

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

**Национальный исследовательский университет**

**Учебно-научный и инновационный комплекс**

«Модели, методы и программные средства»

**Основная образовательная программа**

010500.62 «Прикладная математика и информатика», общий профиль, квалификация  
(степень) бакалавр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**

«Концепции современного естествознания»

**Основная образовательная программа**

010500.68 «Прикладная математика и информатика», профиль «Математическое  
моделирование», квалификация (степень) магистр

**Учебно-методический комплекс по дисциплине**

«Математическое моделирование механических систем»

**С.В.Гонченко, А.С.Гонченко, Е.В.Жужома, А.О.Казаков,  
И.И.Овсянников**

**ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
(Часть I. Классическая теория)**

Электронное учебно-методическое пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление  
материально-технической базы учебного процесса

Нижегород  
2012

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
(Часть I. Классическая теория). Гонченко С.В., Гонченко А.С., Жужома Е.В., Казаков А.О.,  
Овсянников И.И. Электронное учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Ниже-  
городский госуниверситет, 2012. — 54 с.

Данное учебно-методическое пособие написано, главным образом, для специалистов-математиков, а также студентов и аспирантов математических факультетов университетов, которые хотят ознакомиться с основными понятиями кинематики и динамики твердого тела. Несмотря на то, что данный раздел теоретической механики является одним из наиболее древних и классических, в последнее время он переживает определенный подъем, связанный с тем, что в решении многих теоретических и практически важных задач наметился значительный прогресс. Это связано, в частности, с тем, что здесь оказалось возможным применение методов качественной теории динамических систем в совокупности с численным моделированием на современных компьютерах. Пособие состоит из двух частей. В настоящей первой части выводятся основные уравнения движения твердого тела. Изложение ведется на современном математическом языке и сопровождается задачами различной степени сложности.

Электронное учебно-методическое пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010500.62 «Прикладная математика и информатика» (бакалавры), изучающих курс «Концепции современного естествознания» и 010500.68 «Прикладная математика и информатика» (магистры), профиль «Математическое моделирование», изучающих курс «Математическое моделирование механических систем».

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Кинематика твердого тела</b>	<b>4</b>
1.1	Положение твердого тела . . . . .	5
1.2	Угловая скорость . . . . .	10
1.3	Виды движений твердого тела . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Динамика твердого тела</b>	<b>19</b>
2.1	Основные динамические величины . . . . .	19
2.2	Уравнения моментов в неподвижной системе . . . . .	25
2.3	Основные уравнения движения твердого тела . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Движение твердого тела по плоскости</b>	<b>33</b>
3.1	Движение по поверхности . . . . .	33
3.2	Движение по шероховатой плоскости . . . . .	40
3.3	Движение по идеально гладкой плоскости . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Интегралы движения</b>	<b>45</b>
4.1	Законы сохранения . . . . .	45
4.2	Конфигурационное пространство . . . . .	50
4.3	Обзор механик . . . . .	51
	<b>Список литературы</b>	<b>54</b>

# Введение

Данное учебно-методическое пособие является, по существу, расширенным введением в математическую теорию движения твердого тела. Она содержит в основном классический материал, так или иначе входящий в большинство стандартных курсов теоретической механики, преподаваемых на математических факультетах университетов. Основная цель первой части – это сравнительно быстро и коротко, однако не теряя математической строгости, вывести основные уравнения движения твердого тела. После изучения теоретического материала первой части, читатель имеет возможность приступить к самостоятельному исследованию в данной области механики, и вполне может перейти к изучению специальной литературы по конкретным проблемам. Заметим, что в большинстве современных научных работ по вполне понятным причинам основные уравнения движения твердого тела не выводятся и не объясняются: неявно предполагается, что читатель хорошо знаком с соответствующим материалом. Это создает определенные трудности в понимании и освоении оригинальных результатов этих работ.

Одна из основных целей данного пособия как раз и состоит в том, чтобы по возможности заполнить этот пробел. Изложение теоретического материала проводится с самого начала, вводятся основные определения (твердого тела, степеней свободы, систем отсчета и т.д.), теоретические положения (с доказательствами). Само изложение замкнуто и, по существу, не требует привлечения дополнительных источников.

Настоящее пособие состоит из четырех глав. В первой главе излагаются основы кинематики твердого тела. Начинается глава со способов задания (описания) положения твердого тела в пространстве. В этой главе вводятся основные понятия математической теории движения твердого тела (такие как виды движения твердого тела, угловая скорость, центр масс, углы Эйлера) и основные теоретические положения (с доказательствами) такие как , и выводятся классические формулы Эйлера о скоростях точек тела, формулы Пуассона, теорема Эйлера-Даламбера о представлении движения твердого тела в виде композиции вращательного и поступательного движений.

Во второй главе вводятся основные динамические величины (импульс, кинетический момент или момент импульса, момент силы, моменты и тензор инерции) и выводятся основные уравнения движения твердого тела относительно неподвижной (абсолютной) системы координат, а также в подвижной связанной с телом системе координат – т.н. уравнения движения свободного твердого тела.

В третьей главе рассматриваются движения тела по плоскости с различными предположениями о характере взаимодействия тела с плоскостью. Подробно исследуется динамика движения тела по т.н. абсолютно шероховатой плоскости, а также движения с перманентным проскальзыванием.

Четвертая глава знакомит читателя с классическими законами сохранения импульса, кинетического момента (момента импульса) и энергии. Здесь также обсуждаются понятия

конфигурационного пространства и дается краткий обзор различных подходов к исследованию консервативной динамики движения тел (ньютонова потенциальная механика, лагранжева механика и гамильтонова механика).

Теория движения твердых тел составляет достаточно большой раздел Механики, которому посвящены специальные монографии, см. например [5], [8]. Выбор материала первой части обусловлен целями пособия: быстро подвести читателя к основным уравнениям движения твердого тела, и материалом второй части, где излагаются специальные вопросы, относящиеся в основном к движению твердого тела на поверхности. Поэтому мы не рассматриваем такие вопросы, как устойчивость движения, динамика тел переменной массы, теория столкновений. С указанными вопросами можно познакомиться в следующих учебниках и монографиях: [3], [5], [6], [8], [10].

Изложение сопровождается задачами и вопросами различной степени трудности, что помогает читателю контролировать собственное понимание. Для задач приводятся ответы, а частично и решения. Причем для задач, решения которых даны в рамке, авторы пособия рекомендуют читателю сначала решить их самостоятельно (а потом уже сравнить собственное решение с приведенным в пособии).

# Глава 1

## Кинематика твердого тела

В этой главе вводятся основные понятия теории твердого тела, связанные с кинематикой. Рассматриваются способы описания положения твердого тела. Заканчивается глава формулой Эйлера, связывающей скорости различных точек тела.

*Твердое тело* удобно рассматривать как систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны, см. рис. 1.1. При этом, если не оговорено противное, будет предполагаться *наличие трех материальных точек, не лежащих на одной прямой*.



Рис. 1.1: С. Дали. Голова мадонны

Материальные точки, образующие тело, мы будем обозначать через  $m_1, \dots, m_i, \dots$ . Аналогичное обозначение мы будем использовать для масс этих точек, надеясь, что это не приведет к путанице.

Реально существующие тела удовлетворяют данному определению лишь приближенно. Но большинство твердых тел обычно так мало изменяют свою форму, что мы можем пренебречь этими изменениями. Представление твердого тела в виде совокупности материальных точек, как правило, упрощает выводы формул.

Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется заменой масс частиц на массу, заключенную в элементе объема, и интегрирование по всему объему тела.

## 1.1 Положение твердого тела

### Степени свободы

Число независимых функций (или, как чаще говорят, параметров), которыми описывается движение системы материальных точек, называется **числом ее степеней свободы**.

Для описания движения одной материальной точки необходимо задать три функции, определяющие зависимость ее координат от времени. Таким образом, материальная точка имеет три степени свободы. Две материальные точки, жестко связанные между собой (например, стержнем неизменной длины) описываются шестью функциями, которые уже не являются независимыми, так как между ними имеется соотношение, вытекающее из равенства расстояния. Ясно, что такая система имеет пять степеней свободы.

Положение твердого тела в пространстве однозначно определяется тремя фиксированными точками, не лежащими на одной прямой. Эти три точки описываются девятью координатами, между которыми имеются три соотношения, выражающие постоянство расстояний между этими точками. Таким образом, положение твердого тела задается шестью независимыми параметрами. Следовательно, **твердое тело имеет шесть степеней свободы**. Эти шесть независимых функций (параметров) можно определять различными способами, которые зависят от конкретной задачи.

Часто для описания движения тела вводят две системы координат: *неподвижную* (инерциальную), которую мы будем считать декартовой системой  $(x, y, z)$  с центром в некоторой фиксированной точке  $O$ , и *подвижную* систему, жестко связанную с телом.

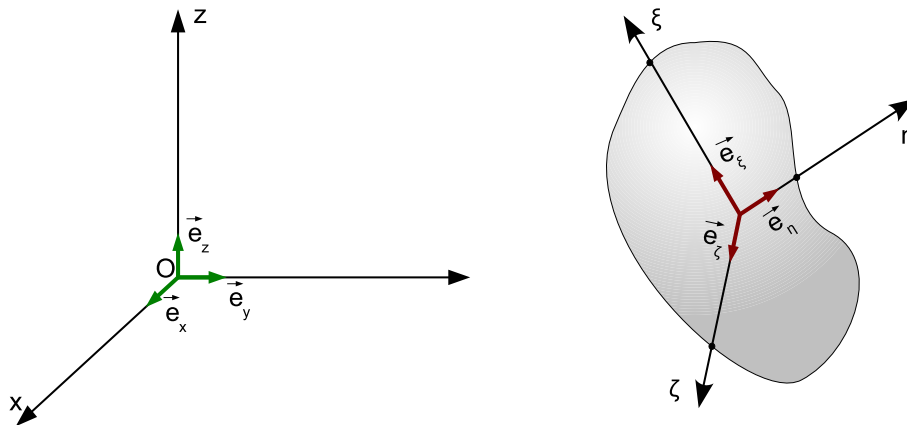


Рис. 1.2: Неподвижная  $(x, y, z)$  и подвижная  $(\xi, \eta, \zeta)$  системы координат.

Центр подвижной системы, который мы сперва обозначим через  $O'$ , выбирается в зави-

симости от решаемой задачи (обычно, удобно в качестве  $O'$  взять центр масс  $C$  тела, см. определение ниже). Координаты в подвижной системе мы будем обозначать через  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Вдоль осей координат в положительном направлении имеются единичные вектора (орты). Их обозначения естественным образом связаны с осями. В неподвижной системе координат  $(x, y, z)$  орты обозначаются через  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  и  $\vec{e}_z$ . В подвижной системе координат соответствующие орты обозначаются через  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$  и  $\vec{e}_\zeta$ .

Первые три независимых параметра, которые описывают движение твердого тела, как правило, являются координатами точки  $O'$  в неподвижной (иногда говорят, *абсолютной*) системе координат. Традиционно (и часто, удобно) в качестве  $O'$  брать центр масс системы точек, который определяется следующим образом. Обозначим через  $\vec{r}_i$  радиус-вектор материальной точки  $m_i$  в неподвижной (абсолютной) системе координат. Тогда *центр масс*  $C$  определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (1.1)$$

где  $\mu = \sum_i m_i$  – полная масса твердого тела. Центр масс  $C$  есть концевая точка вектора  $\vec{r}_C$ . Несмотря на то, что формально определение центра масс  $C$  зависит от выбора системы координат, можно показать (см. задачу 1.1), что сама точка  $C$  не зависит от выбора системы координат, и определяется взаимным расположением точек тела. Отметим, что центр масс не обязательно принадлежит телу.

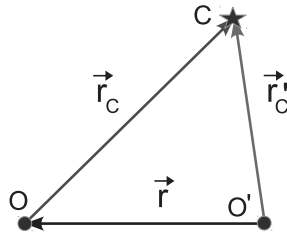


Рис. 1.3: К задаче 1.1.

**Задача 1.1** Доказать, что центр масс тела не зависит от выбора системы координат.

Решение:  $\vec{r}_{C'} = \frac{1}{\mu} \sum m_i \vec{r}_i' = \frac{1}{\mu} \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{r}) \Rightarrow \vec{r}_{C'} = \vec{r}_C + \vec{r}$ . Таким образом, векторы  $\vec{r}_{C'}$  и  $\vec{r}_C$  имеют одну и ту же концевую точку  $C$ , см. рис. 1.3.

Итак, в качестве первых трех параметров, определяющих положение тела, как правило берутся координаты центра масс тела. Остальные три параметра, которые описывают движение твердого тела, определяют положение осей координат в подвижной системе координат. Традиционно эти параметры задаются с помощью углов Эйлера или матрицы переходов, о которых речь пойдет ниже.



## Простейшие задачи на вычисление центра масс

Найти центр масс следующих механических систем:

**Задача 1.2** Система двух материальных точек массой  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 2$ , расположенных на числовой оси в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  соответственно.

Решение: По формуле (1.1) имеем  $x_C = \frac{1}{3}(m_1x_1 + m_2x_2) = 2$ , см. рис. 1.4 (а).

**Задача 1.3** Система материальных точек масс  $m_1, \dots, m_n$ , расположенных на одной прямой, и расстоянием  $l_{ij}$  между точками  $m_i, m_j$ .

Решение: Выберем числовую ось так, что точка  $m_1$  лежит в начале координат. Пусть  $\tilde{x}_i$  – координата точки  $m_i$ , Тогда

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} l_{1i}, & \text{если } \tilde{x}_i > 0 \\ -l_{1i}, & \text{если } \tilde{x}_i < 0 \end{cases}$$

По формуле (1.1) тогда получаем

$$\tilde{x}_C = \frac{m_2\tilde{x}_2 + m_3\tilde{x}_3 + \dots + m_n\tilde{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

**Задача 1.4** Система трех точек одинаковой массы, расположенных в углах равностороннего треугольника.

Решение: Поместим треугольник  $ABC$  на плоскость так, что  $A(0, 0)$ ;  $B(a, 0)$ ;  $C(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ . Тогда по формуле (1.1)  $\vec{r}_C = \frac{1}{3} \left( (0, 0) + (a, 0) + (\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a) \right) = (\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{6}a)$ .

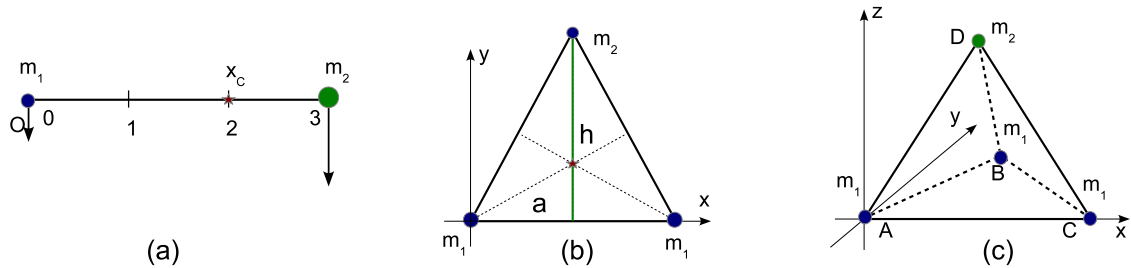


Рис. 1.4: (а) к задаче (1.2); (б) к задаче (1.5); (с) к задаче (1.6).

**Задача 1.5** Система материальных точек масс  $m_1, m_1$  и  $m_2$ , расположенных в вершинах равнобедренного треугольника с основанием  $a$  и высотой  $h$  как на рис. 1.4(б).

Ответ:  $(x_{Ц}, y_{Ц}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{m_2 h}{2m_1 + m_2}\right)$ .

**Задача 1.6** Система материальных точек, расположенных в вершинах правильной трехугольной пирамиды, все ребра которой равны  $a$ , в предположении, что (а) все точки имеют одинаковую массу; (б) масса трех точек одна и та же,  $m_1$ , а четвертая точка имеет массу  $m_2$ .

Решение: Поместим пирамиду  $ABCD$  в  $R^3$  как показано на рис. 1.4(с), т.е.  $A(0, 0, 0); B(a, 0, 0); C(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$  (т.е.  $\triangle ABC$  лежит в плоскости  $XY$ , точки  $A$  – начало координат, и  $AB$  – отрезок оси  $OX$ ). Тогда  $D = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ . Если  $m(A) = m(B) = m(C) = m_1, m(D) = m_2$ , по формуле (1.1) получаем, что  $\vec{r}_C = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{m_2}{m_2 + 3m_1}\right)$ . При  $m_2 = m_1$  находим, что  $\vec{r}_C = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$ .

### Углы Эйлера

Пусть твердое тело закреплено в неподвижной точке  $O$ . Для описания его динамики используются различные системы переменных. Одними из самых популярных и естественных здесь являются т.н. углы Эйлера (см. подробнее в [Архангельский77]), которые мы будем обозначать как  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

Для их введения расположим в точке  $O$  вершины двух ортогональных трехгранников: неподвижного  $OXYZ$  и подвижного  $O\xi\eta\zeta$ . Последний жестко связан с телом. Покажем, что с помощью трех последовательных поворотов трехгранника  $O\xi\eta\zeta$  оси  $O\xi, O\eta$  и  $O\zeta$  всегда можно совместить с осями  $OX, OY$  и  $OZ$  соответственно.

Первый поворот делаем на угол  $\alpha$  вокруг оси  $O\zeta$  так, что плоскость  $O\xi\eta$  остается инвариантной, а ось  $O\xi$  совмещается с линией  $ON$  пересечения плоскостей  $O\xi\eta$  и  $OXY$ , см. рис. 1.1. Здесь ось  $ON$  называется *линией узлов*, а соответствующий угол  $\alpha$  называется *углом прецессии*. Заметим, что при таком повороте (ортогональном относительно оси  $O\zeta$ ) углы  $\beta$  и  $\gamma$ , показанные на рис. 1.1 сохраняются.

Второй поворот, на угол  $\beta$ , делается вокруг оси  $ON$  так, что ось  $N$  остается неподвижной, а ось  $O\xi$  совмещается с осью  $OZ$  (заметим, что оси  $O\xi$  и  $OZ$  лежат в плоскости  $O\xi Z$  ортогональной  $ON$ ). Соответствующий угол  $\beta$  называется *углом нутации*. Очевидно, при таком ортогональном к  $ON$  повороте угол  $\beta$  сохраняется (а новые  $\alpha$  и  $\beta$  равны нулю по построению).

Наконец, последний третий поворот осей подвижной системы координат делается на угол  $\gamma$  ортогонально оси  $O\zeta = OZ$  так, чтобы ось  $O\xi = ON$  совместилась с  $OX$ . Тогда ось  $O\eta$  автоматически совместится с  $OY$  в силу ортогональности систем координат (и того, что их орты образуют одинаково ориентированные (правые) тройки векторов). Угол  $\gamma$  называется *углом собственного вращения*.

Таким образом, три поворота, определяемые углами Эйлера  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , позволяют полностью задать положение подвижной системы координат относительно неподвижной системы при условии, что их начала координат совпадают.

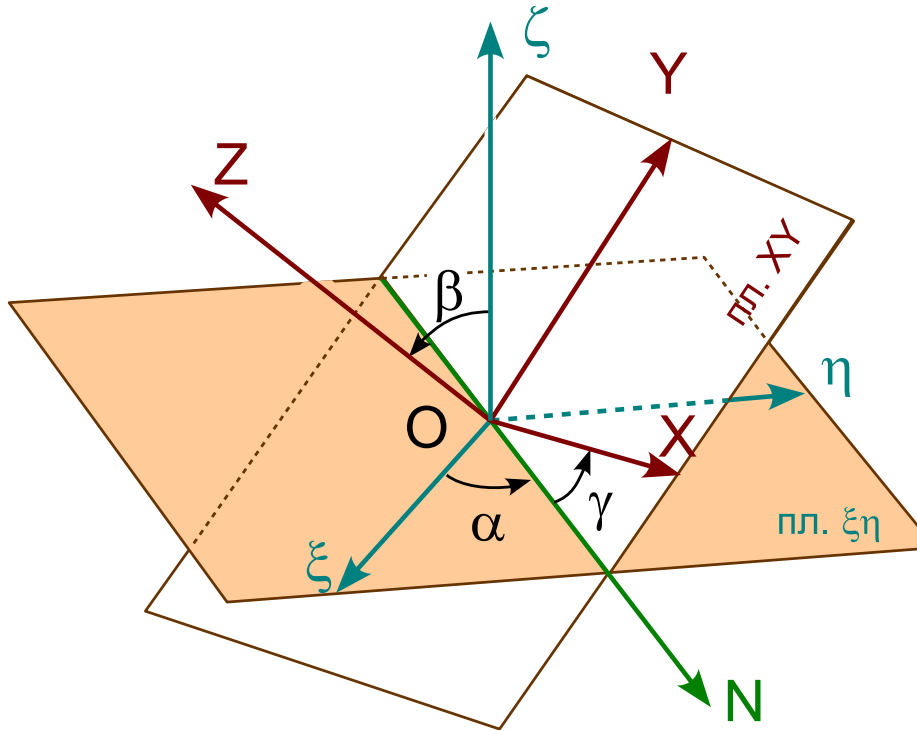


Рис. 1.5: К определению углов Эйлера.

**Матрица перехода между ортами подвижной и неподвижной систем координат**

Разложим орты  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$  подвижной системы координат по ортам  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  неподвижной системы координат:

$$\vec{e}_\xi = a_{11}\vec{e}_x + a_{12}\vec{e}_y + a_{13}\vec{e}_z, \quad \vec{e}_\eta = a_{21}\vec{e}_x + a_{22}\vec{e}_y + a_{23}\vec{e}_z, \quad \vec{e}_\zeta = a_{31}\vec{e}_x + a_{32}\vec{e}_y + a_{33}\vec{e}_z, \quad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{A}$  называется *матрицей перехода*. Строки этой матрицы являются направляющими косинусами ортов  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ .

**Лемма 1.1** *Матрица перехода  $\mathbf{A}$  ортогональная, то есть*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

*Доказательство.* Отметим, что столбцы транспонированной матрицы  $\mathbf{A}^T$  являются координатами ортов  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$  в неподвижной системе координат. Так как эти орты взаимно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то скалярное произведение разных

ортов равно нулю, а скалярный квадрат каждого орта равен единице. Отсюда и определения произведения двух матриц непосредственно вытекает требуемый результат.  $\square$

## 1.2 Угловая скорость

*Вращательное движение* тела – это такое, при котором имеется прямая, состоящая из неподвижных точек (*ось вращения*), а остальные точки движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Рассмотрим вращение одной такой фиксированной плоскости  $P$  вокруг точки, которую обозначим через  $S_0$ . Очевидно, вращение плоскости  $P$  полностью характеризуется углом  $\varphi(t)$ , который заметает за время  $t$  произвольно выбранный луч, выходящий из  $S_0$  и принадлежащий  $P$ . Величина  $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$  является угловой (скалярной) скоростью вращения плоскости  $P$  в момент времени  $t$ . Если точка плоскости находится на расстоянии  $r_0$  от  $S_0$ , то величина мгновенной скорости этой точки равна  $v = \omega \cdot r_0$ .

Возьмем произвольную точку  $O$  на оси вращения  $l$  в качестве начала системы координат. Тогда каждая материальная точка  $m_i$  механической системы (твёрдого тела) наделяется радиусом-вектором  $\vec{r}_i$ . Ясно, что скалярная угловая скорость  $\omega$  одна и та же для всех плоскостей, перпендикулярных оси вращения  $l$ . Поэтому вращательное движение полностью характеризуется *вектором угловой скорости*  $\vec{\omega}$ , длина которого равна угловой скорости  $\omega = |\vec{\omega}|$ , а направление выбрано так, чтобы векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  образовывали правую тройку. Таким образом, скорость  $\vec{v}$  точек тела выражается формулой (см. рис. 1.6).

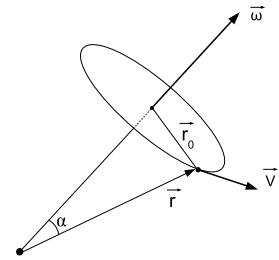


Рис. 1.6:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.2)$$

Отметим, что по определению векторного произведения,  $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha = \omega \cdot r_0$ , где  $r_0$  – расстояние от точки до оси вращения. Поэтому *определение вектора угловой скорости не зависит от выбора начальной точки  $O$  на оси вращения* (хотя от выбора этой точки зависит вектор  $\vec{r}$ ).

### Вращение подвижной системы координат

Напомним, что производная вектора  $\vec{q} = \vec{q}(t)$  по переменной  $t$  (обычно, под этой переменной понимается время) определяется (и обозначается) следующим образом

$$\dot{\vec{q}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{q}(t + \Delta t) - \vec{q}(t)}{\Delta t}.$$

В механике вектор  $\dot{\vec{q}}$  интерпретируется как скорость вектора  $\vec{q}$ .

Выразим скорости  $\dot{\vec{e}}_\xi$ ,  $\dot{\vec{e}}_\eta$ ,  $\dot{\vec{e}}_\zeta$  движения ортов  $\vec{e}_\xi$ ,  $\vec{e}_\eta$ ,  $\vec{e}_\zeta$  через эти орты. Ясно, что эти скорости характеризуют вращение подвижной системы координат. Поскольку данные орты жестко связаны с телом, то указанные скорости должны характеризовать вращение твёрдого тела.

Из равенства

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

вытекает

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix}$$

Дифференцируя (1.3) и учитывая, что орты  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  не зависят от времени, получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_\xi \\ \dot{\vec{e}}_\eta \\ \dot{\vec{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Omega = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.4)$$

Матрица  $\Omega$  называется *матрицей вращения* подвижной системы координат.

Неотъемлемой составляющей движения твердого тела является вращение (даже параллельный перенос можно представить как вращение вокруг бесконечно удаленной точки). Поэтому одной из важнейших характеристик движения является вектор угловой скорости, который вводится с помощью матрицы вращения.

**Лемма 1.2** *Матрица вращения  $\Omega$  кососимметрическая, то есть  $\Omega = -\Omega^T$ .*

*Доказательство.* Из леммы 1.1 вытекает, что  $\Omega = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T$ . Дифференцируя равенство  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , получаем

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T) = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}^T = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T)^T = \Omega + \Omega^T. \quad \square$$

Из леммы 1.2 следует, что матрица вращения имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Равенство (1.4) переписывается в форме

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_\xi \\ \dot{\vec{e}}_\eta \\ \dot{\vec{e}}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & \omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Вектор

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (1.7)$$

называется *вектором угловой скорости*.

**Задача 1.7** *Два цилиндра  $C_1$  и  $C_2$  радиусов  $R_1$  и  $R_2$  касаются друг друга (рис. 1.2). Цилиндр  $C_1$  равномерно вращается вокруг неподвижной центральной оси с угловой скоростью  $\omega$ , а цилиндр  $C_2$  движется относительно  $C_1$  без проскальзывания. В случае, когда ось цилиндра  $C_2$  неподвижна, найти величину  $\omega_2$  угловой скорости цилиндра  $C_2$ .*

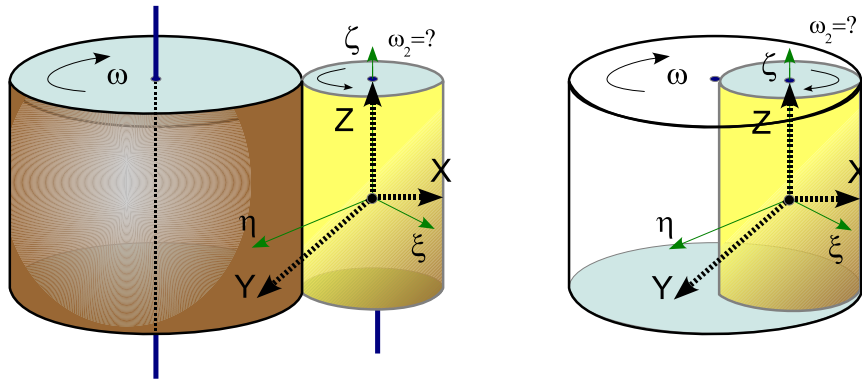


Рис. 1.7: К задаче 1.7: (а) цилиндр  $C_2$  снаружи; (б) цилиндр  $C_2$  изнутри.

Решение:  $v = R_1\omega = R_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega$ , см. рис. 1.8.

**Задача 1.8** Для задачи 1.7, используя материалы раздела 1.2, дополнительно вычислить (а) матрицу перехода  $A$  между координатами  $(X, Y, Z)$  и  $(\xi, \eta, \zeta)$  неподвижной и вращающейся систем координат, последняя закреплена с  $C_2$  как на рис. 1.2; (б) матрицу вращения  $\Omega$ ; (в) вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ ; (д) что изменится, если цилиндр  $C_2$  будет расположен внутри  $C_1$  ?.

Ответ: (а)  $A = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & -\sin \omega_2 t & 0 \\ \sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , (б)  $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , (в)  $\vec{\omega}_2 = (0, 0, -\omega_2)$ , (д)  $\vec{\omega}_2 = (0, 0, \omega_2)$ .

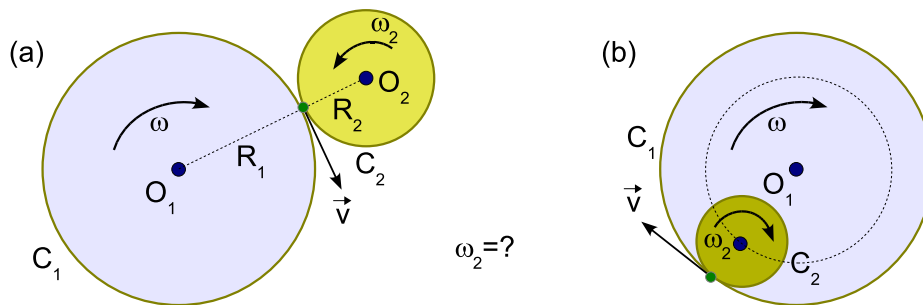


Рис. 1.8:

## Формулы Пуассона

Замечательным свойством вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  оказалось то, что с его помощью выражаются полезные кинематические характеристики движения твердого тела, и устанавливается связь между некоторыми такими характеристиками.

**Лемма 1.3** *Имеют место равенства*

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\xi = \vec{\omega} \times \vec{e}_\xi \\ \dot{\vec{e}}_\eta = \vec{\omega} \times \vec{e}_\eta \\ \dot{\vec{e}}_\zeta = \vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta \end{cases} \quad (1.8)$$

*Доказательство.* Запишем (1.6) в координатной форме:

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\xi = \omega_\zeta \vec{e}_\eta - \omega_\eta \vec{e}_\zeta \\ \dot{\vec{e}}_\eta = -\omega_\zeta \vec{e}_\xi + \omega_\xi \vec{e}_\zeta \\ \dot{\vec{e}}_\zeta = \omega_\eta \vec{e}_\xi - \omega_\xi \vec{e}_\eta \end{cases} \quad (1.9)$$

Умножим равенство (1.7) справа векторно на вектор  $\vec{e}_\xi$ . Учитывая (1.9), получим

$$\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi = \omega_\eta (\vec{e}_\eta \times \vec{e}_\xi) + \omega_\zeta (\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\xi) = -\omega_\eta \vec{e}_\zeta + \omega_\zeta \vec{e}_\eta = \dot{\vec{e}}_\xi.$$

Остальные равенства из (1.8) доказываются аналогично.  $\square$

Равенства системы (1.8) называются *формулами Пуассона*.

## Формула Эйлера о скоростях точек тела

Поскольку точки твердого тела в любой момент времени находятся на фиксированном расстоянии друг от друга, естественно предположить, что скорости различных точек связаны некоторым соотношением, см. рис. 1.9. Рассмотрим скорости  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  двух точек  $A$ ,  $B$  соответственно твердого тела. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.4** *Пусть  $\vec{\omega}$  – угловая скорость. Тогда*

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}. \quad (1.10)$$

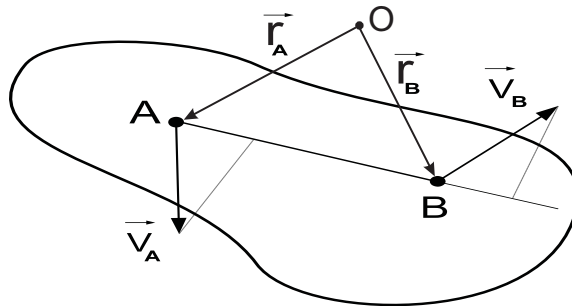


Рис. 1.9: Скорости точек тела.

Доказательство. Поскольку  $\vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B$  (см. рис. 1.9), то  $\dot{\vec{r}}_A + \overrightarrow{AB} = \dot{\vec{r}}_B$ , то есть

$$\vec{v}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B. \quad (1.11)$$

В подвижной системе координат вектор  $\overrightarrow{AB}$  записывается в виде  $\xi_0 \vec{e}_\xi + \eta_0 \vec{e}_\eta + \zeta_0 \vec{e}_\zeta$ . Числа  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  не зависят от времени, поскольку в подвижной системе координат вектор  $\overrightarrow{AB}$  неподвижен. Поэтому  $\overrightarrow{AB} = \xi_0 \dot{\vec{e}}_\xi + \eta_0 \dot{\vec{e}}_\eta + \zeta_0 \dot{\vec{e}}_\zeta$ . Отсюда, учитывая равенство (1.11) и формулы Пуассона (1.8), получаем

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \xi_0 \dot{\vec{e}}_\xi + \eta_0 \dot{\vec{e}}_\eta + \zeta_0 \dot{\vec{e}}_\zeta = \vec{v}_A + \xi_0 (\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi) + \eta_0 (\vec{\omega} \times \vec{e}_\eta) + \zeta_0 (\vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta) = \\ &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\xi_0 \vec{e}_\xi + \eta_0 \vec{e}_\eta + \zeta_0 \vec{e}_\zeta) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Это влечет равенство (1.10).  $\square$

Равенство (1.10) называется *формулой Эйлера о скоростях точек тела*.

**Задача 1.9** В условиях задачи 1.8 в случае, когда цилиндр  $C_2$  катится равномерно (плоско-параллельно и без проскальзывания) по поверхности цилиндра  $C_1$  и делает полный оборот вокруг него за время  $T$ , найти  $\omega_2$ . Рассмотреть случаи, когда (i)  $\omega = 0$ ; (ii)  $C_2$  движется по направлению вращения цилиндра  $C_1$ ; (iii)  $C_2$  движется против направления вращения цилиндра  $C_1$ ; (iv)  $C_2$  катится внутри цилиндра  $C_1$  (рис.1.8(b)).

Указание: Воспользоваться формулой Эйлера  $\vec{v}_{O_2} = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \overrightarrow{QO_2}$ , связывающей скорости точек  $O_2$  и  $Q$  цилиндра  $C_2$ . Здесь  $O_2$  – центр круга  $C_2$ , а  $Q$  – точка касания кругов  $C_1$  и  $C_2$ , см. рис. 1.8

**Задача 1.10** Прямой круговой конус  $K$ , высотой  $h$  и углом при вершине  $\alpha$  (рис.1.10), равномерно и без проскальзывания катится по горизонтальной плоскости так, что вершина  $O_1$  неподвижна, а полный оборот происходит за время  $T$ . Найти угловую скорость  $\vec{\omega}$  конуса и матрицу вращения  $\Omega$ .

**Набросок решения.** Движение конуса складывается из поворота относительно плоскости с угловой скоростью  $\vec{\omega}_1 = (0, 0, \omega_1)$  и вращения вокруг оси  $O_1O_2$ . Очевидно,  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  и  $\omega_2 = \frac{v_{O_2}}{R_2} = \frac{2\pi R_1}{Th \tan \frac{\alpha}{2}}$ . Тогда

$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos t, \cos \frac{\alpha}{2} \sin t, \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

где  $t$  – это угол между проекцией вектора  $\overrightarrow{O_1O_2}$  на плоскость  $XY$  и осью  $OX$ . Тогда

$$\vec{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \frac{2\pi R_1}{Th \tan \frac{\alpha}{2}} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos t, \cos \frac{\alpha}{2} \sin t, \frac{h \tan \frac{\alpha}{2}}{R_1} + \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Матрица вращения  $\Omega$  находится по формуле (1.5).



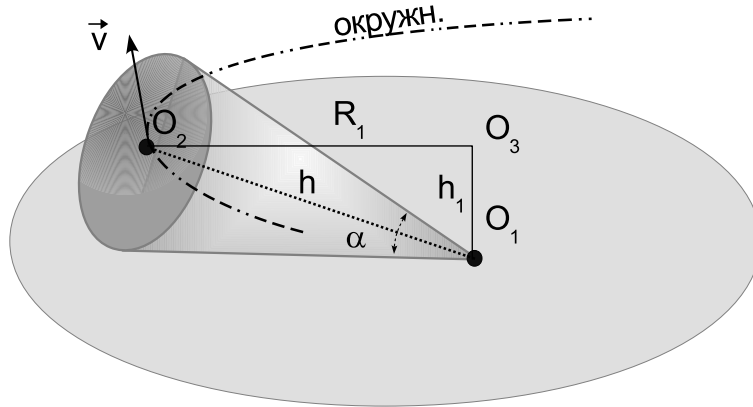


Рис. 1.10:

### Независимость угловой скорости от выбора подвижной системы координат

Согласно равенству (1.7), вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  выражается через орты подвижной системы координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , которая жестко связана с телом. Поэтому формально  $\vec{\omega}$  зависит от выбора подвижной системы координат. Покажем, что при выборе другой подвижной системы координат мы получим такой же вектор угловой скорости.

**Лемма 1.5** Пусть  $(\xi', \eta', \zeta')$  подвижная система координат, жестко связанная с телом, и пусть

$$\vec{\omega}' = \omega'_{\xi'} \vec{e}_{\xi'} + \omega'_{\eta'} \vec{e}_{\eta'} + \omega'_{\zeta'} \vec{e}_{\zeta'}$$

вектор угловой скорости, выраженный через орты этой системы координат. Тогда

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}.$$

*Доказательство.* Для системы координат  $(\xi', \eta', \zeta')$  справедлива формула Эйлера, аналогичная (1.10), т.е.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \times \overrightarrow{AB},$$

где  $A, B$  – произвольные точки тела. Отсюда и (1.10) вытекает, что

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega}' \times \overrightarrow{AB}, \quad \text{или} \quad (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \overrightarrow{AB} = 0.$$

Поскольку точки  $A, B$  произвольные, и тело содержит три точки, не лежащих на одной прямой, то  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ .  $\square$

### 1.3 Виды движений твердого тела

Самый простой вид движения твердого тела – *поступательный*, когда отрезок, проведенный между любыми точками тела, перемещается параллельно самому себе. Это означает, что скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы. Таким образом, поступательное движение полностью характеризуется заданием движения какой-либо одной точки тела.

Немного более сложным является *плоское движение*, когда траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Движение тела, таким образом, определяется движением одного из его *сечений* в какой-либо из параллельных плоскостей. Поскольку положение сечения полностью определяется положением двух точек, то плоское движение полностью определяется движением (выбранных) двух точек тела в фиксированном сечении.

Следующее по наглядности движение твердого тела – *вращательное*, когда имеется фиксированная прямая (она называется *осью вращения*), на которой все точки тела неподвижны, а остальные точки движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, см. рис. 1.6.

**Задача 1.11** *Определить число степеней свободы для 1) поступательного движения; 2) плоского движения; 3) вращательного движения.*

Ответ: 1) 3; 2) 3; 3) 1.

Ниже мы покажем, что любое движение твердого тела за конечный промежуток времени можно представить в виде композиции вращательного и поступательного движений (обычно поступательным движением совмещают центр масс тела в начальный момент с центром масс тела в конечный момент времени, а затем производится вращательное движение, см. детали ниже).

#### Теорема Эйлера-Даламбера

Рассмотрим движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Имеет место следующая теорема Эйлера-Даламбера, в которой под *перемещением* тела понимается движение в течение конечного отрезка времени.

**Теорема 1.1** *Любое перемещение тела с неподвижной точкой можно получить одним поворотом тела вокруг определенной оси, проходящей через неподвижную точку.*

*Доказательство.* Обозначим неподвижную точку через  $O$ . Положение твердого тела определяется положением любых трех точек, не лежащих на одной прямой. Поэтому в нашем случае положение тела определяется положением двух точек, не лежащих на одной прямой с точкой  $O$ . Рассмотрим сферу  $S^2$  с центром в  $O$ , пересекающуюся с телом, такую, что на  $S^2$  имеются точки, скажем  $A$  и  $B$ , не лежащие на одной прямой с точкой  $O$ . Далее под отрезком на  $S^2$  мы понимаем геодезический отрезок (наименьшая дуга большой окружности, соединяющая данные точки). Два произвольных положения  $P_1$  и  $P_2$  тела полностью характеризуются положениями отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  отрезка  $AB$  (не уменьшая общности, можно считать, что  $A, B$  не являются диаметрально противоположными точками сферы  $S^2$ , и отрезок  $AB$  определяется однозначно), см. рис. 1.11 (а).

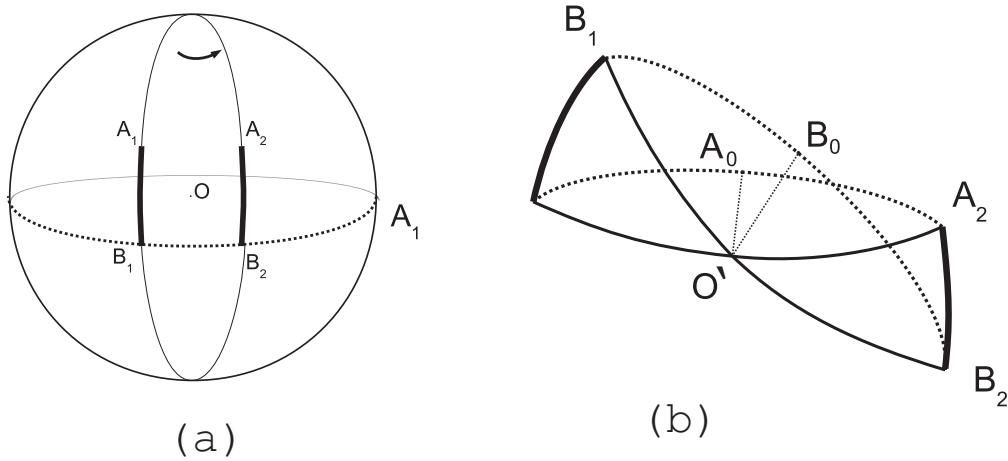


Рис. 1.11:

Большую окружность, проходящую через точки  $A_i, B_i$ , обозначим через  $S_i, i = 1, 2$ . Проведем через середины  $A_0$  и  $B_0$  отрезков  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  соответственно большие круги, перпендикулярные  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . Обозначим эти круги через  $C_A$  и  $C_B$  соответственно. Если  $C_A = C_B$ , то большие круги  $S_1, S_2$  и  $C_A = C_B$  пересекаются в двух диаметрально противоположных точках, скажем  $D_1$  и  $D_2$ . Тогда поворот сферы  $S^2$  вокруг оси, проходящий через точки  $D_1, O, D_2$  и переводящий  $S_1$  в  $S_2$ , переводит  $A_1B_1$  в  $A_2B_2$ , см. рис. 1.11 (b)

Рассмотрим теперь случай, когда большие круги  $C_A$  и  $C_B$  не совпадают. Тогда они пересекаются в двух точках, и мы возьмем точку пересечения  $O'$ , лежащую в одном полушарии с точками  $A_1, B_1, A_2, B_2$ . Так как  $O'$  лежит на перпендикуляре, проходящем через середину  $A_1A_2$ , то отрезки  $A_1O', A_2O'$  равны. Аналогично показывается, что отрезки  $B_1O', B_2O'$  также равны. Поэтому треугольники  $A_1B_1O', A_2B_2O'$  равны (признак равенства по трем сторонам). Отсюда вытекает равенство углов  $\angle A_1O'B_1 = \angle A_2O'B_2$ . Следовательно, поворот вокруг оси  $OO'$ , переводящий отрезок  $A_1O'$  в  $A_2O'$ , переводит отрезок  $B_1O'$  в  $B_2O'$ . Поэтому этот поворот переводит  $A_1B_1$  в  $A_2B_2$ .  $\square$

Из теоремы 1.1 вытекает, что *движение закрепленного в точке тела в каждый момент можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления*. Положение этой мгновенной оси с течением времени, вообще говоря, меняется. Скорость точек тела, согласно (1.2), представляется в виде

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (1.12)$$

где  $\vec{\omega}$  – мгновенная скорость,  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор материальной точки  $m_i$ .

### Представление движения в виде композиции вращательного и поступательного

Обозначим через  $D_t$  движение твердого тела за промежуток времени  $t$ . Его можно рассматривать как гладко зависящее от  $t$  отображение, сохраняющее метрику и ориентацию пространства. Если движение  $D_t$  является поступательным, то отображение представляет собой сдвиг. Ясно, что вращение за конечный промежуток времени также можно рассматривать как отображение. Ниже под композицией движений понимается композиция соответствующих отображений.

**Лемма 1.6** Любое движение  $D_t$  однозначно разлагается в композицию вращения  $R$  и сдвига  $S$ , рис. 1.12,

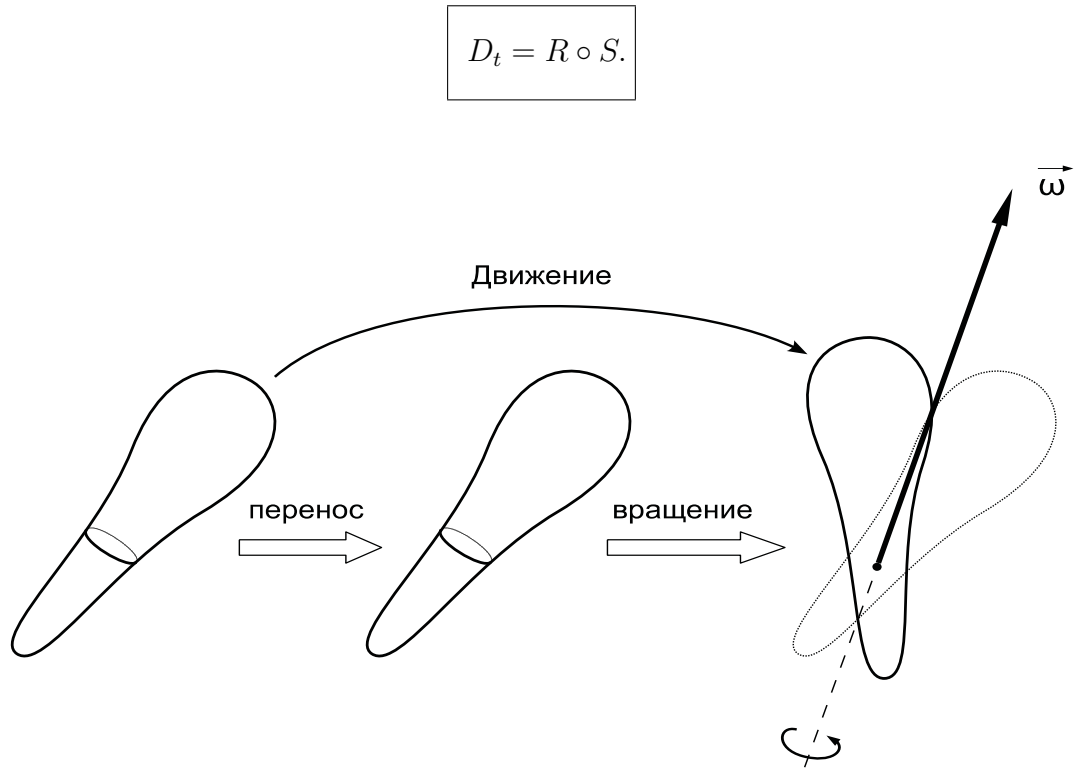


Рис. 1.12: Композиция вращательного и поступательного движений.

*Доказательство.* Пусть  $C$  – начало подвижной системы координат, жестко связанной с телом. Под действием движения  $D_t$  точка  $C$  переместится в  $D_t(C)$ . Обозначим через  $S$  сдвиг, переводящий точку  $C$  в  $D_t(C)$ . Тогда  $D_t \circ S^{-1}$  есть движение с неподвижной точкой  $S(C)$ , поскольку  $D_t \circ S^{-1}(S(C)) = D_t(C) = S(C)$ . Согласно теореме 1.1, движение  $D_t \circ S^{-1}$  есть вращение, которое мы обозначим через  $R$ . Из  $D_t \circ S^{-1} = R$  вытекает требуемое равенство  $D_t = R \circ S$ .  $\square$

# Глава 2

## Динамика твердого тела

В этой главе вводятся основные понятия теории твердого тела, связанные с динамикой. Сперва мы напомним основные динамические характеристики, которые используют в теоретической механике для описания механических систем. Заканчивается глава основными уравнениями движения твердого тела.

### 2.1 Основные динамические величины

Основными динамическими характеристиками материальной точки являются импульс и момент импульса (кинетический момент). Это позволяет ввести соответствующие динамические характеристики для твердого тела, которое рассматривается как система материальных точек.

#### Импульс<sup>1</sup>

Для системы точек *импульс* определяется следующим образом:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

где через  $m_i$  и  $\vec{v}_i$  обозначена масса и скорость соответственно  $i$ -ой точки системы. Поскольку твердое тело мы рассматриваем как систему материальных точек, то приведенное равенство определяет *импульс твердого тела*.

Обозначим через  $\vec{F}_i$  силу, действующую на  $i$ -ую точку. Напомним, что второй закон Ньютона для  $i$ -ой точки пишется в виде  $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$ . Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Если считать (как обычно), что внутренние силы системы точек подчиняются третьему закону Ньютона - действие равно противодействию - то вышеприведенное равенство принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}}, \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>В устаревшей терминологии - количество движения.

где в правой части учитываются только внешние силы (сумма внутренних сил равна нулю). Равенство (2.1), по существу, является *вторым законом Ньютона для твердого тела*. Если в качестве центра подвижной системы координат взять центр масс (1.1), то мы получаем, фактически, классическое выражение второго закона Ньютона. Именно,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \mu \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \mu \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \mu \frac{d\vec{v}_C}{dt},$$

где  $\vec{v}_C$  означает скорость центра масс  $C$ ,  $\mu = \sum_i m_i$ . Равенство (2.1) принимает вид

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш.}} \quad (2.2)$$

Таким образом, центр масс “ведет себя” как материальная точка, в которой сосредоточена масса всего тела и к которой приложены все (внешние) силы, действующие на тело.

### Кинетический момент (момент импульса)

Импульс (количество движения) материальной точки  $m_i$  равен  $m_i\vec{v}_i$ . Момент импульса этой материальной точки относительно начала координат  $O$  неподвижной системы равен  $\vec{r}_i \times (m_i\vec{v}_i)$ . *Кинетический момент (момент импульса) твердого тела* относительно точки  $O$  определяется как

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i\vec{v}_i). \quad (2.3)$$

Кинетический момент зависит от точки  $O$ , относительно которой он вычислен. Найдем соотношение кинетических моментов, вычисленных относительно разных точек (для фиксированного тела). Пусть

$$\vec{L}_1 = \sum_i \vec{r}_i^{(1)} \times (m_i\vec{v}_i), \quad \vec{L}_2 = \sum_i \vec{r}_i^{(2)} \times (m_i\vec{v}_i)$$

моменты импульса, вычисленные относительно точек  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Тогда  $\vec{r}_i^{(1)} = \vec{r}_i^{(2)} + \overrightarrow{O_1O_2}$ . Поэтому

$$\vec{L}_1 = \sum_i \left( \vec{r}_i^{(2)} + \overrightarrow{O_1O_2} \right) \times (m_i\vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i^{(2)} \times (m_i\vec{v}_i) + \overrightarrow{O_1O_2} \times \sum_i (m_i\vec{v}_i) = \vec{L}_2 + \overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{p}.$$

Для ссылок запишем полученное соотношение в виде окончательного равенства

$$\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_{O_2} + \overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{p}. \quad (2.4)$$

### Момент сил

Если на материальную точку действует сила  $\vec{F}$ , то момент этой силы относительно некоторой точки  $O$  равен  $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ , см. рис. 2.1.

Для системы материальных точек (в частности, для твердого тела) момент сил равен

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Для твердого тела данное равенство можно записать в следующей (более точной) форме

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} \quad (2.5)$$

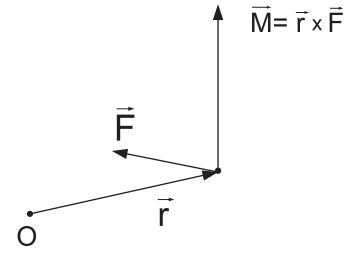


Рис. 2.1: Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

**Задача 2.1** Цилиндрический каток радиуса  $R$  и массой  $m$  имеет ручку, за которую его можно катить по поверхности. Каток стоит у порога высотой  $h < R$  (рис. 2.2).

- (а) С какой минимальной силой  $F_T$  нужно тянуть каток за ручку горизонтально, чтобы перекатить его через порог?
- (б) Показать, что величина такой “перекатывающей” силы  $F_T$ , направленной вдоль ручки катка, зависит от угла  $\beta$  наклона ручки. Определить, при каком  $\beta$  величина силы  $F_T(\beta)$  будет минимальной, и найти ее значение.

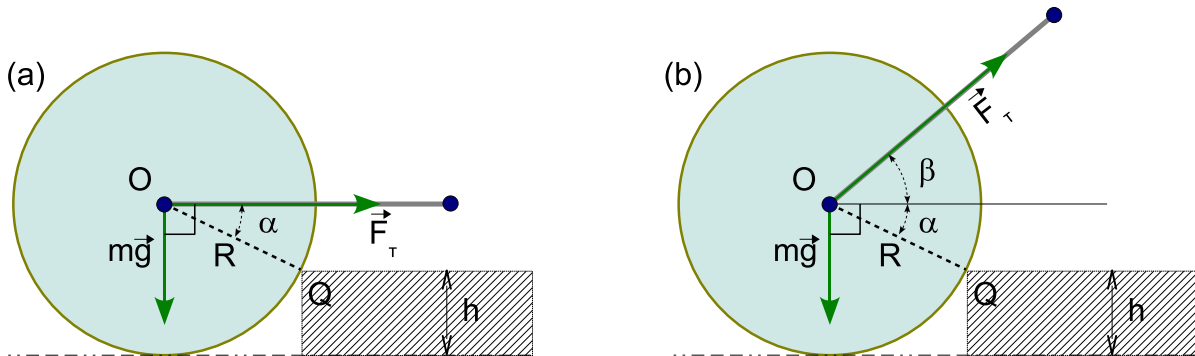


Рис. 2.2: К задаче 2.1: (а)  $F_T$  горизонтальна; (б)  $F_T$  направлена под углом  $\beta$  к горизонтали.

**Решение:** (а) Очевидно, для величины  $F_T$  справедливо соотношение  $\vec{OQ} \times \vec{F}_T = -\vec{OQ} \times m\vec{g}$  или, в скалярной форме,  $F_T R \sin \alpha = mgR \cos \alpha$ , см. рис. 2.2 (а). Откуда  $F_T = mg \operatorname{ctg} \alpha$ . Так как  $\sin \alpha = \frac{R-h}{R}$ , то окончательно получаем, что  $F_T = mg \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$ .

(б) Из рисунка 2.2(б) выводим, что  $F_T R \sin(\alpha + \beta) = mgR \cos \alpha$ , т.е.  $F_T = mg \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ . Тогда минимум  $F_T$  будет при  $\sin(\alpha + \beta) = 1$ , и соответственно  $F_{T \min} = \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}$ . Заметим, что в этом случае вектора  $\vec{OQ}$  и  $\vec{F}_T$  ортогональны (что интуитивно понятно).

**Задача 2.2** Вагон стоит на рельсах. Чтобы его толкнуть, нужно приложить силу  $F_0$  (рис. 2.3(a)). Можно ли его подвинуть вагон с меньшей силой, используя ж/д ключ с длинной ручкой, который крепится к колесу в двух его точках – к оси колеса и к его ободу?

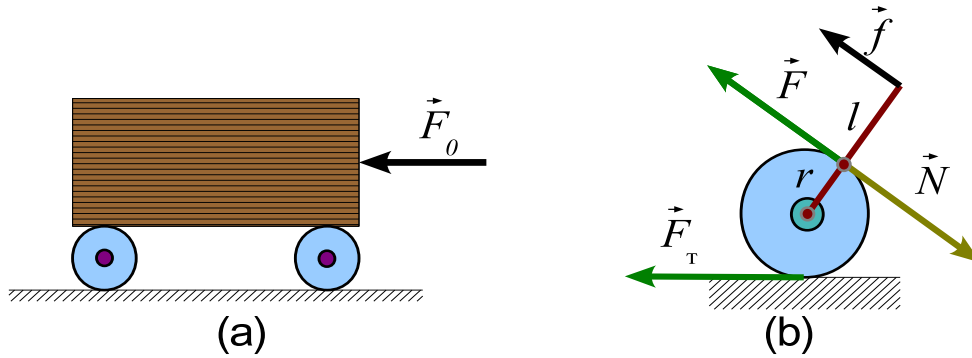


Рис. 2.3: (а) К задаче 2.2, (б) распределение сил на ж/д ключ (рычаг) и колесо.

Подсказка: Пусть  $\vec{f}$  – искомая сила, приложенная к концу рычага (ж/д ключ), тогда распределение сил, действующих на рычаг и колесо будет таким как на рис. 2.3(б), где  $l$  – длина рычага,  $r$  – радиус колеса. Откуда получаем, что  $fl = Nr$ . Так как  $N = F = F_T$  по третьему закону Ньютона, получаем, что  $f = Fr/l$  и соответственно  $f_{\min} = F_0 r/l$ . Тогда  $f_{\min} < F_0$  если  $l > r$ .

### Моменты инерции и тензор инерции

Выразим кинетический момент (момент импульса)  $\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$  через угловую скорость. В силу (1.12),  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Поэтому

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)).$$

Применим к произведению  $\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$  формулу "бац минус цаб", то есть

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (2.6)$$

Получим (в конце мы учитываем координатную запись для векторов  $\vec{\omega} = (\omega_x; \omega_y; \omega_z)$  и  $\vec{r}_i = (x_i; y_i; z_i)$ )

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)] = \vec{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) =$$



$$= \vec{\omega} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_i m_i \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z).$$

Положим  $\vec{L}_O = (L_x; L_y; L_z)$ . В координатной форме полученное равенство принимает следующий вид

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_i m_i x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y \left( - \sum_i m_i x_i y_i \right) + \omega_z \left( - \sum_i m_i x_i z_i \right). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} L_y &= \omega_x \left( - \sum_i m_i y_i x_i \right) + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z \left( - \sum_i m_i y_i z_i \right), \\ L_z &= \omega_x \left( - \sum_i m_i z_i x_i \right) + \omega_y \left( - \sum_i m_i z_i y_i \right) + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (2.7)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = - \sum_i m_i x_i y_i, \quad J_{xz} = J_{zx} = - \sum_i m_i x_i z_i, \quad J_{yz} = J_{zy} = - \sum_i m_i y_i z_i. \quad (2.8)$$

Тогда выражения для  $L_x, L_y, L_z$  принимают следующий вид:

$$L_x = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z, \quad L_y = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z, \quad L_z = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \quad (2.9)$$

В векторной форме равенства (2.9) можно записать в виде

$$\vec{L}_O = \mathbb{J}_O \vec{\omega}, \quad \text{где} \quad \mathbb{J} = \mathbb{J}_O = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Матрица  $\mathbb{J}$  называется *тензором инерции*. В силу (2.9), матрица  $\mathbb{J}$  симметричная. Диагональные элементы  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  называются *осевыми моментами инерции*. Остальные элементы  $J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}, J_{yz} = J_{zy}$  называются *центробежными моментами инерции*.

Из курса линейной алгебры известно, что существует система координат, в которой тензор инерции (как любая симметричная матрица) имеет диагональный вид

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

с нулевыми недиагональными элементами. Оси такой системы координат называются *главными осями инерции тела*, а величины  $J_{xx} = J_x, J_{yy} = J_y, J_{zz} = J_z$  называются *главными моментами инерции*. Таким образом, если оси системы координат направлены вдоль главных осей инерции тела, то центробежные моменты инерции равны нулю.

### Задачи на вычисление моментов инерции

Найти главные моменты инерции для молекул, рассматриваемых как системы частиц, в следующих случаях (задачи взяты из книги [9], где можно найти ответы и указания к решениям):

**Задача 2.3** Молекула из двух атомов  $m_1, m_2$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга.

**Задача 2.4** Молекула из атомов  $m_1, \dots, m_n$ , расположенных на одной прямой, и расстоянием  $l_{ij}$  между атомами  $m_i, m_j$ .

**Задача 2.5** Трехатомная молекула в виде равнобедренного треугольника, рис. 1.4 (b). Основание треугольника равно  $a$ , высота —  $h$ .

**Задача 2.6** Четырехатомная молекула с атомами, расположенными в вершинах правильной трехугольной пирамиды, рис. 1.4 (c).

**Пример 2.1** Моменты инерции однородного шара.

Рассмотрим однородный шар с постоянной плотностью  $\rho$  радиуса  $R_0$ . Для вычисления моментов инерции совместим центр шара с началом неподвижной системы координат  $(x, y, z)$ . В силу однородности, все главные моменты инерции равны

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J.$$

Имеем

$$J_{xx} + J_{yy} + J_{zz} = 3J = \int (x^2 + y^2)\rho dv + \int (x^2 + z^2)\rho dv + \int (y^2 + z^2)\rho dv = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2)\rho dv.$$

Перейдя к сферическим координатам, получим

$$3J = 2\rho \int r^4 \sin \theta dr d\varphi d\theta = 2\rho \frac{r^5}{5} \Big|_0^{R_0} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{5}\rho R_0^5 \pi.$$

Если обозначить через  $\mu = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho$  массу шара, то получаем, что все главные моменты инерции однородного шара равны

$$J = \frac{2}{5}R_0^2 \mu. \quad (2.12)$$

Из геометрических (и аналитических) соображений следует, что все центробежные моменты инерции равны нулю,  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$  (доказать самостоятельно).  $\diamond$

Найти главные моменты инерции следующих сплошных однородных тел:

**Задача 2.7** Тонкий стержень длиной  $l$  (толщиной стержня пренебрегаем).

$$\text{Ответ: } I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2, I_3 = 0.$$

**Задача 2.8** Круговой цилиндр радиуса  $R$  и высотой  $h$ .

Ответ:  $I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$ ,  $I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$  ( $x_3$  – ось цилиндра).

**Задача 2.9** Прямоугольный параллелепипед с длинами ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Ответ:  $I_1 = \frac{\mu}{12} (b^2 + c^2)$ ,  $I_2 = \frac{\mu}{12} (a^2 + c^2)$ ,  $I_3 = \frac{\mu}{12} (a^2 + b^2)$  (оси  $x_1, x_2, x_3$  параллельны ребрам  $a, b, c$ ).

**Задача 2.10** Круговой конус с радиусом основания  $R$  и высотой  $h$ .

Ответ: 1) Моменты инерции по отношению к осям с началом в центре масс (он находится на оси конуса на расстоянии  $a = 3h/4$  от вершины)

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{20} \mu \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right), I_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

2) Моменты инерции по отношению к осям с началом в вершине конуса

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{5} \mu \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right), I_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

3) Моменты инерции по отношению к осям с началом в центре основания конуса

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{10} \mu (R^2 + 2h^2), I_3 = \frac{3}{10} \mu R^2.$$

- Формулы 2) и 3) получаются из 1) с помощью т.н. *Теоремы Штерна*, по которой  $I = I_c + \mu a^2$ , где  $I$  – момент инерции тела относительно оси, отстоящей на расстоянии  $a$  от параллельной ей оси  $l_c$ , проходящей через центр масс, а  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси  $l_c$ .

**Задача 2.11** Трехосный эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Ответ:  $I_1 = \frac{\mu}{5} (b^2 + c^2)$ ,  $I_2 = \frac{\mu}{5} (a^2 + c^2)$ ,  $I_3 = \frac{\mu}{5} (a^2 + b^2)$ .

## 2.2 Уравнения моментов в неподвижной системе

Согласно равенству (2.3), кинетический момент (момент импульса) в неподвижной системе координат с началом координат в точке  $O$  равен

$$\vec{L}_O = \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i).$$

Дифференцируя это равенство и учитывая, что  $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ , получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right).$$

Поскольку, в силу второго закона Ньютона,  $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$ , то

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O,$$

где  $\vec{M}_O$  – момент сил, приложенных к твердому телу. Отметим, что мы можем учитывать только внешние силы. Таким образом,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O. \quad (2.13)$$

## Основные уравнения движения твердого тела в неподвижной системе

Основные уравнения движения твердого тела составляет во-первых, уравнение (2.1) (фактически, это второе уравнение Ньютона), которое обычно приводят в виде равенства (2.2) относительно центра масс, и во-вторых, уравнение моментов (2.13). Учитывая (2.10) и желание ввести в уравнения важнейшую характеристику движения твердого тела - угловую скорость, получаем следующую систему

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}}, \quad \frac{d(\mathbb{J}_O \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_O. \quad (2.14)$$

В координатной форме эта система представляет собой шесть скалярных уравнений. Учитывая, что твердое тело имеет шесть степеней свободы (см. параграф 1.1), можно показать, что данная система является замкнутой, т.е. с помощью уравнений (2.14) можно полностью определить движение твердого тела с заданными внешними силами (необходимо лишь знать начальные условия движения). Однако заметим, что второе уравнение системы содержит тензор инерции, все элементы которого в общем случае зависят от времени (оси неподвижной системы меняют свое положение относительно тела). Поэтому во втором равенстве системы (2.14) приходится вычислять производную выражения  $\mathbb{J}_O \vec{\omega}$ , что существенно усложняет задачу нахождения решений системы (2.14) в общем случае.

Отметим, что для некоторых специальных задач приведенная система позволяет изучить движение твердого тела. Учитывая (2.5), перепишем ее для ссылок в виде

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}}, \quad \frac{d(\mathbb{J}_O \vec{\omega})}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}. \quad (2.15)$$

**Задача 2.12** На горизонтальной плоскости стоит круглое тело радиуса  $R$  и массой  $m$ : (а) однородный шар; (б) сфера; (в) однородный цилиндр; (г) колесо с осью массы  $m_1$  и радиуса  $r$  и ободом массы  $m_2$ , где  $m = m_1 + m_2$ . Найти скорость  $v_C(t)$  центра масс  $C$  тела, катящегося (без проскальзывания) по горизонтальной прямой под действием постоянной силы  $F$ , приложенной к точке  $C$ .

Решение: Силы действующие на тело ( $\vec{F}_{\text{внеш}}$ ) - это сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила тяги  $\vec{F}$ , приложенные к центру масс  $O$ , а также реакция опоры  $\vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_\tau$ , приложенная к точке контакта  $K$  (см. рис. 2.4 (а)). Очевидно,  $\vec{F}_{\text{внеш}} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{F} + \vec{N}_\tau$ , т.к.  $m\vec{g} + \vec{N}_n = \vec{0}$ .<sup>2</sup> Поэтому первое уравнение системы (2.13) запишется в виде  $m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F} + \vec{N}_\tau$  или в скалярной форме  $m\dot{v}_C = F - N_\tau$ .

Очевидно, моменты сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}_n$  относительно точки  $O$  равны и противоположны по знаку, а момент силы  $m\vec{N}_\tau$  относительно точек  $O$  и  $C$  - один и тот же, т.к.  $\vec{OC} \parallel \vec{N}_\tau$ . Таким образом  $\vec{M}_O = \vec{M}_C = \vec{CK} \times \vec{N}_\tau$ . Так как тело симметрично относительно оси  $OX$ , то кинетический момент  $\vec{L}_O$  не зависит от выбора точки  $O$  на оси  $OX$ .<sup>3</sup> Тогда  $\vec{L}_O = \mathbb{J}_C \vec{\omega}$ . В нашем случае  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ , где  $R\omega = v_C R$ . Тогда второе уравнение системы (2.13) в проекции на ось  $OZ$  запишется следующим

<sup>2</sup>Отметим, что горизонтальную проекцию силы реакции опоры  $\vec{N}_\tau$  мы не знаем (при сухом трении скольжения она равна силе трения покоя), но важно то, что она препятствует проскальзыванию тела. Последнее (вместе с условием, что тело всегда лежит на прямой) означает, что  $\vec{v}_K = \vec{0}$ .

<sup>3</sup>показать самостоятельно (можно использовать формулу (2.15) ниже, а можно вывести непосредственно из геометрических соображений)

образом:  $J_{zz} \frac{\dot{v}_C}{R} = RN_\tau$ . Отсюда выводим, что  $N_\tau = \frac{J_{zz}}{R^2} \dot{v}_C$  и соответственно  $m\dot{v}_C = F - \frac{J_{zz}}{R^2} \dot{v}_C$ . Откуда получаем, что

$$v_C = v_0 + \frac{F}{m + J_{zz}/R^2} t.$$

Применяя эту формулу к указанным случаям, получаем следующие результаты.

(а) Для шара  $J_{zz} = \frac{2}{5}mR^2$  и  $v_C = v_0 + \frac{5F}{7m}t$

(б) Для сферы  $J_{zz} = \frac{2}{3}mR^2$  и  $v_C = v_0 + \frac{3F}{5m}t$

(в) Для цилиндра  $J_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$  и  $v_C = v_0 + \frac{2F}{3m}t$

(г) Для колеса  $J_{zz} = m_2R^2 + \frac{1}{2}m_1r^2$  и  $v_C = v_0 + \frac{F}{m + m_2 + m_1r^2/(2R^2)}t$ . При  $m_1 = 0, m_2 = m$  получаем формулу для скатывающегося обруча  $v_C = v_0 + \frac{F}{2m}t$ , а при  $m_2 = 0, m_1 = m, r = R$  — для цилиндра (б).

Очевидно, что при прочих равных условиях шар разгоняется быстрее всего. Имеет ли смысл ставить шаровые колеса на автомобиль?

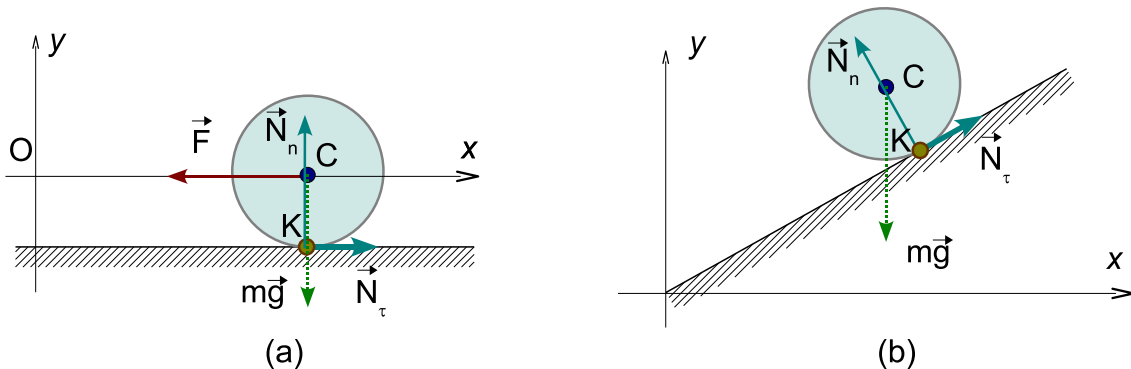


Рис. 2.4: (а) к задаче 2.12; (б) к задаче 2.13.

**Задача 2.13** 1) Симметричное тело начинает катиться (без проскальзывания) вниз по наклонной плоскости с высоты  $h$ . Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, равен  $I$ , масса тела равна  $M$ , а радиус поверхности качения (находящейся в контакте с наклонной плоскостью) равен  $r$ . Определите линейную скорость центра масс в нижней точке наклонной плоскости.

2) Примените полученное вами общее выражение для определения скорости центра масс тела, если это тело (а) сфера; (б) диск; (в) диск массой  $M_1$  с внешним радиусом  $R_1$ , насаженный на вал, имеющий массу  $m_2$  и радиус  $r_2$ .

Ответ:

$$1) \quad v_C = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/r^2}}.$$

$$2) \quad (\text{а}) \text{ сфера, } v_C = \sqrt{\frac{6}{5}gh}; \quad (\text{б}) \text{ диск, } v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}; \quad (\text{в}) \text{ “колесо”, } v_C = \sqrt{\frac{4(M_1 + m_2)gh}{3M_1 + m_2(2 + (r_2/R_1)^2)}}.$$

\* **Примечание:** В принципе, эта задача решается так же как и предыдущая задача 2.12. Однако более простое и прозрачное решение может быть получено с помощью законов сохранения, см. Главу 4 и задачу 4.1

## 2.3 Основные уравнения движения твердого тела

Как было указано выше, основные уравнения (2.15) движения твердого тела, записанные относительно неподвижной (иногда говорят, абсолютной или инерциальной) системы координат в общем случае с трудом поддаются исследованию. Это связано с тем, что в неподвижной системе координат моменты инерции (три осевых и три центробежных) тела зависят в общем случае от времени, а в систему входят их производные. В то же время, оси подвижной системы координат не меняют своего положения относительно тела (они жестко связаны с ним). Поэтому моменты инерции, вычисленные относительно этих осей, от времени не зависят. Это является побудительной причиной для получения основных уравнений движения тела в подвижной системе координат. Часто, именно с этих уравнений начинаются исследования движений твердых тел при решении наиболее интересных задач.

Целью этого параграфа является вывод основных уравнений движения твердого тела в подвижной системе координат (жестко связанной с телом). При этом, в качестве начала координат мы будем брать центр масс. Таким образом, ниже всегда предполагается, что **начало подвижной системы координат совпадает с центром масс  $C$** .

Для материальной точки  $m_i$  радиус-вектор в подвижной системе координат обозначим через  $\vec{\rho}_i$ , см. рис 2.5. Связь между  $\vec{r}_i$  (радиус-вектор в абсолютной системе координат) и  $\vec{\rho}_i$ , очевидно выражается равенством

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i. \quad (2.16)$$

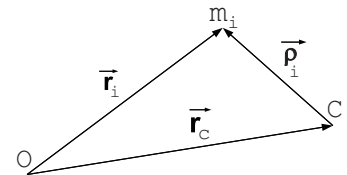


Рис. 2.5:

### Основные динамические величины относительно центра масс

По аналогии с кинетическим моментом  $\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \dot{\vec{r}}_i)$  введем кинетический момент относительно центра масс

$$\vec{L}_C = \sum_i \vec{\rho}_i \times (m_i \dot{\vec{\rho}}_i).$$

Напомним, что центр масс определяется вектором  $\vec{r}_C = \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{r}_i$ , где  $\mu = \sum_i m_i$  – полная масса тела.

**Лемма 2.1** *Имеет место равенство<sup>4</sup>*

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \mu (\vec{r}_C \times \vec{v}_C). \quad (2.17)$$

<sup>4</sup>Равенство (2.17) является частью так называемой *первой теоремы Кенига* [3].

*Доказательство.* Общее равенство (2.4) в нашем случае, когда  $O_1 = O$  и  $O_2 = C$ , примет вид

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{p}, \quad \text{где } \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Учитывая, что  $\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C$ , получим

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \mu \left( \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mu} \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \\ &= \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \mu \left( \frac{d\vec{r}_C}{dt} \right) = \vec{L}_C + \mu (\vec{r}_C \times \vec{v}_C). \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.1 можно провести, используя равенство (2.16). Именно,

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \left[ (\vec{r}_C + \vec{q}_i) \times (\dot{\vec{r}}_C + \dot{\vec{q}}_i) \right] = \\ &= \sum_i m_i (\vec{r}_C \times \dot{\vec{r}}_C) + \sum_i m_i (\vec{r}_C \times \dot{\vec{q}}_i) + \sum_i m_i (\vec{q}_i \times \dot{\vec{r}}_C) + \sum_i m_i (\vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i) = \\ &= \mu (\vec{r}_C \times \dot{\vec{r}}_C) + \sum_i m_i (\vec{q}_i \times \dot{\vec{q}}_i) = \mu (\vec{r}_C \times \dot{\vec{r}}_C) + \vec{L}_C = \mu (\vec{r}_C \times \vec{v}_C) + \vec{L}_C, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_i m_i (\vec{r}_C \times \dot{\vec{q}}_i) = \vec{r}_C \times \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \vec{q}_i \right) = 0, \quad \sum_i m_i (\vec{q}_i \times \dot{\vec{r}}_C) = \left( \sum_i m_i \vec{q}_i \right) \times \dot{\vec{r}}_C = 0.$$

По аналогии с моментом сил  $\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}$  относительно начала  $O$  неподвижной системы координат введем момент сил относительно центра масс (начала подвижной системы координат):

$$\vec{M}_C = \sum_i \vec{q}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}$$

Отметим, что мы, как обычно, учитываем только внешние силы, действующие на тело (сумма внутренних сил равна нулю).

### Уравнения моментов относительно центра масс

Напомним (см. равенство (2.18)), что уравнение моментов относительно начала неподвижной системы координат имеет вид

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}.$$

Покажем, что для введенного кинетического момента относительно центра масс  $\vec{L}_C = \sum_i \vec{q}_i \times (m_i \dot{\vec{q}}_i)$  имеет место аналогичное уравнение моментов.

**Лемма 2.2** *Имеет место равенство*

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C = \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}, \quad (2.18)$$

где  $\vec{L}_C = \sum_i \vec{\rho}_i \times (m_i \dot{\vec{\rho}}_i)$ .

*Доказательство.* Согласно (2.17),  $\vec{L}_O = \vec{L}_C + \mu(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)$ . Поэтому

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{L}_O - \mu(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)] = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \mu \frac{d}{dt} (\vec{r}_C \times \vec{v}_C).$$

Учитывая (2.18), получаем

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} - \mu(\dot{\vec{r}}_C \times \vec{v}_C) - \mu(\vec{r}_C \times \dot{\vec{v}}_C) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} - \vec{r}_C \times (\mu \dot{\vec{v}}_C),$$

поскольку  $\dot{\vec{r}}_C \times \vec{v}_C = \vec{v}_C \times \vec{v}_C = 0$ . Согласно второму закону Ньютона (2.2),  $\mu \dot{\vec{v}}_C = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}}$ . Отсюда и из равенства (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \sum_i (\vec{r}_C + \vec{\rho}_i) \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} - \vec{r}_C \times \left( \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}} \right) = \\ &= \vec{r}_C \times \left( \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}} \right) + \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} - \vec{r}_C \times \left( \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}} \right) = \sum_i \vec{\rho}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}. \quad \square \end{aligned}$$

### Тензор инерции в подвижной системе координат

Для кинетического момента  $\vec{L}_C = \sum_i \vec{\rho}_i \times (m_i \dot{\vec{\rho}}_i)$  относительно центра масс (то есть, начала координат подвижной системы) получим выражение через угловую скорость, аналогичное равенству (2.10). Одновременно мы выведем тензор инерции и моменты инерции относительно координатных осей подвижной системы координат.

В силу (2.16),  $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$ . Дифференцируя это равенство, получим  $\dot{\vec{v}}_i = \dot{\vec{v}}_C + \dot{\vec{\rho}}_i$ . Согласно формуле (1.10) Эйлера о скоростях точек тела,  $\dot{\vec{v}}_i = \dot{\vec{v}}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ . Поэтому

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i. \quad (2.19)$$

Отметим, что это равенство аналогично формуле (1.12). Равенство  $\vec{L}_C = \sum_i \vec{\rho}_i \times (m_i \dot{\vec{\rho}}_i)$  тогда принимает вид

$$\vec{L}_C = \sum_i m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i).$$

Оно полностью аналогично равенству  $\vec{L}_O = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i))$ , и получается заменой  $\vec{\rho}_i$  на  $\vec{r}_i$ . Напомним, что используя формулу (2.6) "бац минус цаб", для  $\vec{L}_O$  мы получили выражение

$$\vec{L}_O = \vec{\omega} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_i m_i \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z),$$



или в координатной форме

$$\vec{L}_O = \mathbb{J}_O \vec{\omega}, \quad \text{где} \quad \mathbb{J}_O = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

где моменты инерции  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$ ,  $J_{xy} = J_{yx}$ ,  $J_{xz} = J_{zx}$ ,  $J_{yz} = J_{zy}$  определяются формулами (2.7) и (2.8). Заменяя  $\vec{r}_i = (x_i; y_i; z_i)$  на  $\vec{\rho}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , аналогичным образом получаем

$$\vec{L}_C = \mathbb{J}_C \vec{\omega}, \quad \text{где} \quad \mathbb{J}_C = \begin{pmatrix} J_{\xi\xi} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ J_{\eta\xi} & J_{\eta\eta} & J_{\eta\zeta} \\ J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbb{J}_C$  называется *тензором инерции относительно центра масс C*. Для полноты картины приведем формулы вычисления осевых и центробежных моментов инерции:

$$J_{\xi\xi} = \sum_i m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2), \quad J_{\eta\eta} = \sum_i m_i (\xi_i^2 + \zeta_i^2), \quad J_{\zeta\zeta} = \sum_i m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (2.20)$$

$$J_{\xi\eta} = J_{\eta\xi} = - \sum_i m_i \xi_i \eta_i, \quad J_{\xi\zeta} = J_{\zeta\xi} = - \sum_i m_i \xi_i \zeta_i, \quad J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\eta} = - \sum_i m_i \eta_i \zeta_i. \quad (2.21)$$

### Дифференцирование в подвижной системе координат

При дифференцировании векторов, выраженных через орты  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  и  $\vec{e}_z$  неподвижной (абсолютной) системы координат, дифференцируются только координаты. Если же вектор выражен через орты  $\vec{e}_\xi$ ,  $\vec{e}_\eta$  и  $\vec{e}_\zeta$  подвижной системы координат, то дифференцируются как координаты, так и орты  $\vec{e}_\xi$ ,  $\vec{e}_\eta$ ,  $\vec{e}_\zeta$ . Такое дифференцирование вектора, скажем  $\vec{D}$ , будем обозначать через  $\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{абс}}$ . Поскольку мы переходим к векторам и величинам, связанных с подвижной системой координат и выражающихся через орты  $\vec{e}_\xi$ ,  $\vec{e}_\eta$  и  $\vec{e}_\zeta$ , то естественно ввести дифференцирование, связанное с подвижной системой координат, т.е. дифференцирование, которое выполняется в предположении, что орты  $\vec{e}_\xi$ ,  $\vec{e}_\eta$  и  $\vec{e}_\zeta$  неподвижны. Такое дифференцирование мы будем обозначать через  $\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{подв}}$ . Найдем связь между векторами  $\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{абс}}$  и  $\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{подв}}$ .

Пусть  $\vec{D} = a\vec{e}_\xi + b\vec{e}_\eta + c\vec{e}_\zeta$  – разложение вектора  $\vec{D}$  в подвижной системе координат. Тогда дифференцирование в этой системе координат вектора  $\vec{D}$  равно

$$\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{подв}} = \dot{a}\vec{e}_\xi + \dot{b}\vec{e}_\eta + \dot{c}\vec{e}_\zeta. \quad (2.22)$$

Применяя формулы Пуассона (1.8), получаем, что дифференцирование в абсолютной системе координат вектора  $\vec{D}$  равно

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{абс}} &= \dot{a}\vec{e}_\xi + a\dot{\vec{e}}_\xi + \dot{b}\vec{e}_\eta + b\dot{\vec{e}}_\eta + \dot{c}\vec{e}_\zeta + c\dot{\vec{e}}_\zeta = \dot{a}\vec{e}_\xi + \dot{b}\vec{e}_\eta + \dot{c}\vec{e}_\zeta + a(\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi) + b(\vec{\omega} \times \vec{e}_\eta) + c(\vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta) = \\ &= \dot{a}\vec{e}_\xi + \dot{b}\vec{e}_\eta + \dot{c}\vec{e}_\zeta + \vec{\omega} \times (a\vec{e}_\xi + b\vec{e}_\eta + c\vec{e}_\zeta) = \dot{a}\vec{e}_\xi + \dot{b}\vec{e}_\eta + \dot{c}\vec{e}_\zeta + \vec{\omega} \times \vec{D}. \end{aligned}$$

Отсюда и (2.22) получаем

$$\left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{абс}} = \left. \frac{d\vec{D}}{dt} \right|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{D}. \quad (2.23)$$

## Основные уравнения в подвижной системе координат

Применяя (2.23) к первому из уравнений (2.15),

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}},$$

получаем

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}}$$

Аналогично применяя (2.23) к (2.18) получим

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \sum_i \vec{e}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}.$$

Поскольку  $\vec{L}_C = \mathbb{J}_C \vec{\omega}$ , и учитывая, что тензор инерции  $\mathbb{J}_C$  состоит из постоянных величин при дифференцировании в подвижной системе координат, получаем

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \sum_i \vec{e}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}}.$$

Уравнения

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}} \quad (2.24)$$

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = \sum_i \vec{e}_i \times \vec{F}_{i,\text{внеш}} = \vec{M}_C \quad (2.25)$$

называются *основными уравнениями движения твердого тела в подвижной системе координат*. Иногда их называют *уравнениями движения свободного твердого тела* [3].

## Глава 3

# Движение твердого тела по плоскости

В этой главе рассматривается движение выпуклого твердого тела по плоскости. Сперва мы приводим общие уравнения такого движения, а затем конкретизируем их вид в зависимости от характера сцепления тела и плоскости (то есть, от типа трения). Основной иллюстрацией к теоретическому материалу является движение геометрически простейшего твердого тела – однородного шара.

### 3.1 Движение по поверхности

Пусть твердое тело, ограниченное поверхностью  $S$  движется по некоторой неподвижной поверхности  $P$  (например, плоскости). Предположим сперва, что поверхность  $S$  выпуклая и

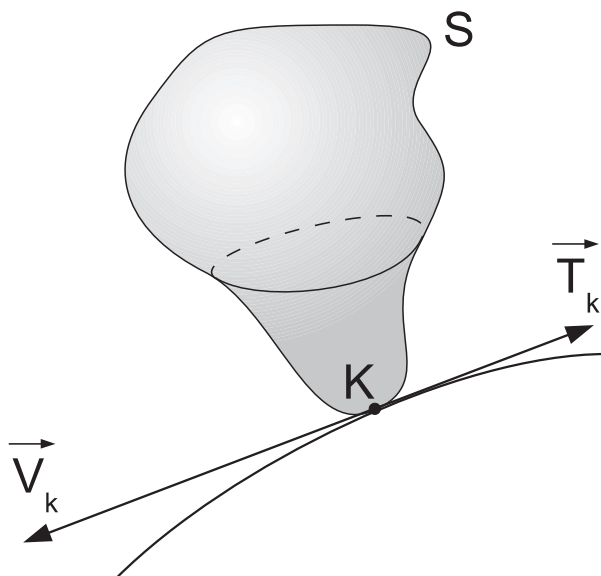


Рис. 3.1:

соприкосновение тела с  $P$  происходит в одной точке, скажем  $K$ , которая называется (*точкой касания*). Тогда скорость  $\vec{v}_K$  точки касания  $K$  лежит в общей касательной плоскости  $T_K$  поверхностей  $S$  и  $P$  в точке  $K$  (если  $P$  – плоскость, то касательная плоскость совпадает с  $P$ ), см. рис. 3.1. Скорость  $\vec{v}_K$  называется *скоростью скольжения* тела по поверхности  $P$ .

Если во время движения  $\vec{v}_K = 0$ , то говорят, что тело *движется без скольжения*, или тело *катится* по  $P$ , а поверхность  $P$  называется *шероховатой* (иногда говорят, *абсолютно шероховатой*) [8].

### Реакция опоры

В точке  $K$  со стороны поверхности  $P$  на тело действует сила  $\vec{R}$ , которая называется *реакцией*. Разложим реакцию на составляющие

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau,$$

где составляющая  $\vec{R}_n$  направлена вдоль внешней нормали к поверхности  $P$  в точке  $K$ . Сила  $\vec{R}_n$  называется *нормальной реакцией*.

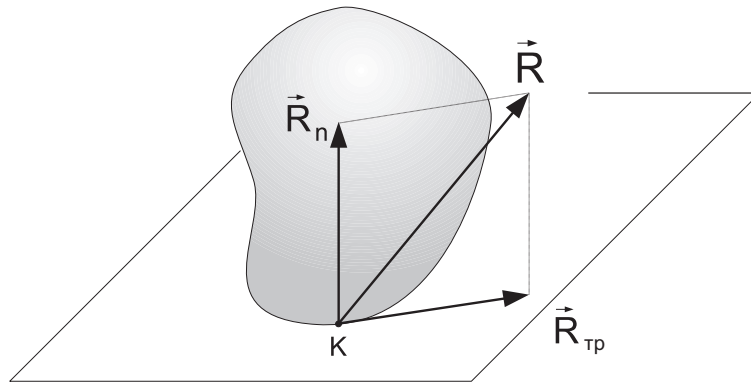


Рис. 3.2: .

Составляющая  $\vec{R}_\tau$  лежит в общей касательной плоскости к поверхностям  $S$  и  $P$  в точке  $K$ , и называется *силой трения*. В связи с этим разложение реакции на составляющие часто приводится в виде

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

где  $\vec{N} = \vec{R}_n$  – нормальная реакция (или нормальная составляющая реакции), и  $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{R}_\tau$  – сила трения, см. рис. 3.2. Ниже мы используем именно такое представление реакции.

Ясно, что движение тела по поверхности зависит от закона трения, который устанавливается эмпирически.

### Виды трения

Трение между двумя соприкасающимися телами происходит вследствие наличия сцепления у прижатых друг к другу тел. Несмотря на то, что трение является одним из самых распространенных явлений природы и встречается практически во многих задачах механики, точные законы трения до сих пор не установлены. Поэтому при учете сил трения пользуются законами, которые носят в основном качественный характер и представляют собой некоторое приближение к действительности.

Сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , которая препятствует скольжению одного тела относительно другого, называется *силой трения, препятствующей скольжению*. Следует отличать трение

при относительном покое соприкасающихся тел (статическое трение) и трение при их относительном движении (трение движения). Согласно законам трения Кулона, при покое величина  $|\vec{F}_{\text{тр}}|$  не превосходит своего максимального значения, равного  $k|\vec{N}|$ ,

$$\max |\vec{F}_{\text{тр}}| \leq k|\vec{N}| \quad (3.1)$$

где величина  $k \geq 0$  называется коэффициентом трения.

При нулевой скорости точки касания,  $\vec{v}_K = 0$ , обычно предполагается что  $|\vec{F}_{\text{тр}}| < k|\vec{N}|$ , и в этом случае  $\vec{F}_{\text{тр}}$  называется силой трения покоя.

Если  $\vec{v}_K \neq 0$ , то

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = k|\vec{N}| \quad (3.2)$$

а  $\vec{F}_{\text{тр}}$  называется силой трения скольжения [6], [8]. Направление  $\vec{F}_{\text{тр}}$  противоположно скорости  $\vec{v}_K$ .

**Задача 3.1** При каком наибольшем угле наклона  $\alpha$  груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, если коэффициент трения груза о плоскость равен  $k_0$  ?

Ответ:  $\alpha = \arctan k_0$ .

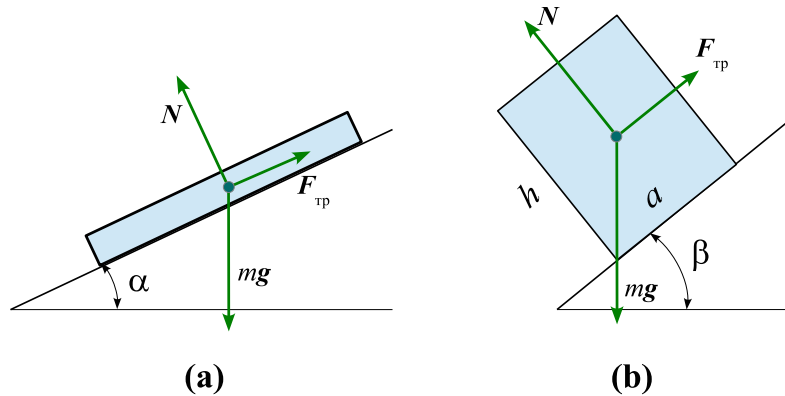


Рис. 3.3: К задаче 3.2.

**Задача 3.2** На наклонной плоскости стоит коробка (см. рис. 3.3 (a)) со стороной  $a$  и высотой  $h$ , заполненная гвоздями. Дан коэффициент трения  $k_0$ . Плоскость медленно поднимают. Что произойдет раньше: коробка опрокинется или скатится?

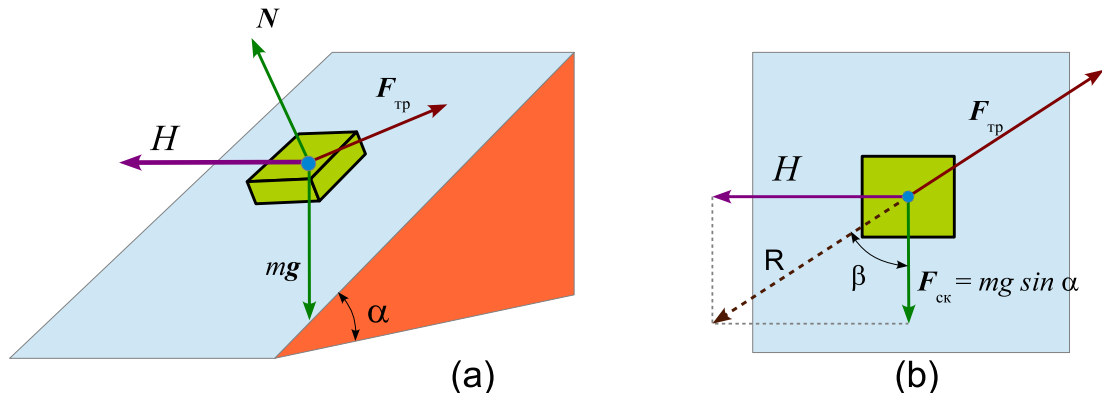


Рис. 3.4: (а) К задаче 3.3, (б) проекция сил на наклонную плоскость.

**Решение:** Из рисунка 3.3 (б) определяем, что угол опрокидывания  $\beta$  равен  $\beta = \arctan \frac{a}{h}$ . Из предыдущей задачи  $\alpha = \arctan k_0$ . Если  $\alpha > \beta$ , то коробка опрокинется, если  $\alpha < \beta$ , то коробка скатится.

**Задача 3.3** На наклонной плоскости стоит груз массы  $m$ , коэффициент (кулоновского) трения  $k_0$ , угол наклона плоскости  $\alpha$ . На груз начинают давить с силой  $H$  в горизонтальном направлении, перпендикулярном склону плоскости, см. рис. 3.4. При каком минимальном  $H$  груз начнет двигаться и в каком направлении?

**Решение:** На рис. 3.4(б) изображена проекция на поверхность наклонной плоскости сил, действующих на тело. Так как трение сухое, то  $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq k_0 |\vec{N}| = k_0 mg \cos \alpha$  и равенство имеет место уже во время движения. По условию, вектора  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{ск}}$ , где  $|\vec{F}_{\text{ск}}| = mg \sin \alpha$ , ортогональны. Соответственно, минимальное значение  $H$  определяется из условия  $F_{\text{ск}}^2 + H^2 = k_0^2 N^2$ , или  $H^2 + (mg \sin \alpha)^2 = k_0^2 (mg \cos \alpha)^2$ . Тогда

$$H_{\min} = mg \sqrt{k_0^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

Получаем, что такая сила существует, если  $\text{tg } \alpha \leq k_0$  (см. задачу 3.1). Направление действия результирующей скатывающей силы, угол  $\beta$  на рис. 3.4(б), определяется из условия  $\text{tg } \beta = H/F_{\text{ск}}$ . Соответственно  $\text{tg } \beta_{\min} = \sqrt{k_0^2 \text{ctg}^2 \alpha - 1}$ .

### Движение тела по плоскости

При изучении движения твердого тела по плоскости традиционно предполагается, что опорная плоскость (то есть, та фиксированная плоскость, по которой происходит движение) совпадает с плоскостью  $Oxy$  неподвижной (абсолютной) системы координат  $(x, y, z)$ . Тело всегда находится в полупространстве  $z \geq 0$ , и в типичной ситуации касается опорной плоскости в одной точке  $K$ . Орт  $e_z$  удобно обозначить как вектор  $\vec{\gamma}$ , см. Рис. 3.5.

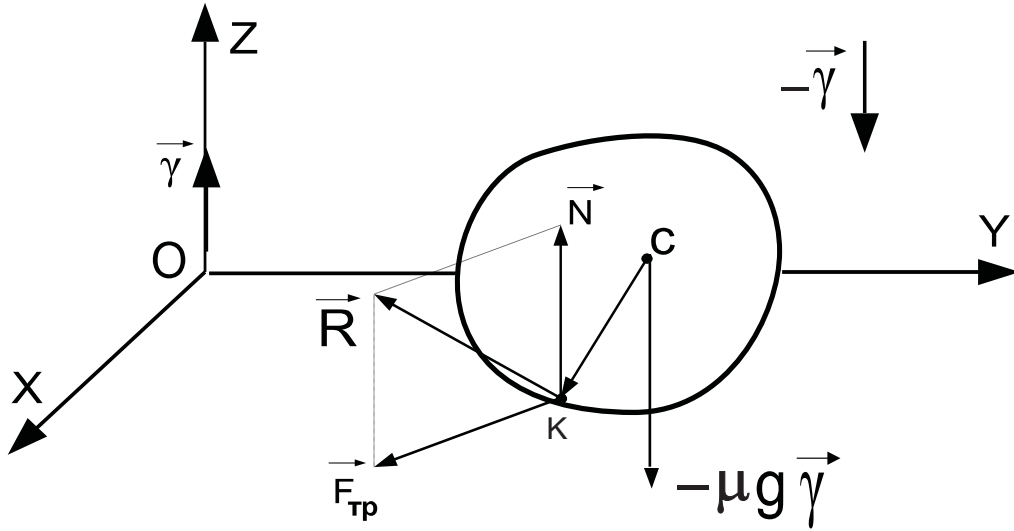


Рис. 3.5: .

Внешние силы, действующие на тело, суть сила тяжести  $-\mu g \vec{\gamma}$  и реакция опоры (в нашем случае, плоскости  $Oxy$ )  $\vec{R}$ , то есть

$$\sum_i \vec{F}_{i,\text{внеш}} = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{R}.$$

Обозначим через  $\vec{q}_K$  вектор с началом в центре масс  $C$  и концом в точке касания  $K$ , то есть  $\vec{q}_K$  есть радиус-вектор точки  $K$  в подвижной системе координат. Поскольку сила тяжести  $-\mu g \vec{\gamma}$  приложена в центре масс  $C$ , то момент этой силы относительно  $C$  равен нулю. Что касается реакции опоры  $\vec{R}$ , то согласно (2.5), ее момент относительно  $C$  равен  $\vec{q}_K \times \vec{R}$ . Основные уравнения (2.24), (2.25) движения твердого тела тогда принимают вид

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{R}$$

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = \vec{q}_K \times \vec{R}$$

В этих уравнениях нам неизвестны вектор-функции  $\vec{v}_C$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{q}_K$  и вектор  $\vec{\gamma}$  в подвижной системе координат. Поэтому для замкнутости системы требуются еще два (как минимум) уравнения. Так как  $\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = 0$ , то в силу (2.23),

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{\gamma} = 0$$

Далее, согласно формуле (1.11) Эйлера о связи между скоростями точек тела, имеем

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{q}_K,$$

где  $\vec{v}_K$  – скорость точки касания  $K$ . Поскольку точка касания всегда принадлежит плоскости  $Oxy$ , то вектор  $\vec{v}_K$  параллелен этой плоскости, то есть перпендикулярен вектору  $\vec{\gamma}$ ,

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{v}_K = \vec{\gamma} \cdot (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{q}_K) = 0$$

В результате мы получаем следующую (общую) систему уравнений движения твердого тела на плоскости:

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{R} \quad (3.3)$$

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = \vec{\rho}_K \times \vec{R} = \vec{M}_C \quad (3.4)$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \omega \times \vec{\gamma} = 0 \quad (3.5)$$

$$\vec{\gamma} \cdot (\vec{v}_C + \omega \times \vec{\rho}_K) = 0 \quad (3.6)$$

Заметим, что в приведенной системе нам фактически не известна реакция опоры  $\vec{R}$ , которая зависит от вида трения.

### Движение однородного шара по плоскости

Рассмотрим движение твердого однородного шара  $B$  радиуса  $R_0$  и массы  $\mu$  по плоскости  $P$ . В данном случае мы будем использовать основные уравнения движения твердого тела как в подвижной, так и в неподвижной системах координат. Начнем с упрощения уравнения (3.4).

Из геометрических соображений следует, что матрица  $\mathbb{J}_C$  (тензор инерции) диагональная с одинаковыми главными (осевыми) моментами инерции, равными  $J = \frac{2}{5} R_0^2 \mu$ , см. пример 2.1, равенство 2.12. Поэтому  $\mathbb{J}_C \vec{\omega} = J \vec{\omega}$ . Отсюда вытекает, что

$$\vec{\omega} \times \mathbb{J}_C \vec{\omega} = J \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0.$$

Согласно (2.23),

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}}.$$

Поэтому левая часть равенства (3.4) принимает вид

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}}.$$

Упростим теперь правую часть равенства (3.4). Центр масс  $C$  совпадает с центром шара. Поэтому радиус-вектор  $\vec{\rho}_K$  точки касания шара с плоскостью  $P$  перпендикулярен плоскости  $P$ , и его координаты в неподвижной системе координат имеют вид

$$\vec{\rho}_K = \{0; 0; -R_0\} \quad (3.7)$$

Поскольку  $\vec{\rho}_K$  коллинеарен нормальной реакции  $\vec{N}$ , то

$$\vec{\rho}_K \times \vec{R} = \vec{\rho}_K \times (\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) = \vec{\rho}_K \times \vec{N} + \vec{\rho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{\rho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Таким образом, уравнение (3.4) принимает вид

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{\varrho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Первое равенство (3.3) мы сразу запишем в абсолютной (неподвижной) системе координат, как равенство (2.15):

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{абс}} = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Итак, первые два уравнения системы (3.3)–(3.6) в нашем случае принимают следующий вид

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{абс}} = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (3.8)$$

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{\varrho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (3.9)$$

Запишем уравнения (3.8), (3.9) в координатной форме. В абсолютной (неподвижной) системе координат  $\vec{v}_C = \{\dot{x}_C; \dot{y}_C; \dot{z}_C\}$ ,  $\vec{\omega} = \{\omega_x; \omega_y; \omega_z\}$ . Поскольку вектор  $\vec{F}_{\text{тр}}$  параллелен плоскости  $Oxy$ , а вектор  $\vec{N}$  перпендикулярен плоскости  $Oxy$ , то  $\vec{F}_{\text{тр}} = \{F_x; F_y; 0\}$ ,  $\vec{N} = \{0; 0; N\}$ . Из (3.7) получаем координаты векторного произведения

$$\vec{\varrho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}} = \{R_0 F_y; -R_0 F_x; 0\}.$$

Тогда уравнения (3.8), (3.9) в координатах принимают следующий вид

$$\begin{cases} \mu \ddot{x}_C = F_x, & \mu \ddot{y}_C = F_y, & \mu \ddot{z}_C = -\mu g + N \\ \frac{2}{5} \mu R_0^2 \dot{\omega}_x = R_0 F_y, & \frac{2}{5} \mu R_0^2 \dot{\omega}_y = -R_0 F_x, & \frac{2}{5} \mu R_0^2 \dot{\omega}_z = 0. \end{cases}$$

Ясно, что  $z_C = R_0$ ,  $\dot{z}_C = 0$ . Поэтому

$$N = \mu g, \quad \vec{N} = \mu g \vec{\gamma}. \quad (3.10)$$

Система уравнений (3.8), (3.9) в векторной форме принимает вид

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (3.11)$$

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{\varrho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (3.12)$$

В координатной форме уравнения (3.8), (3.9) записываются в виде

$$\mu \ddot{x}_C = F_x, \quad \mu \ddot{y}_C = F_y, \quad z_C = R_0, \quad (3.13)$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{5}{2} \cdot \frac{F_y}{\mu R_0}, \quad \dot{\omega}_y = -\frac{5}{2} \cdot \frac{F_x}{\mu R_0}, \quad \dot{\omega}_z = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, проекция вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  на ось  $Oz$  постоянная. Во время движения она равна начальному значению  $\omega_z^0$ .

Отметим, что *уравнения* (3.13), (3.14) *справедливы для любого характера контакта шара с плоскостью*. Поскольку неизвестных больше, чем уравнений,<sup>1</sup> то необходимо добавить уравнения, учитывающие характер контакта шара с плоскостью. Ниже мы рассматриваем два случая: плоскость шероховатая (скольжение отсутствует) и плоскость гладкая (отсутствуют силы сцепления, что означает как правило, что сила  $\vec{F}_{\text{тр}}$  трения скольжения зависит от нормальной реакции).

## 3.2 Движение по шероховатой плоскости

Ранее была получена общая система уравнений (3.3) – (3.6) движения твердого выпуклого тела по плоскости. Рассмотрим изменения, которые надо внести в эту систему для шероховатой плоскости. Напомним, что первое уравнение (3.3) является фактически вторым законом Ньютона для системы материальных точек. Второе уравнение (3.4) является уравнением моментов и не зависит явным образом от характера контакта тела и плоскости. Третье уравнение (3.5) отражает условие того, что вектор  $\vec{\gamma}$  не меняется в абсолютной (неподвижной) системе координат. Итак, первые три уравнения общей системы не меняются. Что касается четвертого уравнения (3.6), то оно отражает тот факт, что точка касания тела с плоскостью движется по плоскости  $Oxy$ , и данное уравнение конкретизируется следующим образом. Шероховатость плоскости означает, что вектор скорости  $\vec{v}_K$  точки касания  $K$  равен нулю (отсутствует скольжение),

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \vec{\rho}_K = 0.$$

В результате мы получаем следующую (общую) систему уравнений движения твердого тела по шероховатой плоскости:

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{R} \quad (3.15)$$

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = \vec{\rho}_K \times \vec{R} = \vec{M}_C \quad (3.16)$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \boldsymbol{\omega} \times \vec{\gamma} = 0 \quad (3.17)$$

$$\vec{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \vec{\rho}_K = 0 \quad (3.18)$$

### Движение однородного шара по шероховатой плоскости

Применим систему уравнений (3.15) – (3.18) к случаю движения однородного шара по шероховатой плоскости. Ранее было показано, что первые два уравнения сводятся к системе уравнений (3.11)–(3.14) в векторной и координатной формах, которые записаны в абсолютной системе координат. В этой системе координат

$$\boldsymbol{\gamma} = \{0; 0; 1\}, \quad \vec{\rho}_K = \{0; 0; -R_0\},$$

<sup>1</sup>Неизвестные суть  $x_C, y_C, \omega_x, \omega_y, F_x, F_y$ . Содержательных уравнений четыре, поскольку уравнения  $z_C = R_0, \dot{\omega}_z = 0$  тривиальны.

см. (3.7). Поэтому из (3.18) получаем

$$\vec{v}_C = -(\boldsymbol{\omega} \times \vec{\rho}_K) = -R_0\{\omega_y; -\omega_x; 0\}, \quad \text{следовательно } \dot{x}_C = R_0\omega_y, \quad \dot{y}_C = -R_0\omega_x.$$

Дифференцируя последние два равенства, получим

$$\ddot{x}_C = R_0\dot{\omega}_y, \quad \ddot{y}_C = -R_0\dot{\omega}_x.$$

Используя (3.13) и (3.14), получим систему

$$\begin{cases} R_0\mu\dot{\omega}_y = F_x, & R_0\mu\dot{\omega}_x = -F_y, \\ \dot{\omega}_x = \frac{5}{2} \cdot \frac{F_y}{\mu R_0}, & \dot{\omega}_y = -\frac{5}{2} \cdot \frac{F_x}{\mu R_0}. \end{cases}$$

Тогда  $\dot{\omega}_x = -\frac{5}{2}\dot{\omega}_x$  и, следовательно,  $\dot{\omega}_x = 0$ . Аналогично  $\dot{\omega}_y = 0$ . Таким образом, **однородный шар вращается с постоянной угловой скоростью**  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x^0; \omega_y^0; \omega_z^0\}$ . **Центр масс движется с постоянной скоростью**  $\vec{v}_C = -R_0\{\omega_y^0; -\omega_x^0; 0\}$ . Нетрудно проверить, что векторы  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\vec{v}_C$  ортогональны. Отметим, что в согласно (3.11), сила  $\vec{F}_{\text{тр}}$  трения скольжения равна нулю,  $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{0}$ .

### 3.3 Движение по идеально гладкой плоскости

В этом параграфе мы рассмотрим изменения, которые надо внести в общую систему уравнений (3.3) – (3.6) для случая гладкой плоскости. Как и для шероховатой плоскости, не изменится вид первых трех уравнений общей системы (напомним, что первое уравнение (3.3) является фактически вторым законом Ньютона для системы материальных точек; второе уравнение (3.4) является уравнением моментов и не зависит явным образом от характера контакта тела и плоскости; третье уравнение (3.5) отражает условие того, что вектор  $\vec{\gamma}$  не меняется в абсолютной системе координат). Четвертое уравнение (3.6) отражает тот факт, что точка касания тела с плоскостью движется по плоскости  $Oxy$ . В отличие от случая шероховатой плоскости это уравнение не имеет существенной конкретизации. Для идеально гладкой плоскости к системе (3.3) – (3.6) добавляется уравнение, отражающее зависимость величины  $|\vec{F}_{\text{тр}}|$  силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  трения скольжения от величины  $N = |\vec{N}|$  нормальной реакции  $\vec{N}$ . Напомним, что как правило, предполагается линейная зависимость

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = kN,$$

где  $k > 0$  – некоторый коэффициент трения, см. равенство (3.2). Предполагается также, что скорость  $\vec{v}_K$  точки касания и сила  $\vec{F}_{\text{тр}}$  трения скольжения коллинеарны и контрнаправлены. Удобно ввести орт  $\vec{v}_0$ , который сонаправлен вектору  $\vec{v}_K$ ,

$$\vec{v}_K = v_K \vec{v}_0,$$

где  $v_K = |\vec{v}_K|$ . Тогда

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -kN \vec{v}_0.$$

В результате мы получаем следующую (общую) систему уравнений движения твердого тела по гладкой плоскости:

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \mu (\vec{\omega} \times \vec{v}_C) = -\mu g \vec{\gamma} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \quad (3.19)$$

$$\mathbb{J}_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{J}_C \vec{\omega}) = \vec{\rho}_K \times (\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) \quad (3.20)$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \Big|_{\text{подв}} + \vec{\omega} \times \vec{\gamma} = 0 \quad (3.21)$$

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{v}_K = \vec{\gamma} \cdot (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_K) = 0 \quad (3.22)$$

$$\vec{v}_K = |\vec{v}_K| \vec{v}_0 = v_K \vec{v}_0 \quad (3.23)$$

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k |\vec{N}| \vec{v}_0 = -k N \vec{v}_0 \quad (3.24)$$

### Движение однородного шара по гладкой плоскости

Применим систему уравнений (3.19) – (3.24) к случаю движения однородного шара по гладкой плоскости. Так же, как в случае с шероховатой плоскостью мы запишем первые два уравнения в абсолютной системе координат (см. уравнения (3.11), (3.12)):

$$\mu \frac{d\vec{v}_C}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{F}_{\text{тр}}, \quad J \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\text{абс}} = \vec{\rho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Продифференцируем в абсолютной системе координат равенство  $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_K$ . Учтывая, что в этой системе координат вектор  $\vec{\rho}_K$  не меняется, получим

$$\dot{\vec{v}}_K = \dot{\vec{v}}_C + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_K + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_K = \dot{\vec{v}}_C + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_K.$$

Используя вышеприведенные равенства (3.11) и (3.12), имеем

$$\dot{\vec{v}}_K = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{F}_{\text{тр}} + \frac{1}{J} \left( \vec{\rho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}} \right) \times \vec{\rho}_K.$$

Применим к последнему слагаемому формулу (2.6) "бац минус цаб" :

$$\left( \vec{\rho}_K \times \vec{F}_{\text{тр}} \right) \times \vec{\rho}_K = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{\rho}_K^2 - \vec{\rho}_K \left( \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{\rho}_K \right) = \vec{F}_{\text{тр}} R_0^2.$$

Здесь мы учли, что поскольку векторы  $\vec{F}_{\text{тр}}$ ,  $\vec{\rho}_K$  ортогональны, то  $\vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{\rho}_K = 0$ . Тогда

$$\dot{\vec{v}}_K = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{F}_{\text{тр}} + \frac{5}{2\mu R_0^2} \cdot \vec{F}_{\text{тр}} R_0^2 = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{F}_{\text{тр}} + \frac{5}{2\mu} \vec{F}_{\text{тр}} = \frac{7}{2\mu} \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Мы получили достаточно естественное равенство

$$\boxed{\dot{\vec{v}}_K = \frac{7}{2\mu} \vec{F}_{\text{тр}}} \quad (3.25)$$

показывающее, что ускорение точки касания пропорционально силе трения скольжения. Левая часть, в силу (3.23), равна

$$\dot{\vec{v}}_K = \dot{v}_K \vec{v}_0 + v_K \dot{\vec{v}}_0.$$

Правая часть равенства (3.25), в силу (3.24), равна

$$\frac{7}{2\mu} \vec{F}_{\text{тр}} = -\frac{7}{2\mu} kN \vec{v}_0.$$

Тогда

$$\dot{v}_K \vec{v}_0 + v_K \dot{\vec{v}}_0 = -\frac{7}{2\mu} kN \vec{v}_0. \quad (3.26)$$

Отсюда вытекает, что

$$\dot{\vec{v}}_0 = \vec{0}$$

так как  $\vec{v}_0$  – орт, и если  $\dot{\vec{v}}_0 \neq \vec{0}$ , то векторы  $\vec{v}_0, \dot{\vec{v}}_0$  ортогональны. Таким образом, направление силы трения скольжения и скорости точки касания не меняются. Равенство (3.26) принимает вид

$$\dot{v}_K = \dot{v}_K \vec{v}_0 = -\frac{7}{2\mu} kN \vec{v}_0 = -\frac{7}{2\mu} k\mu g \vec{v}_0 = -\frac{7}{2} kg \vec{v}_0,$$

что позволяет перейти к скалярному уравнению

$$\dot{v}_K = -\frac{7}{2} kg.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$v_K(t) = v_K(0) - \frac{7}{2} kgt, \quad (3.27)$$

где  $v_K(0)$  – скорость точки касания в начальный момент времени. Мы видим, что **пока выполняется неравенство**

$$v_K(0) > \frac{7}{2} kgt$$

**точка касания скользит по плоскости**, так как  $v_K(t) > 0$ . **Скольжение происходит до момента времени**

$$t_* = \frac{2}{7} \cdot \frac{v_K(0)}{kg}$$

Ясно, что время скольжения увеличивается, если увеличивается начальная скорость скольжения  $v_K(0)$  или уменьшается коэффициент трения  $k$ .

Найдем формулы, описывающие поведение центра масс. Поскольку направление силы трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и скорости точки касания  $\vec{v}_K$  не меняются, то естественно ввести

угол  $\alpha$  между положительным направлением оси  $Ox$  и ортом  $\vec{v}_0$ , со-направленным вектору  $\vec{v}_K$ ,  $\vec{v}_0 = \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$ . Поскольку  $\vec{F}_{\text{тр}} = -k\mu g \vec{v}_0$ , то

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \{-k\mu g \cos \alpha; -k\mu g \sin \alpha\}.$$

Отсюда и уравнения (3.11) следует

$$\mu \ddot{x}_C = F_x = -k\mu g \cos \alpha, \quad \mu \ddot{y}_C = F_y = -k\mu g \sin \alpha, \quad \text{то есть } \ddot{x}_C = -kg \cos \alpha, \quad \ddot{y}_C = -kg \sin \alpha.$$

Дважды интегрируя каждое из последних двух уравнений, получаем

$$x_C(t) = -\frac{t^2}{2}kg \cos \alpha + \dot{x}_C(0)t + x_C(0), \quad y_C(t) = -\frac{t^2}{2}kg \sin \alpha + \dot{y}_C(0)t + y_C(0). \quad (3.28)$$

**Задача 3.4** Докажите, что если векторы  $\vec{v}_0 = \{\cos \alpha; \sin \alpha\}$ ,  $\vec{v}_C(0) = \{\dot{x}_C(0); \dot{y}_C(0)\}$  коллинеарны, то равенства (3.28) являются параметрическими уравнениями прямой. В противном случае равенства (3.28) являются параметрическими уравнениями параболы.

Таким образом, если в начальный момент времени скорость центра масс и скорость точки касания не коллинеарны, то на стадии скольжения **центр масс движется по параболе**. Это происходит до момента времени  $t_*$ .

# Глава 4

## Интегралы движения

В этой главе дается знакомство с классическими законами сохранения импульса, кинетического момента (момента импульса) и энергии. Здесь также обсуждаются понятия конфигурационного пространства и дается краткий обзор различных подходов к исследованию консервативной динамики движения тел (ньютонова потенциальная механика, лагранжева механика и гамильтонова механика).

Математически, **законы сохранения** сводятся к первым интегралам уравнений движения. Обычно, их называют **интегралами движения**. Они относятся, как правило, к изолированным системам, и обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени (однородность и изотропность). Законы сохранения позволяют получить некоторые свойства движений без решения уравнений. Первые интегралы выделяют в фазовом пространстве уравнений подпространства, состоящие из решений. Кроме этого, возможное положение решений может быть определено некоторыми дополнительными ограничениями. Все это приводит к понятию **конфигурационного пространства** или **пространству положений**. Обычно, конфигурационные пространства представляют собой подмногообразия, на которых иногда удобно вводить свои внутренние (локальные) координаты. Это приводит к введению понятия **обобщенных координат**.

### 4.1 Законы сохранения

Закон сохранения, как правило, представляет собой величину или математическое выражение, которое не меняется во время движения. Сохраняемые величины или математические выражения иногда играют важную роль за пределами механики, и носят фундаментальный характер.

#### Закон сохранения импульса

Система материальных точек называется *изолированной*, если отсутствуют внешние силы. Равенство (2.1) для изолированной системы принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{p} = const} \quad (4.1)$$

Это равенство выражает закон сохранения импульса: **импульс изолированной системы не меняется при любых процессах внутри системы**. Из равенства (2.2) получаем, что центр масс изолированной системы движется равномерно и прямолинейно.

**Пример 4.1** *Определение скорости пули с помощью маятника.*

Рассмотрим так называемый баллистический маятник, который представляет собой небольшой шар массой  $m_1$ , подвешенный на длинной нити, см. рис. 4.1. Размеры и материал шара

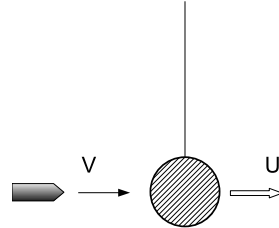


Рис. 4.1: К задаче 4.1.

таковы, что пуля массой  $m_2$ , движущаяся со скоростью  $v$  и попадающая в шар, застревает в нем. Предположим, что после попадания пули шар начинает двигаться со скоростью  $u$ . Считая, что система, состоящая из пули и шара, является изолированной, применим закон сохранения импульса (4.1):  $m_2v = (m_1 + m_2)u$ . Отсюда  $v = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_2}$ .  $\diamond$

Закон сохранения импульса обусловлен однородностью пространства. Под однородностью пространства понимается эквивалентность всех точек пространства друг другу.

### Закон сохранения кинетического момента

Так же, как и закон сохранения импульса, закон сохранения кинетического момента (то есть, момента импульса) справедлив для изолированной системы (отсутствие внешних сил). Для таких систем, в силу равенства (2.5), момент внешних сил  $\vec{M}_O$  равен нулю,  $\vec{M}_O = \vec{0}$ . Тогда из равенства (2.13) получаем

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}.$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{L}_O = const} \tag{4.2}$$

Это равенство выражает закон сохранения кинетического момента: **кинетический момент изолированной системы не меняется при любых процессах внутри системы**.

Закон сохранения кинетического момента обусловлен изотропностью пространства. Под изотропностью пространства понимается эквивалентность всех направлений в пространстве.



## Закон сохранения энергии

Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки массы  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$ . Величина

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

где  $v = |\vec{v}|$ , называется *кинетической энергией материальной точки*. Если механическая система (в частности, твердое тело) состоит из  $N$  материальных точек  $m_1, \dots, m_N$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  соответственно, то величина

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2,$$

где  $v_i = |\vec{v}_i|$ , называется *кинетической энергией системы*.

Предположим, что система материальных точек находится в области, где задано некоторое силовое поле  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ . Поле  $\vec{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$  называется *потенциальным*, если существует функция  $U(x, y, z)$  такая, что

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Функция  $U(x, y, z)$  определена равенствами (4.3) с точностью до аддитивной постоянной, и называется *потенциалом*. Обычно, выбирают точку пространства (эта точка может быть символической бесконечно удаленной точкой) и придают функции  $U(x, y, z)$  наперед заданное значение в этой точке. Такая процедура называется *нормировкой потенциала*. Нормированный потенциал иногда называется *потенциальной энергией*.

Рассмотрим материальную точку  $m$  в потенциальном поле  $\vec{F} = -\text{grad } U$ . Согласно второму закону Ньютона,

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m \frac{dv_y}{dt} = F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m \frac{dv_z}{dt} = F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Продифференцируем выражение  $T + U$  вдоль траекторий движения материальной точки (то есть, будет учитывать приведенные выше равенства). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + U) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + U \right) = m(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z) + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \dot{z} = \\ &= m(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z) - m \frac{dv_x}{dt} \cdot v_x - m \frac{dv_y}{dt} \cdot v_y - m \frac{dv_z}{dt} \cdot v_z \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при движении материальной точки величина  $T + U$  не меняется.

Предположим теперь, что механическая система состоит из  $N$  материальных точек. Для каждой из них справедливы выше приведенные выкладки. Отсюда для системы материальных точек получаем, что

$$T_{\text{кин}} + U_{\text{потен}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^N U(x_i, y_i, z_i) = \text{const} \quad (4.4)$$

Первая часть  $T_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$  суммы в левой части равенства (4.4) является кинетической энергией системы, а вторая часть  $U_{\text{потен}} = \sum_{i=1}^N U(x_i, y_i, z_i)$  – потенциальной энергией системы.

Сумма  $T_{\text{кин}} + U_{\text{потен}} = E$  кинетической и потенциальной энергий называется *полной (механической) энергией системы*. Равенство (4.4) выражает закон сохранения полной механической энергии системы: **при движении изолированной системы материальных точек полная механическая энергия системы не меняется.**

Закон сохранения полной механической энергии обусловлен однородностью пространства и времени. Под однородностью времени понимается эквивалентность различных моментов времени между собой.

Отметим, что равенство (4.4) выражает не только закон сохранения энергии, но и закон ее превращения, поскольку описывает взаимопревращения кинетической и потенциальной энергий.

### Кинетическая энергия вращения твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг мгновенной оси вращения  $l$ , которая задается сонаправленным ортом  $\vec{e}$ . Тогда угловая скорость может быть записана в виде  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$ , где  $\omega = |\vec{\omega}|$ . Поместим начало системы координат  $O$  на ось  $l$ . Как обычно, твердое тело представим в виде системы материальных точек  $m_i$ , определяемых радиус-векторами  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В силу (1.2),  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Тогда кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$  равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2.$$

Применяя формулу (2.6), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2]. \quad (4.5)$$

Так как  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}$ , то

$$\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 = \omega^2 [\vec{r}_i^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r}_i)^2] = \omega^2 \hat{\varrho}_i^2, \quad \text{где } \hat{\varrho}_i^2 = \vec{r}_i^2 - (pr_{\vec{e}} \vec{r}_i)^2 -$$

– квадрат расстояний от точки  $m_i$  до оси вращения  $l$ . Сумма

$$I_l = \sum_{i=1}^N m_i \hat{\varrho}_i^2 \quad (4.6)$$

называется *моментом инерции твердого тела относительно оси  $l$* . Таким образом, кинетическая энергия вращения твердого тела относительно оси равна

$$T = \frac{1}{2} I_l \omega^2 \quad (4.7)$$

**Задача 4.1** Решить задачу 2.13 с помощью законов сохранения.

**Задача 4.2** Вертикально стоящее бревно высоты  $h$  начинает падать (без начального толчка), см. рис. 4.2 (а). Определить скорость макушки бревна в момент ее удара о землю.

Ответ: Если бревно однородное и одинаковое по толщине, его потенциальная энергия (в стоячем положении) равна  $\frac{1}{2}mgh$  (показать!). В момент приземления вся энергия бревна превращается в энергию вращения  $\frac{1}{2}I\omega^2 = I\frac{v^2}{2h^2}$ . Когда  $h$  большое и бревно не толстое, его можно рассматривать как прямой тонкий стержень. Тогда  $I = \frac{1}{3}mh^2$ , и из равенства потенциальной энергии и кинетической энергии вращения находим, что  $v = \sqrt{3gh}$ . Если бревно относительно толстое, и его можно рассматривать как цилиндр, то  $I = \frac{1}{3}mh^2 + \frac{1}{4}mr^2$  (показать!) и соответственно

$$v = \sqrt{\frac{3gh}{1 + \frac{3}{4}\frac{r^2}{h^2}}}$$

\* Что будет в том случае, когда бревно нужно рассматривать в виде конуса?

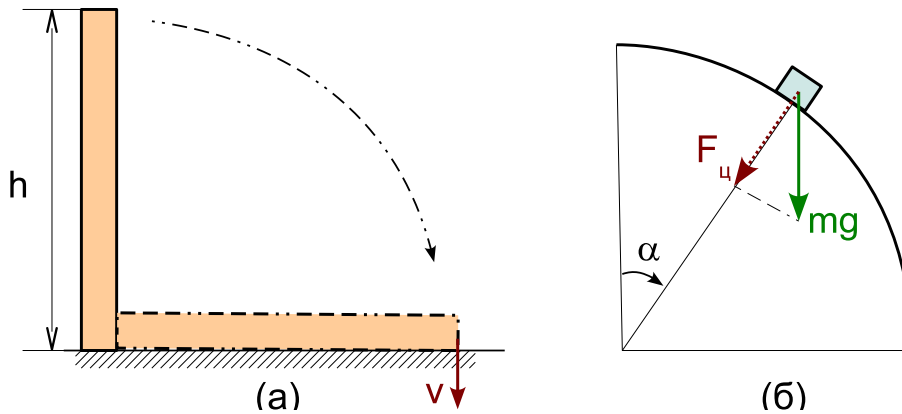


Рис. 4.2: (а) К задаче 4.2; (б) к задаче 4.4.

**Задача 4.3** Небольшая тележка движется без трения по наклонному пути, в нижней точке которого установлена “мертвая петля” радиусом  $R$ . С какой высоты  $H$  должна начать движение тележка, чтобы пройти петлю, не сорвавшись? Что будет в случае (а) колеса (обруча), (б) шара, (в) сферы, (г) цилиндра (диска) радиуса  $r$ ?

Ответ: В верхней точке петли сила реакции равна нулю и на тело действует только сила тяжести  $mg$ , ускорение тогда будет  $g = v^2/R$ . По закону сохранения энергии

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad H = \frac{1}{2}R$$

- Для “круглого” тела  $g = v^2/(R - r)$  и закон сохранения энергии принимает вид

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{v}{r}$$

Тогда в случае (а) колеса  $I = mr^2$  и  $H = R - r$ ; (б) шара  $I = \frac{2}{5}mr^2$  и  $H = \frac{7}{10}(R - r)$ ; (в) сферы  $I = \frac{2}{3}mr^2$  и  $H = \frac{5}{6}(R - r)$ ; (г) цилиндра  $I = \frac{1}{2}mr^2$  и  $H = \frac{3}{4}(R - r)$ .

**Задача 4.4** Материальная точка находится на макушке абсолютно гладкой сферы радиусом  $R$ , а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние она пройдет прежде чем оторвется от сферы? Что будет в случае стального шарика или шарика от пин-понга, если сфера шероховатая и движение происходит без проскальзывания?

Ответ: Тело сорвется в точке сферы отстоящей от вершины на угол  $\alpha$  от вертикали, где  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .

Подсказка: В точке отрыва центростремительная сила  $F_{Ц}$  равна  $mg \cos \alpha$  – проекции силы тяжести на радиус.

- В случае стального шарика  $\cos \alpha = \frac{10}{17}$ ; в случае шарика от пин-понга (сферической оболочки)  $\cos \alpha = \frac{6}{11}$ .

## 4.2 Конфигурационное пространство

Пусть механическая система (в частности, твердое тело) состоит из  $N$  материальных точек, заданных радиус-векторами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N \in \mathbb{R}^3$ . Предположим, что на систему наложены ограничения, при которых векторы  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  принадлежат некоторому множеству  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3.$$

В частности, если связей нет, то  $\Sigma = \mathbb{R}^3$ . Отметим, что  $\Sigma$  в общем случае может зависеть от времени. Часто множество  $\Sigma$  определяется уравнениями

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

В этом случае говорят, что на систему наложены *голономные связи*. Множество  $\Sigma$  называется *конфигурационным пространством* или *пространством положений*.

**Пример 4.2** Пусть механическая система состоит из одной материальной точки, движущейся по поверхности  $S \subset \mathbb{R}^3$ , задаваемой равенством  $f(x, y, z) = 0$ . Тогда система имеет одно уравнение голономной связи  $f(x, y, z) = 0$ , и конфигурационное пространство  $\Sigma = S$ .

**Пример 4.3** Маятник состоит из материальной точки, подвешенной на невесомом твердом стержне длиной  $l$ . Предположим, что материальная точка колеблется в плоскости  $xOz$  вокруг точки с координатами  $(x_0; 0; z_0)$ . Голономные связи, наложенные на систему, задаются равенствами

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 - l^2 = 0, \quad y = 0.$$

Конфигурационное пространство  $\Sigma$  – окружность.

**Пример 4.4** Твердое тело состоит из большого числа  $N$  материальных точек, определяемых радиус-векторами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ . Уравнения связей имеют вид  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Нетрудно показать, что голономные связи задают систему из  $\frac{N(N-1)}{2}$  уравнений. Тогда при  $N \geq 5$  количество уравнений превысит  $3N$  – количество переменных в пространстве  $\mathbb{R}^{3N}$ . Следовательно, при  $N \geq 5$  уравнения связи зависимы. Можно показать, что конфигурационное пространство  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3N}$  имеет размерность 6, и  $\Sigma$  гомотопно (даже, диффеоморфно)  $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ .

## Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Если конфигурационное пространство является подмногообразием, то оно называется *конфигурационным многообразием*. Его размерность называется *числом степеней свободы голономной системы*. Известно, что каждая точка многообразия имеет окрестность, наделенную системой координат, которую мы будем называть локальной, а сами координаты – *локальными*. При этом, если окрестности с разными системами координат пересекаются, то переход от одной системы координат к другой осуществляется с помощью достаточно гладких функций (эта гладкость функций определяет гладкость многообразия).

Пусть система из  $N$  материальных точек определяет  $k$ -мерное конфигурационное многообразие  $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ . Тогда по теореме о неявной функции в окрестности каждой точки из  $\Sigma$  можно ввести локальные координаты  $(q_1, \dots, q_k) = \vec{q}$  такие, что многообразие  $\Sigma$  определяется равенствами

$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, \dots, q_k, t) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, \dots, q_k, t) \end{cases}$$

Голономные связи называются *стационарными*, если  $\Sigma$  не зависит от времени  $t$ . В этом случае  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В противном случае связи называются *нестационарными*.

Координаты  $(q_1, \dots, q_k) = \vec{q}$  называются *обобщенными координатами*. Их производные по времени  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) = \dot{\vec{q}}$  называются *обобщенными скоростями*.

## 4.3 Обзор механик

В механике исторически сформировалось три основных подхода к описанию механических систем с помощью дифференциальных уравнений. Согласно ученым, которые имели непосредственное отношение к формированию данных подходов, в механике появились Ньютонова, Лагранжева и Гамильтонова механики. В данном параграфе мы приводим краткие характеристики этих механик.

### Ньютонова потенциальная механика

изучает движение системы материальных точек под действием потенциальных сил в 3-мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Ньютонова механическая система (в частности, твердое тело) задается массами точек и потенциальной энергией, которую мы обозначим через  $U$ . Основные наблюдаемые величины (то есть, основные параметры, с помощью которых описывается механическая система) суть следующие

$$\begin{cases} \vec{p} &= \sum_i m_i \vec{v}_i & \text{— импульс} \\ \vec{L}_O &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) & \text{— кинетический момент} \\ E &= \sum_i [\frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(x_i, y_i, z_i)] & \text{— полная энергия} \end{cases}$$

Второй закон Ньютона для одной материальной точки записывается в виде

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} = -grad U} \quad (4.8)$$

где  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  – скорость,  $U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия. Используя основные наблюдаемые величины, второй закон Ньютона (4.8) можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\text{grad } U \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \end{cases} \quad (4.9)$$

Если представить полную энергию в виде

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U \quad (4.10)$$

то систему (4.9) можно записать в следующей форме

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} \end{cases} \quad (4.11)$$

## Лагранжева механика

описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства и функции Лагранжа. Для одной материальной точки  $m$ , лежащей в потенциальном силовом поле  $\vec{F} = -\text{grad } U$  функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  равна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}) \quad (4.12)$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \vec{p}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}.$$

Отсюда и (4.9) получаем *уравнение Лагранжа*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (4.13)$$

Таким образом, ньютонова потенциальная система есть частный случай лагранжевой: конфигурационное пространство суть евклидово пространство, а функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергий.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Отметим, что в общем случае функция Лагранжа задается на кокасательном расслоении конфигурационного пространства.

## Гамильтонова механика

задается четномерным фазовым пространством, наделенным симплектической структурой (симплектическое многообразие), и функцией Гамильтона на фазовом пространстве. Подробное и систематическое изложение гамильтоновой механики можно найти в книгах [1], [3]

Традиционно, локальные координаты на симплектическом многообразии обозначаются через  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (\vec{q}, \vec{p})$ , а функция Гамильтона (гамильтониан) – через  $H(\vec{q}, \vec{p})$ . Число  $n$  является *числом степеней свободы*. В гамильтоновой механике система описывается следующей системой дифференциальных уравнений (в координатной форме)

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1, \dots, n \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.14)$$

или (в векторной форме)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{cases} \quad (4.15)$$

Из (4.11) вытекает, что ньютонова механика включается в гамильтонову механику. Лагранжева механика также включается в гамильтонову: фазовое пространство есть конфигурационное пространство, а гамильтониан и функция Лагранжа связаны так называемым преобразованием Лежандра, см. [1].

# Литература

- [1] **Арнольд В.И.** *Математические методы классической механики*. М.: Эдиториал УРСС, **2000**, с. 408.
- [2] **Архангельский М.М.** *Курс Физики. Механика*. Из-во Просвещение, **1965**, с. 448.
- [3] **Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.** *Теоретическая Механика*. М.: Академия, **2010**, с. 432.
- [4] **Борисов А.В., Мамаев И.С.** *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, **1999**, с. 464.
- [5] **Борисов А.В., Мамаев И.С.** *Динамика твердого тела*. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, **2001**, с. 384.
- [6] **Бухгольц Н.Н.** *Основной курс теоретической механики*. Часть первая. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, **1965**, с. 468.
- [7] **Иванов А.П.** *Основы теории систем с трением*, Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, **2011**.
- [8] **Маркеев А.П.** *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, **1992**, с. 336.
- [9] **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** *Теоретическая физика в 10 томах*, том 1, Механика, М.: Физматлит, **2001**, с. 224.
- [10] **Матвеев А.Н.** *Механика и теория относительности*. М.: Высшая школа, **1986**, с. 320.
- [11] **Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.** *Динамика неголономных связей*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, **1967**, с. 520.