

УДК 519.72

О РАБОТАХ АЛЕКСАНДРА АЛЕКСАНДРОВИЧА МАРКОВА

© 2012 г.

Л.П. Жильцова, Л.Г. Киселёва, Т.Г. Смирнова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

larzhil@rambler.ru

Поступила в редакцию 18.06.2012

Статья приурочена к 75-летию со дня рождения Ал.А. Маркова (1937–1994), известного российского математика, признанного лидера научного направления по дискретной математике в Нижегородском университете. Особое внимание уделяется наиболее выдающимся научным результатам учёного и педагога.

Ключевые слова: дискретная математика, теория кодирования, алфавитное кодирование, проблема распознавания взаимной однозначности, проблема оптимального кодирования.

В 2012 году исполнилось 75 лет со дня рождения известного российского математика, доктора физико-математических наук, профессора Нижегородского университета Александра Александровича Маркова.

Александр Александрович родился 24 марта 1937 года в семье преподавателей Нижегородского университета Александра Николаевича Маркова и Варвары Алексеевны Гусевой. После окончания в 1954 г. средней школы № 8 он поступил на физико-математический факультет Нижегородского (тогда Горьковского) университета, который и окончил в 1959 г. Его научные интересы со студенческой скамьи были связаны с очень молодой тогда, только начавшей развиваться математической кибернетикой. Под руководством Ю.В. Глебского он уже в аспирантуре получил яркие результаты в области теории кодирования и в 1963 г. стал кандидатом наук, защитив кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вопросы теории алфавитного кодирования». В дальнейшем он работал в разных областях дискретной математики, но основные его интересы были связаны с теорией кодирования.

Вся трудовая деятельность Ал.А. Маркова была связана с Нижегородским университетом. После окончания аспирантуры Александр Александрович начал работать в Горьковском физико-техническом исследовательском институте. После образования Научно-исследовательского института прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК) перешёл туда на работу и в дальнейшем всегда совмещал научную работу в НИИ ПМК и преподавательскую работу в университете. В течение многих лет он работал на кафедре математической логики и высшей алгебры факультета вычислительной



математики и кибернетики. В 1984 г. Александр Александрович успешно защитил докторскую диссертацию на тему «Вопросы взаимной однозначности и сложности в алфавитном кодировании». Последние годы он был профессором кафедры геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета. В 1982–1989 гг. заведовал отделом дискретной математики в НИИ ПМК, с 1989 г. до последних дней жизни был главным научным сотрудником НИИ ПМК.

После смерти Ю.В. Глебского на протяжении более 15 лет Ал.А. Марков был признанным лидером научного направления по дискретной математике в Нижегородском университете. Он руководил научным семинаром, был организатором Всесоюзных конференций и школ-семинаров, по его инициативе и под его редакцией издавался межвузовский сборник «Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике». Александр Александрович был членом редколлегии журнала «Дискретная математика», членом двух специализированных советов по защите диссертаций. Он

разработал и прочитал курсы «Дискретная математика», «Элементы кибернетики», «Математические основы обработки информации», опубликовал монографию «Введение в теорию кодирования», несколько учебных пособий по разным разделам дискретной математики, математической логики, теории кодирования, комбинаторному анализу и другим областям математики. Александр Александрович подготовил девять кандидатов наук. Последние годы он с большим увлечением работал над постановкой преподавания дискретной математики для математиков-теоретиков, разработал и прочитал курс дискретной математики для студентов мехмата, руководил научно-методическим семинаром, разработал план специализации по дискретной математике на мехмате.

Александра Александровича отличали глубина и нестандартность мышления, он был интересным и остроумным собеседником, имел свою, совершенно небанальную точку зрения по многим вопросам не только науки, но и повседневной жизни. Несмотря на серьезные проблемы с сердцем, он очень достойно и мужественно боролся с болезнью, продолжая работать с полной отдачей. 23 октября 1994 г. Ал.А. Маркова не стало.

Большинство работ Ал.А. Маркова относится к математической теории кодирования. Основным достижением явилось построение теории алфавитного кодирования, учитывающего структурные (а не только вероятностные) модели языков сообщений.

Неоднократно в своих работах Александр Александрович Марков подчеркивает, что сжатие информации основано прежде всего на том, что в языках обычно содержится значительная избыточность, характер которой может быть двоякий. С одной стороны, некоторые буквы и их сочетания могут встречаться часто, другие – редко, это обстоятельство, как правило, отражается в вероятностных моделях языков, которые вслед за К. Шенноном и исследуются в теории информации. С другой стороны, Ал.А. Марков обращает внимание на то, что избыточность также заложена и в семантике языка, включая его структурные свойства, грамматику, синонимию. Многочисленные свои работы Александр Александрович посвятил вопросам оптимального алфавитного кодирования, учитывающего именно этот вид избыточности.

Остановимся на наиболее важных результатах Ал.А. Маркова в области математической теории кодирования.

Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – алфавит. Множество всех слов в алфавите B будем обозначать B^* , множество всех непустых слов – B^+ . Для

заданного алфавита B алфавитное кодирование можно задать схемой, в которой каждой букве b_i ставится в соответствие последовательность символов (слово) в другом алфавите A (алфавите канала связи):

$$\Sigma: \begin{cases} b_1 \rightarrow v_1, \\ b_2 \rightarrow v_2, \\ \dots \\ b_m \rightarrow v_m. \end{cases}$$

Набор $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ называется кодом, $v_i \in A^*$ – элементарными кодами, набор $D = (|v_1|, |v_2|, \dots, |v_m|)$ – спектром длин элементарных кодов (здесь $|x|$ – длина слова x).

Процесс кодирования произвольного слова $\alpha = b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k}$ в алфавите B состоит в замене символов из B их элементарными кодами. Кодруемые слова в теории кодирования принято называть сообщениями.

Под языком L в алфавите B понимается произвольное множество слов: $L \subseteq B^*$. Схема алфавитного кодирования Σ задает отображение $f_V: L \rightarrow A^*$. Это отображение может быть не любым: f_V должно обладать свойством инъективности, которое позволяет однозначно расшифровывать (декодировать) закодированные слова. Кодирование, обладающее свойством инъективности, принято называть взаимно-однозначным. К проблемам, которые составляют основу углубленного исследования вопросов экономического кодирования сообщений, учитывающего их структурные свойства, Ал.А. Марков относил проблему распознавания взаимной однозначности алфавитного кодирования.

Первые результаты Ал.А. Маркова о взаимной однозначности алфавитного кодирования относятся к языку $L = B^*$ и опубликованы в [1–3]. Впервые эта задача была поставлена в 1953 г. в работе Сардинаса и Паттерсона¹, где установлен критерий взаимной однозначности кодирования. Однако этот критерий не эффективен (так же, как и обобщение его, полученное в работе Шютценберже²). Здесь следует отметить два основных результата, полученных Александром Александровичем. Первый результат основан на мощностных соображениях: решение проблемы распознавания на бесконечном множестве B^* сводится к ее решению на конечном подмножестве сообщений.

Для кода V определена характеристика $X(V) = \min\{|\mu| + |\nu| : f_V(\mu) = f_V(\nu)\}$, ограничивающая наименьшее число сравнений, которое может потребоваться при решении вопроса о взаимной однозначности отображения f_V для

кода V . Для класса кодов из m элементов положим $Y(N, m) = \sup \{X(V) : |V| = m, \sum_{i=1}^m |v_i| \leq N\}$.

Александр Александрович показал [32], что $Y(N, 2) = 4$ при $N \geq 5$; $Y(N, m) = N - m + 2$ при $N \geq 5$ и $m \geq 3$.

Из полученных соотношений следует, что достаточно проверять взаимную однозначность алфавитного кодирования на множестве пар слов, суммарная длина которых ограничена константой $Y(N, m)$. Аналогичный результат получен для минимальной длины закодированного слова, допускающего две расшифровки.

Другой результат Ал.А. Маркова сводит решение проблемы распознавания взаимной однозначности к задаче нахождения ориентированного цикла, проходящего через заданную вершину в графе [3, 45]. Отметим, что результаты Ал.А. Маркова о взаимной однозначности алфавитного кодирования для $L = B^*$ стали классикой и входят во многие учебники по дискретной математике³ и в учебные программы по дискретной математике для университетов.

В дальнейшем Ал.А. Марков исследовал проблему распознавания взаимной однозначности на моделях регулярных языков. Здесь им были исследованы два типа условий взаимной однозначности алфавитного кодирования – комбинаторно-логические и спектральные.

В качестве меры сложности распознавания взаимной однозначности для регулярных языков рассматривалась длина кратчайшего закодированного слова языка, которое допускает две расшифровки (если такое слово существует). Для этой характеристики получены квадратичные оценки как в зависимости от суммы длин элементарных кодов, так и от числа состояний регулярного источника, порождающего язык сообщений, причем эти оценки не могут быть улучшены.

Ал.А. Марков получил спектральное асимптотическое неравенство – необходимое условие реализуемости спектра однозначно декодируемым кодом.

Пусть L_M – регулярный язык, представленный в конечном автомате $M = \langle B, Z, \varphi(b, z) \rangle$ с входным алфавитом B , множеством состояний $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ и функцией следующего состояния $\varphi: B \times Z \rightarrow Z$, причём через каждое состояние проходит по крайней мере один путь из начального состояния z_0 в некоторое заключительное состояние. Для вектора $\tilde{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ с целыми положительными коэффициентами оп-

ределяется индикатор языка L_M относительно автомата M :

$$\delta_M(x, \tilde{d}) = \det \begin{pmatrix} 1 - P_{0,0} & -P_{1,0} & \dots & -P_{n-1,0} \\ -P_{0,1} & 1 - P_{1,1} & \dots & -P_{n-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_{0,n-1} & -P_{1,n-1} & \dots & 1 - P_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

где $P_{k,i} = P_{k,i}(x) = \sum_{\{j|\varphi(b_j, q_k)\}} x^{d_j}$. Ал.А. Марков

доказал, что если алфавитное кодирование f_V взаимно однозначно на L_M и $|v_i| > 0$ ($i = 1, \dots, m$), то

$$\delta\left(\frac{1}{q}, D(V)\right) \geq 0, \quad (1)$$

где $q = |A|$ и $D(V)$ – спектр длин элементарных кодов V . Если $L = B^*$, то (1) представляет собой известное неравенство Мак-Миллана $\sum_{i=1}^m q^{-d_i} \leq 1$. Для некоторых языков спектральное неравенство представляет собой также и достаточное условие реализуемости спектра $D(V)$ однозначно декодируемым кодом.

Отметим, что проблема распознавания взаимной однозначности является составной частью задачи оптимального кодирования, так как построение кодирования, обеспечивающего наибольшее сжатие, необходимо решать в классе взаимно однозначных кодов.

Пусть $D(L) = D_q(L)$ – множество всех q -ичных кодов, для которых f_V взаимно однозначно на языке L . Частотной характеристикой сообщения α называется векторное распределение частот $P_\alpha = \langle p_1(\alpha), \dots, p_m(\alpha) \rangle$, где $p_i(\alpha) = \frac{|\alpha|_i}{|\alpha|}$ ($i = 1, \dots, m$) – отношение числа вхождений буквы b_i в α к длине α . Тогда $C(V, \alpha) = C(V, P_\alpha) = \frac{|f_V(\alpha)|}{|\alpha|} = \sum_{i=1}^m p_i(\alpha) |v_i|$ называется стоимостью кодирования сообщения α отображением f_V , а стоимость наилучшего кодирования α определяется как $C(L, \alpha) = C(L, P_\alpha) = \inf_{V \in D(L)} \{C(V, \alpha)\}$ ($\alpha \in L$). Кодирование называется оптимальным, если для него достигается нижняя граница.

Оптимального алфавитного кодирования одновременно для всех сообщений языка L может и не существовать. Однако если существует типичная для языка L частотная характеристика P , то в классе алфавитных отображений существует статистически оптимальное кодирование.

Пусть $D^0(L)$ – множество всех кодов, которые могут оказаться оптимальными хотя бы для одного сообщения ($\alpha \in L$): $D^0(L) = \{V \mid V \in D(L), \exists \alpha (C(V, P_\alpha) = C(L, P_\alpha))\}$.

Известно [45], что для любого языка L множество $D^0(L)$ конечно. Поэтому оптимальное кодирование для любого сообщения в любом языке существует.

Матрицей оптимального кодирования для языка L называется матрица $M(L)$ с m столбцами, строками которой являются все различные спектры длин кодов из $D^0(L)$. В силу конечности $D^0(L)$ матрица $M(L)$ также конечна.

При исследовании задачи оптимального кодирования для регулярных языков Ал.А. Марков выделял как наиболее важные две задачи: описание матрицы оптимального кодирования и построение эффективного алгоритма оптимального кодирования.

По матрице оптимального кодирования можно найти спектр оптимального кода путем минимизации линейной формы на конечном множестве спектров, образующих матрицу. Разрешимость проблемы распознавания взаимной однозначности в классе регулярных языков дает возможность построить код $V \in D^0(L)$ по найденному спектру.

Для языка всех сообщений B^* задачи описания матрицы оптимального кодирования и построения эффективного алгоритма оптимального кодирования решены: неравенство Мак-Миллана дает аналитическое описание матрицы $M(B^*)$, и алгоритм Хаффмана позволяет минимизировать неотрицательную линейную форму на множестве целочисленных решений неравенства Мак-Миллана за квадратичное от $m = |B|$ число операций.

Всё усложняется при переходе к регулярным языкам. В классе регулярных языков задача построения матрицы оптимального кодирования является до сих пор открытой. Она решена Ал.А. Марковым для подкласса регулярных языков – регулярных языков, порождаемых связными источниками. Такие языки Александр Александрович называет связными регулярными языками.

Сложность расшифровки матрицы оптимального кодирования характеризует значность $k(L) = \max\{d_{ij} \in M(L)\}$ этой матрицы (максимум значений её элементов). Знание оценки сверху для $k(L)$ позволяет ограничить класс векторов, которые могут входить в $M(L)$, и найти матрицу оптимального кодирования.

Построив алгоритм нахождения верхней оценки для $k(L)$, где L – произвольный связный регулярный язык, Ал.А. Марков тем самым доказал [45], что задача оптимального кодирования в этом классе языков алгоритмически разрешима.

Спектральное асимптотическое неравенство (1) для таких языков не всегда представляет собой достаточное условие реализуемости спектра $D(V)$ однозначно декодируемым кодом относительно языка, что усложняет задачу построения матрицы оптимального кодирования, а оценка значности $k(L)$ матрицы $M(L)$, полученная Ал.А. Марковым, является гиперэкспоненциальной.

Чтобы построить оптимальное алфавитное кодирование, достаточно ограничиться только префиксными кодами. Код $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ называется префиксным, если никакой из его элементарных кодов не является префиксом (началом) какого-либо другого более длинного элементарного кода.

В [47] Ал.А. Марков ввёл понятие обобщённо-префиксного кодирования локальных моделей языков $L \subset B^*$ и доказал, что использование локальных моделей языков $L \subset B^*$ может повышать эффективность кодирования в сравнении с алгоритмом Хаффмана.

Пусть R – бинарное отношение на множестве слов, α, β – слова в алфавите неизвестных $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, тогда условие $\alpha R \beta$ называют уравнением в словах, а $\alpha \bar{R} \beta$ – ограничением в словах типа R относительно q -ичного алфавита решений A . Решениями являются наборы слов $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ в алфавите A (называемые также q -ичными кодами), при подстановке которых в левую и правую часть условия получаются истинные выражения.

Ал.А. Марков рассматривает следующие отношения на множестве слов: $\alpha = \beta$ (равенство), $\alpha \leftarrow \beta$ (строгая префиксность, где α – собственный префикс β), $\alpha \leq \beta$ (нестрогая префиксность, где $\alpha \leftarrow \beta$ или $\alpha = \beta$) и $\alpha \leftrightarrow \beta$ (симметричное замыкание отношения нестрогой префиксности, где $\alpha \leftarrow \beta$, или $\alpha \rightarrow \beta$, или $\alpha = \beta$). Условие $\alpha \leftrightarrow \beta$ является ограничением в словах, выражающим отношение антипрефиксности на множестве слов, которое означает, что α и β различны и никакое из них не является префиксом другого.

Для языка $L \subseteq B^*$ Александр Александрович определяет понятие локальной модели⁴ глубины t , где t – целое положительное число.

Локальную модель глубины t составляют всевозможные окрестности слов глубины t . Окрестность некоторого слова α в алфавите языка содержит все t -буквенные слова, которые могут быть продолжениями α в языке, а также все слова длины меньше t , которые могут быть завершениями слова α .

По локальной модели глубины t строится система ограничений в словах $\Sigma_t(L)$. Код называется t -префиксным, если он является решением системы $\Sigma_t(L)$, обобщённо-префиксным – если он является t -префиксным для некоторого t .

Александр Александрович установил верхнюю оценку для значности $k(L)$ матрицы оптимального t -префиксного кодирования. Она имеет вид $k(L) \leq 2^m t^{m-1} \lceil \log_q m \rceil$.

В совокупности задач оптимизации обобщённо-префиксного кодирования имеется простейший класс так называемых задач локально-префиксного кодирования [54]. В этом случае локальная модель глубины 1 полностью характеризуется графом $G = (V, E)$ отношения антипрефиксности E на алфавите V , которое обеспечивает взаимную однозначность алфавитного кодирования любого языка, у которого локальная модель глубины 1 соответствует этому графу. Код называется локально-префиксным относительно графа G , если элементарные коды, соответствующие смежным вершинам графа G , находятся в отношении антипрефиксности. Для полных m -вершинных графов K_m задача локально-префиксного кодирования совпадает с задачей префиксного кодирования m -буквенного алфавита в обычном смысле.

Ал.А. Марков установил, что задача расшифровки матрицы оптимального локально-префиксного кодирования относится к классу NP -трудных задач, а значность $k(L)$ этой матрицы определяется как $k(L) \leq \left\lceil \frac{m-1}{q-1} \right\rceil$, где q – мощность алфавита канала связи A .

Необходимое условие реализуемости спектра локально-префиксным относительно G кодом представляет собой систему спектральных неравенств Мак-Миллана, выписанных для всех клик графа G . Ал.А. Марков показал, что если в графе G имеется не более двух клик, то система спектральных неравенств представляет собой и достаточные условия реализуемости спектра локально-префиксным относительно G кодом, в этом случае матрица оптимального локально-префиксного кодирования описывает-

ся как множество минимальных решений исходной системы спектральных неравенств.

Ал.А. Марков заметил, что локально-префиксные коды можно интерпретировать как правильные словарные раскраски графов [59]. Правильная словарная раскраска графа есть сопоставление его вершинам слов, при котором слова, соответствующие смежным вершинам, находятся в отношении антипрефиксности. Задача о правильных словарных раскрасках графов в теории графов включает в себя проблематику правильных раскрасок графов.

Рассмотрим теперь результаты Ал.А. Маркова, характеризующие предельные дополнительные возможности сжатия при учете синтаксических свойств произвольного языка.

В произвольном языке L может присутствовать алфавитная избыточность, смысл которой состоит в том, что при удалении некоторой буквы b_i из всех слов языка L или при отождествлении пары различных букв b_i и b_j во всех словах языка L любые два различных слова языка остаются различными. Языки без алфавитной избыточности называются неприводимыми.

Пусть на множестве букв алфавита B языка L задано распределение вероятностей P . Для $\alpha \in L$ через $C^*(L, \alpha)$ обозначим $|f^*(\alpha)|$, где f^* – оптимальное алфавитное кодирование, учитывающее синтаксис языка L , и через $C^*(B^*, \alpha)$ – длину кода слова $\alpha \in L$, построенного по алгоритму Хаффмана.

Мерой эффективности кодирования, учитывающего синтаксис языка L , является коэффициент сжатия $Z(L) = \inf \left\{ \frac{C^*(L, \alpha)}{C^*(B^*, \alpha)} : \alpha \in L \right\}$.

Очевидно, что для языков, в которых присутствует алфавитная избыточность, коэффициент сжатия может быть как угодно близок к нулю.

Ал.А. Марков доказал [42], что если L – неприводимый язык, то $\frac{1}{2} \leq Z(L) \leq 1$, причём существует последовательность неприводимых языков L_m , $m = 1, 2, \dots$, для которой

$$Z(L_m) = \frac{1}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right).$$

Из этого результата следует, что при алфавитном кодировании, учитывающем синтаксис языка, неприводимый язык может быть дополнительно сжат не более чем в два раза, и при растущем m коэффициент сжатия может быть сколь угодно близок к $\frac{1}{2}$.

Другой результат Ал.А. Маркова в этом направлении состоит в том, что почти все неприводимые языки в заданном алфавите B в предположении о равновероятности языков эквива-

лентны языку B^* , т.е. имеют равные с B^* матрицы оптимального кодирования, поэтому типично $Z(L)=1$.

Примечания

1. Sardinas A.A., Patterson G.W. A necessary and sufficient conditions for unique decomposition of coded messages // IRE conv. Rec. 1953. Part 8. P. 104–108. (Русский перевод: Кибернетический сборник. Вып. 7. М.: ИЛ, 1963. С. 60–73.)
2. Schützenberger M.P. On an application of semigroup methods to some problems in coding // IRE Trans. IT-2. 1956. P. 47–60.
3. Например, см. в учебнике С.В. Яблонского «Введение в дискретную математику». М.: Наука, 2000.
4. Построение локальной модели языка в зависимости от исходного способа задания может быть как простым (для регулярных языков), так и очень трудным. Например, проблема построения локальной модели любой глубины $t \geq 1$ алгоритмически неразрешима для контекстно-свободных языков (см. Жильцова Л.П. Об алфавитном кодировании контекстно-свободных языков // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. ГГУ, Горький, 1983. С. 106–123).

Список научных трудов Ал.А. Маркова

1. Марков Ал.А. Об алфавитном кодировании // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 521–523.
2. Марков Ал.А. Об алфавитном кодировании II // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 560–561.
3. Марков Ал.А. Нерекуррентное кодирование // Проблемы кибернетики. 1962. Вып. 8. С. 169–186.
4. Марков Ал.А. Условия полноты для неравномерных кодов // Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 9. С. 327–331.
5. Марков Ал.А. Коды с коррекцией ошибок // Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Вып. 6. № 2. С. 644–646.
6. Марков Ал.А. Неравномерные коды с исправлением ошибок // Проблемы кибернетики. 1964. Вып. 12. С. 137–153.
7. Глебский Ю.В., Дудич А.М., Коган Д.И., Лиогонький М.И., Марков Ал.А. Алгоритмы, осуществляемые повторяющимися применениями конечных автоматов // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 241–243.
8. Марков Ал.А. Об одной комбинаторной задаче // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 15. С. 263–266.
9. Марков Ал.А. Теория полных кодовых систем // В кн.: Международный конгресс математиков. М., 1966: Тезисы кратких научных сообщений, секция 13, Москва, 1966. С. 11.
10. Марков Ал.А. Условия полноты для неравномерных кодов II // Проблемы кибернетики. 1967. Вып. 19. С. 307–309.
11. Марков Ал.А. Анаграмматические коды // Тез. докл. III конференции по теории передачи и кодирования информации. Ужгород, 1967.
12. Марков Ал.А. Пример независимой системы слов, которая не может быть включена в конечную полную систему // Матем. заметки. 1967. Вып. 1. № 1. С. 87–90.
13. Марков Ал.А. О графах подполугрупп свободной полугруппы // Материалы Международного симпозиума по теории полугрупп и ее применениям. Смоленице, ЧССР, 1968.
14. Марков Ал.А. Об одной теореме Шютценберге // Резюме докл. I Всесоюзного симпозиума по теории полугрупп. Свердловск, 1969. С. 57–58.
15. Марков Ал.А. Графы как системы путей с данным инвариантом // Тез. докл. Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1969. С. 73–74.
16. Марков Ал.А., Носков В.В. О кодах без перекрытий // Тез. докл. Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1969. С. 74–75.
17. Марков Ал.А. Комбинаторная характеристика конечных базисов чистых свободных полугрупп // Mat. Časopis. 1969. V. 19. № 2. S. 158–165.
18. Марков Ал.А. О строении полных кодовых систем // В кн.: IV конференция по теории передачи и кодирования информации. Москва–Ташкент, 1969. С. 160–164.
19. Марков Ал.А. О некоторых свойствах бесконечных префиксных кодов // Пробл. передачи информации. 1970. Вып. 6. № 1. С. 97–98.
20. Марков Ал.А. Комбинаторная лемма и строение одного класса двоичных кодов // Матем. заметки. 1970. Вып. 7. № 3. С. 325–331.
21. Марков Ал.А. Нерекуррентные коды с минимальной сложностью декодирования // Проблемы кибернетики. 1970. Вып. 23. С. 287–290.
22. Марков Ал.А. О классе полных бипрефиксных кодов с конечной средней длиной кодового слова // Дискретный анализ. 1971. Вып. 18. С. 41–48.
23. Марков Ал.А., Носков В.В. О построении и некоторых свойствах двоичных кодов без перекрытий постоянного веса // Дискретный анализ. 1971. Вып. 18. С. 49–65.
24. Markov Al.A. On finitely generated subsemigroups of a free semigroup // Semigroup Forum. 1971. V. 3. № 3. P. 251–258.
25. Марков Ал.А. О кодах, допускающих неоднозначное декодирование // Тез. докл. II Международного симпозиума по теории информации. Цахкадзор, 1971. С. 170–171.
26. Марков Ал.А. О комбинаторно-логических основаниях теории кодирования // Тез. докл. II Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1971. С. 68.
27. Будкина Л.Г., Марков Ал.А. Об F-полугруппах с тремя образующими // Матем. заметки. 1973. Вып. 14. № 2. С. 267–277.
28. Алексеев В.Е., Марков Ал.А. Комбинаторно-алгебраические проблемы теории кодирования // В кн.: Прикладная математика и кибернетика. М.: Наука, 1973. С. 283–285.
29. Марков Ал.А., Шульц М.М. Лекции по математической логике // ГГУ, Горький, 1973.

30. Марков Ал.А. О длине соотношений в F-полугруппах // Тез. докл. III Всесоюзной конференции по пробл. теоретической кибернетики. Новосибирск, 1974. С. 150.
31. Марков Ал.А. Основания общей теории кодов // Проблемы кибернетики. 1976. Вып. 31. С. 77–108.
32. Марков Ал.А. Основания теории кодов // ГГУ, Горький, 1977.
33. Марков Ал.А. Сложность декодирования и сложность восприятия информации // Тез. докл. IV Всесоюзной конференции по пробл. теоретической кибернетики. Новосибирск, 1977. С. 162.
34. Марков Ал.А. Кодирование алфавитное // В кн.: Математическая энциклопедия, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1979. С. 935–937.
35. Марков Ал.А. Проблема локализации информации в математической теории временных кодов // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 36. С. 55–63.
36. Марков Ал.А., Сидорова Т.Н. Об одной методике выделения терминов из математического текста // Тез. докл. конф. «Семантика естественных и искусственных языков». Ленинград, 1979. С. 108–109.
37. Алексеев В.Е., Клевцов А.П., Марков Ал.А. Методы индексации // В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. ГГУ, Горький, 1979. С. 5–13.
38. Марков Ал.А. Семантика и синтаксис эквивалентных преобразований в полугруппах управляющих систем // В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. ГГУ, Горький, 1980. С. 112–138.
39. Марков Ал.А. К вопросу описания синонимии кода // Тез. докл. V Всесоюзной конференции по пробл. теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980. С. 154.
40. Марков Ал.А., Киселёва Л.Г. Пособие к практическим занятиям по дискретной математике // ГГУ, Горький, 1980.
41. Голубев В.К., Казмирова В.М., Киселёва Л.Г., Марков Ал.А., Нестеренко В.И. Математика: от школы к вузу // Методические указания для слушателей подготовительного отделения по материалам вступительных экзаменов 1980 г. ГГУ, Горький, 1980.
42. Марков Ал.А. О зависимости эффективности алфавитного кодирования от языка сообщений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 2. С. 304–307.
43. Марков Ал.А. Об эффективности алфавитного кодирования // Тез. докл. VIII Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. Москва–Куйбышев, 1981. С. 59–60.
44. Алексеев В.Е., Марков Ал.А., Носков В.В. Оптимизация независимых и опорных множеств в гиперграфах // В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. ГГУ, Горький, 1981. С. 3–25.
45. Марков Ал.А. Введение в теорию кодирования. М.: Наука, 1982. 192 с.
46. Алексеев В.Е., Белова Р.В., Марков Ал.А., Носков В.В. Пособие по практическим занятиям по дискретной математике (элементы теории графов) // ГГУ, Горький, 1982.
47. Марков Ал.А., Смирнова Т.Г. Алгоритмические основания обобщенно-префиксного кодирования // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 4. С. 790–793.
48. Марков Ал.А., Савлов С.Ф. О совместности систем условий антипрефиксности слов // Тез. докл. VII Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, 1984. С. 101.
49. Марков Ал.А., Киселёва Л.Г. Сборник задач по теории кодирования // ГГУ, Горький, 1984.
50. Марков Ал.А. Локальные модели языков и системы ограничений в словах // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. М.: МГУ, 1986. С. 19–23.
51. Марков Ал.А., Киселёва Л.Г. Сборник задач по теории кодирования // ГГУ, Горький, 1986.
52. Жильцова Л.П., Марков Ал.А. О комбинаторно-логических моделях кодирования // Тез. докл. VIII Всесоюзной конференции по математической логике. М., 1986. С. 66.
53. Baryshev M.Yu., Zhiltsova L.P., Markov Al.A. Computational problems in alphabetic coding theory // Fundamentals of Computation Theory. International Conference. Kazan, Springer, Berlin, 1987. V. 278. P. 48–50.
54. Марков Ал.А., Смирнова Т.Г. Локально-префиксные коды // В сб.: Комбинаторно-алгебраические методы и их применение. ГГУ, Горький, 1987. С. 70–94.
55. Марков Ал.А. Элементы комбинаторного анализа // ГГУ, Горький, 1988.
56. Марков Ал.А. Словарные раскраски графов // Тез. докл. VIII Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Горький, 1988. С. 34–35.
57. Марков Ал.А. О комбинаторно-логических моделях теории кодирования // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. МГУ, Москва, 1989. С. 126–128.
58. Марков Ал.А. Системы уравнений антипрефиксности в словах // Дискретная математика. 1990. Т. 2. № 2. С. 3–15.
59. Марков Ал.А., Смирнова Т.Г. О словарных раскрасках и некоторых совершенных графах // Дискретная математика. 1990. Т. 2. № 2. С. 16–32.
60. Марков Ал.А. Схемная сложность дискретной оптимизации // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 3. С. 29–46.
61. Markov Al.A. Systems of antiprefix equations in words // Discrete Math. Appl. 1992. Vol. 2. No. 1. P. 11–24.
62. Markov Al.A., Smirnova T.G. On word colourings and some perfect graphs // Discrete Math. Appl. 1992. Vol. 2. No. 1. P. 25–44.

ON THE WORKS OF ALEXANDER MARKOV

L.P. Zhiltsova, L.G. Kiseleva, T.G. Smirnova

The article is dedicated to the 75th anniversary of Al.A. Markov (1937–1994), a prominent Russian mathematician, a recognized leader in the field of discrete mathematics at the Nizhni Novgorod State University. Particular attention is paid to the most outstanding scientific results of the scientist and educator.

Keywords: discrete mathematics, coding theory, alphabetic coding, recognition problem of bijectivity, optimal coding problem.