

УДК 539.36

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОПЕРЕННОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

© 2011 г.

О.Г. Привалова, Ю.М. Окунев, В.А. Самсонов

НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется устойчивость ориентации оси симметрии авторотирующего тела в сопротивляющейся среде на установившемся режиме. Малые колебания оси динамической симметрии относительно положения равновесия в ряде задач описываются дифференциальным уравнением второго порядка с комплексными переменными и комплексными коэффициентами. Построена область устойчивости, которая представляет собой некоторый универсальный геометрический образ, не зависящий от массовых и геометрических характеристик тела, и имеет одинаковый вид для рассматриваемого класса задач.

*Ключевые слова:* авторотация, устойчивость, сопротивляющаяся среда, оперенное тело.

Рассмотрим три задачи о движении осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде. К телу приложены силы со стороны воздуха. Для описания этих сил используем квазистатическую модель [1, 2]. Будем считать, что это воздействие сосредоточено на четырех одинаковых лопастях, симметрично расположенных на теле, обеспечивающих его авторотацию, вращение с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Oz$  динамической симметрии (рис. 1).

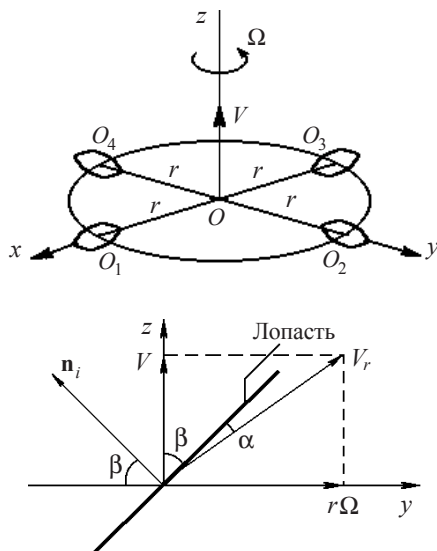


Рис. 1

В первой задаче рассмотрим движение тела с тягой, действующей вдоль оси динамической симметрии. Установившемуся режиму соответствует движение с постоянной скоростью центра масс  $V_0$  и постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$  свободной авторотации. Во второй задаче рассмотрим режим

авторотации тела в аэродинамической трубе. Ему соответствует постоянная угловая скорость  $\Omega_0$  и постоянная скорость потока  $V_0$ . Следующая задача – о торможении тела, когда на него действуют только аэродинамические силы [3]. В этой задаче существуют два режима установившегося торможения, для которых отношение  $r\Omega/V = \text{const}_1$  и  $r\Omega/V = \text{const}_2$ . Первому режиму соответствует движение с малым углом атаки на лопасти, а второму – с большим ( $\sim \pi/2$ ). Угол  $\alpha$  атаки вводим как угол между вектором скорости точки  $O_i$  и плоскостью, жестко связанной с лопастью;  $\beta$  – установочный угол лопасти, угол между нормалью  $\mathbf{n}_i$  к плоскости лопасти и плоскостью, проходящей через центры давления лопастей (см. рис. 1).

Малые колебания оси динамической симметрии относительно ее положения на установившемся режиме в каждой из рассматриваемых задач описываются дифференциальным уравнением второго порядка, которое имеет структуру

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(D + iG) + \lambda(P + iN) = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda = \lambda_x + i\lambda_y$  – комплексная величина, определяющая отклонение оси симметрии от ее положения на установившемся режиме.

Уравнение в такой форме можно интерпретировать как уравнение материальной точки единичной массы, которая находится под действием сил, линейно зависящих от координат и скоростей. Силы имеют самую общую для симметричного тела структуру, представляя собой суперпозицию диссипативных ( $D\dot{\lambda}$ ), гироскопических ( $G\dot{\lambda}$ ), позиционных потенциальных ( $P\lambda$ ) и пози-

ционных непотенциальных ( $N\lambda$ ) сил.

Условия асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (1) налагают следующие ограничения на коэффициенты этого уравнения:

$$D > 0, \quad D^2P + DGN - N^2 > 0.$$

При тех физических и геометрических параметрах задачи, для которых выполняется первое условие устойчивости (положительность коэффициента диссипативных сил), можно сформировать три действительные, не имеющие особенностей функции  $X = N/D$ ,  $Y = G$ ,  $Z = P$ .

Таким образом, можно говорить о построении области устойчивости в пространстве отношения коэффициентов позиционных непотенциальных сил к коэффициентам диссипативных сил  $X$ , коэффициентов гироскопических сил  $Y$  и коэффициентов позиционных потенциальных сил  $Z$ . В этом пространстве область устойчивости представляет собой некоторый универсальный геометрический образ (подобный описанному в [4]), не зависящий от геометрических и массовых характеристик тела. Границей области устойчивости является поверхность  $E$ , уравнение которой  $E \Rightarrow Z - X^2 + YX = 0$  (рис. 2). В соответствии со вторым условием устойчивости, область устойчивости лежит выше поверхности  $E$  (по переменной  $Z$ ).

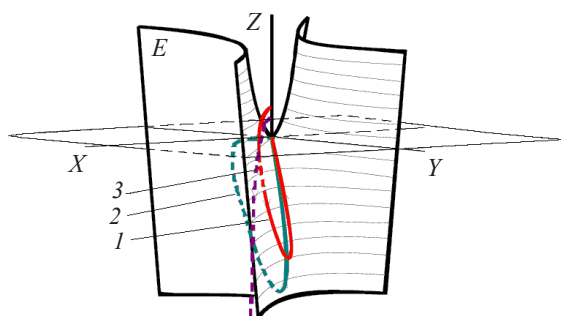


Рис. 2

Представление области устойчивости в таком пространстве позволяет сделать выводы общего характера. В случае когда позиционные потенциальные силы отсутствуют, устойчивость рассматривается в плоскости  $Z = 0$ . Эта плоскость пересекает поверхность  $E$  по двум прямым  $X = 0$  и  $X = Y$ . На плоскости  $XY$  устойчивость наблюдается в области  $|Y| > |X|$ . Если гироскопические силы равны нулю, то граница области устойчивости представляет собой параболу на плоскости  $XZ$ . Область устойчивости располагается над параболой. Очевидно, что с ростом значений коэффициента позиционной потенциальной силы область устойчивости расширяется. В случае когда

равны нулю позиционные непотенциальные силы ( $X = 0$ ), очевидно, что при положительном коэффициенте позиционных потенциальных сил и любом значении коэффициента гироскопических сил имеет место устойчивость, а при  $Z < 0$  – неустойчивость.

Полученная область устойчивости является общей для трех рассматриваемых задач. Проследим за перемещением точки в пространстве  $XYZ$ , отвечающим изменению угла разворота лопастей  $\beta$  от 0 до  $\pi/2$ , при заданных конкретных характеристиках тела. Для первой задачи изменению угла  $\beta$  соответствует кривая 1 на рис. 2. Как видно из рисунка, при значениях  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$  точка находится на положительной части оси  $Z$  и тем самым внутри области устойчивости. Увеличение угла  $\beta$  приводит к тому, что при некотором его значении «изображающая» точка протыкает поверхность  $E$ , переходя из области устойчивости в область неустойчивости (штриховая линия), а затем снова возвращается обратно в область устойчивости при другом значении этого угла. В задаче об авторотации тела в потоке аэродинамической трубы (кривая 2) начальная точка, отвечающая значениям  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$  находится в начале координат, т.е. на границе области устойчивости. При увеличении угла  $\beta$  она сразу попадает в область неустойчивости, откуда при некотором значении угла  $\beta$  переходит в область устойчивости. В задаче о торможении (кривая 3, отвечающая режиму торможения с «малым» углом атаки) начальная точка ( $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$ ), как и в задаче с тягой, находится на положительной части прямой  $Z$ , но ближе к границе. Поэтому с увеличением угла  $\beta$  «изображающая» точка скорее покидает область устойчивости и больше в нее не возвращается. В этой задаче, в отличие от двух предыдущих, монотонное увеличение угла  $\beta$  разворота лопасти не приводит к переходу на второй режим установившегося торможения, который отвечает относительно большим значениям угла атаки.

Отметим, что первые две задачи относятся к традиционным задачам прикладной аэродинамики о сопоставлении поведения летательного аппарата в полете и его макета в аэродинамической трубе. Кроме описанного выше, рассмотрено также влияние смещения центра масс от точки  $O$  (см. рис. 1).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00340, 11-08-00444).*

#### Список литературы

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.

Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: МГУ, 1986. 86 с.

2. Привалов В.А., Самсонов В.А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №2. С. 32–38.

3. Окунев Ю.М., Привалова О.Г. Торможение

движения динамически симметричного тела в невозмущенной атмосфере // Матер. докл. «VI Окуневских чтений». 2008. Т. 3. С. 9–14.

4. Привалов В.А., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 37–48.

## ON STABILITY OF MOTION OF AN AXISYMMETRIC FINNED BODY IN RESISTING A MEDIUM

*O.G. Privalova, Yu.M. Okunev, V.A. Samsonov*

Stability of orientation of the symmetry axis of an auto-rotating body in resisting a medium in the steady regime is studied. A series of problems are discussed, where small oscillations of the dynamic symmetry axis about the equilibrium are defined by a second order differential equation with complex variables and complex coefficients. A stability domain is constructed representing a certain universal geometric image independent of mass and geometric characteristics of the body and having the same form for the class of problems in question.

*Keywords:* auto-rotation, stability, resisting medium, finned body.