

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВОЛН

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано учёным советом радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 011800 «Радиофизика», 03.03.03 – «Радиофизика» и 03.04.03 – «Радиофизика», а также слушателей исследовательской школы «Лазерная физика» Института аспирантуры и докторантуры ННГУ

Нижний Новгород
2014

УДК 533.6.011.7(075.8)

ББК В344.1 п73

А-90

А-90 АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВОЛН: Составитель: Миловский Н.Д. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 138с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.П. Савикин**

В пособии изложены основы геометрооптического и квазиоптического описаний распространения коротковолновых полей в однородных и неоднородных средах. В приближении геометрической оптики представлены решения уравнений эйконала и переноса, рассмотрены закономерности распространения лучей в неоднородных средах, включая методы расчёта их траекторий и интенсивности поля в лучевых трубках. С помощью матричного описания определены условия устойчивого поведения траекторий параксиальных лучей в неограниченных периодических системах (открытых линзовых линиях передачи).

Квазиоптическая теория распространения параксиальных волновых пучков с учётом их дифракционного расплывания представлена во второй главе пособия. Изложены спектральный и дифференциальный методы расчёта амплитуды поля пучка по её известному распределению в фиксированной плоскости. Определены условия существования энергетически реализуемых мод в резонаторах и устойчивого распространения пучков в линиях передачи. Установлена аналогия квазиоптического и матричного способов расчёта этих условий.

Пособие предназначено для слушателей исследовательской школы “Лазерная физика” Института аспирантуры и докторантуры ННГУ, а также для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 011800 «Радиофизика», 03.03.03 – «Радиофизика», 03.04.03 – «Радиофизика» и специализирующихся в областях лазерной физики, когерентной и нелинейной оптики.

Подготовлено в соответствии с Планом мероприятий по реализации программы повышения конкурентноспособности ННГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы.

Ответственный за выпуск:

Заместитель председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 533.6.011.7(075.8)

ББК В344.1 п73

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВОЛН

Составитель:
Николай Дмитриевич **Миловский**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. . Уч-изд. л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского

603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 6 |
| Глава 1. Геометрическая оптика | 13 |
| § 1. Уравнения геометрической оптики в неоднородной среде | 13 |
| 1.1. Вывод уравнений го из уравнения Гельмгольца..... | 13 |
| 1.2. Вывод уравнений го из уравнений Максвелла | 17 |
| § 2. Общие свойства и некоторые методы решения уравнения эйконала..... | 19 |
| 2.1. Аналогия эйконала и действия в механике..... | 20 |
| 2.2. Физический смысл эйконала и связанных с ним понятий | 22 |
| 2.3. Дифференциальные уравнения второго порядка для лучей | 26 |
| § 3. Уравнение переноса и законы изменения интенсивности в го | 27 |
| 3.1. Интенсивность поля волны и закон сохранения энергии | 28 |
| 3.2. Законы изменения интенсивности в го..... | 29 |
| 3.3. Изменение поляризации электромагнитного поля вдоль лучей | 34 |
| § 4. Отражение и преломление волн на границе раздела сред..... | 36 |
| § 5. Геометрическая оптика слоисто-неоднородной среды | 38 |
| 5.1. Сферически-слоистая среда..... | 39 |
| 5.2. Плоскостлоистая среда..... | 43 |
| 5.3. Аксиально-симметричная среда | 47 |
| 5.4. Линзоподобные (фокусирующие) среды..... | 51 |
| 5.5. Параксиальные лучи в аксиально-симметричных средах | 52 |
| § 6. Матричный метод описания распространения лучей в центрированных линиях передачи силовых полей | 54 |
| 6.1. Математические основы матричного метода описания распространения параксиальных лучей | 54 |
| 6.2. Матрицы преобразования координат луча | 55 |
| 6.2.1. Матрица преобразования координат луча на участке однородной среды ... | 56 |
| 6.2.2. Матрица преобразования координат луча на плоской границе раздела сред, перпендикулярной оси симметрии | 57 |
| 6.2.3. Матрица преобразования координат луча в многослойной среде | 57 |
| 6.2.4. Матрица преобразования координат луча на плоской наклонной границе раздела сред | 58 |
| 6.2.5. Матрица преобразования координат луча на сферической границе раздела сред | 59 |
| 6.2.6. Матрица преобразования координат луча в толстой линзе | 60 |
| 6.2.7. Матрица преобразования координат луча тонкой линзой | 61 |
| 6.2.8. Матрица преобразования Фурье | 63 |
| 6.2.9. Матрица преобразования масштаба..... | 64 |
| 6.3. Пример применения матриц | 64 |
| 6.4. Свойства матриц преобразования координат луча | 65 |
| 6.5. Сопоставление матриц и оптических систем..... | 66 |
| § 7. Закономерности распространения лучей в линиях передачи (периодических центрированных системах)..... | 67 |
| § 8. Матричный метод описания распространения лучей в разъюстированных | |

| | |
|---|-----|
| (нецентрированных) линиях передачи | 72 |
| 8.1. Оператор смещения координат луча | 73 |
| 8.2. Эквивалентность центрированных и нецентрированных систем | 74 |
| 8.3. Устойчивость разъюстированных периодических систем | 75 |
| Глава 2. Квазиоптика однородных линейных сред | 77 |
| § 1. Элементы теории дифракции скалярных и векторных полей | 77 |
| 1.1. Дифракция и рассеяние | 77 |
| 1.2. Принцип Гюйгенса | 78 |
| 1.3. Принцип Гюйгенса-Френеля | 79 |
| 1.4. Принцип Гюйгенса-Кирхгофа | 80 |
| 1.5. Электродинамический принцип Гюйгенса | 84 |
| 1.6. Модификации электродинамического принципа Гюйгенса для задач дифракции на плоских объектах | 85 |
| 1.7. Приближённые методы решения дифракционных задач | 86 |
| 1.7.1. Приближение Кирхгофа для скалярного поля | 87 |
| 1.7.2. Метод физической оптики | 88 |
| § 2. Основные закономерности распространения дифрагированных коротковолновых полей | 88 |
| 2.1. Диаграмма направленности простейшего излучателя коротковолнового диапазона | 88 |
| 2.2. Параксиальные волновые пучки гауссовой формы | 90 |
| 2.3. Угол дифракционной расходимости и дифракционная длина | 92 |
| 2.4. Параксиальное приближение теории дифракции скалярного поля на отверстии в плоском экране. Дифракционная формула Френеля | 94 |
| § 3. Дифференциальный метод квазиоптического описания распространения коротковолновых полей | 96 |
| 3.1. Параболическое (диффузионное) уравнение для лучевой амплитуды параксиального волнового пучка в однородной среде | 96 |
| 3.2. Соотношения между компонентами векторной комплексной амплитуды параксиального волнового пучка | 98 |
| 3.3. Критерии применимости квазиоптического описания | 99 |
| 3.3.1. Изочастотные поверхности дисперсионных уравнений | 100 |
| § 4. Спектральный метод описания распространения параксиальных волновых пучков | 101 |
| § 5. Аналогия лучевого и волнового описаний распространения коротковолновых полей | 103 |
| 5.1. Оператор преобразования амплитуды поля параксиального волнового пучка в свободном пространстве | 103 |
| 5.2. Преобразование поля волнового пучка тонкой линзой | 104 |
| 5.3. Операторы обратного преобразования поля параксиального пучка в свободном пространстве и тонкой линзой | 105 |
| 5.4. Оператор Фурье-преобразования поля | 106 |
| § 6. Распространение параксиальных волновых пучков гауссовой формы в однородном свободном пространстве | 106 |
| 6.1. Гауссов пучок с плоским фазовым фронтом | 108 |

| | |
|---|-----|
| 6.2. Сфокусированный гауссов пучок | 109 |
| 6.3. Дефокусированный гауссов пучок..... | 111 |
| § 7. Волновые пучки в недифрагмированных открытых цилиндрических линиях передачи | 111 |
| 7.1. Интегральное уравнение для лучевой амплитуды поля моды открытой линии передачи..... | 112 |
| 7.2. Решения одномерного интегрального уравнения Фредгольма. Собственные функции..... | 113 |
| 7.3. Структура поля моды в открытой линии передачи | 114 |
| 7.4. Решения одномерного интегрального уравнения Фредгольма. Собственные значения | 117 |
| § 8. Сопоставление свойств мод и собственных лучей в открытых цилиндрических линиях передачи | 117 |
| 8.1. Сопоставление условий существования финитных траекторий лучей и энергетически реализуемых мод в открытых линиях передачи | 118 |
| 8.2. Сопоставление свойств геометрооптических и квазиоптических операторов преобразования характеристик распространяющегося поля | 119 |
| 8.3. Использование TEM_{mn} -мод и собственных лучей для описания распространения полей в линзовых линиях передачи | 121 |
| § 9. Обобщения и приложения квазиоптической теории TEM_{mn} -мод открытых цилиндрических линий передачи | 124 |
| 9.1. Открытая линия передачи из эквидистантно расположенных двухфокусных корректоров фазы | 124 |
| 9.2. Открытая линия передачи из двух типов эквидистантно расположенных разнофокусных линз | 125 |
| 9.3. Открытая линия передачи в виде двойной периодической последовательности одинаковых линз | 128 |
| 9.4. Открытые линии передачи с потерями | 131 |
| 9.5. Дифрагмированные открытые линии передачи | 132 |
| 9.6. Открытые резонаторы | 133 |
| 9.7. Вырождение мод резонатора по частоте | 135 |
| Литература..... | 137 |

Введение

В настоящем учебно-методическом пособии излагаются два **асимптотических метода теоретического описания распространения волн** разной физической природы **в линейных неоднородных средах**. В названии курса и тексте пособия используются несколько понятий, содержания которых следует уточнить.

а) Диапазон волновых процессов весьма широк, так что **волны** в разных средах имеют множество разнообразных свойств и особенностей. Волной может считаться любой сигнал, распространяющийся в **среде** с некоторой скоростью. Поэтому **волна** – это убегающее (перемещающееся) различимое возмущение физической величины u .

б) **Среда** – это **распределенная система**, состоящая из **бесконечно большого числа** связанных элементарных звеньев (ячеек или систем) и потому обладающая бесконечно большим числом степеней свободы (собственных нормальных колебаний). **Распределенная система** – это, как правило, система неограниченного объёма, либо система ограниченного объёма с бесконечно большим числом степеней свободы. **Распределенная система** может состоять из совокупности однородных, но различных по своим свойствам участков. Такая совокупность локально однородных в пространстве и во времени участков образует **неоднородную и нестационарную среду**. Волны скалярной физической величины u в **неоднородной и нестационарной среде** описываются системой дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (иногда одним уравнением) типа

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} + C u + D = 0, \quad (1)$$

в которых коэффициенты $A(x, y, z, t)$, $B_\alpha(x, y, z, t)$, $C(x, y, z, t)$, $D(x, y, z, t)$ зависят только от координат и от времени. Эти уравнения дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

в) **Среда**, в которой волны физической величины u описываются уравнениями (1), является **линейной**.

Возбуждение волн (колебаний) u в **линейной среде** происходит в соответствии с **принципом суперпозиции**, имеющим два важных свойства:

- 1) если источники $\rho_{1,2}$ создают в **среде** поля $u_{1,2}$, то источник $(\rho_1 + \rho_2)$ создаёт в этой **среде** поле $(u_1 + u_2)$;
- 2) монохроматический источник на частоте ω возбуждает только волну $u(\omega)$.

г) В различных областях физики волновые процессы имеют разную **физическую природу**: физические механизмы распространения волн электромагнитного поля в электродинамике и оптике, упругих волн в газах, жидкостях и твёрдых телах сильно отличаются друг от друга. Различие физических механизмов, реализующих волновые процессы, приводит к различным

способам описания, основанным на сильно отличающихся друг от друга системах уравнений. Однако для понимания наиболее фундаментальных явлений (интерференции, дифракции, отражения и преломления, а также дисперсии и диссипации), свойственных волнам различной природы, совсем необязательно исследовать исходные сложные системы уравнений. Простые эффекты описываются более простыми и поэтому более универсальными математическими моделями (уравнениями).

В теории распространения волн фундаментальное значение имеет однородное линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\Delta u - \frac{1}{v_f^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

называемое **волновым уравнением**. В некотором приближении описание волнового процесса в любой среде может быть сведено к волновому уравнению. Волновое уравнение, кстати, всегда можно представить в виде системы двух связанных уравнений типа (1) относительно пары сопряжённых переменных ¹⁾. В этом уравнении u – некоторая характеристика поля (например, амплитуда одного из компонентов электромагнитного поля или давление в звуковой волне), $v_f = v_f(x, y, z)$ – скорость распространения волнового движения. Для гармонических во времени процессов (описываемых фактором $\exp\{i\omega t\}$), уравнение (2) переходит в **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta u + k^2 \cdot n^2(x, y, z) u = 0, \quad (3)$$

в котором волновое число в среде с показателем преломления $n(x, y, z)$

$$kn(x, y, z) = \frac{\omega}{c} n(x, y, z) \equiv \frac{\omega}{v_f(x, y, z)} = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv \frac{2\pi}{v_f T}, \quad (4)$$

имея размерность обратной длины $[k] = [L^{-1}]$, определяет пространственный период λ волнового процесса.

Интенсивность **стоячей волны**, которая определяется как среднее значение на периоде высокочастотного колебания $T = (2\pi / \omega)$ величины $\overline{|u_+ \cos(\omega t - k\xi) + u_- \cos(\omega t + k\xi)|^2}$, изменяется периодически на половине длины λ . Поэтому длина волны λ – это внутренний пространственный масштаб. Помимо **внутреннего** масштаба λ поле физической величины u , возбуждённое какими-либо источниками в замкнутом или открытом объёме, всегда имеет и пространственные **внешние** масштабы Λ_k , на которых **существенно изменяется** значение **плотности энергии** $\overline{|u|^2}$. Эти

¹⁾ В частности, в одномерном случае ($\Delta \Rightarrow (\partial^2 / \partial z^2)$) в однородной среде ($v_f = const$) в качестве такой системы уравнений можно использовать уравнения $u'_z - (1/v_f) \dot{u}_t - w = 0$ и $w'_z + (1/v_f) \dot{w}_t = 0$.

масштабы определяются размерами **неоднородностей среды** или размерами **области, занятой полем**.

В неоднородной среде внешний масштаб Λ_k можно оценить из выражения

$$\Lambda \approx \left| \left(v_f / \nabla v_f \right) \right| \cong \left| \left(n / \nabla n \right) \right| \cong \left| \left(\varepsilon / \nabla \varepsilon \right) \right|. \quad (5)$$

В однородной среде размеры области, занятой полем $u_0 \cos(\omega t - k\xi)$, могут ограничены, например, по условиям возбуждения. В таком случае внешний масштаб Λ_k можно оценить из выражения

$$\Lambda \approx \left| \left(u_0 / \nabla u_0 \right) \right|. \quad (6)$$

Между *внутренним* λ и *внешними* Λ_k масштабами возможны разные соотношения, изменяющиеся в широких пределах от **области коротковолновой асимптотики**

$$\Lambda_k \gg \lambda \quad (7)$$

до противоположного предельного случая **квазистатики** $\Lambda_k \ll \lambda$.

В предельных случаях для описания распространения поля (или расчёта распределения в пространстве энергии поля) используются **приближенные методы**, позволяющие получить более простые (наглядные) уравнения и более удобные для практического применения решения. В настоящем пособии рассматриваются **приближенные методы** (способы) описания полей в **области коротковолновой асимптотики** (7).

В **области** (7) в зависимости от постановки задачи и от свойств **среды** можно выделить две части, отличающиеся друг от друга набором внешних пространственных масштабов. В каждой из них применяется свой метод описания полей.

1. Одним из них является **метод геометрической оптики** (далее – *го*). **Геометрическая оптика** однородных и неоднородных сред – метод описания полей в той части **области коротковолновой асимптотики**, где $\lambda \rightarrow 0$ и можно пренебречь дифракционными эффектами. В приближении *го* не учитываются дифракционные явления, которые всегда обусловлены поперечными размерами области, занятой полем. В *го* считаются бесконечно большими поперечные размеры пучка распространяющегося излучения.

2. В другой части **области** (7), где учитываются поперечные размеры пучка и тем самым принимаются во внимание дифракционные эффекты, используется так называемый **квазиоптический способ** (метод, теория) описания распространения волновых пучков. **Квазиоптика однородных линейных сред** – теоретическое описание закономерностей распространения коротковолновых полей с учётом их изменения из-за дифракции в пограничных областях.

Областями приложения методов коротковолновой асимптотики являются:

1) распространение волн в неоднородных средах (в частности, в ионосфере и океане);

2) линии передачи электромагнитного излучения миллиметрового (1 мм - 10 мм), субмиллиметрового (0,1 мм – 1 мм) и оптического диапазонов длин волн, включая системы транспортировки излучения в лазерных устройствах и приборах нелинейной оптики, в голографии и интегральной оптике.

3) коротковолновая диагностика лабораторной плазмы, ионосферы, земной коры и мутных сред (томография).

В качестве примера системы передачи электромагнитного излучения рассмотрим на Рис.1 открытую линию передачи оптического пучка в типичной экспериментальной установке для преобразования частоты лазерного излучения с помощью нелинейного кристалла KDP (нелинейная оптика).

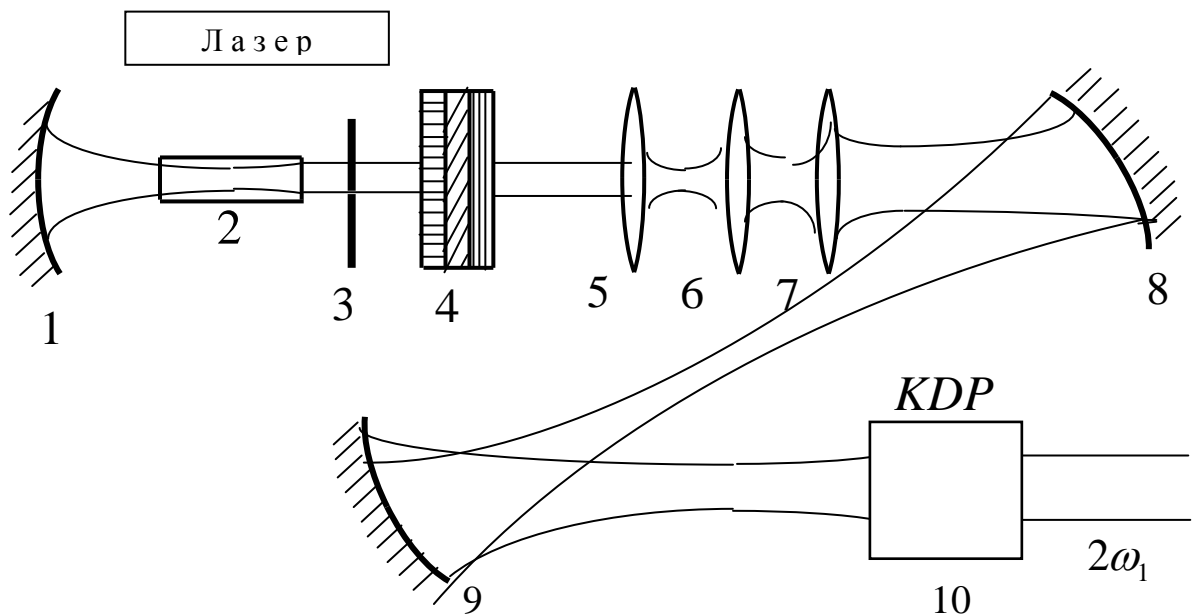


Рис.1

На этом рисунке изображены *лазер*, который состоит из активной среды **2** и диафрагмы **3** внутри объёмного *открытого резонатора*, образованного сферическим зеркалом **1** и многослойным зеркалом **4**, *нелинейная анизотропная среда* в виде кристалла KDP, в которой происходит преобразование лазерного излучения, имеющего частоту ω_1 , в излучение на второй гармонике этой частоты $2\omega_1$, и *открытая линия передачи оптического пучка* между элементами **4** и **10**, состоящая из набора зеркал **8,9** и линз **5,6,7**, а также четвертьволновых пластинок, полярироидов и пр.

Для расчёта открытой линии передачи необходимо знать:

1) теорию распространения узкого пучка (луча) в свободном пространстве и через границу раздела двух сред (в общем случае в неоднородной плоскострой среде);

2) теорию открытых резонаторов и волноводов;

3) теорию дифракции на ограниченных апертурах.

Эти конкретные разделы квазиоптической теории распространения коротковолнового излучения будут рассматриваться во второй части настоящего пособия.

Фундаментом теоретического описания распространения оптического излучения в большом числе случаев является уравнение Гельмгольца с соответствующими граничными условиями, которые необходимы для решения конкретной физической задачи. Но фундамент тоже опирается на почву (грунт). Подобным *основанием* (ground – земля, почва, грунт, *основание*) служат *системы уравнений* с соответствующими граничными условиями, которые при определённых условиях трансформируются в *волновое уравнение* и далее в уравнение Гельмгольца. В их число входят:

а) дополненная соответствующими **материальными уравнениями** система **уравнений Максвелла**, которая описывает распространение электромагнитных волн в разнообразных средах;

б) **уравнения механики сплошных сред**, описывающие распространение звука в жидкостях и газах;

в) уравнения теории упругости, с помощью которых можно описывать распространение упругих волн в твёрдых (анизотропных) телах.

Кроме указанных выше случаев, **уравнение Гельмгольца** и его решения широко используются для описания разнообразных физических явлений в **квантовой механике**, в **гидродинамике**, в **сейсмологии** и т.д.

В качестве конкретного примера рассмотрим вывод уравнения Гельмгольца из уравнений Максвелла в неоднородной изотропной среде в области, где отсутствуют сторонние источники ($\vec{j}^{e,m} = 0$, $\rho^{e,m} = 0$). Для простоты среду будем считать непроводящей ($\sigma = 0$) и недиспергирующей. В такой среде диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости являются действительными функциями координат, и система уравнений Максвелла вместе с материальными уравнениями имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \\ \vec{D} = \varepsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H} . \end{array} \right. \quad (8)$$

Рассмотрим монохроматическое решение уравнений (8) в виде

$$\{ \vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B} \} = (1/2) \left\{ \left[\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{H}}, \tilde{\vec{D}}, \tilde{\vec{B}} \right] \exp(i \omega t) \right\} + \text{к.с.} , \quad (9)$$

в котором векторные комплексные амплитуды являются функциями координат и где для действительных проницаемостей ε и μ справедливы связи

²⁾ На границе раздела двух сред из разнообразных законов сохранения (массы, импульса, энергии, заряда, потока вектора или его циркуляции по контуру) вытекают необходимые граничные условия для распространяющихся физических полей. В частности, граничные условия формулируются для того поля (или компонента поля) **u**, которое в рассматриваемом конкретном случае описывается **уравнением Гельмгольца** (3).

$$\tilde{D} = \varepsilon(\vec{r}) \cdot \tilde{E}; \quad \tilde{B} = \mu(\vec{r}) \cdot \tilde{H}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в систему (8) с учётом (10) и используя её линейность, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{E} = -i(\omega/c) \cdot \mu(\vec{r}) \cdot \tilde{H}; & \text{rot } \tilde{H} = (i\omega/c) \cdot \varepsilon(\vec{r}) \cdot \tilde{E}; \\ \text{div } \varepsilon(\vec{r}) \cdot \tilde{E} = 0; & \text{div } \mu(\vec{r}) \cdot \tilde{H} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

относительно комплексных амплитуд электрического \tilde{E} и магнитного \tilde{H} полей. Применяя операцию ротора к первому векторному уравнению системы

$$\text{rot}(\text{rot } \tilde{E}) \equiv \text{grad}(\text{div } \tilde{E}) - \Delta \tilde{E} = -i(\omega/c) \cdot \left\{ \mu \cdot \text{rot } \tilde{H} + \left[\nabla \mu \times \tilde{H} \right] \right\} \quad (12)$$

и исключая из (12) переменную \tilde{H} с помощью двух других уравнений (11), получим векторное уравнение второго порядка в частных производных для амплитуды электрического поля в неоднородной среде

$$\Delta \tilde{E} + \mu \varepsilon (\omega^2 / c^2) \tilde{E} + \left[\nabla(\ln \mu) \times \text{rot } \tilde{E} \right] + \text{grad}(\tilde{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = 0. \quad (13)$$

В **однородной изотропной** среде, где ε , μ и, следовательно, показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ скалярные постоянные величины, это уравнение трансформируется в одно скалярное **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{E} + \mu \varepsilon (\omega^2 / c^2) \tilde{E} \equiv \Delta \tilde{E} + n^2 k^2 \tilde{E} = 0 \quad (14)$$

относительно комплексной амплитуды поля \tilde{E} независимо от того, как это поле $\underline{\quad}$.

В **однородной анизотропной** среде, где $\varepsilon \equiv \hat{\varepsilon}$ и $\mu \equiv \hat{\mu}$ являются тензорами второго ранга, имеющими постоянные элементы, уравнение (13) преобразуется в два независимых скалярных уравнения типа (14), имеющих различные показатели преломления $n_{1,2}$ и описывающих распространение ортогонально поляризованных полей $\tilde{E}_{1,2} \cdot \vec{e}_{1,2}^0$.

В **неоднородной** среде ($\nabla \varepsilon \neq 0$; $\nabla \mu \neq 0$) уравнение (13) будет иметь форму **уравнения Гельмгольца** (14) в случае, когда $\tilde{H} \uparrow \nabla \mu$ и

$\tilde{E} \perp \nabla \varepsilon$. Его решение при произвольной зависимости n^2 **от координат не может быть описано в известных функциях**. В **неоднородной слоистой** среде, когда n^2 меняется лишь в одном направлении (например, вдоль одной координаты z в декартовой системе координат), уравнение (14) с $n^2 = n^2(z)$ может иметь аналитическое решение. Но даже в подобных частных случаях многие точные решения сложны по форме и не всегда удоб-

³⁾ Этому **уравнению Гельмгольца** соответствует **волновое уравнение** типа (2) относительно $\vec{E} = \text{Re} \left\{ \tilde{E} \cdot \vec{e}^0 \cdot \exp(i\omega t) \right\}$, которое получается из (14) с помощью замен

$$i\omega \rightarrow (\partial/\partial t) \text{ и } v_f^2 \rightarrow (c/n)^2.$$

ны для анализа и практического использования. *Поэтому весьма большое значение имеют приближенные методы нахождения волновых полей в неоднородных средах.* При произвольной, но достаточно *медленной зависимости свойств среды от координат* можно построить приближенное решение, которое опирается на уравнение (14) и называется *приближением геометрической оптики.*

При наличии в среде дисперсии и проводимости ($\sigma \neq 0$) вид уравнений (10) – (14) практически почти сохраняется. В этом случае в них действительные функции координат $\varepsilon(\vec{r})$ и $\mu(\vec{r})$ трансформируются в соответствующие комплексные функции $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, \omega)$ и $\tilde{\mu}(\vec{r}, \omega)$, которые зависят ещё и от частоты ω (или от волнового числа, если дисперсия пространственная).

Уравнение для магнитного поля \tilde{H} можно получить из (13) по принципу двойственности с помощью следующих замен:

$$\tilde{E} \rightarrow \tilde{H} ; \quad \tilde{H} \rightarrow -\tilde{E} ; \quad \varepsilon \Leftrightarrow \mu . \quad (15)$$

Оно будет полностью аналогично уравнению (13) по своим свойствам и эквивалентно (13) по возможностям корректного описания распространения электромагнитного поля в неоднородной среде.

Глава 1. Геометрическая оптика

§ 1. Уравнения геометрической оптики в неоднородной среде

Во многих практически важных случаях распространение гармонических волн в *неоднородной среде* описывается решениями **уравнения Гельмгольца**

$$\Delta \tilde{U} + k^2 n^2(\vec{r}) \tilde{U} = 0, \quad (1)$$

где \tilde{U} – скалярная волновая функция, $k = (\omega / c) = (2\pi / \lambda)$ – волновое число, c – скорость распространения волн в однородной (эталонной) среде, $n(\vec{r})$ – коэффициент замедления скорости распространения волн в среде по отношению к эталонному значению (в электродинамике и оптике c – скорость света в вакууме, $n(\vec{r})$ – показатель преломления среды). В *неоднородной среде* скорость и направление распространения оказываются локальными характеристиками волны и рассматриваются как функции координат. Точные решения уравнения (1) известны лишь для некоторых частных законов изменения $n^2(\vec{r})$ в неоднородной слоистой среде, примерами которой в некотором приближении могут служить атмосфера Земли, морская вода, земная кора, оптические волокна.

При произвольной, но достаточно *медленной зависимости свойств среды от координат*, когда *длина волны λ мала по сравнению с характерными масштабами Λ задачи* ($\lambda \ll \Lambda$), можно построить приближенное решение с помощью *метода геометрической оптики*. Простой и наглядный *метод го* обеспечивает хорошее качественное описание чрезвычайно широкого круга волновых явлений различной физической природы (электромагнитные и упругие волны, звук, волновые процессы в плазме и жидкостях, квантовомеханические явления и т.д.). *Го* широко применяется в оптике, в физике плазмы, в теории распространения радиоволн через атмосферу Земли и космическое пространство. Можно сказать, что львиная доля всех расчетов коротковолновых полей (особенно на начальном этапе оценок и прикидок) осуществляется при помощи *метода го* и его модификаций. В частности, большой интерес представляют приложения *го*, связанные с распространением и излучением волн в атмосферах планет, в неоднородном океане, в земной коре, в неоднородных линзах и волноводах с неоднородным заполнением, в средах, содержащих случайные неоднородности.

1.1. Вывод уравнений го из уравнения Гельмгольца

На примере скалярного поля \tilde{U} проиллюстрируем переход от **уравнения Гельмгольца** (1) к уравнениям *го*. Вначале заметим, что в однородной

среде (т.е. в простейшем случае $n^2 = \bar{n}^2 = const$) уравнение (1) имеет решение в виде поля

$$\tilde{U}(\vec{r}) = \bar{A} \cdot \exp\{i[\bar{\varphi} - k(\vec{n} \cdot \vec{r})]\} \equiv \bar{A} \cdot \exp\{i[\bar{\varphi} - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\}, \quad (2)$$

которое имеет постоянную амплитуду \bar{A} и фазу

$$\Phi = \bar{\varphi} - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r}), \quad (3)$$

изменяющуюся наиболее быстрым образом в направлении орта \vec{s}_0 . Поверхностью постоянной фазы, называемой волновым фронтом, является плоскость, перпендикулярная направлению орта \vec{s}_0 . Решение (2) описывает распространение волны реальной физической величины

$$U = \text{Re}\{\tilde{U} \exp(i\omega t)\} = \bar{A} \cdot \text{Re}\langle \exp\{i[\bar{\varphi} + \omega t - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\} \rangle, \quad (4)$$

изменяющейся во времени по гармоническому закону. В каждый фиксированный момент времени на поверхности (плоскости) постоянной фазы значение U постоянно, поэтому волна называется однородной и плоской. С течением времени плоскость постоянной фазы перемещается в направлении орта \vec{s}_0 с постоянной фазовой скоростью

$$v_f = (\omega / k\bar{n}) = (c / \bar{n}). \quad (5)$$

А) Будем считать, что свойства среды в уравнении (1) изменяются достаточно мало на расстояниях порядка длины волны λ . Это означает, что

$$\lambda \cdot |\nabla n| \ll n \quad (6)$$

и что существует некоторый пространственный масштаб Λ изменения n , который определяется из условия

$$\Lambda \cdot |\nabla n| \approx n. \quad (7)$$

Этот пространственный масштаб существенно больше λ , так что справедливо условие

$$k \cdot \Lambda = (2\pi \Lambda / \lambda) \equiv (1/\mu) \gg 1, \quad (8)$$

где μ – малый безразмерный параметр, в предельном случае стремящийся к 0.

Если заметные изменения амплитуды $A(\vec{r})$ и направления распространения волны происходят на расстояниях Λ , то всё пространство, где определяется решение **уравнения** (1), можно разбить на участки с размерами

$$\lambda \ll l \ll \Lambda. \quad (9)$$

¹⁾ Поле распространяющейся волны может изменяться не только из-за свойств среды, которые представлены в уравнении (1) коэффициентом $n(\vec{r})$, но и в результате особенностей его возбуждения, обусловленных размерами, структурой и расположением источников относительно области определения поля. Вторая причина никак не представлена в уравнении (1), но определяет характерные размеры Λ_A области изменения амплитуды поля. Будем считать, что $\Lambda_A \gg \Lambda$ и что поэтому изменение амплитуды поля происходит (в основном) не из-за особенностей его возбуждения, а из-за неоднородного коэффициента преломления $n(\vec{r})$.

В пределах каждого участка волну можно считать плоской, а направление её распространения можно определить как направление нормали к волновой поверхности. Это означает, что решение уравнения (1) следует искать в виде выражения

$$\tilde{U}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\}, \quad (10)$$

которое *связывает* две неизвестные действительные функции $A(\vec{r})$ и $\Psi(\vec{r})$, мало изменяющиеся на расстоянии l :

$$\begin{aligned} l |\nabla A(\vec{r})| &\cong (l/\Lambda) |A(\vec{r})| \ll |A(\vec{r})|; \\ l |\nabla \Psi(\vec{r})| &\cong (l/\Lambda) |\Psi(\vec{r})| \ll |\Psi(\vec{r})|. \end{aligned} \quad (11)$$

При выполнении условий (11) такая монохроматическая волна, образованная двумя связанными функциями, будет **квазиплоской** (т.е. плоской на каждом участке l). Она может быть и **однородной**, если

$$A(\vec{r}) = \text{const} \quad (12)$$

на поверхности волнового фронта, которая определяется уравнением

$$\Psi(\vec{r}) = \text{const}. \quad (13)$$

Подставляя (10) в уравнение (1) и используя последовательно две дифференциальные операции первого порядка $\text{div grad} \equiv \Delta$ (оператор Лапласа), получим уравнение

$$\frac{\Delta A}{k^2 A} - 2i \frac{(\nabla A \cdot \nabla \Psi)}{k A} - i \frac{\Delta \Psi}{k} - [(\nabla \Psi)^2 - n^2(\vec{r})] = 0. \quad (14)$$

В нём первый член в соответствии с (8) имеет порядок малости μ^2 , второй и третий имеют порядок малости μ по отношению к членам, находящимся в квадратных скобках. Приравнявая нулю отдельно реальную и мнимую части (14) и пренебрегая членом второго порядка малости, получим два уравнения

$$(\nabla \Psi)^2 = n^2(\vec{r}), \quad (15)$$

$$A \Delta \Psi + 2(\nabla \Psi \cdot \nabla A) = 0 \quad (16)$$

относительно двух неизвестных *связанных* функций $A(\vec{r})$ и $\Psi(\vec{r})$, имеющих разные размерности.

Уравнение (15) через известное выражение коэффициента преломления $n(\vec{r})$ определяет фазу (или *эйконал*) и, следовательно, структуры волновых фронтов. Оно называется *уравнением эйконала*. В переводе с греческого языка *эйконал* обозначает *изображение* и введён в качестве термина в 1885 году Брунсом для обозначения *связанных функций*. Уравнение (16) определяет поведение амплитуды и называется *уравнением переноса*. Отметим ещё раз, что преобразование **уравнения Гельмгольца** (1) в два *связанных* уравнения (15) и (16) возможно только при условии (8).

Б) Использованный метод получения приближённых уравнений, когда *приходится пренебрегать их малыми членами, а не малыми членами их решений*, не всегда корректен. Поэтому рассмотрим второй подход. Введём безразмерные координаты

$$\vec{\rho} = \xi \cdot \vec{x}_0 + \eta \cdot \vec{y}_0 + \zeta \cdot \vec{z}_0 \equiv (\vec{r}/\Lambda), \quad (17)$$

нормированные на внешний масштаб Λ . Используя очевидные соотношения

$$\nabla_{\rho} = \Lambda \cdot \nabla ; \quad \Delta_{\rho} = \Lambda^2 \cdot \Delta , \quad (18)$$

представим **уравнение Гельмгольца** (1) в безразмерных координатах

$$\Delta_{\rho} \tilde{U}(\vec{\rho}) + \frac{n^2(\vec{\rho})}{\mu^2} \tilde{U}(\vec{\rho}) = 0 . \quad (19)$$

Решение (19) будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$\tilde{U}(\vec{\rho}) = \left\{ a_0(\vec{\rho}) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m a_m(\vec{\rho}) \right\} \cdot \exp\{-i(1/\mu) \Phi(\vec{\rho})\} , \quad (20)$$

где безразмерная фаза $\Phi(\vec{\rho})$ и эйконал $\Psi(\vec{r})$, имеющий размерность длины, связаны соотношением

$$\Psi(\vec{r}) = \Lambda \cdot \Phi(\vec{r} / \Lambda) . \quad (21)$$

Подставляя (20) в (19) и приравнявая нулю суммы членов одного порядка малости, получим систему из бесконечно большого числа уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla_{\rho} \Phi \right)^2 = n^2(\vec{\rho}); \\ a_0 \Delta_{\rho} \Phi + 2 (\nabla_{\rho} \Phi \cdot \nabla_{\rho} a_0) = 0; \\ \tilde{a}_1 \Delta_{\rho} \Phi + 2 (\nabla_{\rho} \Phi \cdot \nabla_{\rho} \tilde{a}_1) = -i \cdot \Delta_{\rho} a_0; \\ \dots \dots \dots \\ \tilde{a}_m \Delta_{\rho} \Phi + 2 (\nabla_{\rho} \Phi \cdot \nabla_{\rho} \tilde{a}_m) = -i \Delta_{\rho} \tilde{a}_{m-1}; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (22)$$

относительно неизвестных коэффициентов решения (20). Решение системы уравнений (22) происходит последовательно в несколько этапов. Вначале по известному выражению $n^2(\vec{\rho})$ определяется $\Phi(\vec{\rho})$, затем вычисляются $a_0(\vec{\rho})$, $\tilde{a}_1(\vec{\rho})$ и т.д. Заметим, что $a_0(\vec{\rho})$ и $\Phi(\vec{\rho})$ – действительные величины, а $\tilde{a}_1(\vec{\rho})$ – комплексная величина. Поэтому $\Phi(\vec{\rho})$ является фазой волны с точностью до членов первого порядка малости.

С помощью соотношений (18) и (21) из системы (22) получается полностью эквивалентная ей система дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \Psi)^2 = n^2(\vec{r}); \\ A_0 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla A_0) = 0; \\ \tilde{A}_1 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla \tilde{A}_1) = -i \cdot \Delta A_0; \\ \dots \dots \dots \\ \tilde{A}_m \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla \tilde{A}_m) = -i \Delta \tilde{A}_{m-1}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (23)$$

записанная в размерных переменных. В этих уравнениях все неизвестные функции $\tilde{A}_m(\vec{r})$ связаны с функциями $\tilde{a}_m(\vec{\rho})$ системы (22) соотношениями

$$\tilde{A}_m(\vec{r}) = (\tilde{a}_m(\vec{\rho}) / \Lambda^m) \quad (24)$$

и в отличие от $\tilde{a}_m(\vec{\rho})$, обладающих размерностью поля \tilde{U} , имеют разные размерности. Первое и второе уравнения системы (23) совпадают соответственно с *уравнениями эйконала* (15) и *переноса* (16).

Уравнения (15) и (16) справедливы даже в предельном случае, когда параметр $k \rightarrow \infty$ и когда формально все остальные уравнения системы (23) не могут быть получены. Эти уравнения называют также *уравнениями геометрической оптики нулевого приближения для уравнения Гельмгольца*. Третье и последующие уравнения системы (23) для амплитудных коэффициентов $\tilde{A}_1(\vec{r})$, $\tilde{A}_2(\vec{r})$ называются *уравнениями переноса первого, второго и т.д. приближений*.

В) Система (23) получается непосредственно из **уравнения Гельмгольца** (1), если его решение представляется в виде асимптотического ряда

$$\tilde{U}(\vec{r}) = \left\{ A_0(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} (1/k)^m \tilde{A}_m(\vec{r}) \right\} \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\} \quad (25)$$

по степеням малого параметра $(1/k)$, имеющего размерность длины. Несмотря на некоторые трудности, связанные с сопоставлением величин разных размерностей, именно такой подход широко используется в литературе, поскольку в конечном итоге приводит к той же системе уравнений (23), что и более строгий с математической точки зрения метод, в котором применяется безразмерный малый параметр μ .

Определение поля в приближении *го* находится в результате решения двух уравнений (15) и (16) в частных производных 1-го порядка. Оно оказывается проще решения **уравнения Гельмгольца**, поскольку сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.2. Вывод уравнений го из уравнений Максвелла

Уравнения (15) и (16), являясь скалярными, не учитывают поляризационные эффекты в электродинамике (оптике). Поскольку даже в названии метода отражено его широкое использование для описания распространения электромагнитных волн, где роль поляризационных эффектов чрезвычайно велика, то представляется крайне необходимым получить уравнения *го* непосредственно из уравнений Максвелла.

Воспользуемся системой уравнений Максвелла в форме (В.11), которая описывает гармонические процессы в неоднородной среде, а также следствием этой системы, уравнением (В.13) для векторной комплексной амплитуды

электрического поля \vec{E} ²⁾. В простейшем случае однородной ($\nabla \mu = \nabla \varepsilon = 0$) и изотропной ($|\vec{n}| = \bar{n} = const$) среды система (B.11) имеет решение

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i[\varphi - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\}; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp\{i[\varphi - k \cdot \bar{n}(\vec{s}_0 \cdot \vec{r})]\}, \quad (26)$$

которое описывает распространение однородной плоской волны электромагнитного поля в направлении орта \vec{s}_0 . Каждая проекция полей \vec{E} и \vec{H} описывается формулой (2). Подставляя (26) в систему уравнений (B.11), получим четыре связанных между собой соотношения

$$\{ \bar{n} [\vec{s}_0 \times \vec{E}_0] = \mu \cdot \vec{H}_0; \quad \bar{n} [\vec{s}_0 \times \vec{H}_0] = -\varepsilon \cdot \vec{E}_0; \quad (\vec{E}_0 \cdot \vec{s}_0) = 0; \quad (\vec{H}_0 \cdot \vec{s}_0) = 0 \}, \quad (27)$$

из которых следует, что поля \vec{E}_0 и \vec{H}_0 ориентированы перпендикулярно направлению распространения \vec{s}_0 и ортогональны друг другу.

Хорошо известное частное решение (27) даёт основание искать решение (B.11) для неоднородной среды в виде двух асимптотических рядов

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left\{ \vec{E}_0(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} (1/ik)^m \vec{E}_m(\vec{r}) \right\} \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\}; \quad (28)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \left\{ \vec{H}_0(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} (1/ik)^m \vec{H}_m(\vec{r}) \right\} \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\}, \quad (29)$$

в которых амплитуды \vec{E}_0, \vec{H}_0 нулевого приближения действительные функции координат. Подставляя (28) и (29) в уравнения (B.11) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях малого размерного параметра ($1/k$), получим систему уравнений нулевого приближения

$$\{ [\nabla \Psi \times \vec{E}_0] = \mu \cdot \vec{H}_0; \quad [\nabla \Psi \times \vec{H}_0] = -\varepsilon \cdot \vec{E}_0; \quad (\vec{E}_0 \cdot \nabla \Psi) = 0; \quad (\vec{H}_0 \cdot \nabla \Psi) = 0 \}, \quad (30)$$

из которой следует взаимная перпендикулярность векторов \vec{E}_0, \vec{H}_0 и $\nabla \Psi$. Если из первого уравнения (30) выразить \vec{H}_0 и подставить во второе, то с учётом третьего получится уравнение эйконала

$$(\nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) = \varepsilon \mu \equiv n^2(\vec{r}) \quad . \quad (31)$$

Таким образом, уравнения (30) являются уравнениями *го* для электромагнитного поля. Из них можно получить, в частности, *представление о поляризации поля*. Как нетрудно увидеть, поля \vec{E}_0, \vec{H}_0 связаны друг с другом так же, как в плоской волне, и образуют правую тройку с $\nabla \Psi$ (Рис. 2). Это *представление* носит локальный характер, т.е. в определённом ранее приближении справедливо на небольшом участке. Если ввести орт

$$\vec{s}_0 = (\nabla \Psi / |\nabla \Psi|) \equiv (\nabla \Psi / n) \quad (32)$$

по направлению $\nabla \Psi$, то нетрудно убедиться, что (30) и (27) полностью совпадают по содержанию.

²⁾ Можно использовать также уравнение для векторной комплексной амплитуды магнитного поля \vec{H} , которое полностью эквивалентно (B.13) и получается из него на основании принципа двойственности с помощью замен (B.15).

Уравнения нулевого приближения для амплитуды поля \vec{E}_0 можно найти из условия совместности уравнений нулевого и первого \dots . Но практически проще использовать для этой цели уравнение (В.13). Подставляя (28) в (В.13), можно получить бесконечный ряд убывающих по малому параметру $(1/ik)$ членов, который приводится к виду

$$\begin{aligned} & \hat{K} \{ \vec{E}_0 \} - (ik)^{-1} \hat{L} \{ \vec{E}_0 \} + \\ & + (ik)^{-1} \hat{K} \{ \vec{E}_1 \} + (ik)^{-2} \hat{M} \{ \vec{E}_0 \} - \\ & - (ik)^{-2} \left[\hat{L} \{ \vec{E}_1 \} + \hat{K} \{ \vec{E}_2 \} \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

В качестве коэффициентов при степенях малого параметра в (33) выступают функционалы

$$\hat{K} \{ \vec{A} \} = \left\{ \left[-(\nabla \Psi)^2 + n^2 \right] \cdot \vec{A} \right\}; \quad (34)$$

$$\hat{L} \{ \vec{A} \} = \left\{ \left[(\nabla \Psi \cdot \nabla \ln \mu) - \Delta \Psi \right] \vec{A} - 2 \left[(\vec{A} \cdot \nabla \ln n) \nabla \Psi + (\nabla \Psi \cdot \nabla) \vec{A} \right] \right\}; \quad (35)$$

$$\hat{M} \{ \vec{A} \} = \left\{ \left[\text{rot } \vec{A} \times \nabla \ln \mu \right] - \Delta \vec{A} - \nabla \left(\vec{A} \cdot \nabla \ln \varepsilon \right) \right\}. \quad (36)$$

Приравнявая в (33) последовательно нулю все члены одного порядка малости, получим вначале из членов нулевого приближения (34) с учётом условия $\vec{E}_0 \neq 0$ уравнение *эйконала* в виде (15). Затем из равенства нулю членов первого порядка малости, учитывая уравнение *эйконала*, получим вытекающее из (35) уравнение для векторной амплитуды электрического поля

$$\left\{ (\nabla \Psi \cdot \nabla \ln \mu) - \Delta \Psi \right\} \vec{E}_0 - 2 \left(\vec{E}_0 \cdot \nabla \ln n \right) \nabla \Psi - 2 \left(\nabla \Psi \cdot \nabla \right) \vec{E}_0 = 0. \quad (37)$$

Применяя принцип двойственности (В.15), найдём из (37) уравнение

$$\left\{ (\nabla \Psi \cdot \nabla \ln \varepsilon) - \Delta \Psi \right\} \vec{H}_0 - 2 \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla \ln n \right) \nabla \Psi - 2 \left(\nabla \Psi \cdot \nabla \right) \vec{H}_0 = 0. \quad (38)$$

для векторной амплитуды магнитного поля.

§ 2. Общие свойства и некоторые методы решения уравнения *эйконала*

Уравнение *эйконала* (1.15) является основным уравнением *го*. Это – *нелинейное уравнение в частных производных первого порядка*, которое имеет в общем случае три независимых переменных. В соответствии с общей

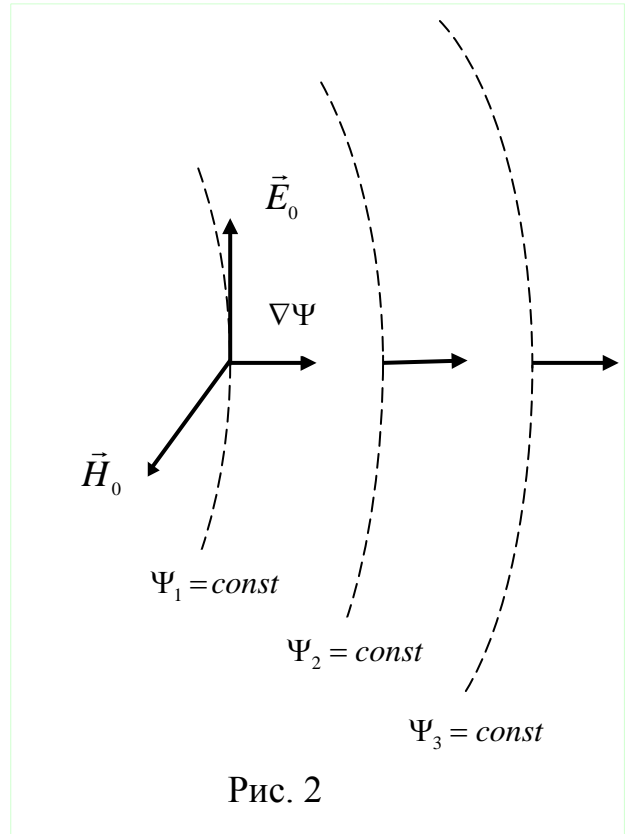


Рис. 2

³⁾ Такой способ получения уравнений для поля \vec{E}_0 использован в книге В.И.Бабича, В.С.Булдырева «Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн».

теорией решения уравнений в частных производных первого ¹⁾ его удобно представить в виде нелинейного уравнения с 6-тью переменными величинами

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 - n^2(\vec{r}) \equiv \sum_{q=1}^3 (p_q^2) - n^2(\vec{r}) \equiv F(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = 0, \quad (1)$$

в котором символом $F(\cdot)$ обозначена левая часть уравнения (1) и введены новые переменные по правилам

$$\nabla \Psi \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \vec{x}_0 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \vec{y}_0 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \vec{z}_0 = \vec{p} \equiv p_x \vec{x}_0 + p_y \vec{y}_0 + p_z \vec{z}_0 \equiv \sum_{q=1}^3 p_q \vec{x}_q^0. \quad (2)$$

Для решения уравнения (1) используются также функции

$$\frac{\partial F}{\partial x_q} = X_q(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \equiv X_q; \quad \frac{\partial F}{\partial p_q} = P_q(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \equiv P_q. \quad (3)$$

Решение уравнений типа (1) сводится к интегрированию системы 7-ми (в общем случае $[2N+1]$) обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = -\frac{dp_1}{X_1} = -\frac{dp_2}{X_2} = -\frac{dp_3}{X_3} = \frac{d\Psi}{\sum_{q=1}^3 p_q P_q} = d\sigma_1, \quad (4)$$

записанных в так называемой **характеристической форме**. Постоянные интегрирования должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия. В уравнениях (4) все переменные (x_q, p_q) предполагаются **зависящими от одного параметра** σ_1 , смысл которого будет ясен из дальнейшего изложения. Индекс 1 в дифференциале $d\sigma_1$ отражает тот факт, что система (4) получена из уравнения (1), которое можно представить в разных формах.

2.1. Аналогия эйконала и действия в механике

Уравнение эйконала (1.15) имеет особенность, которая делает его частным случаем нелинейного уравнения (1). Его всегда можно разрешить относительно одной (любой) из частных производных первого порядка. Будем считать, что уравнение (1) разрешено относительно $p_z \equiv p_3$ и потому имеет вид

$$p_3 \pm \sqrt{n^2 - p_2^2 - p_1^2} \equiv p_3 + H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2) \equiv \hat{F}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0. \quad (5)$$

Тогда в соответствии с (3) произойдут небольшие изменения в обозначениях

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_q} \equiv \frac{\partial H}{\partial x_q} = \hat{X}_q(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2); \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial p_{1,2}} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} = \hat{P}_{1,2}(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2); \quad \hat{P}_3 = 1, \quad (6)$$

¹⁾ См., например, В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958 г.

и система уравнений в характеристической форме (4) примет вид

$$\frac{d x_3}{1} = \frac{d x_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{d x_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = -\frac{d p_3}{\frac{\partial H}{\partial x_3}} = -\frac{d p_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = -\frac{d p_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \frac{d \Psi}{p_3 + \sum_{q=1}^2 p_q \frac{\partial H}{\partial p_q}} = d \sigma_2. \quad (7)$$

Из (7) видно, что независимая переменная $x_3 = z$ в этой новой системе уравнений в *характеристической*²⁾ играет роль произвольного параметра σ_2 . Поэтому число уравнений в *характеристической форме* в системе (7) оказывается на единицу меньше, чем в системе (4).

Если в системе (7) независимую переменную, имеющую смысл изменяющегося параметра, временно обозначить новым символом

$$\sigma_2 = x_3 \equiv z \Rightarrow t, \quad (8)$$

то для переменных $x_{1,2}$ и $p_{1,2}$ из уравнений (7) получим систему уравнений

$$\frac{d x_q}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_q}; \quad \frac{d p_q}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial x_q}, \quad (9)$$

которая именно в такой форме встречается в теоретической механике и носит название *канонической системы*. В уравнениях классической механики функция $H(\)$ называется *функцией Гамильтона* и является энергией механической системы материальных объектов, выраженной через обобщенные координаты x_q и обобщенные импульсы p_q , а t обозначает текущее время. Следует заметить, что в уравнениях (9) в отличие от уравнений классической механики используются три импульса ($p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z$) и только две координаты ($x_1 = x, x_2 = y$).

Если использовать обозначение (8) и представить p_3 в виде

$$p_3 \equiv (\partial \Psi / \partial x_3) \Rightarrow (\partial \Psi / \partial t), \quad (10)$$

то (5) преобразуется и приобретёт смысл уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H(t, x_q, p_q) \equiv -H\left(t, x_q, \frac{\partial \Psi}{\partial x_q}\right), \quad (11)$$

в котором Ψ играет роль *действия* (обычно обозначаемого в механике символом S). Последнее по счёту из уравнений в характеристической форме (7) позволяет получить для *действия* (или эйконала) уравнение первого порядка в виде

$$\frac{d \Psi}{d \sigma_2} \Rightarrow \frac{d \Psi}{d t} = \sum_{q=1}^2 p_q \frac{\partial H}{\partial p_q} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \equiv \sum_{q=1}^2 p_q \frac{\partial H}{\partial p_q} - H(t, x_q, p_q) \equiv L(t, x_q, p_q), \quad (12)$$

²⁾ Поскольку уравнения (1) и (5) имеют разные формы, то соответствующие им системы (4) и (7) обыкновенных уравнений в *характеристической форме* также отличаются друг от друга.

в котором зависящая от координат правая часть (12) в классической механике имеет смысл функции Лагранжа $L(t, x_q, p_q)$.

Таким образом, решение уравнения эйконала и расчёт величины $(\Psi_2 - \Psi_1)$ при изменении параметра σ_2 в заданных пределах полностью эквивалентны вычислению **действия** за некоторый промежуток времени движения механической системы по её траектории в фазовом пространстве.

2.2. Физический смысл эйконала и связанных с ним понятий

Рассмотрим связанные с эйконалом понятия, а также подходы к решению уравнения (1.15).

1) Поскольку термин **го** возник в связи с распространением света, то вначале установим связь **эйконала** с потоком мощности электромагнитного излучения. Используя уравнения нулевого приближения (1.27) и принимая во внимание действительный характер векторных амплитуд электрического и магнитного полей, найдём среднее за период высокочастотного колебания значение вектора Пойнтинга в виде

$$\bar{\vec{P}}^T = \frac{c}{8\pi} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] = \left(\frac{c}{8\pi\mu} \right) (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \nabla \Psi = \left(\frac{cn}{8\pi\mu} \right) |\vec{E}_0|^2 \vec{s}_0. \quad (13)$$

Из (13) следует, что **направление усреднённого по времени вектора Пойнтинга совпадает с нормалью к геометрическому волновому фронту**. Это означает, что **световые лучи**, по которым распространяется световая энергия, можно определить как траектории (Рис. 3), ортогональные к геометрическим волновым фронтам $\Psi = const$. Мы будем приписывать **геометрическим световым лучам** направление \vec{s}_0 , тем самым полагая, что в каждой точке оно совпадает с направлением усреднённого вектора Пойнтинга. Такое определение световых лучей безусловно справедливо в изотропных средах. (В анизотропной среде нормаль к волновому фронту в общем случае не совпадает с направлением вектора Пойнтинга.) Из определения **луча** становится понятным, что орт \vec{s}_0 можно назвать **ортом лучевого вектора**. Таким образом, **линии, параллельные вектору \vec{s}_0 , называются лучами**, а сам вектор \vec{s}_0 – **ортом лучевого вектора**.

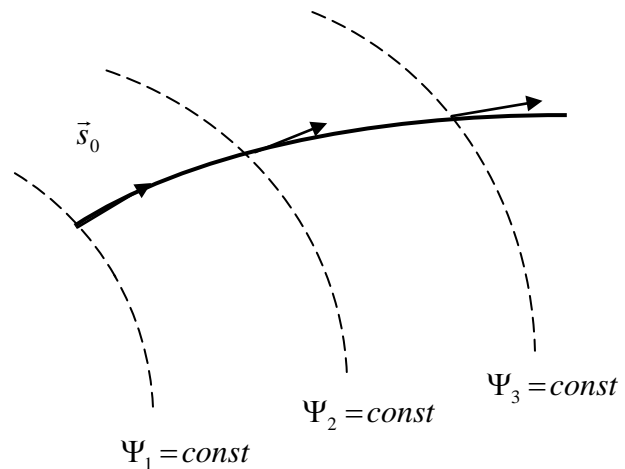


Рис. 3

2) Рассмотрим часть траектории *луча* на Рис. 4. Из рисунка следует определение вектора \vec{s}_0 как

$$\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (14)$$

где радиус-вектор $\vec{r}(s)$ точки, расположенной на луче, рассматривается как функция длины s дуги *луча*. Для определения траектории *луча* и, следовательно, длины дуги s требуется знание эйконала Ψ , который удовлетворяет нелинейному уравнению (1).

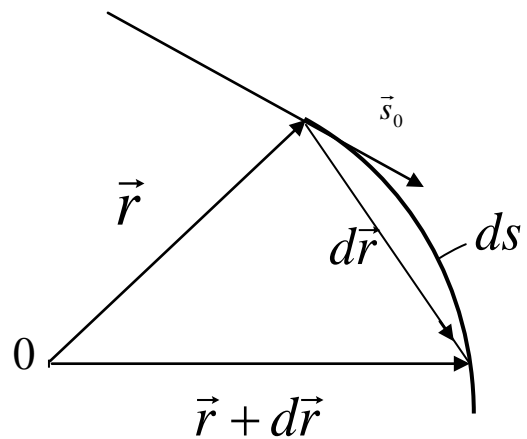


Рис. 4

3) Обратимся к системе уравнений в *характеристической форме* (4) и в соответствии с (3) найдём знаменатели всех отношений

$$\frac{\partial F}{\partial x_q} \equiv X_q = -2n \frac{\partial n}{\partial x_q}; \quad \frac{\partial F}{\partial p_q} \equiv P_q = 2p_q; \quad \sum_{q=1}^3 p_q P_q = 2n^2, \quad (15)$$

образующих эту систему уравнений. Заметим, что каждое отношение в системе (4) можно умножить на один и тот же множитель, не равный нулю, и при этом все равенства сохраняются. Такой *интегрирующий множитель* во многих случаях упрощает процедуру решения уравнений, позволяя получить более простую форму параметрического представления *характеристических линий*. В нашем случае в качестве *интегрирующего множителя* удобно выбрать $2n(x, y, z)$, что позволяет представить уравнения (4) в следующей *характеристической форме*

$$n \frac{dx_q}{p_q} = \frac{d\Psi}{n} = \frac{dp_q}{(\partial n / \partial x_q)} = d\sigma_3 \equiv 2n d\sigma_1 \quad (16)$$

или в виде системы из 7-ми обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_q}{d\sigma_3} = \frac{p_q}{n}; \quad \frac{dp_q}{d\sigma_3} = \frac{\partial n}{\partial x_q}; \quad \frac{d\Psi}{d\sigma_3} = n. \quad (17)$$

Умножая первые шесть скалярных уравнений системы (17) на соответствующие орты \vec{x}_q^0 и используя определения (2) и (1.32), можно получить два векторных уравнения. Одно из них получится в виде

$$\sum_{q=1}^3 \frac{dx_q}{d\sigma_3} \vec{x}_q^0 \equiv \frac{d\vec{r}}{d\sigma_3} = \sum_{q=1}^3 \frac{p_q}{n} \vec{x}_q^0 \equiv \frac{\vec{p}}{n} \equiv \frac{\nabla\Psi}{n} \equiv \vec{s}_0 \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (18)$$

Оно полностью совпадает с (14) не только по форме, но и по существу. Следовательно, при определённом (целесообразном и оптимальном) выборе *интегрирующего множителя* решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в *характеристической форме* (3) можно искать в виде

функций одного параметра $\sigma_3 \equiv s$, имеющего смысл длины дуги траектории **луча**.

Второе векторное уравнение, которое получается из (17), имеет вид

$$\sum_{q=1}^3 \frac{d p_q}{d s} \bar{x}_q^0 \equiv \frac{d \bar{p}}{d s} \equiv \frac{d}{d s} \nabla \Psi \equiv \frac{d}{d s} \left\{ n \frac{d \bar{r}}{d s} \right\} = \sum_{q=1}^3 \frac{\partial n}{\partial x_q} \bar{x}_q^0 \equiv \underline{\underline{\nabla n}} \quad . \quad (19)$$

Вместе с граничными условиями, задающими направление \bar{s}_0 **луча** в точке $\bar{r} = \bar{r}(0)$, оно определяет траекторию **луча** $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Используя определение градиента по поперечным координатам $\nabla_{\perp} = \nabla - \bar{s}_0 (\bar{s}_0 \cdot \nabla)$ и производной по направлению $(\partial n / \partial s) = (\bar{s}_0 \cdot \nabla n)$, уравнение (19) можно преобразовать в уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \bar{r}}{d s^2} \equiv \frac{d \bar{s}_0}{d s} = \nabla_{\perp} \ln n \quad . \quad (20)$$

Оно представляет собой закон изменения траектории **луча**, т.е. описывает закономерности трансформации **лучевого вектора**.

4) Если уравнение (19) будет решено и траектория **луча** будет определена, то фаза (или эйконал) определится из уравнения

$$\frac{d \Psi}{d s} = n \equiv \frac{c}{\mathbf{v}_f} \quad , \quad (21)$$

являющегося седьмым по счёту в системе (17). Изменение эйконала может быть найдено в виде криволинейного интеграла вдоль траектории **луча**

$$\Psi_2 - \Psi_1 \equiv \Delta \Psi_{12} = \int_{(1)}^{(2)} n(\bar{r}(s)) d s = c \int_{(1) \mathbf{v}_f}^{(2)} \frac{d s}{\mathbf{v}_f(\bar{r}(s))} = c \cdot \Delta T_{12} \quad , \quad (22)$$

пересекающего волновые фронты (Рис. 3). Величина этого интеграла, называемого **оптической длиной луча**, обратно пропорциональна фазовой скорости \mathbf{v}_f волны и тем самым прямо пропорциональна времени ΔT_{12} распространения поля (света) между точками на волновых фронтах $\Psi_{1,2}$ (Рис. 3).

Таким образом, в неоднородной среде **оптическая длина между точками луча, находящимися на двух волновых фронтах, равна произведению скорости в эталонной среде (скорости света в вакууме) на время распространения волны (света) от одного волнового фронта до другого**.

Это свойство длины дуги вдоль траектории делает удобным использование координат, связанных с **лучом**. Точки на **луче** можно характеризовать оптической длиной (величиной эйконала или **действия**). Положение точки **луча** на поверхности волнового фронта позволяет определить направление **лучевого вектора** \bar{s}_0 и уравнение **луча**.

Выражение (22) для **оптической длины луча** позволяет по заданной зависимости $n(\bar{r})$ установить зависимость $\mathbf{v}_f(\bar{r})$, затем по известному начальному волновому фронту, используя соотношение

$$(\Delta s)_{12} \cong \mathbf{v}_f(\bar{r})(\Delta T)_{12} \quad , \quad (23)$$

построить волновой фронт, ближайший к нему, и, наконец, на этом качественном уровне определить тенденцию трансформации волновых фронтов и картину поведения лучей в такой среде.

Пример. На границу раздела сред с показателями преломления $n = const$ и $n(x)$ падает плоская волна (Рис. 5). Качественная картина поведения лучей в неоднородной среде, изображённая в нижней части рисунка, определяется по структуре волновых фронтов, расстояние между которыми согласно (23) пропорционально фазовой скорости v_f . В полном согласии с уравнением (19) **лучи** искривляются в сторону увеличения n (т.е. по направлению вектора ∇n).

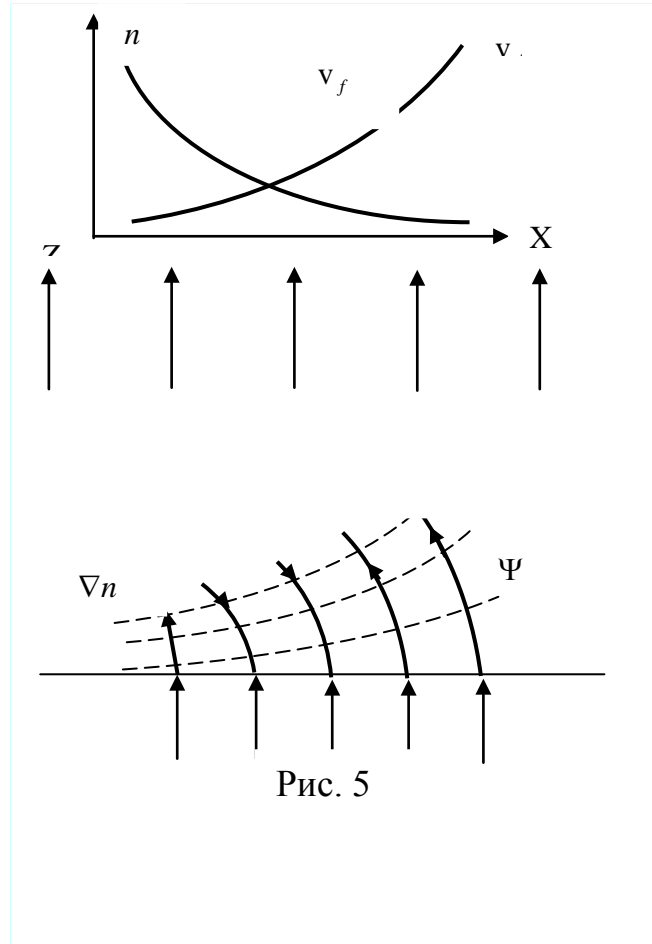


Рис. 5

5) **Оптический путь** и траекторию **луча** между точками (1) и (2) можно определить из условия минимума интеграла (22) по произвольному контуру (Рис. 6). Согласно принципу Ферма (принципу наименьшего **действия** в механике) **оптический путь** между точками (1) и (2) по действительному **лучу** (Γ_s)

короче **оптического пути** по любому другому контуру (Γ) между этими точками. Докажем справедливость утверждения

$$\int_{\Gamma_s} n ds \leq \int_{\Gamma} n d\Gamma, \quad (24)$$

опираясь на свойство **эйконала** как **потенциального поля**.

Поскольку **лучевой вектор** является потенциальным вектором

$$rot \nabla \Psi \equiv rot (\vec{s}_0 n) = 0, \quad (25)$$

то в соответствии с теоремой Стокса

$$\iint_{\Sigma} (rot \nabla \Psi \cdot d\vec{\Sigma}) = \oint_L (\vec{s}_0 n \cdot d\vec{L}) = 0 \quad (26)$$

получим, что интеграл от $\nabla \Psi = \vec{s}_0 n$ по замкнутому контуру L будет равен нулю. Представив длину контура L в виде суммы $L = \Gamma + \Gamma_s$ пути по дей-

ствительному лучу $\vec{s}_0 ds$ и дополнительному пути $d\vec{\Gamma}$ (Рис. 6), из последнего равенства получим выражение

$$\int_{\Gamma_s} n (\vec{s}_0 \cdot \vec{s}_0) ds \equiv \int_{\Gamma_s} n ds = \int_{\Gamma} n (\vec{s}_0 \cdot d\vec{\Gamma}) = \int_{\Gamma} n \cos \alpha d\Gamma < \int_{\Gamma} n d\Gamma . \quad (27)$$

Из (27) следует, что путь Γ_s по **истинному лучу** короче любого другого пути Γ . Поэтому траектория **истинного луча** может быть найдена с помощью решения **вариационной задачи нахождения минимума определённого интеграла**

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} n ds = 0 , \quad (28)$$

в котором переменной является длина дуги.

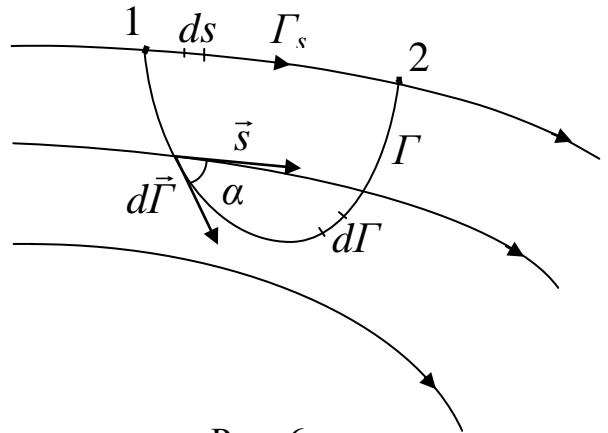


Рис. 6

2.3. Дифференциальные уравнения второго порядка для лучей

Как отмечалось выше, при интегрировании системы уравнений в **характеристической форме** (3), составляющими которой являются выражения (15), можно использовать различные интегрирующие множители. Для более глубокого понимания аналогии между системами уравнений, описывающими движение материальной частицы в потенциальном поле и **траектории луча** в неоднородной среде, удобно взять в качестве интегрирующего множителя в системе уравнений (3) постоянный коэффициент **2**, что эквивалентно умножению на n каждого из 7-ми уравнений (16). В такой новой системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_q}{2d\sigma_1} \equiv n \frac{dx_q}{d\sigma_3} \equiv \frac{dx_q}{d\sigma_4} \equiv \frac{dx_q}{d\tau} = p_q ; \frac{d\Psi}{2d\sigma_1} \equiv n \frac{d\Psi}{d\sigma_3} \equiv \frac{d\Psi}{d\sigma_4} \equiv \frac{d\Psi}{d\tau} = n^2 ; \\ \frac{dp_q}{2d\sigma_1} \equiv n \frac{dp_q}{d\sigma_3} \equiv \frac{dp_q}{d\sigma_4} \equiv \frac{dp_q}{d\tau} = n \frac{\partial n}{\partial x_q} \end{array} \right. \quad (29)$$

в качестве дифференциала параметра интегрирования

$$d\sigma_4 \equiv d\tau = (d\sigma_3 / n) \equiv (ds / n) = 2d\sigma_1 . \quad (30)$$

следует выбрать величину

$$\tau = \int \frac{ds}{n} = \int \frac{v_f}{c} ds = \int v_f dt , \quad (31)$$

имеющую размерность длины. Из (31) видно, что длину $d\tau$ фазовый фронт проходит вдоль траектории луча за время dt , необходимое для прохождения в вакууме расстояния ds .

Умножая первые шесть скалярных уравнения системы (29) на соответствующие орты \vec{x}_q^0 и используя определения (2) и (1.32), получим для описания изменения координат луча и градиента эйконала два векторных уравнения

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p} ; \quad (32)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = n\nabla n = \frac{1}{2}\nabla n^2 \equiv \frac{1}{2}\nabla(\varepsilon\mu) . \quad (33)$$

Если уравнение (32) интерпретировать как определение импульса частицы с массой $m=1$, то (33) можно рассматривать как уравнение движения этой частицы, в котором изменение импульса происходит под воздействием внешней силы. Её роль играет векторная функция

$$\vec{F} = \nabla\left(\frac{\varepsilon\mu}{2}\right) = \nabla\left(\frac{n^2}{2}\right) = -\nabla U_{\text{пот}} , \quad (34)$$

которая направлена по ∇n^2 . Из (32) и (33) следует, что **лучи** искривляются в сторону увеличения показателя преломления среды. Роли потенциальной энергии и гамильтониана классической частицы играют величины

$$U_{\text{пот}} = U_0 - \frac{\varepsilon\mu}{2} ; \quad H = \frac{1}{2}(\vec{p} \cdot \vec{p}) + U_0 - \frac{\varepsilon\mu}{2} . \quad (35)$$

Таким образом, движение луча представляется как движение частицы в потенциальном поле, что означает наличие **полной аналогии** между геометрической оптикой и классической механикой материальной точки.

§ 3. Уравнение переноса и законы изменения интенсивности в го

Уравнение переноса (нулевое приближение уравнения Гельмгольца)

$$A_0 \Delta \Psi + 2(\nabla \Psi \cdot \nabla A_0) = 0 \quad (1)$$

содержит частные производные второго порядка. Однако при известном эйконале $\Psi(s)$ оно фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$2\frac{dA_0}{ds} + A_0\left(\frac{\Delta \Psi}{n}\right) = 0 , \quad (2)$$

в котором дифференцирование осуществляется по лучевой координате s . Умножая (2) на A_0 и принимая во внимание соотношение

$$\text{div } B\vec{a} = B \text{div } \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla B) , \quad (3)$$

преобразуем (2) в уравнение

$$\text{div} \{A_0^2 \nabla \Psi\} \equiv \text{div} \{A_0^2 n \vec{s}_0\} = 0 \quad (4)$$