

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Т.А. Леванова

М.А. Комаров

А.К. Крюков

В.А. Костин

Г.В. Осипов

**КАЧЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института
Информационных технологий, математики и механики
для студентов вечернего отделения ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика»
направление «Математическое моделирование»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.85; 519.853.3
ББК 183.4

Леванова Т.А., Комаров М.А., Крюков А.К., Костин В.А., Осипов Г.В. Качественные и численные методы исследования динамических систем на плоскости: Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. 61 с.

Рецензент: д.ф.-м.н. **Д.В. Баландин**

Динамические системы, представляющие собой математические модели некоторых объектов, процессов или явлений, широко востребованы в различных разделах естествознания. Для изучения сложной динамики таких систем необходимо прежде всего научиться применять методы качественного и численного анализа, используемые в различных случаях. Цель данного пособия – дать представление о современных математических подходах и методах в этой области, в первую очередь в рамках нелинейной динамики.

Пособие предназначено для студентов вечернего отделения института Информационных технологий, математики и механики ННГУ, специализирующихся в области математического моделирования. Рекомендуется при изучении дисциплин “Качественные и численные методы исследования динамических систем”. Для успешного усвоения материала необходимо предварительное изучение дисциплины “Дифференциальные уравнения”.

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Планом мероприятий по реализации программы повышения конкурентоспособности ННГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы, при поддержке гранта РФФИ 14-12-00811 и Правительства Российской Федерации (грант №14.В25.31.0008).

Ответственный за выпуск: председатель методической комиссии
Института Информационных технологий, математики и механики ННГУ
к.ф.-м.н., доцент
О.А. Кузенков

УДК 519.85; 519.853.3
ББК 183.4

©Т.А. Леванова, М.А. Комаров, А.К. Крюков,
В.А. Костин, Г.В.Осипов 2015

©Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2015

Оглавление

1. Введение. Базовые понятия теории динамических систем	4
2. Динамические системы на прямой	7
3. Исследование динамических систем на плоскости	10
3.1. Состояния равновесия	10
3.2. Предельные циклы	13
3.3. Метод функции Ляпунова	15
3.4. Метод точечных отображений	20
3.4.1. Устойчивость неподвижной точки	21
3.4.2. Устойчивость предельных циклов	24
3.5. Индексы Пуанкаре	26
3.6. Упражнения	29
4. Асимптотические методы теории колебаний	30
4.1. Разложение в ряд по параметру нелинейности	30
4.2. Метод Линштедта — Пуанкаре	35
4.3. Метод многих масштабов	38
4.4. Метод Ван-дер-Поля	41
4.5. Разрывные колебания, релаксационные системы. Метод быстро-медленных движений	43
4.6. Упражнения	47
5. Бифуркации динамических систем на прямой и плоскости	48
5.1. Бифуркации динамических систем на прямой. Седлоузловая бифуркация	49
5.2. Бифуркации динамических систем на плоскости	50
5.2.1. Седлоузловая бифуркация	52
5.2.2. Транскритическая бифуркация	53
5.2.3. Бифуркация «вилка»	54
5.2.4. Бифуркация Андронова — Хопфа	55
5.3. Упражнения	58
Литература	60

1. Введение. Базовые понятия теории динамических систем

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 в точке пространства x_0 определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, только в пространстве или может описывать пространственно-временную эволюцию.

Предметом рассмотрения данного учебного пособия являются динамические системы. Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы (ДС) — это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т. д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы [1].

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Исследование реальных систем сводится к изучению математических моделей, совершенствование и развитие которых определяются анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же динамическую систему (например, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели.

В операторной форме динамическую систему можно записать в виде

$$x(t) = T_t x(t_0),$$

где T_t — закон (оператор) эволюции. Если этот оператор применить к начальному состоянию $x(t_0)$, то мы получим $x(t)$, то есть состояние в момент времени $t > t_0$. Так как $x(t_0)$ и $x(t)$ принадлежат одному и тому же фазовому пространству динамической системы, то говорят, что оператор T_t отображает фазовое пространство системы на себя. В соответствии с этим можно называть оператор T_t оператором отображения или просто отображением.

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции: $T[a*x(t) + b*y(t)] = a*T_x(t) + b*T_y(t)$. Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется нелинейной. Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно системы с непрерывным и дискретным временем. Системы, для которых отображение $x(t)$ с помощью оператора T может быть определено для любых $t > t_0$ (непрерывно во времени), называют также потоками по аналогии со стационарным течением жидкости. Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют каскадами или системами с дискретным временем.

Способы задания оператора отображения T также могут различаться. Оператор T можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т. д.

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают линейные и нелинейные колебательные системы, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные. Особый класс представляют так называемые автоколебательные системы. Основные свойства указанных систем подробно обсуждаются в литературе по теории колебаний.

Колебательная система называется линейной или нелинейной в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправдана.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют сосредоточенными или точечными системами. Они

описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная. Математические модели распределенных систем — это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. Консервативные системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют гамильтоновыми. Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются неконсервативными. Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются диссипативными. В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Динамические системы называются автономными, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс автоколебательных систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т. д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

В данном учебном пособии рассматриваются качественные и численные методы исследования динамических систем различных типов. Примеры кодов, приведенные в данном учебном пособии, даны на языке Matlab. При подготовке иллюстраций использовался пакет прикладных программ Matlab R2010b.

2. Динамические системы на прямой

Качественное исследование динамических систем подразумевает определение типа (характера) возможных движений в системе **без** точного решения дифференциальных (или разностных) уравнений. Другими словами, задачей качественного исследования является разбиение фазового пространства динамической системы на траектории различных типов, что позволяет получить фазовый портрет системы и сделать выводы о возможных типах динамики исследуемого объекта.

Простейшим типом динамических систем являются автономные динамические системы первого порядка:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathfrak{R}$$

Качественное исследование автономных ДС сводится к определению нулей функции правой части (нахождению состояний равновесия системы, особых точек уравнения)

$$\dot{x} = 0$$

$$f(x) = 0$$

и определению устойчивости состояний равновесия

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

Введем замену переменных $\xi = x - x_0$. Функцию правой части разложим в ряд в окрестности состояния равновесия

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{2}f''(x_0)\xi^2 + \dots$$

$$\dot{\xi} = \dot{x}$$

$$\dot{\xi} = f'(x_0)\xi + \frac{1}{2}f''(x_0)\xi^2 + \dots$$

При рассмотрении динамики системы в окрестности состояния равновесия с учетом выполнения условия $\xi \ll 1$ всеми нелинейными слагаемыми можно пренебречь. Таким образом, в окрестности состояния равновесия можно перейти к изучению системы

$$\dot{\xi} = \lambda\xi,$$

$$\lambda = f'(x_0).$$

Где

Знак λ определяет устойчивость состояния равновесия:

- При $\lambda = f'(x_0) > 0$ - состояние равновесия неустойчиво
- При $\lambda = f'(x_0) < 0$ - состояние равновесия устойчиво

Пример 2.1.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \mu - x^2 \tag{2.1}$$

Проведем качественный анализ рассматриваемой системы. В зависимости от значений параметра μ система (2.1) может иметь разное количество корней. Рассмотрим следующие случаи:

а) $\mu > 0$

Найдем ее состояния равновесия: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$.

Фазовый портрет системы представлен на рисунке 2.1

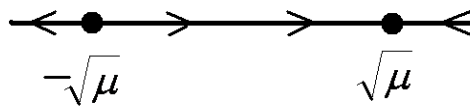


Рисунок 2.1

В случае, когда функция корней не имеет, динамическая переменная монотонно возрастает (убывает) с течением времени

б) $\mu < 0$

Фазовый портрет системы представлен на рисунке 2.2.



Рисунок 2.2

Для численного исследования системы создадим файл с расширением *.m, в котором будем хранить функцию – правую часть уравнения (2.1). Пример такого файла приведен ниже.

```
1 function y=func1(x)
2 y=2-x.*x;
```

Для численного нахождения нулей функции в среде Matlab может быть применена функция *fzeros*. В качестве параметров следует передавать имя функции (имя .m файла), а также начальную точку.

```
>> z=fzero('func1',0.5)
z =
    1.4142
```

Для численного отыскания решения системы применяют различные методы численного интегрирования, которые подробно описаны в литературе [2]. Одним из наиболее распространенных методов численного интегрирования является метод Рунге-Кутты 4 порядка [3, 4].

Метод Рунге-Кутты 4 порядка.

Кратко напомним суть данного метода.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка.

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$$

$$x(t_0) = x_0$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$k_1 = h * F(x(t_0), t_0)$$

$$k_2 = h * F(x(t_0) + \frac{k_1}{2}, t_0 + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = h * F(x(t_0) + \frac{k_2}{2}, t_0 + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = h * F(x(t_0) + k_3, t_0 + h)$$

Здесь h – величина шага по сетке x .

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

Пример 2.2. Численное интегрирование и построение графика.

Рассмотрим систему

$$\dot{\rho} = \rho(\sigma - \rho^2) \tag{2.2}$$

Для численного исследования этой системы в файле “right_hand_side.m” необходимо определить новую функцию – правую часть уравнения (2):

```

1 function dx = right_hand_side(t,x)
2 - s=1.0;
3 - dx = x*(s-x*x);
4 - end

```

В интерпретаторе команд (command window) вводится функция ode45(), реализующая интегрирование Рунге-Кутты 4 порядка:

```

>> y=ode45(@right_hand_side,[0:10],0.01);
>> plot(y.x,y.y);

```

Первый аргумент в функции ode45 – ссылка на функцию (правая часть ДУ), второй – интервал интегрирования (диапазон изменения t), третий аргумент – начальное условие (в общем случае вектор начальных условий). Функция plot(x,y) строит график функции $y(x)$. Результатом выполнения программы является пространственно-временная диаграмма, показывающая изменение переменной x в зависимости от времени t (рисунок 2.3). Теперь попробуйте самостоятельно построить аналогичный график, изменив значение параметра s (сигма) $s=-1$, и выбрав в качестве начального условия точку $x_0=0.99$.

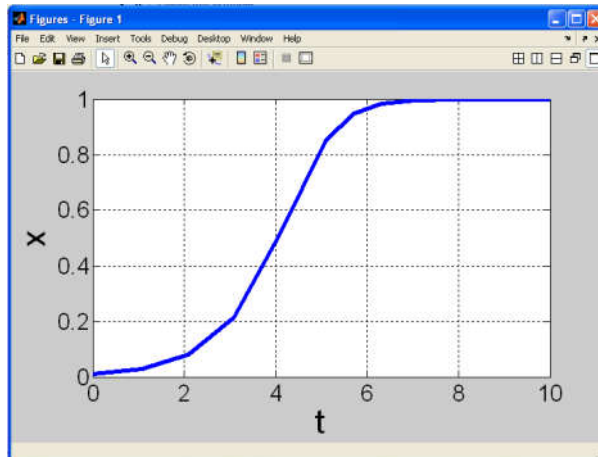


Рисунок 2.3 – Численное решение уравнения (2.2)

3. Исследование динамических систем на плоскости

Автономные динамические системы второго порядка, или системы на плоскости, имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Будем считать, что фазовая поверхность представляет собой обычную плоскость. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ будем считать аналитическими на всей фазовой плоскости.

Наиболее интересными режимами с точки зрения приложений являются установившиеся режимы, т.е. такие состояния к которым система приходит с течением времени. Им соответствуют аттракторы на фазовой плоскости. В грубых динамических системах на плоскости аттракторами могут быть: (а) устойчивые состояния равновесия, (б) устойчивые предельные циклы.

3.1. Состояния равновесия

Поиск состояний равновесия в случае динамических систем на плоскости проводится аналогично случаю одномерных систем: из условия равенства нулю фазовых скоростей в состоянии равновесия ($\dot{x} = \dot{y} = 0$) следует, что в состояниях равновесия (x_0, y_0) выполняется условие:

$$\begin{aligned}P(x_0, y_0) &= 0, \\ Q(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Решая эту систему уравнений, найдем координаты состояний равновесия (x_0, y_0) . Рассмотрим малые отклонения от состояния равновесия (x_0, y_0) : $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$. Скорости их изменения во времени:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta + [p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots], \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta + [q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots],\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned}a &= P'_x(x_0, y_0), \\ b &= P'_y(x_0, y_0), \\ c &= Q'_x(x_0, y_0), \\ d &= Q'_y(x_0, y_0),\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Так как мы рассматриваем систему в малой окрестности состояния равновесия, то можем исследовать линейное приближение, отбросив все нелинейные члены. Получившаяся после этого линейная система

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Составленный из правых частей системы определитель

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.5)$$

Задаёт характеристическое уравнение. Корни полученного характеристического уравнения далее используются при анализе устойчивости.

$$\begin{aligned} \sigma &= -(a + d) \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ \lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

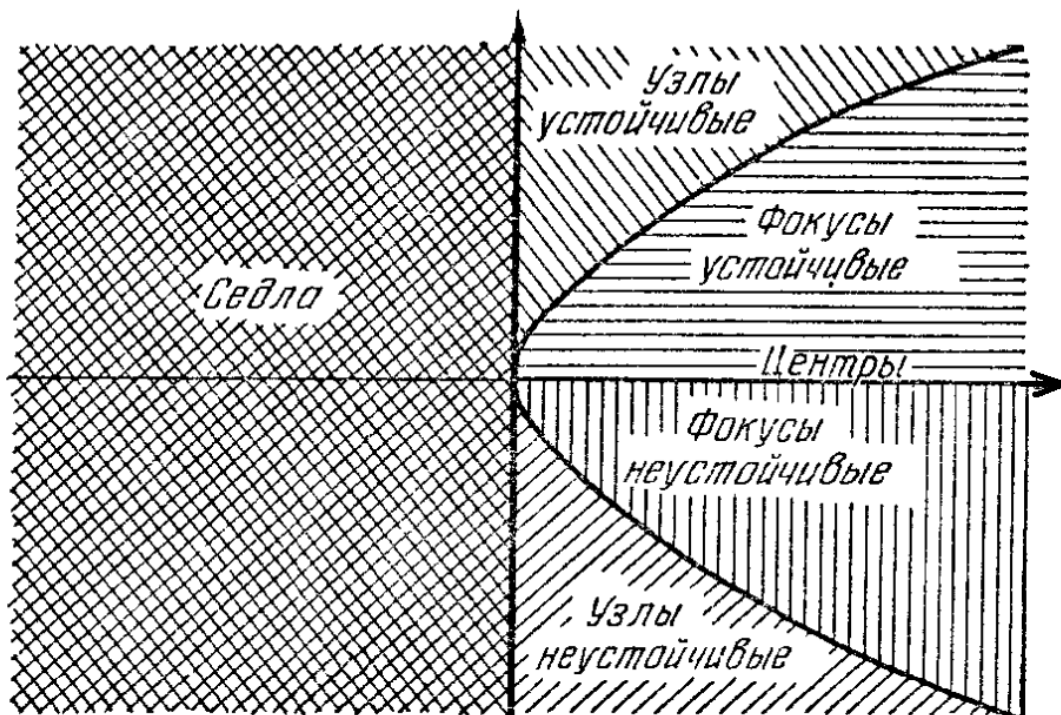


Рисунок 3.1.1 – Разбиение плоскости параметров (σ, Δ) на области, соответствующие различным состояниям равновесия

Если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, то состояние равновесия устойчиво.

Пример 3.1

Найдем состояния равновесия и определим их тип для модели нелинейного осциллятора с затуханием

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \sin(x) = 0$$

Для наглядности перепишем исследуемое уравнение в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1 порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\delta y - \sin(x)\end{aligned}$$

Для отыскания состояния равновесия приравняем правые части системы нулю:

$$\begin{aligned}0 &= y \\ 0 &= -2\delta y - \sin(x)\end{aligned}$$

Очевидно, что единственное состояние равновесия, существующее в данном случае – точка с координатами (0,0).

Задание: проведите качественное исследование найденного состояния равновесия на устойчивость самостоятельно.

В результате получаем, что решение устойчиво при $\delta > 0$, причем в случае $\delta > 1$ состояние равновесия представляет собой устойчивый узел, а при $0 < \delta < 1$ – устойчивый фокус.

Проведем численное исследование системы. Для этого введем функцию

```
1 function dx = right_hand_side1(t,x)
2 - dx = zeros(2,1);
3 - s=0.1;
4 - dx(1) = x(2);
5 - dx(2) = -2*s*x(2) - sin(x(1));
6 - end
```

Численно проинтегрируем ее при различных значениях параметра s с помощью функции Matlab ode45.

```
>> [x,y]=ode45(@right_hand_side1,[0:0.01:100],[1.0 1.0]);
>> plot(y(:,1),y(:,2));
```

На рисунке 3.1.2 представлены фазовые портреты исследуемой системы при различных значениях управляющего параметра δ .

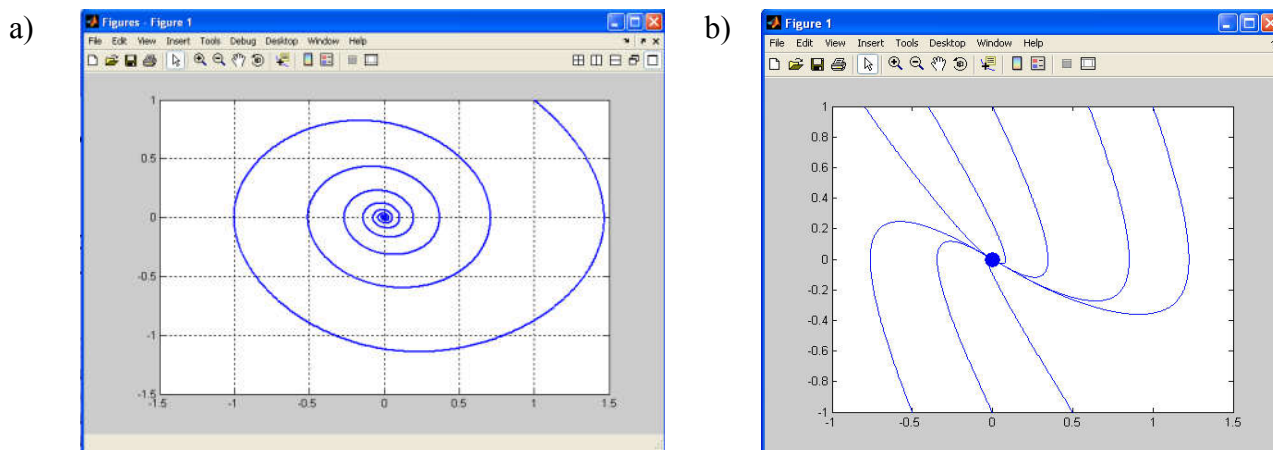


Рисунок 3.1.2 - Фазовые портреты (направления траекторий не указаны), полученные в результате численного интегрирования системы, описывающий нелинейный осциллятор с затуханием. а) $\delta = 0.1$ - устойчивый фокус, б) $\delta = 1.1$ - устойчивый узел.

3.2. Предельные циклы

Предельным циклом векторного поля на плоскости называется замкнутая (периодическая) траектория этого векторного поля, в окрестности которой нет других периодических траекторий. Таким образом, можно сказать, что всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени.

Теоремы Пуанкаре — Бендиксона [6] и Андронова — Понтрягина [6] утверждают, что типичная система с непрерывным временем на плоскости (состояние которой задаётся двумя вещественными параметрами, скажем, напряжением и током, или положением и скоростью точки на прямой) может стремиться только к положению равновесия или к предельному циклу.

Как следует из определения, с каждой из сторон предельный цикл является либо отталкивающим, либо притягивающим. Если поведение с обеих сторон одинаково (все траектории притягиваются к циклу, либо отталкиваются от него) — цикл называется соответственно притягивающим, либо отталкивающим. Если же с одной стороны происходит притяжение, а с другой отталкивание — говорят о полуустойчивом цикле. Поведение траекторий, близких к предельному циклу, описывается отображением Пуанкаре на отрезке, трансверсальном к циклу, — для этого отображения точка, соответствующая циклу, является неподвижной. Так, цикл является притягивающим или отталкивающим тогда и только тогда, когда эта точка соответственно притягивающая или отталкивающая. Цикл называется гиперболическим, если соответствующая неподвижная точка гиперболична — то

есть, имеет производную, отличную от ± 1 . В этом случае, если производная по модулю больше 1, цикл неустойчив, если меньше — устойчив.

Пример 3.2.1

Рассмотрим систему Пуанкаре

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\sigma - (x^2 + y^2)), \\ \dot{y} &= +x + y(\sigma - (x^2 + y^2)).\end{aligned}$$

Проинтегрируем численно систему Пуанкаре из начальных условий (0.01,0.01), (1.5,1.5) при значении параметра $\sigma = 1$.

```
1 function dx = right_hand_side2(t,x)
2 - dx = zeros(2,1);
3 - s=1.0;
4 - dx(1) = -x(2)+x(1)*(s-(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)));
5 - dx(2) = +x(1)+x(2)*(s-(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)));
6 - end
```

Построим траектории, полученные при данных условиях в результате численного интегрирования системы Пуанкаре (рисунок 3.2). Видим, что в системе существует предельный цикл.

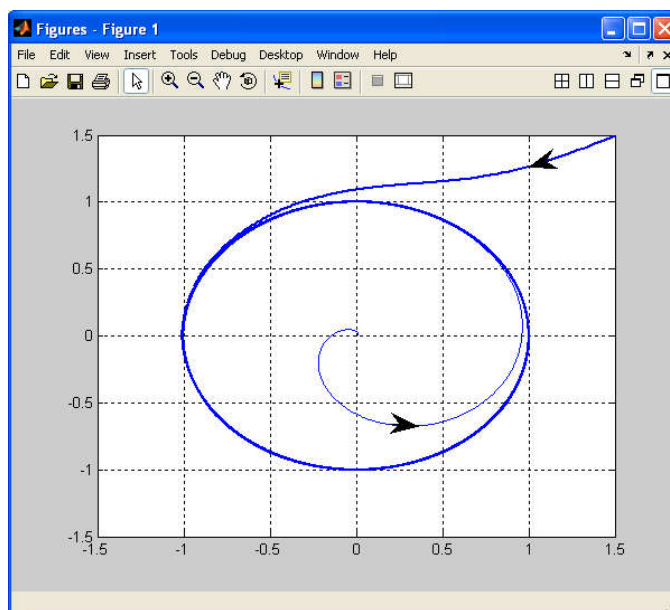


Рисунок 3.2 - Фазовый портрет системы Пуанкаре, $\sigma = 1$

Переход к полярным координатам позволяет определить факт наличия предельного цикла аналитически. Для перехода к полярным координатам введем замену переменных

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

Подставив ее в исходную систему, после преобразований получим:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho(\sigma - \rho^2) \\ \dot{\phi} &= 1\end{aligned}$$

Откуда получаем: $\rho_1 = \sqrt{\sigma}$, $\rho_2 = 0$. Первому решению соответствует предельный цикл радиуса $\sqrt{\sigma}$, второму – неустойчивое состояние равновесия с координатами (0,0).

Таким образом, существующий в фазовом пространстве динамической системы предельный цикл можно найти явно.

Для доказательства отсутствия периодических траекторий на фазовой плоскости удобно воспользоваться критерием Бендиксона-Дюлака.

Критерий Бендиксона-Дюлака

Если для системы (3) в области D существует гладкая функция $V(x,y)$ такая что функция $G(x,y)$

$$G(x,y) = \frac{\partial(B(x,y)P(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial(B(x,y)Q(x,y))}{\partial y}$$

знакопостоянна и не обращается в ноль в D , то в данной области отсутствуют периодические траектории (предельные циклы).

Данный критерий бывает очень удобен при исследовании конкретных динамических систем на плоскости.

Пример 3.2.2

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \rho_1(\delta_1 - d_{12}\rho_2^2 - \rho_1^2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2(\delta_2 - d_{21}\rho_1^2 - \rho_2^2).\end{aligned}$$

где $\delta_{1,2} = 1, d_{ij} > 0$.

Система имеет поглощающую область $0 \leq \rho_{1,2} \leq 1$. С помощью критерия Бендиксона-Дюлака нетрудно показать, что система не имеет предельных циклов в указанной области:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} \dot{\rho}_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2} \dot{\rho}_2 \right) = -2 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2} < 0$$

3.3. Метод функции Ляпунова

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = F(x), x \in M \subset \mathbb{R}^N \quad (3.3.1)$$

Определение. Пусть x_0 – состояние равновесия системы (3.3.1), $V: W \rightarrow \mathbb{R}^N$ – дифференцируемая функция в некоторой окрестности $W \subset M$ точки x_0 , такая, что:

- $V(x_0)=0$ и $V(x)>0$ для всех $x \neq 0$;
- если $\dot{V}(x) \leq 0$ в проколотой окрестности $W-\{x_0\}$, то точка x_0 устойчива;
- более того, если $\dot{V}(x) < 0$ в проколотой окрестности $W-\{x_0\}$, то точка x_0 асимптотически устойчива.

В случае если $W = \mathbb{R}^N$, точку x_0 называют глобально асимптотически устойчивой.

В определении под производной функции V понимается производная функции Ляпунова в силу системы (3.3.1):

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$$

Устойчивость состояний равновесия и ограниченность решений можно проверить, не решая саму систему (3.3.2). Однако не существует общих методов отыскания функции Ляпунова. В механических задачах зачастую хорошим кандидатом на роль функции Ляпунова является энергия.

Пример 3.3.1. Движение массы на пружине.

Рассмотрим движение частицы массы m на пружине с жёсткостью $k(1 + x^2)$, зависящей от безразмерной координаты x . Дифференциальное уравнение, описывающее движение системы:

$$m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0 \quad (3.3.2)$$

или, полагая $\dot{x} = y$, получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}(x + x^3) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Соответствующая полная энергия системы имеет вид

$$E(x, y) = \frac{my^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) \quad (3.3.4)$$

Можно заметить, что $E(x,y)$ является функцией Ляпунова для системы (3.3.3), так как $E(0,0)=0$ в (единственном) состоянии равновесия $(x,y)=(0,0)$ и $E(x,y)>0$ для $(x,y)\neq(0,0)$. Кроме того, мы имеем

$$\dot{E} = my\dot{y} + k(x+x^3)\dot{x} = -ky(x+x^3) + k(x+x^3)y \equiv 0$$

Отсюда можно заключить, что $(x,y)=(0,0)$ (нейтрально) устойчиво.

Попробуем проверить этот результат численно. Зададим рассматриваемую систему и значение параметра $s=k/m$.

```

1 function dx = right_hand_side1(t,x)
2 - dx = zeros(2,1);
3 - s=0.2;
4 - dx(1) = x(2);
5 - dx(2) = -s*x(2) - (x(1)+x(1)*x(1)*x(1));
6 - end

```

Найдем решение и построим линии равного уровня функции V .

```

>> [X,Y] = meshgrid(-3:.01:3,-3:.01:3);
>> Z = Y.^2/2.+X.^2/2.+X.^4/4.+0.1*X.*Y+0.01*X.^2;
>> [x,y]=ode45(@right_hand_side1,[0:0.01:100],[2 0]);
>> plot(y(:,1),y(:,2),'k');
>> hold;
Current plot held
>> contour(X,Y,Z,20);

```

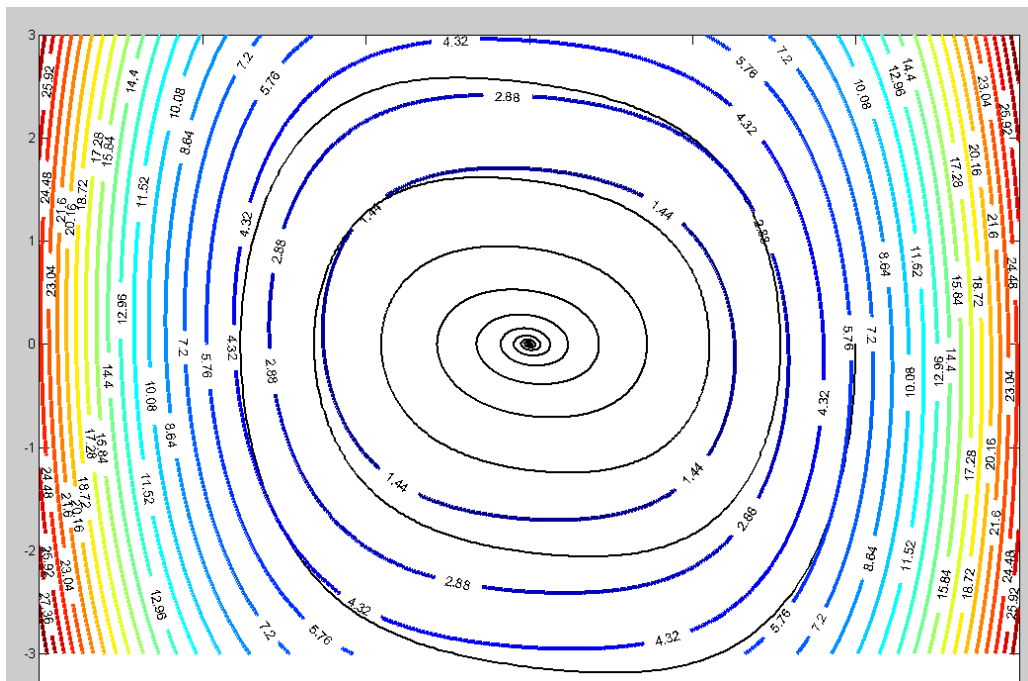


Рисунок 3.3.1 - Фазовые траектории системы и линии уровня функции V

Как видно из Рисунка 3.3.1, фазовые траектории пересекают линии уровня функции V «внутри», что позволяет сделать вывод об устойчивости состояния равновесия.

Пример 3.3.2 Движение массы на пружине (с учетом вязкого трения)

Если добавить к системе из Примера 3.3.1 вязкое трение, то уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}(x + x^3) - \alpha y\end{aligned}$$

Здесь α - коэффициент вязкого трения. Производная по времени той же функции

$$\dot{E} = -\alpha m y^2$$

всюду отрицательна, кроме прямой $y=0$, поэтому немного изменим вид функции

$$V(x, y) = \frac{m y^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) + \beta\left(xy + \frac{\alpha x^2}{2}\right)$$

Найдем производную этой функции:

$$\dot{V} = m y \dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} + \beta(\dot{x}y + x\dot{y} + \alpha x \dot{x}) = -\beta \frac{k}{m}(x^2 + x^4) - (\alpha m - \beta)y^2$$

Если β достаточно мало, то функция V будет неотрицательной и убывающей вдоль траекторий системы (в силу системы)

Задание: проведите численное исследование для этого случая самостоятельно.

Пример 3.3.3.

Докажем с помощью функции Ляпунова глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия в начале координат для следующего случая:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2 \\ \dot{y} &= -x^2 - 2y\end{aligned}$$

Единственное состояние равновесия, существующее в этой системе – точка с координатами $(0,0)$. Изучим вопрос ее устойчивости качественно. Построим функцию Ляпунова для этого случая:

$$\begin{aligned}V(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ \dot{V} &= xy^2 - xy^2 - 2y^2 = -2y^2 \leq 0\end{aligned}$$

Таким образом, точка $(0,0)$ является устойчивой.

Аналогичным образом можно поступать и в более сложных случаях многомерных систем, содержащих большое количество состояний равновесия.

Пример 3.3.4.

Рассмотрим уже знакомую нам систему

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \rho_1(\delta_1 - d_{12}\rho_2^2 - \rho_1^2) \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2(\delta_2 - d_{21}\rho_1^2 - \rho_2^2)\end{aligned}$$

Будем считать взаимодействие между элементами одинаковыми

$$d_{12} = d_{21} = d$$

Построим функцию Ляпунова

$$\begin{aligned}V(\rho_1, \rho_2) &= -\delta_1\rho_1^2 - \delta_2\rho_2^2 + \frac{1}{2}\rho_1^4 + \frac{1}{2}\rho_2^4 + d\rho_1^2\rho_2^2 \\ \dot{V} &= -\rho_1\dot{\rho}_1(\delta_1 + d\rho_2^2 - \rho_1^2) - \rho_2\dot{\rho}_2(\delta_2 + d\rho_1^2 - \rho_2^2) = -\rho_1\dot{\rho}_1^2 - \rho_2\dot{\rho}_2^2\end{aligned}$$

В области $\rho_{1,2} > 0$ функция V убывает вдоль траекторий.

Проведем численное исследование

```
>> [X,Y] = meshgrid(0.0:.01:1.1,0.0:.01:1.1);
>> Z = -Y.^2-X.^2+0.5*X.^4+0.5*Y.^4+2*X.^2.*Y.^2;
>> contour(X,Y,Z,100);
```

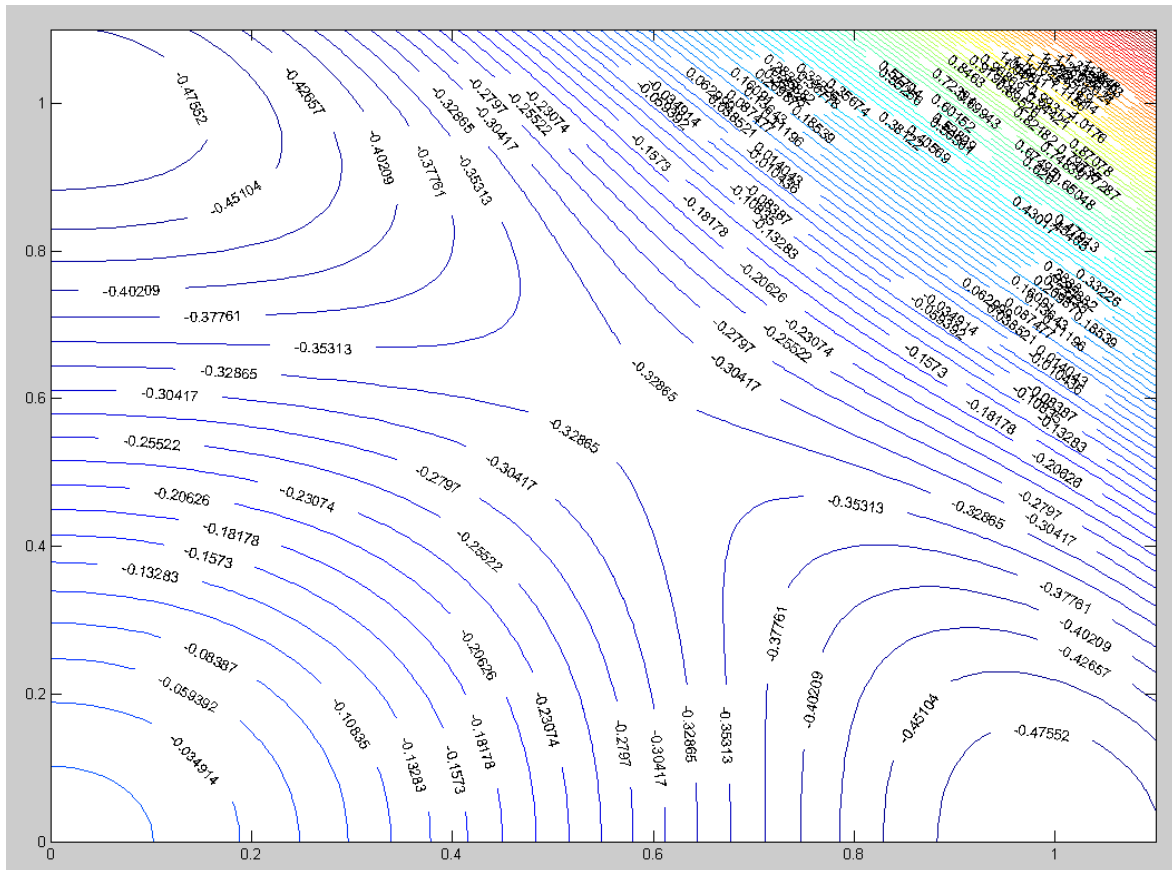


Рисунок 3.3.2 - Линии уровня функции V , траектории приближаются к одному из устойчивых состояний равновесия, $d > \delta_{1,2}$

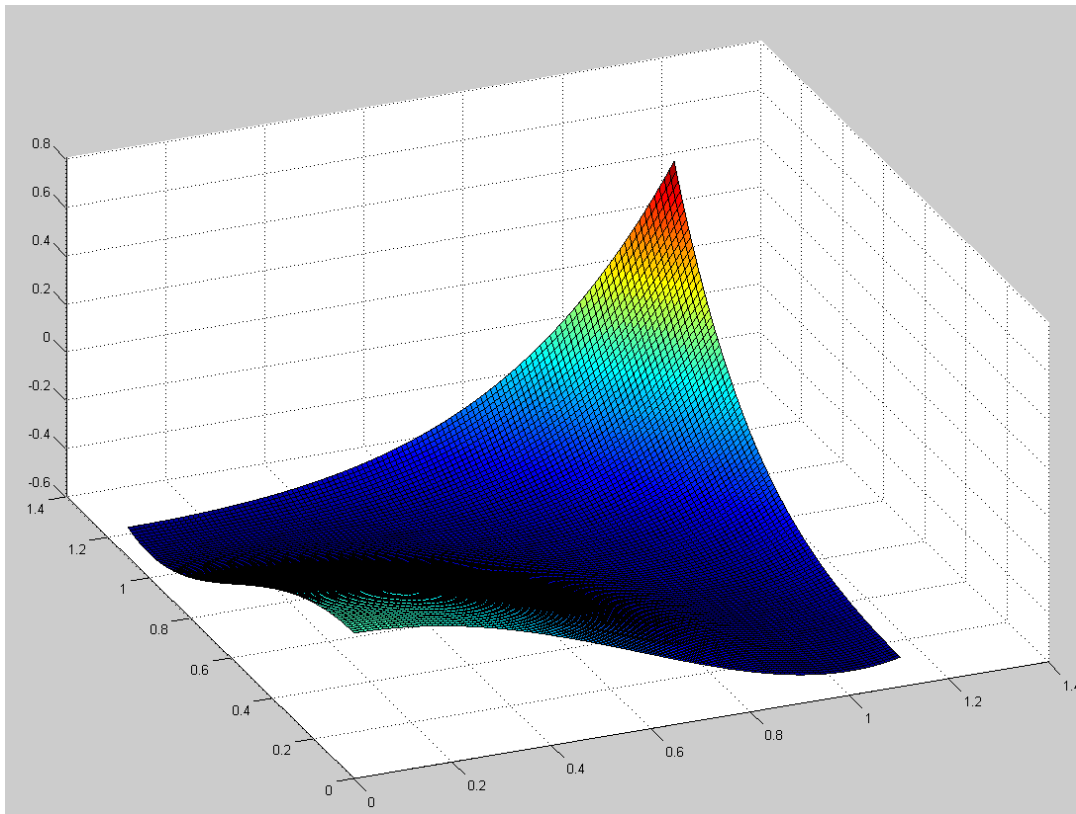


Рисунок 3.3.3 - График функции V , $d > \delta_{1,2}$

Следует отметить, что приведенный пример является частным случаем класса динамических систем следующего вида

$$\dot{x}_i = a_i(x_i) \left[b_i(x_i) - \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) \right]$$

для которых может быть построена глобальная функция Ляпунова в случае, если функции $d(x)$ являются неубывающими:

$$V(x) = -\sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} b_i(\xi_i) d'_i(\xi_i) d\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n c_{jk} d_j(x_j) d_k(x_k)$$

Ее производная имеет вид

$$\dot{V}(x) = -\sum_{i=1}^n a_i(x_i) d'_i(x_i) \left[b_i(x_i) - \sum_{k=1}^n c_{ik} d_k(x_k) \right]^2$$

3.4. Метод точечных отображений

Рассмотрим систему на плоскости в общем виде

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Проведем на фазовой плоскости системы (3.4) отрезок без контакта L (все фазовые траектории пересекают L трансверсально). Из точки s прямой L выпустим траекторию, как показано на рисунке 17.. Предположим, что в какой-то момент времени $t > 0$ траектория вновь пересекла L в точке s' . Функция, ставящая в соответствие всем точкам s какой-либо части отрезка L в соответствие точки s' отрезка L называется *функцией последования* и задает точечное отображение (отображение Пуанкаре) отрезка L в себя. Если траектория, выпущенная из некоторой точки s_0 никогда не возвращается на L , то отображение в этой точке не определено.

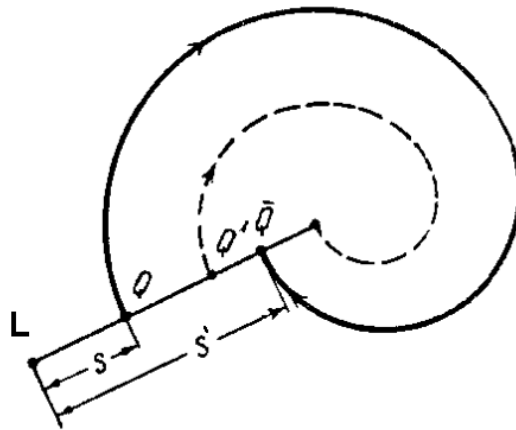


Рисунок 3.4.1 - Построение точечного отображения, $s' = f(s)$ (из книги [5])

Замечания.

- При построении точечного отображения вместо прямой (отрезка) можно выбрать любую кривую (ее часть) без контакта, данная кривая называется секущей Пуанкаре. Функция f аналитическая в точке s_0 если точка s_0 имеет последующую точку на секущей Пуанкаре.
- Отображение Пуанкаре задает динамическую систему с дискретным временем (размерность ДС меньше на 1), поведение данной системы находится в тесной связи с поведением непрерывной системы. Например, неподвижным точкам отображения соответствуют замкнутые кривые исходной непрерывной системы

3.4.1. Устойчивость неподвижной точки

Итак, мы имеем дело с отображением

$$s' = f(s)$$

Неподвижные точки \bar{s} данного отображения определяются следующим образом:

$$f(\bar{s}) = \bar{s}$$

Графически мы можем найти эти неподвижные точки как точки пересечения на плоскости (s, \bar{s}) , на так называемой диаграмме Ламерея (Кёнигса-Ламерея), кривой $\bar{s} = f(s)$ (графика функции последования) и биссектрисы $\bar{s} = s$.

Определение 1. Будем называть неподвижную точку точечного преобразования устойчивой, если существует такая ее окрестность (ε^*) , что все последовательности

$$s, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots$$

с начальными точками s в (ε^*) сходятся к этой неподвижной точке.

Определение 2. Будем называть неподвижную точку точечного преобразования неустойчивой, если в любой сколь угодно малой ее окрестности найдется (хотя бы одна) такая точка s , что последовательность s, s_1, s_2, \dots не сходится к s^* .

Отсюда следует, что устойчивому предельному циклу соответствует устойчивая неподвижная точка, причем это соответствие является взаимным. Неустойчивая неподвижная точка, очевидно, соответствует неустойчивому предельному циклу, т.к. существование таких последовательностей точек, начинающихся в любой сколь угодно малой окрестности неподвижной точки и не сходящихся к ней, говорит о наличии в сколь угодно малой окрестности предельного цикла фазовых траекторий, уходящих от него при $t \rightarrow +\infty$.

Устойчивость неподвижной точки \bar{s} определяется из теоремы Кёнигса.

Теорема Кёнигса. Неподвижная точка s^* точечного отображения $\bar{s} = f(s)$ является устойчивой, если выполняется условие $\left| \frac{df(\bar{s})}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$, и неустойчивой, если $\left| \frac{df(\bar{s})}{ds} \right|_{s=s^*} > 1$.

Доказательство данной теоремы можно найти в [5].

Пример 3.4.1. Логистическое отображение

Рассмотрим один из простых и популярных примеров одномерных точечных отображений – логистическое отображение:

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2$$

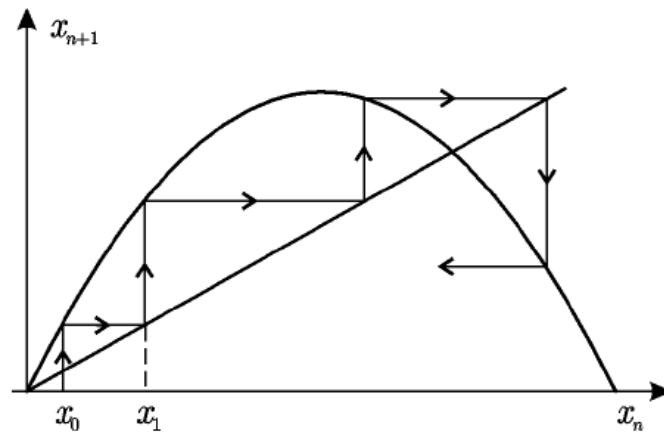


Рисунок 3.4.1.1 - Диаграмма Кёнигса-Ламеря для логистического отображения (качественное построение).

Исследуем систему численно:

```

a=1.5;T=1000;
y=zeros(2*T,1);
x=zeros(2*T,1);
z=zeros(T,1);
z(1)=0.01;
y(1)=0; x(1)=z(1);
x(2)=z(1);y(2)=z(1);
for t = 2:T
    z(t)=a*z(t-1)-z(t-1)*z(t-1);
    x(2*t-1)=z(t-1);y(2*t-1)=z(t);
    x(2*t)=z(t);y(2*t)=z(t);
end
xx=[0:0.01:a];
yy=a*xx-xx.*xx;
plot(xx,yy);
hold;
plot(xx/2,xx/2,'k');
plot(x,y,'r');

```

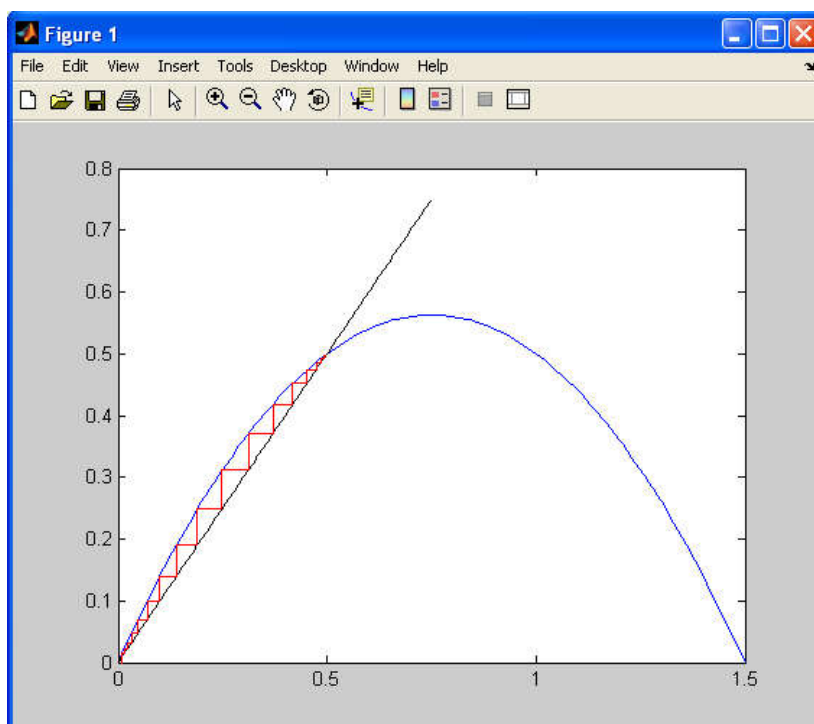


Рисунок 3.4.1.2 – Численно построенная диаграмма Ламерея для логистического отображения

3.4.2. Устойчивость предельных циклов

Найдем теперь, основываясь на теореме Кенигса, условие устойчивости предельного цикла на фазовой плоскости, выраженное через правые части уравнения динамической системы (3.4). Пусть C_0 - предельный цикл системы (3.4), параметрическими уравнениями которого являются

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}$$

где φ и ψ – периодические функции с периодом T .

Введем понятие характеристического показателя предельного цикла, который вычисляется по формуле

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T [P_x'(\varphi, \psi) + Q_y'(\varphi, \psi)] dt$$

Теорема (условие устойчивости предельного цикла). *Предельный цикл C_0 устойчив, если его характеристический показатель $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$.*

Подробно процедура получения характеристического показателя предельного цикла приведена в [5].

Пример 3.4.2. Уравнения Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля, записанное в виде

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$$

При малом параметре нелинейности $\lambda \ll 1$ решение приближенно записывается следующим образом:

$$x(t) \approx 2a(t) \cos(t + \varphi_0),$$

$$a(t) = \frac{\sqrt{\lambda} a_0 \exp(\lambda t / 2)}{\sqrt{\lambda + a_0^2 [\exp(\lambda t) - 1]}}.$$

Отобразим прямую Ox в себя для анализа существования и устойчивости периодических траекторий в уравнении Ван-дер-Поля

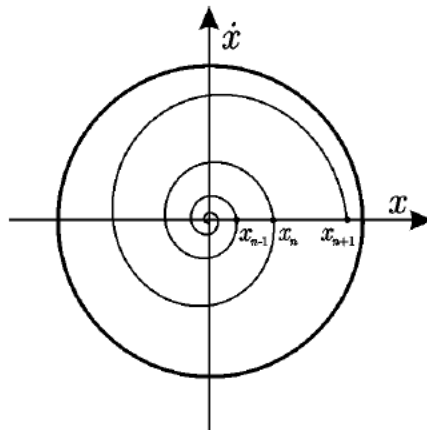


Рисунок 3.4.2.3 – Предельный цикл в системе Ван-дер-Поля в случае слабой нелинейности.

В точках пересечения с осью Ox можно приближенно считать, что (в случае слабой нелинейности): $\cos(t) \approx 1$. Следовательно, можно найти моменты времени, в которые изображающая точка пересекает ось Ox :

$$t \approx 2\pi n$$

$$x_n = \frac{2\sqrt{\lambda} x_0 \exp(\pi n \lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi n \lambda) - 1]}},$$

$$x_{n+1} = \frac{2\sqrt{\lambda} x_0 \exp(\pi(n+1)\lambda)}{\sqrt{4\lambda + x_0^2 [\exp(2\pi(n+1)\lambda) - 1]}}.$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n \exp(\pi\lambda)}{\sqrt{1 + \frac{x_n^2}{4\lambda} [\exp(2\pi\lambda) - 1]}}$$

Найдем неподвижные точки данного отображения

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2\sqrt{\lambda}$$

Исследуем неподвижные точки на устойчивость

$$f'(x) = \frac{8e^{\pi\lambda}}{\left(4 + \frac{x^2}{\lambda}(e^{2\pi\lambda} - 1)\right)^{3/2}},$$

$$f'(x_1) = \exp(\pi\lambda), \quad f'(x_2) = \exp(-2\pi\lambda)$$

$$|f'(x_2)| < 1 \quad \text{при } \lambda > 0$$

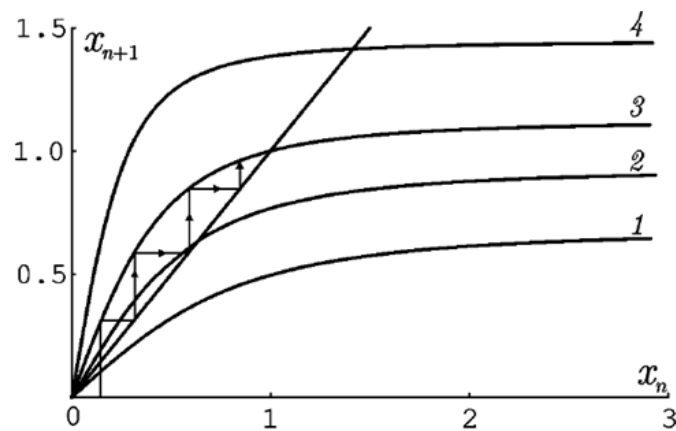


Рисунок 3.4.2.4 – Вид функций последования для логистического отображения при различных значениях λ и пример построения диаграммы Ламерея: 1- $\lambda=0.1$; 2- $\lambda=0.1$; 3- $\lambda=0.1$.

3.5. Индексы Пуанкаре

Рассмотрим некоторые общие законы совместного сосуществования состояний равновесия различных типов и замкнутых траекторий, сформулированные Пуанкаре [7]. Для этого необходимо ввести понятие об индексе замкнутой кривой по отношению к векторному

полю. Рассмотрим фазовую плоскость динамической системы, определяемой системой (3.4), где функции правых частей мы предполагаем аналитическими на всей фазовой плоскости.

Возьмем на фазовой плоскости простую замкнутую кривую N , не содержащую особых точек. Возьмем на этой кривой точку S и проведем через нее вектор, совпадающий с направлением касательной, проходящей через эту точку фазовой траектории (смотри рисунок 3.5.1). Если точку S двигать вдоль кривой N , вектор касательной к фазовой траектории будет непрерывно вращаться. Когда точка S сделает полный оборот по замкнутой кривой N , вектор сделает некоторое целое число оборотов, т.е. повернется на угол $2\pi j$, где j – целое число. Направление вращения вектора будем считать положительным, если оно совпадает с направлением, в котором точка S обходит замкнутую кривую N . Для определенности будем считать, что точка S всегда обходит кривую N , совершая оборот против часовой стрелки. Целое число j не зависит от выбора кривой N , замкнутые кривые, содержащие те же состояния равновесия, имеют такое же число j . Целое число j носит название *индекса замкнутой кривой N* по отношению к рассматриваемому векторному полю. Окружим кривой N какое-либо одно состояние равновесия. В силу того, что индекс j не зависит от формы кривой, а определяется только характером самого состояния равновесия. Поэтому j можно отнести к самой особой точке и говорить об *индексе Пуанкаре особой точки*.

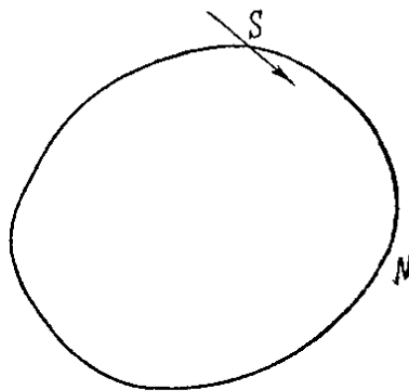


Рисунок 3.5.1 – Замкнутая кривая N и направление ее обхода

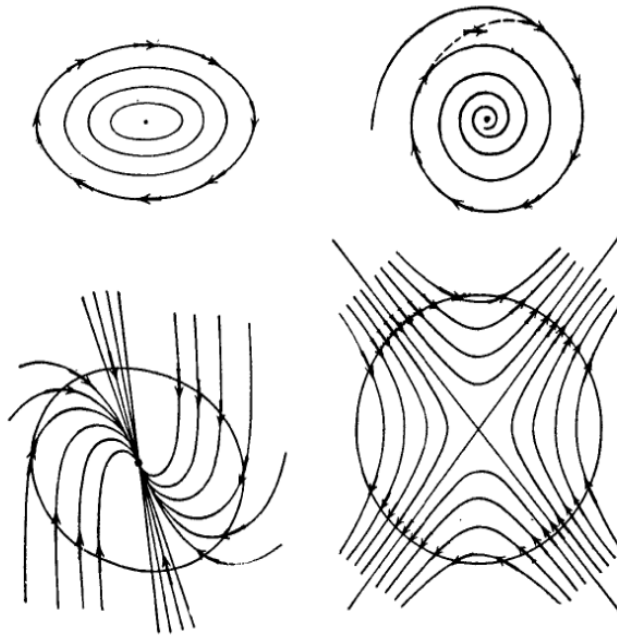


Рисунок 3.5.2- Подсчет индексов Пуанкаре для различных случаев

Нетрудно убедиться (смотри рисунок 3.5.2), что индексы Пуанкаре для центра, фокуса, узла имеют значение $j=1$, для седла $j=-1$.

Справедливы следующие утверждения:

- 1) Индекс замкнутой кривой, не содержащей внутри себя ни одной особой точки, равен нулю;
- 2) Индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек;
- 3) Индекс замкнутой кривой, являющейся одновременно замкнутой траекторией системы (3.4), равен $+1$ (рисунок 3.5.3, случай центра), т.к. направление вектора каждый раз совпадает с направлением касательной к кривой N ;
- 4) Индекс замкнутой кривой, вдоль которой векторы, определенные системой (3.4), направлены либо все внутрь, либо все наружу (замкнутая кривая представляет собой «цикл без контакта»), равен $+1$ (рисунок 3.5.2, случай узла).

Приведенные утверждения могут быть строго аналитически доказаны (смотри [5,8]). Также из них могут быть получены следующие полезные следствия.

Следствие 1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, т.к. индекс такой траектории равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен 0 .

Следствие 2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, не может быть также никакая особая точка с индексом, отличным от +1.

Следствие 3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся только простые особые точки (для них $\Delta \neq 0$), то число таких особых точек всегда нечетное, причем число седел на единицу меньше, чем число остальных особых точек.

3.6. Упражнения

3.6.1. Найти все состояния равновесия системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 - cx_2\end{aligned}$$

Для действительных положительных значений параметров a , b , c , и определить тип состояния равновесия каждого из них.

3.6.2. Для каждой из представленных ниже систем найти состояния равновесия, определить их тип и численно построить фазовые портреты.

(1) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2 \tan^{-1}(x_1 + x_2)\end{aligned}$

(2) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)\end{aligned}$

(3) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1^2 - x_2\end{aligned}$

(4) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(|x_1| + |x_2|) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - x_2(|x_1| + |x_2|)\end{aligned}$

3.6.3. Для каждой из представленных ниже систем доказать отсутствие предельных циклов:

(1) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 + ax_2\end{aligned}$

(2) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3 + x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2^3 + x_2x_1^2\end{aligned}$

(3) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$

(4) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$

(5) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \cos(x_1) \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1\end{aligned}$

(6) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^3 + ax_2\end{aligned}$

(7) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + ax_2\end{aligned}$

3.6.4. Используя функцию $V(v) = x_1^2 + x_2^2$, исследовать устойчивость состояния равновесия $(0,0)$ системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + k^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(-x_1^2 - x_2^2 + k^2)\end{aligned}$$

При (а) $k=0$ (б) $k \neq 0$

4. Асимптотические методы теории колебаний

Весьма эффективным средством для исследования нелинейных колебаний являются методы асимптотических разложений по степеням малого параметра. С их помощью в большом числе практически важных случаев удастся получить сравнительно простые расчетные схемы и детально выяснить характер протекания колебательного процесса. В данном разделе приведено описание наиболее простых и используемых асимптотических методов. Более подробно с вопросом можно ознакомиться в [9].

4.1. Метод возмущений по параметру нелинейности

Рассмотрим осциллятор с квадратичной нелинейностью, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0$$

которое можно привести к виду

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

Нас будет интересовать случай слабой нелинейности, т.е. значения параметра $\varepsilon \ll 1$. Уравнение (4.1.1) содержит малый параметр и близко к уравнению гармонического осциллятора.

Будем искать это решение в виде суммы слагаемых, пропорциональных малым степеням малого параметра ε :

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots \quad (4.1.2)$$

Отметим, что все получающиеся ряды асимптотические в окрестности $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, $\varepsilon = 0$. Подставим решение, записанное в таком виде, в уравнение (4.1.1), получим:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0 \quad (4.1.3)$$

Сгруппируем слагаемые по степеням параметра ε :

$$\varepsilon^0 : \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$\varepsilon^1 : \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0 \quad (4.5)$$

$$\varepsilon^2 : \quad \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0 \quad (4.6)$$

...

Уравнение (4.1.4) представляет уравнение гармонического осциллятора, его решение легко получить в виде

$$x_1 = a \cos(t + \varphi)$$

Уравнение (4.1.5) перепишем в виде

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2(t + \varphi)$$

Найдем решение этого уравнения.

$$x_2 = x_2^{(0)} + x_2^{(n)}$$

Общее решение однородного уравнения

$$x_2^{(0)} = a_1 \cos(t + \varphi_1)$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$x_2^{(n)} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi)$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет следующий вид:

$$x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi)$$

Поскольку для уравнения (4.1.3) имеется два начальных условия, а в решении содержится четыре константы ($a, \varphi, a_1, \varphi_1$) то две из них мы можем выбрать произвольным образом. Положим $a_1=0$ с учетом последнего решение с точностью до членов порядка ε^2 имеет следующий вид

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6} \cos 2(t + \varphi) \right] + \dots$$

$$\varepsilon \ll 1$$

Начальные условия выберем следующие: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$. Уравнения на определение констант a, φ из начальных условий:

$$a \cos \varphi - \varepsilon \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} \cos 2\varphi \right] = x_0 \quad (4.1.7)$$

$$a \sin \varphi + \frac{\varepsilon a^2}{3} \sin 2\varphi = -y_0 \quad (4.1.8)$$

Данные уравнения также невозможно решить аналитически, однако в них также содержится малый параметр, поэтому найдем константы с точностью до ε

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$$

Подставив эти выражения в уравнения (4.1.7) и (4.1.8), получим:

$$a_0 \cos \varphi_0 = x_0$$

$$a_0 \sin \varphi_0 = -y_0$$

Подставляя a_0, φ_0 в уравнения (4.1.7) и (4.1.8) и отбрасывая слагаемые, порядок которых больше ε , получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант a_1, φ_1 (a, φ с точностью до ε^2):

$$a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - \frac{a_0^2}{2} + \frac{a_0^2}{6} \cos 2\varphi_0 = 0$$

$$a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + \frac{a_0^2}{3} \sin 2\varphi_0 = 0$$

Проведем численное исследование. Для этого создадим следующие файлы:

- 1) Файл `right_hand_side1.m` задает исследуемую систему.

```
function dx = right_hand_side1(t,x)
e=0.05;
dx = zeros(2,1);
dx(1) = x(2);
dx(2) = -x(1) - e*x(1)*x(1);
end
```

- 2) Файл `compare.m` сравнивает решение, полученное аналитически, с решением, полученным с помощью численного интегрирования.

```
- e=0.05;
- a0=1.0;
- a1=0.5*a0*a0*(1+1./3.);
- a=a0+e*a1;
- z=[0:0.01:100];
- zz=a*cos(z)+e*(-a*a/2.+a*a/6*cos(2*z));
- [x,y]=ode45(@right_hand_side1,[0:0.01:100],[1.0 0]);
- plot(y(:,1));
- hold;
- plot(zz,'r');
```

Рассмотрим результаты сравнения при различных значениях параметра ε .

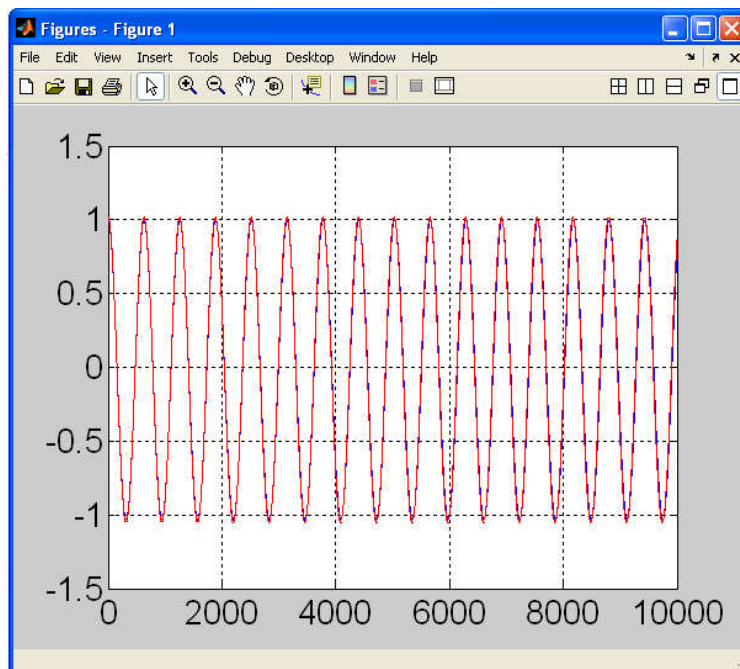


Рисунок 4.1.1 – Сравнение аналитического (красная линия) и численного (синяя линия) решений, $\varepsilon=0.05$.

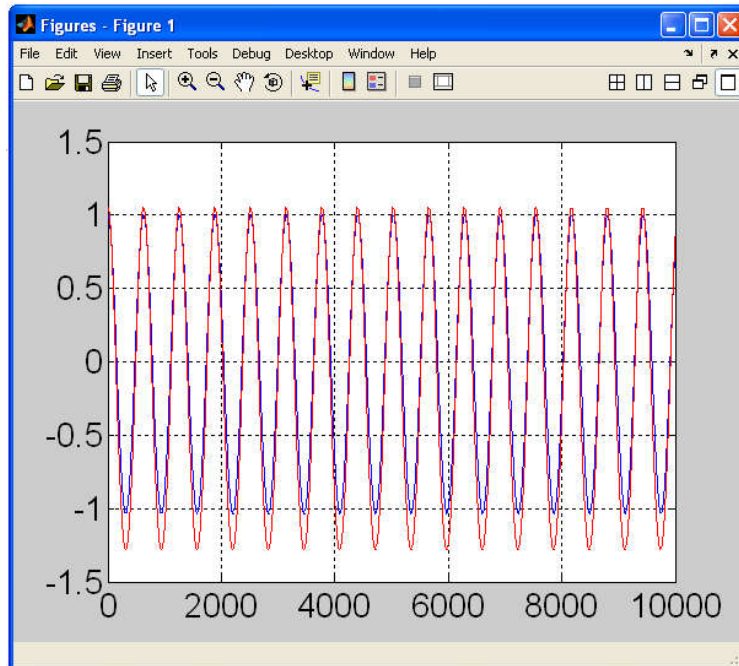


Рисунок 4.1.2 – Сравнение аналитического (красная линия) и численного (синяя линия) решений, $\varepsilon=0.25$

Однако, прямое разложение по степеням параметра нелинейности не всегда приводит к верному результату. В качестве примера такого рода рассмотрим уравнение Дуффинга:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (4.1.9)$$

Применим метод разложения в ряд по параметру нелинейности:

$$\varepsilon^0 : \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0, \text{ откуда получаем решение } x_1 = a \cos(t + \varphi);$$

$$\varepsilon^1 : \quad \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0$$

Отсюда получаем:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)]$$

В частном решении содержится резонансное слагаемое

$$x \approx a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\frac{3a^3 t}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots$$

Наличие секулярного (резонансного) слагаемого приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний. Соответствует ли это точному решению? Численный счет показывает, что амплитуда не возрастает, к тому же для системы (8) может быть найден первый интеграл:

$$\frac{1}{2} \dot{y} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 = E$$

который свидетельствует о сохранении энергии, и неограниченный рост амплитуды колебаний при этом невозможен.

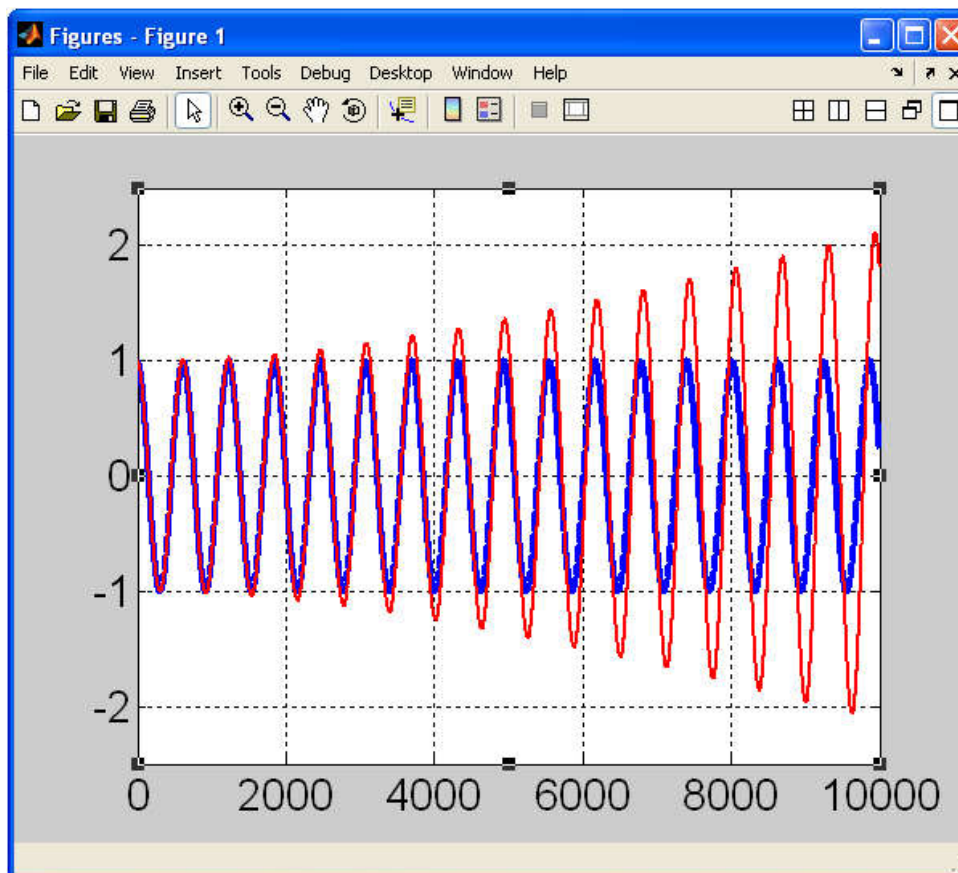


Рисунок 4.3 – Сравнение аналитического (красная линия) и численного (синяя линия) решений уравнения Дуффинга

Подобный результат возникает и в случае осциллятора с квадратичной нелинейностью при рассмотрении более высоких поправок к решению (уже при рассмотрении поправки порядка ϵ^2). Метод разложения по параметру не может учесть эффекта неизохронности возникающих колебаний, поскольку в решении могут появиться только частоты, кратные частоте линейных колебаний системы. Необходима модификация метода для учета неизохронности колебаний.

4.2. Метод Линшtedта — Пуанкаре

Наиболее простой способ учета неизохронности колебаний был предложен А. Линшtedтом и независимо А. Пуанкаре. Введем в уравнении (4.1.9) новую переменную $\tau = \omega t$, в результате замены получим:

$$\omega^2 x'' + x + \epsilon x^3 = 0 \quad (4.2.1)$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (4.2.2.a)$$

В ряд по малому параметру раскладывается также и параметр ω для учета эффекта неизохронности:

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4.2.2.b)$$

Подставим вид решения (4.2.2.) в исходное уравнение (4.2.1), получим:

$$x_1'' + x_1 + \varepsilon(x_2'' + x_2 + 2\omega_1 x_1'' + x_1^3) + \dots = 0 \quad (4.2.3)$$

Приравнивая к нулю члены первого и второго порядка малости, получим:

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 &= 0 \\ x_2'' + x_2 &= -2\omega_1 x_1'' - x_1^3 \\ x_1 &= a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2'' + x_2 &= 2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - \frac{a^3}{4} [3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Слагаемые $2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi)$ и $3 \cos(\tau + \varphi)$ приводят к резонансному решению (секулярным слагаемым). Необходимо устранить подчеркнутые слагаемые для того, чтобы избежать появления секулярного роста $x(t)$ в решении данного уравнения, для этого положим

$\omega_1 = \frac{3a^2}{8}$. Уравнение (4.2.4) в этом случае принимает вид:

$$x_2'' + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(\tau + \varphi) \quad (4.2.5)$$

Найдем решение этого уравнения:

$$x_2 = \frac{a^3}{32} \cos 3(\tau + \varphi)$$

Решение исходного уравнения (4.2.3) с точностью до членов порядка ε^2

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi),$$

$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8}$, что обеспечивает неизохронность, т.е. зависимость частоты колебаний от амплитуды.

Сравним теоретические результаты, полученные с помощью различных асимптотических методов, и численный расчет с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Определим константы в приближенном решении, полученном с помощью метода Линштедта – Пуанкаре:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi)$$

Начальные условия $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$, откуда получаем $\varphi=0, a=a_0+\varepsilon a_1$,
 $a_0=x(0), a_1=-a_0^3/32$.

Численное решение:

```

1 function dx = right_hand_side3(t,x)
2 - e=0.05;
3 - dx = zeros(2,1);
4 - dx(1) = x(2);
5 - dx(2) = -x(1)-e*x(1)*x(1)*x(1);
6 - end

```

```

1 - e=0.05;
2 - a0=1.0;
3 - a1=-a0./32.;
4 - a=a0+e*a1;
5 - z=[0:0.01:100];
6 - zz1=a0*cos(z)+e*(-3.*a0*a0*a0*z/8.*sin(z)+a0*a0*a0/32.*cos(3*z));
7 - v=1+3./8.*e*a^2;
8 - zz2=a*cos(v*z)+e*a*a*a/32.*cos(3*v*z);
9 - [x,y]=ode45(@right_hand_side3,[0:0.01:100],[1.0 0]);
10 - plot(y(:,1));
11 - figure;
12 - plot(zz1,'r');
13 - figure;
14 - plot(zz2);

```

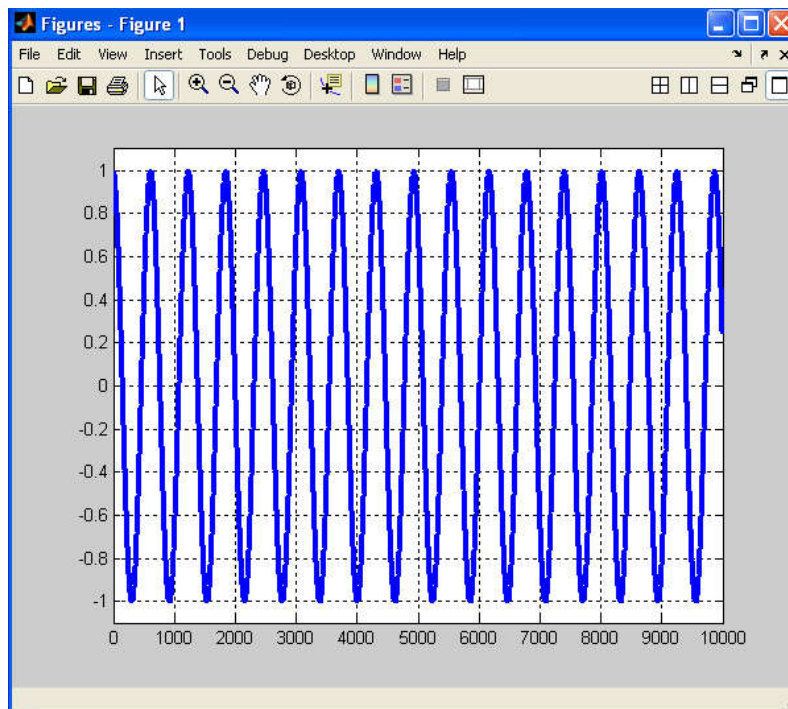


Рисунок 4.2.1 – Численное решение

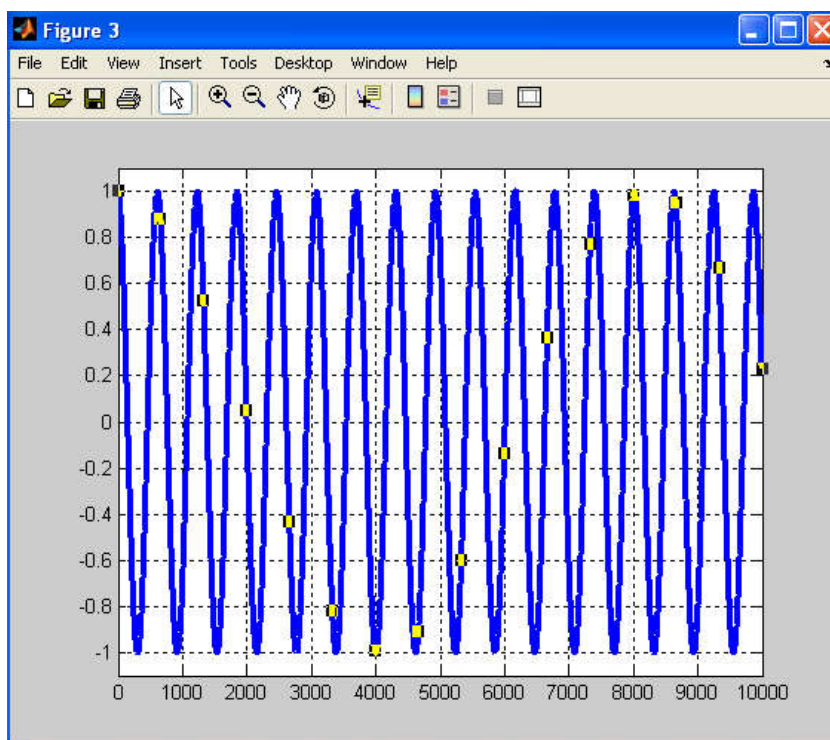


Рисунок 4.2.2 – Аналитическое решение с учетом неизохронности

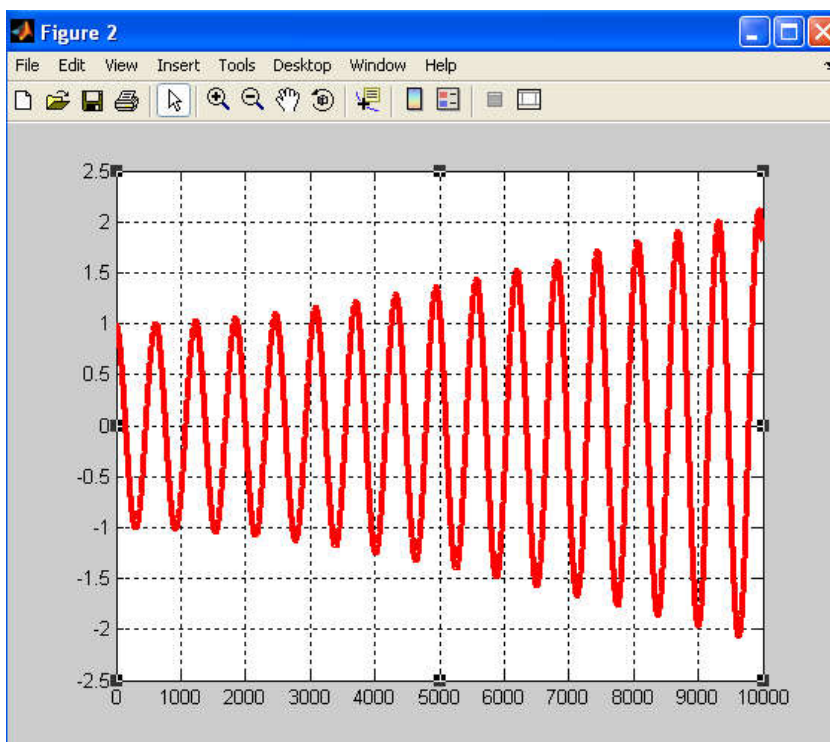


Рисунок 4.2.3 – Аналитическое решение без учета неизохронности

4.3. Метод многих масштабов

Приближенное решение, полученное при помощи метода Линштедта-Пуанкаре можно представить в виде

$$x \approx a \cos\left(t + \frac{3a^2 \varepsilon t}{8} + \varphi\right) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos\left(3t + \frac{9a^2 \varepsilon t}{8} + 3\varphi\right) \quad (4.3.1)$$

Время входит в это выражение двояким образом: $x=x(t,\varepsilon t)$. Поскольку ε является малым параметром, зависимость от εt можно интерпретировать как медленное изменение параметров колебания. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы придем к представлению решения в виде $x=x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots)$. Введем обозначения:

$$T_0=t, T_1=\varepsilon t, T_2=\varepsilon^2 t, \dots \quad (4.3.2)$$

Зависимость от каждого очередного аргумента T_n характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени t к набору переменных T_n лежит в основе метода многих масштабов (или метода многомасштабных разложений), позволяющего получить решения широкого класса задач теории колебаний. Продемонстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга. Для большей общности включим в него слабое затухание

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (4.3.3)$$

Здесь γ считается величиной порядка единицы. Отметим, что метод Линштедта-Пуанкаре неприменим прямым образом в случае, когда учитывается затухание, т.к. в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся.

При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \equiv \hat{D}_0 + \varepsilon \hat{D}_1 + \varepsilon^2 \hat{D}_2 + \dots \quad (4.3.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \hat{D}_0^2 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \varepsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_2) + \dots \quad (4.3.5)$$

где для сокращения записи введены обозначения $\hat{D}_n \equiv \partial / \partial T_n$. Решение для переменной x по-прежнему будем искать в виде степенного ряда

$$x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \quad (4.3.6)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (4.3.3), получим

$$\hat{D}_0^2 x_1 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \varepsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\varepsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 + \dots = 0 \quad (4.3.7)$$

Приравняв к нулю члены порядка ε^0 ε^1 , приходим, соответственно, к следующим уравнениям

$$\hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3 \quad (4.3.9)$$

Решение уравнения гармонического осциллятора по-прежнему запишем в виде

$$x_1 = a \cos(T_0 + \varphi) \quad (4.3.10)$$

Но теперь будем считать a и φ не постоянными, а функциями, зависящими от медленных переменных:

$$\begin{aligned} a &= a(T_1, T_2, \dots) \\ \varphi &= \varphi(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Действительно, уравнение (4.3.3) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение гармонического осциллятора, поэтому неудивительно, что решение в нулевом порядке по ε представляет собой квазигармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Подставим решение (4.3.10) в правую часть уравнения (4.3.9). При этом надо учитывать, что оператор \hat{D}_0 действует только на аргумент тригонометрических функций T_0 , а оператор \hat{D}_1 - на медленно меняющиеся переменные a , φ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x^2 + x^2 &= 2\left(\hat{D}_1 a \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cos(T_0 + \varphi)\right) + 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ &= 2(\hat{D}_1 a + \gamma a) \sin(T_0 + \varphi) + \left(2a \hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^3}{4}\right) \cos(T_0 + \varphi) - \frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

В правой части этого уравнения следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные $\sin(T_0 + \varphi)$, $\cos(T_0 + \varphi)$. Это приведет к уравнениям

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 a + \gamma a &= 0 \\ \hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^2}{8} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения, которые позволяют описывать динамику медленно меняющихся переменных $a(T_1)$, $\varphi(T_1)$. Такие уравнения называют *укороченными*.

В случае неконсервативного осциллятора ($\gamma \neq 0$) уравнения приводят к результату, в точности совпадающему с результатом метода Линшtedта-Пуанкаре.

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ \varphi &= \frac{3a_0^2 T_1}{8} + \varphi_0 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Где a_0 , φ_0 – постоянные, определяемые из начальных условий. Величина $\hat{D}_1 \varphi$ есть поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов.

При $\gamma < 0$ решение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 \exp(-\gamma T) \\
 \varphi &= \varphi_0 \frac{3a_0^2}{16\gamma} (1 - \exp(-2\gamma T_1))
 \end{aligned}
 \tag{4.3.15}$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ они переходят в (4.3.14).

После исключения секулярных членов уравнение (4.3.12) принимает следующий вид

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -\frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi)
 \tag{4.3.16}$$

Оно совпадает с уравнением (4.2.5), которое анализировалось в прошлом разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1) \cos[T_0 + \varphi(T_1)] + \frac{\varepsilon a^3(T_1)}{32} \cos 3[T_0 + \varphi(T_1)]
 \tag{4.3.17}$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (4.3.15).

4.4. Метод Ван-дер-Поля

Метод Ван-дер-Поля представляет собой вариант *метода усреднения*. Он был разработан Б. Ван-дер-Подем (1920) для исследования различных автоколебательных процессов в ламповом генераторе. Математическое обоснование этого метода было дано Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси (1934). Дальнейшее развитие метод усреднения получил в работах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др.

Рассмотрим вновь уравнение Дуффинга, которое запишем в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0
 \tag{4.4.1}$$

Формально малый параметр здесь мы не вводим, однако будем считать, что $\gamma, \beta \ll 1$, т.е. система близка к уравнению линейного консервативного осциллятора. Вообще, близость к линейной консервативной системе является условием применимости метода Ван-дер-Поля. Это позволяет представить решение в виде

$$x = A(t)e^{it} + A^*(t)e^{-it}
 \tag{4.4.2}$$

Где $A(t)$ - медленно меняющаяся по сравнению с $\exp(it)$ комплексная амплитуда (метод также называется *метод медленно меняющихся амплитуд*).

$$\dot{x} = \dot{A}e^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^*e^{-it} - iA^*e^{-it}
 \tag{4.4.3}$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной x по сути введены две A и A^* . Поэтому можно наложить между этими величинами дополнительную связь. Удобно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^* e^{-it} = 0 \quad (4.4.4)$$

Тогда уравнение (4.4.3) переписывается в виде

$$\dot{x} = iAe^{it} - iA^* e^{-it} \quad (4.4.5)$$

Продифференцируем это уравнение еще раз. Получим

$$\ddot{x} = i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} - i\dot{A}^* e^{-it} + A^* e^{-it} \quad (4.4.6)$$

С учетом соотношения (4.4.4) уравнение (4.4.6) принимает вид

$$\ddot{x} = 2i\dot{A}e^{it} - Ae^{it} + A^* e^{-it} \quad (4.4.7)$$

Подставляя выражения (4.4.5) и (4.4.7) в исходное уравнение (4.4.1), после ряда вычислений (читателю предлагается самостоятельно провести необходимые вычисления в качестве упражнения) приходим к следующему уравнению

$$2i\dot{A}e^{it} + 2i\gamma(Ae^{it} - A^* e^{-it}) + \beta(A^3 e^{3it} + 3|A|^2 Ae^{it} + 3|A|^2 A^* e^{-it} + (A^*)^3 e^{-3it}) = 0 \quad (4.4.8)$$

Отметим, что в уравнении (4.4.8) все члены одного порядка малости: они либо содержат производные от медленно меняющейся амплитуды A , либо пропорциональны малым параметрам β, γ .

Разделим уравнение (4.4.8) на $\exp(it)$:

$$2i\dot{A} + 2i\gamma A - 2i\gamma A^* e^{-2it} + \beta(A^3 e^{2it} + 3|A|^2 A^* + 3|A|^2 A^* e^{-2it} + (A^*)^3 e^{-4it}) = 0 \quad (4.4.9)$$

Теперь усредним уравнение (4.4.9) по периоду основной частоты. Операция усреднения выполняется следующим образом:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (4.4.10)$$

Где T – период колебаний (в данном случае $T=2\pi$). Поскольку $A(t)$ – медленно меняющаяся функция, при усреднении ее можно вынести за знак интеграла. Тогда, как нетрудно заметить, быстро осциллирующие члены (т.е. все члены содержащие комплексные экспоненты) в уравнении (4.4.9) дают нуль, и в результате мы приходим к укороченному уравнению

$$\dot{A} + \gamma A - \frac{3i\beta|A|^2 A}{2} = 0 \quad (4.4.11)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным методом многих масштабов. Дальнейшие вычисления читателю предлагается провести самостоятельно.

Отметим, что метод многих масштабов позволяет, вообще говоря, продвинуться дальше, поскольку с его помощью мы не только определили эволюцию медленно меняющихся амплитуды и фазы, но и нашли компоненту на частоте третьей гармоники. Кроме того, мы могли бы продолжать разложения до более высоких порядков малости,

каждый раз все больше и больше уточняя решение. Впрочем, метод усреднения также допускает соответствующее обобщение (так называемый метод Крылова — Боголюбова). Этот метод имеет много общего с методом многих масштабов; подробно останавливаться на нем мы не будем.

4.5. Разрывные колебания, релаксационные системы. Метод быстро-медленных движений.

Рассмотрим метод быстрых-медленных движений на примере уже знакомого нам уравнения Ван-дер Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.5.1)$$

Перемасштабированием переменной x , а также с помощью замены времени $t = \lambda\tau$ уравнение (4.5.1) может сведено к эквивалентной форме:

$$\frac{1}{\lambda^2} \ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.5.2)$$

Или, с учетом замены $\varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}$,

$$\varepsilon \ddot{x} - (1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4.5.3)$$

Случай $\varepsilon \gg 1 (\lambda \ll 1)$ представляет собой случай квазигармонических колебаний и может быть исследован с помощью метода многих масштабов или метода Ван-дер Поля, описанные в предыдущих разделах.

Случай $\varepsilon \ll 1 (\lambda \gg 1)$ представляет собой принципиально иную ситуацию релаксационных колебаний, для его исследования может быть применен метод быстрых-медленных движений.

От уравнения (4.5.3) перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \varepsilon \dot{y} &= (1 - y^2)y - x \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Рассмотрим уравнение интегральных кривых для системы (4.5.4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^2)y - x}{\varepsilon y} \quad (4.5.5)$$

Уравнение интегральных кривых показывает, что $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ или что то же $\frac{dx}{dy} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вне окрестности кривой $S: x = (1 - y^2)y$. Последнее означает, что вне окрестности кривой S фазовые траектории близки к траекториям $x = const$, направление на которых определяется вторым уравнение системы (4.5.4), при малом ε скорость движения вдоль прямых $x = const$ велика:

$$\begin{aligned} x &= x_0 = const \\ \varepsilon \dot{y} &= (1 - y^2)y - x_0 \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Система (4.5.6) называется *подсистемой быстрых движений*.

В ε -окрестности кривой S наблюдаются так называемые *медленные движения*, которые определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - y^2)y \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Система (4.5.7) называется *подсистемой медленных движений*.

Фазовый портрет системы, полученный численно в приближении малого ε с помощью метода быстрых-медленных движений, представлен на рисунке 4.5.1.

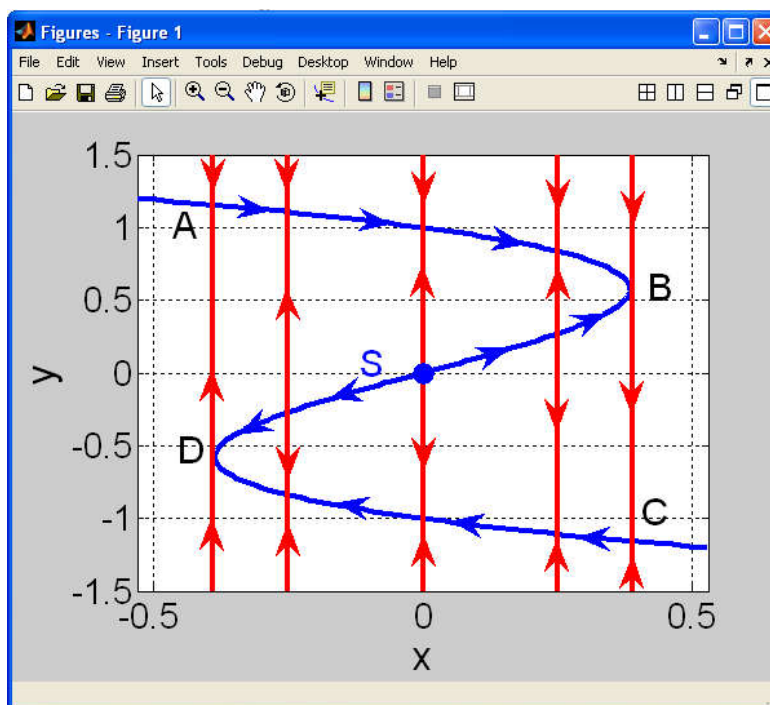


Рисунок 4.5.1 – Фазовый портрет системы (4.5.4) в приближении малого ε . Здесь ABCD – устойчивый предельный цикл.

Проследим, как будет меняться фазовый портрет при изменении (увеличении) значения малого параметра ε . На рисунках 4.5.2(a) и 4.5.2(b) представлены фазовые портреты системы при различных ε .

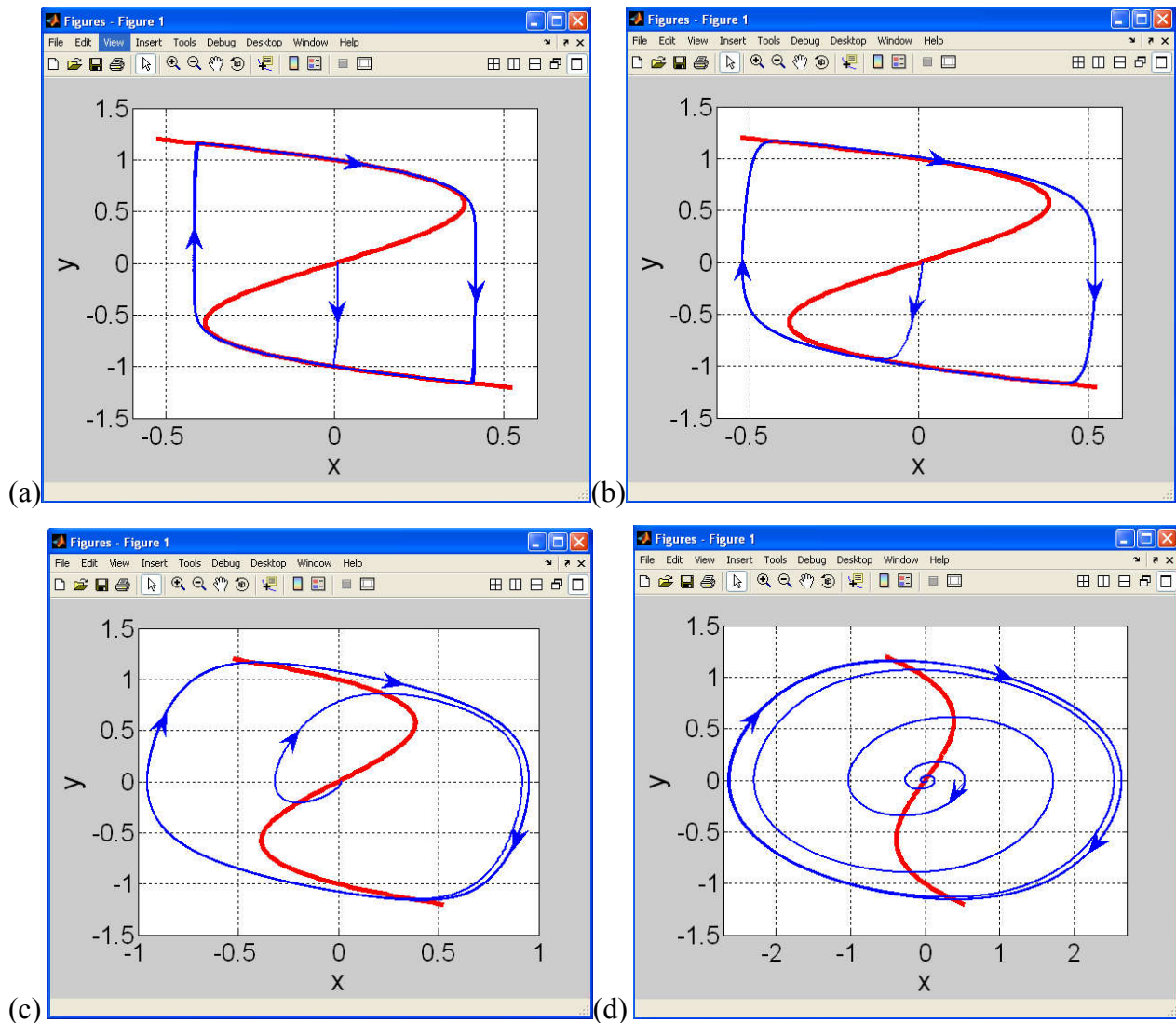


Рисунок 4.5.2 – Предельный цикл в фазовом пространстве системы (4.5.4)

(a) $\varepsilon = 0.005$ (b) $\varepsilon = 0.05$ (c) $\varepsilon = 0.5$ (d) $\varepsilon = 5$

Рассмотрим, как выглядят колебания в системе в случае малости параметра ε , и сравним с результатом для достаточно большого параметра ε . Результаты численного счета приведены на рисунке 4.5.3.

Таким образом, метод “быстрых-медленных” может помочь для аналитического исследования системы в том случае, если при старшей производной в системе присутствует малый параметр. Последнее означает, что в системе есть существенно разные временные масштабы изменения переменных системы. В общем виде для двумерных систем метод может сформулирован в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \varepsilon \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

При $\varepsilon > 0$ система (4.5.7) может быть разбита на две подсистемы – одна система быстрых движений, другая система медленных движений.

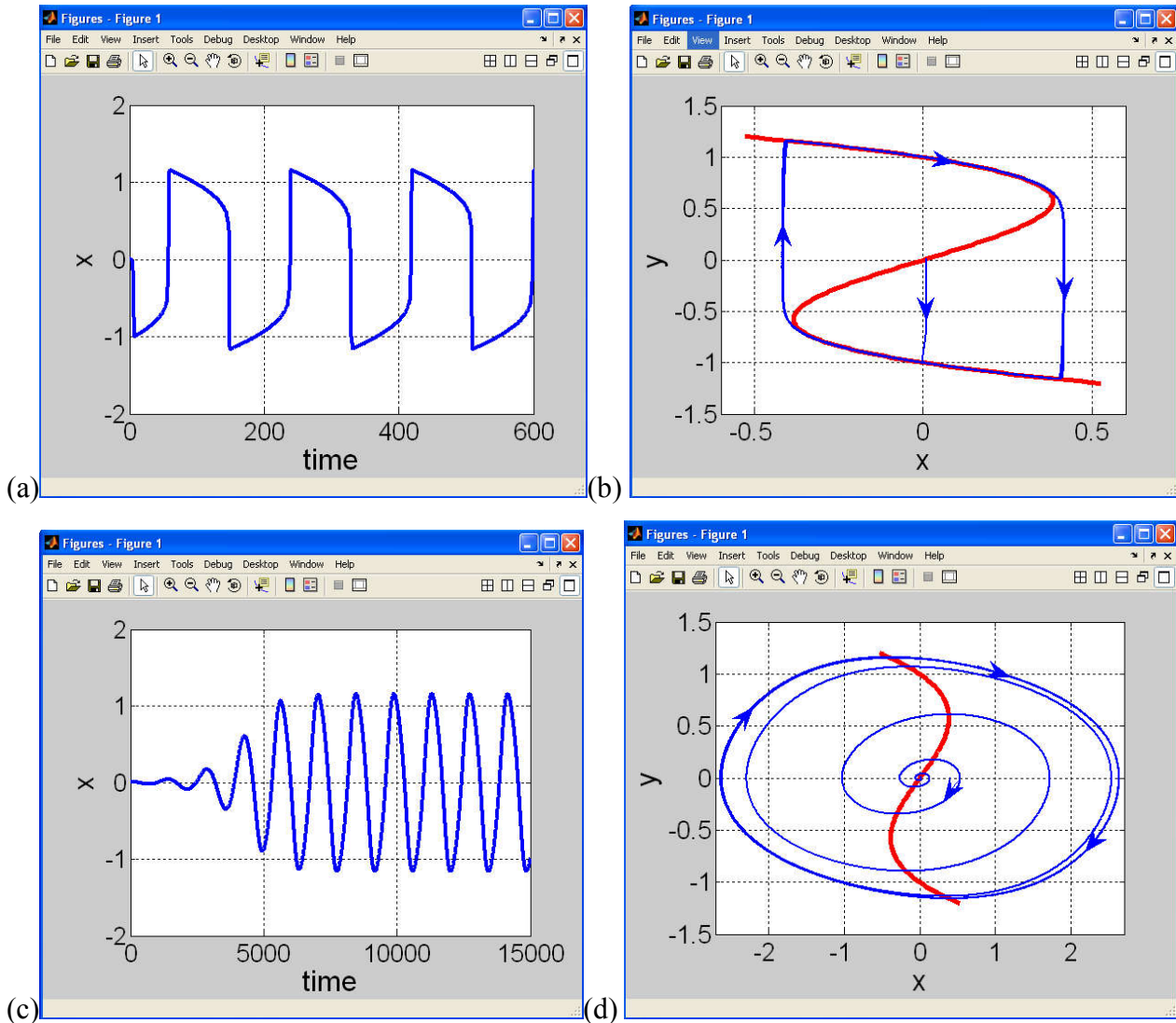


Рисунок 4.5.3 – (a) Пространственно-временная диаграмма, $\varepsilon = 0.005$ Колебания данного типа называются релаксационными (b) Фазовая плоскость, $\varepsilon = 0.005$ (c) Пространственно-временная диаграмма, $\varepsilon = 5$ (d) Фазовая плоскость, $\varepsilon = 5$.

Подсистема быстрых движений имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 = const \\ \varepsilon \dot{y} &= Q(x_0, y) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Подсистема медленных движений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ Q(x, y) &= 0\end{aligned}\tag{4.5.9}$$

Рассмотренный метод также может быть обобщен и на случай многомерных систем.

4.6. Упражнения

4.6.1. Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний нелинейного осциллятора с квадратичной нелинейностью.

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0$$

Найти точное решение системы. Сравнить найденное приближенное решение с точным решением.

4.6.2. Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^5 = 0$$

4.6.3 Найти поправку первого порядка к частоте слабонелинейных колебаний вблизи устойчивого положения равновесия для осциллятора с кубичной нелинейностью вида

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$$

Найти точное решение системы. Сравнить найденное приближенное решение с точным решением.

4.6.4. Осциллятор представляет собой груз массы m , прикрепленный к стене пружиной с жёсткостью k . Груз может двигаться вдоль горизонтальной поверхности, причем сила «сухого» трения между грузом и поверхностью подчиняется закону Кулона-Амонтона:

$$f_{mp} = \mu mg \operatorname{sgn}(v)$$

где μ - коэффициент трения, v – скорость движения. Получить укороченное уравнение для амплитуды колебаний и исследовать характер затухания.

4.6.5. Получите укороченное уравнение для осциллятора с квадратичной нелинейностью и слабым затуханием

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2 \gamma \dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0$$

Сравнить с результатами, полученными при решении задачи 4.5.1.

5. Бифуркации динамических систем на прямой и плоскости

В данном разделе мы по-прежнему будем рассматривать системы вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}^1$$

Вектор x в данном случае – это вектор динамических переменных, μ – параметр. Если функции F аналитические, то для динамических систем справедлива теорема о непрерывной зависимости решения системы от начальных условий и параметров. Другими словами, непрерывное изменение параметра μ будет приводить к непрерывному изменению и решения системы.

Теория бифуркаций изучает качественное изменение поведения системы при изменении параметров. Под качественным изменением понимается такое изменение, при котором происходит смена количества состояний равновесия или предельных циклов, или меняется их устойчивость. Меняя параметр в системе, мы можем не получать качественного изменения поведения в системе. Например, устойчивый узел превратился в ходе бифуркации в устойчивый фокус, при этом качественно картина поведения не изменилась, так как эти состояния равновесия являются топологически эквивалентными.

Таким образом, мы приходим к выводу, что изменения динамических систем при изменении параметров могут быть двух типов: (а) качественные изменения при которых происходит структурная перестройка фазового портрета системы и (б) изменения, не приводящие к качественному перестроению фазового пространства. Здесь мы подходим к понятию *грубой динамической системы*.

Определение 1. *Грубой системой называется такая система, в которой малое изменение параметров не приводит к качественному перестроению структуры фазового пространства.*

Определение 2. *Бифуркация динамической системы – качественное изменение ее фазового пространства, вызванное изменением параметра системы.*

Для лучшего понимания перечисленных понятий рассмотрим следующий пример.

Пример 5.1.

Рассмотрим простейшую одномерную систему и исследуем изменение поведения в система при изменении параметра μ :

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

При $\mu < 0$ состояний равновесия не существует. При $\mu > 0$ существует два состояния равновесия, одно устойчивое, другое неустойчивое. Таким образом, $\mu = 0$ является бифуркационным значением, при котором происходит качественное изменение поведения системы. Также можно сделать вывод о том, что ДС при $\mu = 0$ не обладает свойством грубости, при ненулевом μ система грубая.

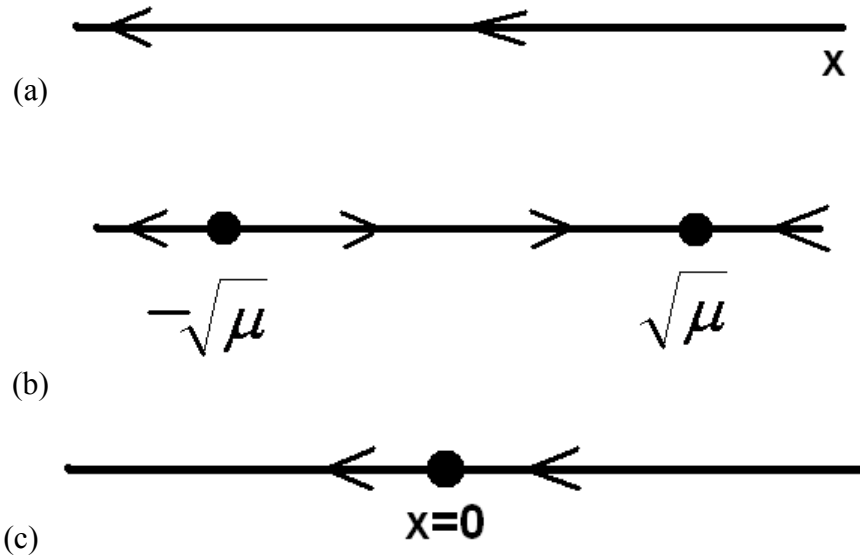


Рисунок 5.1 – фазовое пространство системы при различных значениях параметра, (a) $\mu < 0$, (b) $\mu > 0$, (c) $\mu = 0$. Случаи (a) и (b) – случаи грубой системы, (c) – случай негрубой системы, $\mu = 0$ – бифуркационное значение параметра.

Таким образом, пространство параметров делится на области существования грубых систем с теми или иными свойствами, эти области отделены друг от друга бифуркационными кривыми на которых происходят бифуркации и поведение системы существенно меняется (качественное изменение)

5.1. Бифуркации динамических систем на прямой. Слияние устойчивого и неустойчивого состояния равновесия.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x, \mu), x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (5.1.1)$$

Найдем ее состояния равновесия x^* :

$$F(x^*, \mu) = 0$$

Как мы уже знаем, в окрестности равновесия функцию можно разложить в ряд:

$$F(x, \mu) = \frac{\partial F(x^*, \mu)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x^*, \mu)}{\partial x^2} (x - x^*)^2 + \dots$$

Критерий .1 Система является грубой, существует либо устойчивое (производная

<0), либо неустойчивое (производная >0) состояние равновесия, т.е. $\frac{\partial F(x^*, \mu)}{\partial x} \neq 0$.

Положим для примера, что при $\mu < \mu^*$ $\frac{\partial F(x^*, \mu)}{\partial x} < 0$, а при $\mu = \mu^*$ $\frac{\partial F(x^*, \mu)}{\partial x} = 0$.

Исследуем, какие изменения происходят при этом в фазовом пространстве системы.

$$F(x, \mu) = 0 \bullet (x - x^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(x^*, \mu^*)}{\partial x^2} (x - x^*)^2 + \dots$$

Построим функцию F в окрестности x^* при качественно различных значениях параметра μ^*

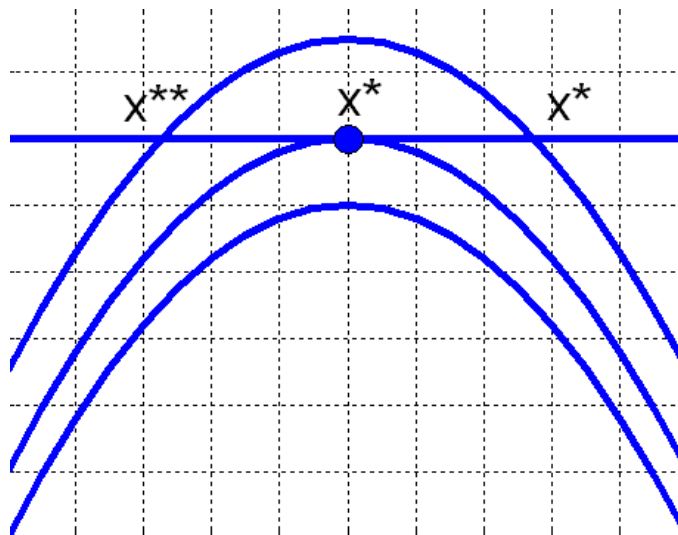


Рисунок 5.1.1 – Количество пересечений функции F и нулевой линии (количество состояний равновесия в системе)

В случае равенства нулю первой производной и неравенства нулю второй производной в точке, соответствующей состоянию равновесия, происходит седлоузловая бифуркация, которая сопровождается слиянием и исчезновением двух состояний равновесия.

5.2. Бифуркации динамических систем на плоскости

Будем изучать двумерные динамические системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= Q(x, y, \mu)\end{aligned}\quad (5.2)$$

Допустим, что существует состояние равновесия на плоскости с координатами $(0,0)$. Собственные значения матрицы линеаризации в окрестности данного состояния обозначим $\lambda_{1,2}$. В случае действительных собственных значений линейной заменой исходная система может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda_1(\mu)u + f(u, v, \mu) \\ \dot{v} &= \lambda_2(\mu)v + g(u, v, \mu)\end{aligned}\quad (5.2')$$

Функции f, g могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности тривиального равновесия (линейные слагаемые в разложении функций отсутствуют).

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha_1(\mu) + \lambda_1(\mu)u + l_1(\mu)u^2 + \dots \\ \dot{v} &= \alpha_2(\mu) + \lambda_2(\mu)v + l_2(\mu)v^2 + \dots\end{aligned}\quad (5.2'')$$

Предположим, что при нулевом значении параметра μ

$$\lambda_1(0) = 0, \lambda_2(0) \neq 0, l_1(0) \neq 0$$

Тогда путем преобразований система может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(x, y)\end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}f(x, y) &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots \\ g(x, y) &= Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots\end{aligned}$$

В свою очередь

$$\begin{aligned}P_2(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ Q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ P_3(x, y) &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ Q_3(x, y) &= b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3\end{aligned}$$

Исходная система приводится через линейную замену переменных к виду:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= by + Q_2(x, y) + \dots = Q(x, y)\end{aligned}$$

$P_k(x, y)$ – однородные многочлены степени k , $k=1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}P'_x(0,0) + Q'_y(0,0) &= b \neq 0 \\ P_2(1,0) &= \gamma \neq 0\end{aligned}$$

В зависимости от знаков b и γ получаем различные случаи расположения узловой области и её устойчивости.

Определение. *Коразмерность бифуркации* - число независимых событий, необходимых для ее реализации.

Очевидно, что чем больше условий требуется выполнить, тем менее часто такая ситуация встречается в пространстве параметров. Иногда вместо понятия «коразмерность» используют понятие «степень вырожденности». Если одновременное достижение собственными числами бифуркационного значения управляется одним параметром, *коразмерность бифуркации равна 1*, двумя параметрами – *коразмерность равна 2*. Все бифуркации, которые мы будем рассматривать в этом разделе, являются бифуркациями коразмерности 1.

Определение. *Схема, по которой происходит изменение качественной картины, называется бифуркационной диаграммой.* Она показывает все возможные режимы в системе при изменении параметра.

Выделяется несколько видов бифуркаций динамических систем на плоскости:

- Бифуркации состояний равновесия:
- Бифуркации предельных циклов
- Нелокальные бифуркации (гомоклинические траектории и структуры)

К бифуркациям состояний равновесия относятся: седлоузловая бифуркация, транскритическая бифуркация, бифуркация «вилка», бифуркация Андронова-Хопфа.

5.2.1. Седлоузловая бифуркация

Данная бифуркация относится к бифуркациям состояний равновесия. Для негрубой системы ($b=0$) при изменении правых частей, при которых система становится грубой, возможны 2 случая:

- Седлоузел разделяется на 2 грубых состояния равновесия – седло и узел: узел устойчив, если $b < 0$, и неустойчив при $b > 0$
- Седлоузел исчезает

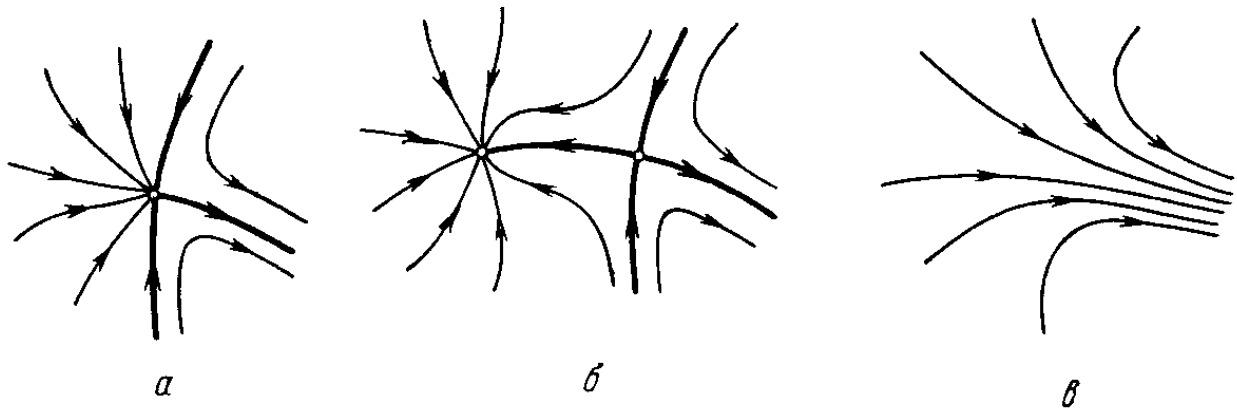


Рисунок 5.2.1 – Седлоузловая бифуркация на плоскости, качественное построение

Пример 5.2.1.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Как видно из уравнений, данная система описывается только одним управляющим параметром β , что означает, что ее коразмерность равна 1. Бифуркационное значение параметра $\beta=0$. На рисунке 5.2.2 приведен качественно построенные фазовые портреты системы в зависимости от значения управляющего параметра.

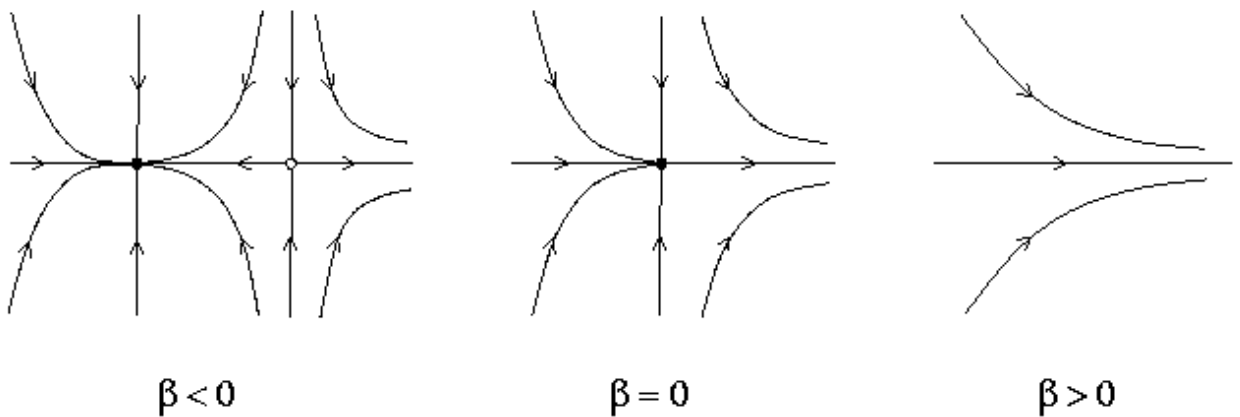


Рисунок 5.2.2 – Фазовая плоскость системы (5.2.1) в зависимости от значения управляющего параметра β . В случае $\beta < 0$ в системе существует 2 состояния равновесия - устойчивый узел и седло, $\beta = 0$ – седлоузел, $\beta > 0$ – состояния равновесия отсутствуют.

Задание: построить приведенные на рисунке 5.2.2 фазовые портреты численно.

5.2.2. Транскритическая бифуркация

Модельная система данной бифуркации выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

Легко убедиться, что в данной системе имеется два состояния равновесия – точки с координатами (0,0) и (μ ,0), причем координата одного из них содержит управляющий параметр. Читатель также может легко проверить, что значение управляющего параметра $\mu=0$ является бифуркационным значением.

В ходе транскритической бифуркации в системе сохраняется количество состояний равновесия. Но меняется тип устойчивости каждого из них: точка с координатами (0,0) является устойчивым узлом при $\mu<0$, и седлом при $\mu>0$, точка с координатами (μ ,0) является седлом при $\mu<0$, и устойчивым узлом при $\mu>0$.

5.2.3. Бифуркация «вилка»

Данная бифуркация бывает двух типов: суперкритическая и субкритическая.

Рассмотрим сначала вариант *суперкритической бифуркации «вилка»*. Ее модельная система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

Легко убедиться, что значение параметра $\mu=0$ является бифуркационным значением. При $\mu<0$ в системе существует единственное устойчивое состояние равновесие в точке с координатами (0,0). При значении $\mu=0$ устойчивый узел превращается в седло, и одновременно в окрестности седла возникают 2 устойчивых узла ($\pm\sqrt{\mu}$, 0). После бифуркации при $\mu>0$ в системе существует 3 состояния равновесия: седло в точке с координатами (0,0), и два устойчивых узла в точках с координатами ($+\sqrt{\mu}$, 0) и ($-\sqrt{\mu}$, 0).

Для *субкритической бифуркации «вилка»* модельная система выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + x^3 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю, бифуркационное значение параметра $\mu=0$. До бифуркации при $\mu<0$ в системе существует три состояния равновесия: седло в точке с координатами (0,0), и два устойчивых узла в точках с координатами ($+\sqrt{\mu}$, 0) и ($-\sqrt{\mu}$, 0). В ходе бифуркации при достижении управляющим параметром бифуркационного значения $\mu=0$ три состояния равновесия сливаются в одно, после чего при $\mu>0$ на фазовой плоскости остается только одно устойчивое состояние равновесия в точке с координатами (0,0).

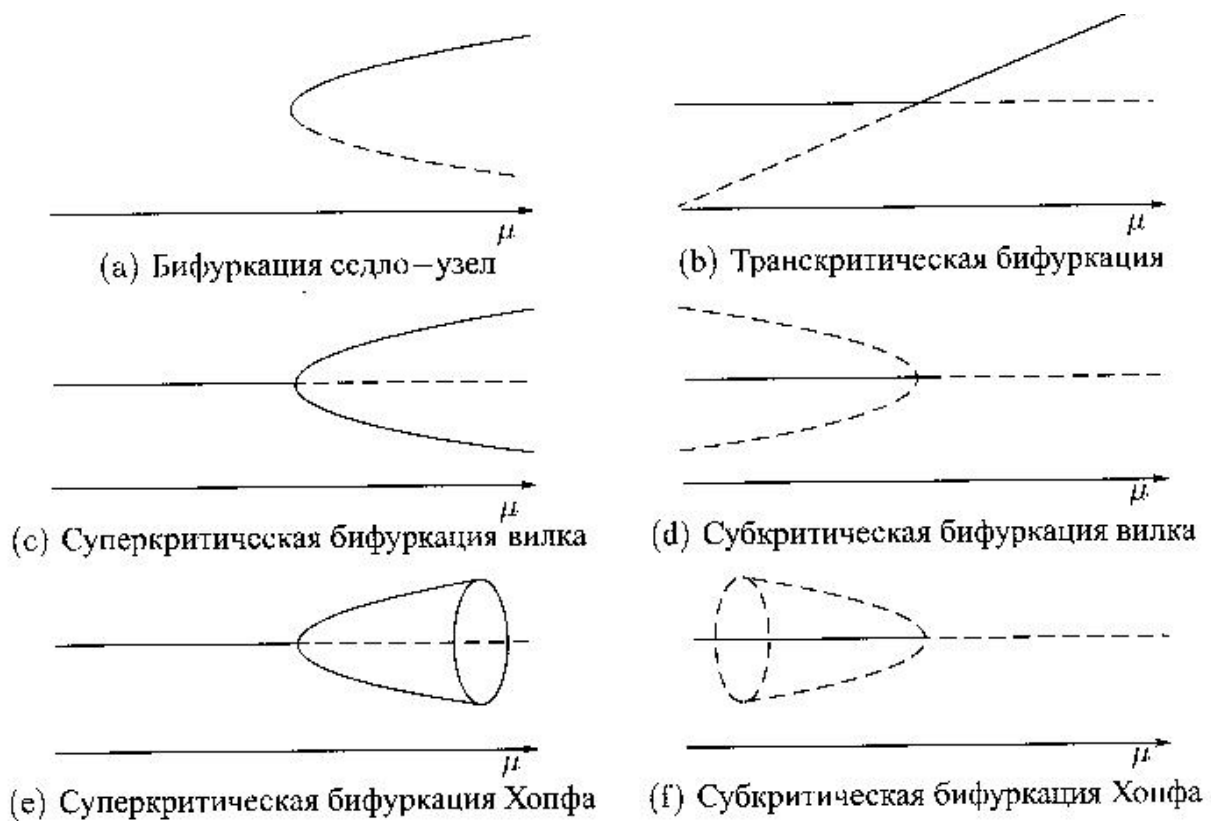


Рисунок 5.2.3 – Бифуркационные диаграммы бифуркаций состояний равновесия.

Из книги [10].

5.2.4. Бифуркация Андронова — Хопфа

Бифуркация Андронова-Хопфа - локальная бифуркация векторного поля на плоскости, в ходе которой особая точка-фокус теряет устойчивость при переходе пары её комплексно-сопряжённых собственных значений через мнимую ось. При этом либо из особой точки рождается устойчивый предельный цикл (суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, или мягкая потеря устойчивости), либо неустойчивый предельный цикл в момент бифуркации схлопывается в эту точку, и бассейн ее отталкивания после бифуркации имеет отделенный от нуля размер (субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, или жесткая потеря устойчивости).

Модельная система суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\mu - x^2 - y^2) - y \\ \dot{y} &= y(\mu - x^2 - y^2) + x\end{aligned}$$

которая может быть представлена в полярных координатах

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Данное уравнение легко интегрируется. Решение с начальным условием $r(t=0) = r_0$ имеет вид

$$r = \frac{\mu}{1 + \left(\frac{\mu - r_0}{r_0}\right) \exp(-\mu t)}$$

Термин «суперкритический» связан с тем, что предельный цикл возникает только после того, как параметр превысит критическое значение. Поскольку нетрудно видеть, что амплитуда колебаний с ростом μ плавно увеличивается от нуля, говорят, что возбуждение колебаний происходит *мягко*.

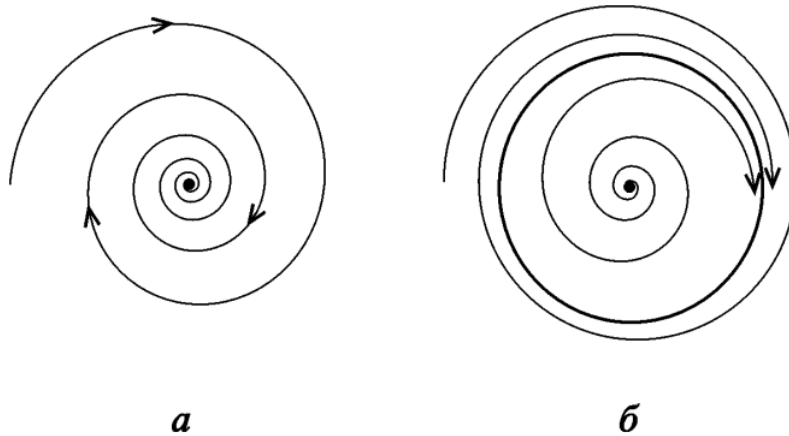


Рисунок 5.2.4.1 – Трансформация фазовых портретов при суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа: (а) $\mu < 0$, (б) $\mu > 0$. Радиус предельного цикла $r = \sqrt{\mu}$.

Модельная система для *субкритической бифуркации Андронова-Хопфа* выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\mu + (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2) - y \\ \dot{y} &= y(\mu + (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2) + x\end{aligned}$$

и может быть переписана с использованием полярных координат

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Особая точка с координатами $(0,0)$ является устойчивым фокусом при $\mu < 0$, и неустойчивым фокусом при $\mu > 0$. Уравнения двух предельных циклов:

$$0 = \mu + r^2 - r^4$$

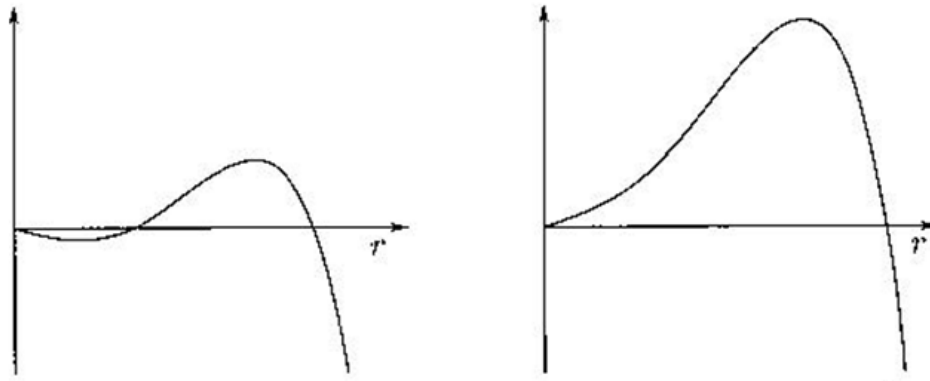


Рисунок 5.2.4.2 – График $\mu r + r^3 - r^5$ при $\mu < 0$ (слева) и $\mu > 0$ (справа)

Определим устойчивость предельных циклов в случае $\mu < 0$. Для этого рассмотрим функцию $\dot{r} = r(\mu + r^2 - r^4)$. Интегрируя это уравнение, получим:

- $r^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2$ - устойчивый предельный цикл
- $r^2 = (1 - \sqrt{1 + 4\mu})/2$ - неустойчивый предельный цикл

При малых μ неустойчивый предельный цикл аппроксимируется уравнением $r^2 = -\mu$. В случае $\mu > 0$ существует только один предельный цикл устойчивый:

$$r^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2$$

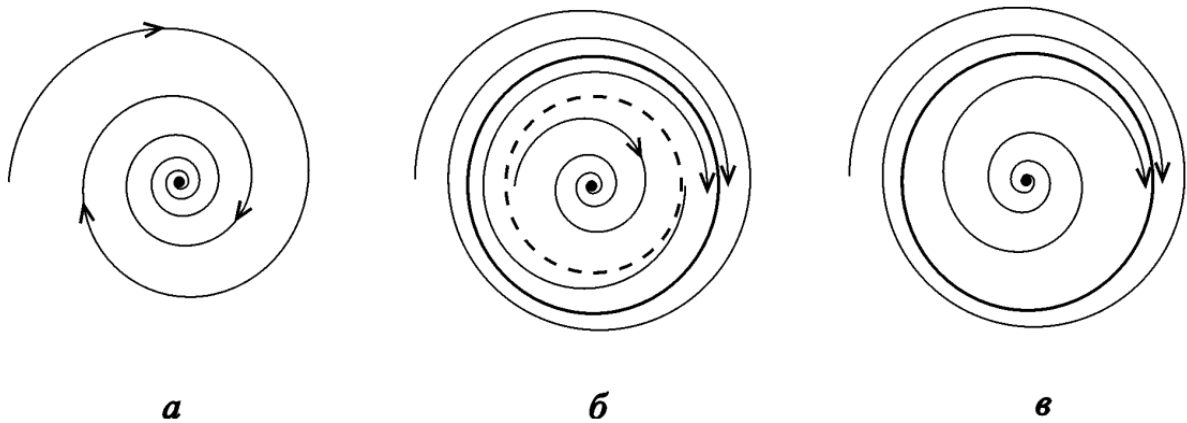


Рисунок 5.2.4.3 – Трансформация фазовых портретов при субкритической бифуркации Андронова-Хопфа: (а) $\mu < 0$ (б) $\mu = 0$ (в) $\mu > 0$

Сценарий бифуркации можно описать следующим образом: управляющий параметр μ растет через 0. При этом устойчивый фокус в точке с координатами (0,0) сливается с неустойчивым предельным циклом, в результате чего рождается неустойчивый фокус в (0,0). Устойчивый цикл только меняет амплитуду. Для данной бифуркации

существенен следующий момент: даже при выполнении условия устойчивости автоколебания в системе могут возникнуть, только если начальное возмущение достаточно велико. В случае, когда амплитуда начального возмущения превосходит некоторое критическое значение, колебания начинают нарастать. Этот процесс и называется *жестким* возбуждением автоколебаний. Термин «субкритический» связан с тем, что предельный цикл появляется до того, как состояние равновесия потеряет устойчивость.

Важно отметить, что существует область значений параметров, в которой в системе имеет место *бистабильность*, т.е. сосуществование двух устойчивых состояний, в данном случае это неподвижная точка и предельный цикл. Поэтому жесткое возбуждение характеризуется *гистерезисом*.

Известный пример автоколебательной системы с жестким возбуждением – маятниковые часы-ходики. Действительно, после того, как часы заведены, т.е. гиря поднята на необходимую высоту, необходимо сообщить маятнику начальный толчок, чтобы он начал колебаться.

Задание: построить численно фазовые портреты для всех изученных в данном разделе модельных систем при качественно различных значениях управляющего параметра, а также получить соответствующие бифуркационные диаграммы.

5.3. Упражнения

5.3.1 Дана система

$$\dot{\varphi} = \omega + \gamma \sin(\varphi)$$

Определить значения параметра ω/γ , при котором происходит седло-узловая бифуркация.

5.3.2 На плоскости параметров α, β системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x - y + \beta xy - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Построить область, для которой реализуется бифуркация Андронова-Хопфа.

5.3.2 Для известной популяционной модели «хищник-жертва», записанной в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x)x - xy \\ \dot{y} &= xy - my \end{aligned}$$

Показать, что если функция $a(x)$, характеризующая мальтузианский рост жертвы, является монотонно убывающей в первом квадранте, то в системе невозможна бифуркация Андронова-Хопфа, а если эта функция в первом квадранте монотонно растет от ненулевого значения до некоторого значения a_0 , а затем монотонно убывает, то такая бифуркация возможна. Найти порог бифуркации в случае $a(x) = a + bx - x^2$ (предварительно показать, что для произвольной параболической аппроксимации функции $a(x)$ коэффициент перед членом

x^2 можно убрать перенормировкой). Для случая, когда бифуркация Андронова-Хопфа, численно построить графики фазовой плоскости при качественно различных значениях бифуркационного параметра.

5.3.3 Для автоколебательной системы с жёстким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

Получить бифуркационные значения параметров, проиллюстрировать ход бифуркации качественно и численно.

5.3.4. Качественно и численно провести бифуркационный анализ отображения

$$x_{n+1} = (1 - \mu)x_n + x_n^2$$

5.3.5. Качественно и численно провести бифуркационный анализ отображения

$$x_{n+1} = (1 + \mu)x_n - x_n^3$$

Литература

- [1] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
- [2] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с. — ISBN 5-02-013996-3.
- [3] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином, 2001 — с. 363—375.
- [4] Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа, 3-е изд. — М.: Наука, 1967.
- [5] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. - М.: Наука, 1981. - 918 с.
- [6] А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем = Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems / пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. — М.: Факториал, 1999. — С. 455. — 768 с. — ISBN 5-88688-042-9.
- [7] А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947
- [8] Е.А.Леонтович, А.Г.Майер Общая качественная теория. Дополнение к главам 5 и 6 в книге А.Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Гостехиздат, 1947
- [9] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2-е изд., испр. и доп. М.: Госуд.изд.физ.-мат. Лит., 1958ю – 408 с.
- [10] Халил Х.К. Нелинейные системы. Пер. с англ. И. А. Макарова ; Под ред. А. Л. Фрадкова . – 3. изд . – Ижевск : Ин-т компьютер. исслед. ; Москва : R&C Dynamics, 2009 . – 812 с.

Татьяна Александровна **Леванова**
Максим Андреевич **Комаров**
Алексей Константинович **Крюков**
Василий Александрович **Костин**
Григорий Владимирович **Осипов**

КАЧЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.