и телемеханика. 1983. № 11. С. 52-63.
- [29] Пятницкий Е.С. Избранные труды: В 3 т. Том 1. Теория управления. М.: Физматлит, 2004.
- [30] Рапопорт Л.Б. Расширение S -процедуры и анализ многомерных систем управления с помощью линейных матричных неравенств// Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 31-42.

- [31] Срагович В.Г. Адаптивное управление. М.: Наука, 1981.
- [32] Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений// Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14. Вып. 11. С. 2086-2088.
- [33] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [34] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
- [35] Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
- [36] Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
- [37] Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники, сер. Технич. киберн. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3-31.
- [38] Чайковский М.М., Курдюков А.П. Алгебраические уравнения Риккати и линейные матричные неравенства для систем дискретного времени. М.: Институт проблем управления РАН, 2005.
- [39] Чурилов А.Н., Гессен А.В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004.
- [40] Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования// ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304-1307.
- [41] Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории регулирования// Вестник ЛГУ, сер. 1. 1971. Вып. 1. С. 62-77.
- [42] Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления// Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14. № 2. С. 384-420.
- [43] Apkarian P., Gahinet P. A convex characterization of gain-scheduled H^∞ controllers// IEEE Trans. Automat. Control. 1995. V. 40. No. 5. P. 853-864.
- [44] Apkarian P., Tuan H.D. Robust control via concave minimization local and global algorithms// IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. No. 2. P. 299-305.
- [45] Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Shock, Impact, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
- [46] Balandin D.V., Kogan M.M. An optimization algorithm for checking feasibility of robust H_∞ -control problem for linear time-varying uncertain systems// International Journal of Control. 2004. V. 77. No. 5. P. 498-503.
- [47] Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations// Structural Control and Health Monitoring. 2005. V. 12. No. 2. P. 213-224.
- [48] Balandin D.V., Kogan M.M. Attenuating oscillations in uncertain dynamic systems// Journal of Engineering Mathematics. 2006. V. 55.

- [49] Barmish B.R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain linear system// J. Opt. Theory Applic. 1985. V. 46. P. 399-405.
- [50] Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization. Technion - Israel Institute of Technology. 2000.
- [51] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [52] Chilali M., Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach// IEEE Trans. Automat. Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 358-367.
- [53] Chilali M., Gahinet P., Apkarian P. Robust pole placement in LMI regions// IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 12. P. 2257-2269.
- [54] Colaneri P., Geromel J.C., Locatelli A. Control Theory and Design. San Diego: Academic Press, 1997.
- [55] Doyle J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties// IEE Proc. 1982. Pt. D. V. 129. P. 242-250.
- [56] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems// IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831-847.
- [57] Doyle J., Packard A., Zhou K. Review of LFTs, LMIs, and μ // Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control. Brighton, England. 1991. P. 1227-1232.
- [58] Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control// International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1994. Vol. 4. P. 421-448.
- [59] Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
- [60] El Ghaoui L, Oustry F, and Rami MA. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems// IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1171-1176.
- [61] Haddad W.M., Corrado J.R. Robust non-fragile dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variations// Proc. of American Control Conf., Philadelphia. 1998. P. 2837-2841.
- [62] Iwasaki T., Skelton R.E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas// Automatica. 1994. Vol.30. No. 8. P. 1307-1317.
- [63] Iwasaki T., Skelton R. E., Geromel J. C. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback// Systems and Control Letters. 1994. V. 23. No. 6. P. 421-430.
- [64] Iwasaki T., Skelton R.E. The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design// International Journal of Control. 1995. V. 62. No. 6. P. 1257-1272.

- [65] Iwasaki T. The dual iteration for fixed order control// IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 4. P. 783-788.
- [66] Kalman R.E. When is a linear control system optimal?// Trans. ASME. Part D. Journal of Basic Engineering. 1964. V. 86. P. 51-60.
- [67] Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Robust, fragile, or optimal?// IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098-1105.
- [68] Kogan M.M. A local approach to solving the inverse minimax control problem for discrete-time systems// International Journal of Control. 1997. V. 68. No. 6. P. 1437-1448.
- [69] Kogan M.M. Solution to the inverse problem of minimax control and worst case disturbance for linear continuous-time systems// IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. 43. No. 5. P. 670-674.
- [70] Luenberger D.G. An introduction to observers// IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 596-602.
- [71] Nesterov Y.E., Nemirovski A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [72] Nishimura H., Kojima A. Seismic isolation control for a buildinglike structure// IEEE Control Systems. 1999. V. 19. P. 38-44.
- [73] de Oliveira M.C. A robust version of the elimination lemma// Preprints of the 16th IFAC World Congress. Prague, 2005.
- [74] Packard A., Zhou K., Pandey P., Becker G. A collection of robust control problems leading to LMI's// Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control. Brighton, England. 1991. P. 1245-1250.
- [75] Petersen I.R., Hollot C.V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems// Automatica. 1986. V. 22. N 4. P. 397-411.
- [76] Safonov M.G. Stability and robustness of multivariable feedback systems. Cambridge, MA: MIT Press, 1980.
- [77] Scherer C., Weiland S. Linear Matrix Inequalities in Control. Version 3.0. 2000. <http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland/lmi.html>.
- [78] Spencer B.F., Sain M.K. Controlling buildings: a new frontier in feedback// IEEE Control Systems. 1997. V. 17. P. 19-35.
- [79] Tuan H.D., Apkarian P., Hosoe S., Tuy H. D.C. optimization approach to robust control: feasibility problems// International Journal of Control. 2000. No. 73. P. 89-104.
- [80] Yamada Y., Hara S. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling// IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. 43. No. 2. P. 191-203.