Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

Михаил Александрович Солдатов
Светлана Серафимовна Круглова
Евгений Валентинович Круглов

Несобственные интегралы и ряды
Часть 1
Интегралы несобственные и зависящие от параметра

Учебное пособие

Предназначено для студентов физического и радиофизического факультетов

Рекомендовано Методической комиссией
механико-математического факультета

Нижний Новгород, 2014

§ 1. Интегралы по бесконечному промежутку, или несобственные интегралы первого рода

Для функций $f(x)$, ограниченных на конечном промежутке $[a,b]$, ранее [8, гл.9] рассматривался определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – как предел интегральных сумм. Если интеграл существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a,b]$ (по Риману); будем называть его «собственным» интегралом. В частности, он существует для функций $f(x)$, непрерывных на $[a,b]$. Сейчас и в § 1.2 понятие определённого интеграла распространим на случаи *бесконечного промежутка* и *неограниченной* функции. При этом существенно используется теория пределов функции одного переменного.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном промежутке $a \le x < \infty$ или, вообще, интегрируема на *любом* конечном промежутке $[a,B]$, $B > a$, так что существует интеграл

$$\int_a^B f(x)dx \tag{1.1}$$

– это есть функция от переменной B. Предел этого интеграла при $B \to +\infty$ называется интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$, или *несобственным интегралом первого рода*, и обозначается символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx. \tag{1.2}$$

Если существует *конечный* предел (1.2), то говорят, что несобственный интеграл *сходится* (существует), и функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,+\infty)$ (в несобственном смысле), а само *число* (1.2) называется величиной или *значением* интеграла. В противном случае, т.е. если предел (1.2) не существует, в частности, равен бесконечности, говорят, что интеграл *расходится* (не существует).

Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)dx. \tag{1.4}$$

Однако, интеграл (1.3) сводится к виду (1.2) заменой $x = -t$, а (1.4) к интегралам (1.2) и (1.3) посредством равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1.5}$$

При этом интеграл (1.4) сходится (существует), когда сходятся интегралы (1.2) и (1.3). В силу сказанного, достаточно изучить интегралы вида (1.2).

Говорят, что интеграл (1.2) имеет особенность в точке $x=+\infty$, а (1.3) – в точке $x=-\infty$.

В определении (1.4) присутствует предел функции двух переменных A, B и имеется в виду, что $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ независимо друг от друга. Если же считать $A=-B$, то будем иметь предел функции одного переменного B – он называется *главным значением* интеграла (по Коши) и обозначается так:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B} f(x)dx \qquad (1.6)$$

(*v.p.* – первые буквы от фр. *valeur principal* – главное значение).

Выясним *геометрический смысл*, например, интеграла (1.2). Пусть $f(x)\geq 0$, то интеграл (1.1) определяет площадь S_B криволинейной трапеции под кривой $y=f(x)$ на участке $a\leq x\leq B$. Поэтому естественно считать, что *интеграл* (1.2), если он существует, *выражает площадь S неограниченной криволинейной трапеции* (рис. 1.1).

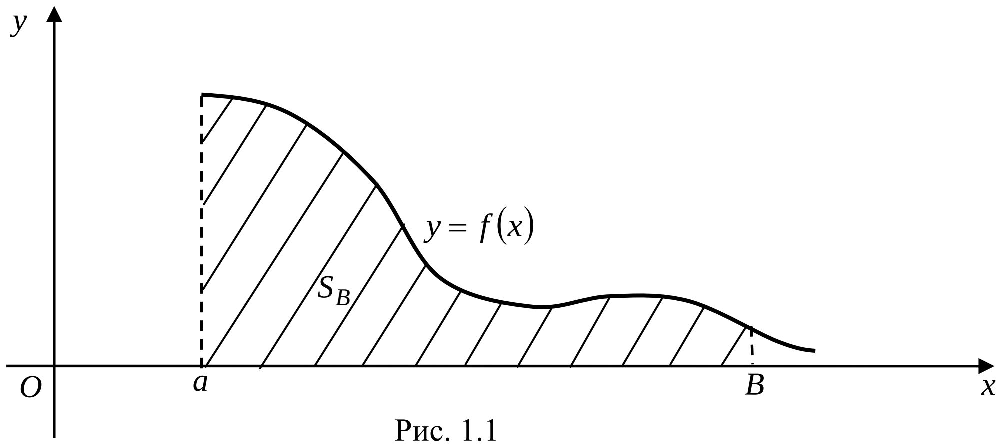


Рис. 1.1

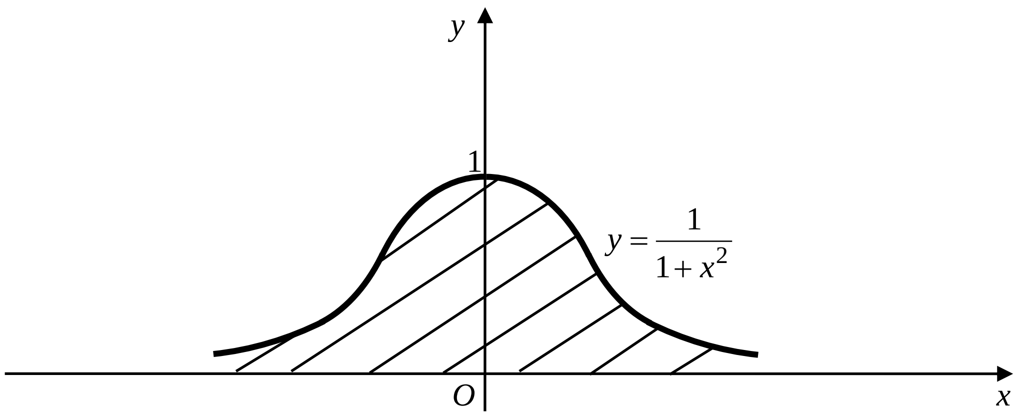


Рис.1.2

<u>Пример</u> 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\lim_{B\to\infty}\int\limits_{0}^{B}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\lim_{B\to\infty}\,[\operatorname{arctg}x]\big|_0^B =$

$=2\lim\limits_{B\to\infty}(\operatorname{arctg}B-\operatorname{arctg}0)=\pi$ – такова площадь бесконечной криволинейной трапеции, изображённой на рис. 1.2.

Как по-иному вычислять, например, интеграл (1.2)? Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на промежутке $a\le x<\infty$ и $F(x)$ какая-либо её первообразная. Тогда

$$\int_a^B f(x)dx=F(x)\Big|_a^B=F(B)-F(a). \tag{1.7}$$

Обозначим

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x). \tag{1.8}$$

Если этот предел существует (конечный), то $F(\infty)$ – определённое число. Если же не существует, то $F(\infty)$ символ, не имеющий смысла. В обоих случаях, перейдя в (1.7) к пределу при $B\to\infty$, можем формально записать

$$\int_a^\infty f(x)dx=F(\infty)-F(a)\equiv F(x)\Big|_a^\infty. \tag{1.9}$$

Это есть *формула Ньютона-Лейбница* для несобственных интегралов. Под «подстановкой» при $x=\infty$ понимается именно предел (1.8).

Пример 2) Рассмотрим так называемый «интеграл сравнения» $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$, где $a>0$. При $p\ne1$ имеем $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}dx=\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\Big|_a^\infty$. Если $p>1$, то интеграл имеет конечное значение $\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$; если же $p<1$, то подстановка при $x=\infty$ равна ∞ – интеграл расходится. При $p=1$ имеем $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_a^\infty=\infty$. Итак, при $a>0$ интеграл

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx\begin{cases}\text{сходится, } если\ p>1\\ \text{расходится, } если\ p\le1\end{cases}. \tag{1.10}$$

Здесь гипербола $y=\frac{1}{x}$ отделяет кривые $y=\frac{1}{x^p}$, ограничивающие вместе с осью Ox и прямой $x=a>0$ конечные (при $p>1$) и бесконечные (при $p\le1$) площади (рис. 1.3).

В этом примере для функции $f(x)=\frac{1}{x^p}>0$ замечаем, что одного стремления $f(x)\to0$ при $x\to\infty$ недостаточно для сходимости интеграла (случай $0<p\le1$), но чем быстрее $f(x)\to0$, тем лучше для наличия сходимости (случай $p>1$).

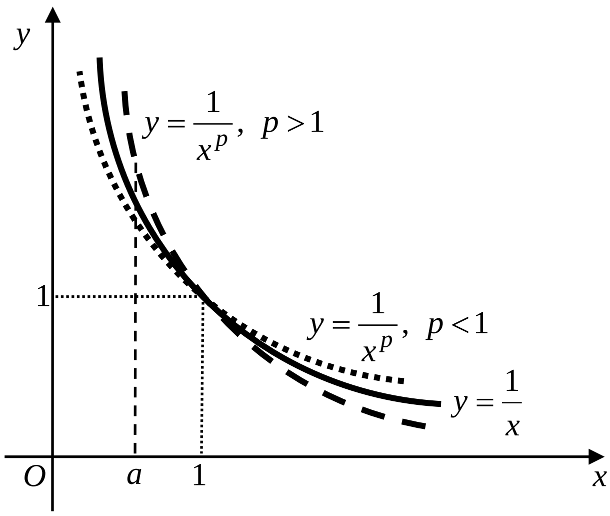


Рис.1.3

Пример 3) $\int\limits_0^\infty \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\infty$. Интеграл расходится, т.к. подстановка при $x=\infty$ лишена смысла: предел $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует. Отметим, что этот интеграл расходится, несмотря на то, что интеграл $\int\limits_0^B \sin x\,dx$ ограничен $\forall B$: $\left|\int\limits_o^B \sin x\,dx\right| \le 2$.

Замечание. Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \infty$, то, хотя он расходится, иногда говорят, что он имеет значение, равное ∞ (в отличие, например, от интеграла из примера 3).

2. Свойства несобственных интегралов. Допустим, интеграл (1.2) сходится. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. *Аддитивность*. При любом $B>a$ сходится интеграл по промежутку $[B,\infty)$, причём

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^B f(x)dx + \int\limits_B^\infty f(x)dx. \tag{1.11}$$

2°. Из (1.11) при $B\to\infty$ обнаруживаем, что (для сходящегося интеграла)

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_B^\infty f(x)dx = 0, \tag{1.12}$$

т.е. $\forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)$: $\forall B>N \Rightarrow \left|\int\limits_B^\infty f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Таким образом, имеем *приближенную формулу* для вычисления несобственного интеграла: с любой погрешностью $\varepsilon>0$ будет

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \approx \int_a^{B} f(x)dx, \text{ если } B > N(\varepsilon). \tag{1.13}$$

$3°$. *Линейность*.

$$\begin{gathered}\int_a^{\infty} C\, f(x)dx = C\int_a^{\infty} f(x)dx,\ \ C = \text{const},\\ \int_a^{\infty}(f(x)+g(x))dx = \int_a^{\infty} f(x)dx + \int_a^{\infty} g(x)dx\end{gathered} \tag{1.14}$$

– если последний интеграл тоже сходится. Таким образом, из сходимости интегралов от функций $f(x)$ и $g(x)$ следует сходимость интеграла от их суммы (и справедливость равенства (1.14)). Обратное не всегда верно, как легко убедиться на примерах $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$ или $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x}\right)dx$.

3. Достаточные признаки сходимости интегралов от положительных функций. Важно знать, сходится или нет данный интеграл. Для этого прибегают к признакам сходимости.

Теорема 1.1 (Первая теорема сравнения, «обычная»). *Пусть при* $x \ge a$ *выполняется неравенство*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x). \tag{1.15}$$

Тогда: 1) Если сходится интеграл

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx, \tag{1.16}$$

то сходится и интеграл (1.2), причём

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \le \int_a^{\infty} \varphi(x)dx. \tag{1.17}$$

2) Если интеграл (1.2) расходится, то расходится и интеграл (1.16) (от большей функции).

Δ Пусть дано, что сходится интеграл (1.16), т.е. существует

$$\lim_{B\to\infty}\int_a^{B} \varphi(x)dx \equiv M < \infty.$$

Поскольку $\varphi(x) \ge 0$, то $\int_a^{B} \varphi(x)dx$ есть возрастающая функция от *B*, поэтому она меньше предела: $\int_a^{B} \varphi(x)dx \le M$. Тогда в силу условия (1.15)

$$\int_a^{B} f(x)dx \le \int_a^{B} \varphi(x)dx \le M . \tag{1.18}$$

Но так как $f(x) \ge 0$, то интеграл (1.1) есть возрастающая функция (от *B*), и она ограничена, поэтому существует $\lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx$, т.е. интеграл (1.2) сходится. Тогда из неравенства (1.18) при $B \to \infty$ получаем неравенство (1.17).

2) Пусть интеграл (1.2) расходится. Допуская от противного, что интеграл (1.16) сходится, получим по случаю 1), что и интеграл (1.2) сходится, – а это не верно. ▲

Замечания. 1) При условии (1.15) функция $\varphi(x)$ называется мажорантной или усиливающей функцией по отношению к $f(x)$.

2) Теорема 1.1, кроме неравенства (1.17), верна и когда неравенство (1.15) выполняется $\forall x \ge x_0 > a$, – в силу свойства 1°.

3) Если интеграл от положительной функции $f(x)$ расходится, то он *расходится к бесконечности*: $\int_a^\infty f(x)dx = +\infty$. Действительно, т.к. $f(x) \ge 0$, то интеграл (1.1) есть положительная возрастающая функция от *B*. Если бы, допуская от противного, она была ограниченной, то интеграл (1.2) сходился бы. Но это не так, поэтому положительная возрастающая функция (1.1) есть функция бесконечно большая при $B \to \infty$.

Это неверно для интегралов от функций, меняющих знак, как показывает пример 3.

В силу сказанного, условие сходимости интеграла от положительной функции $f(x) \ge 0$ записывается в виде $\int_a^\infty f(x)dx < \infty$ (а условие расходимости – в виде $\int_a^\infty f(x)dx = +\infty$).

Теорема 1.2 (Вторая теорема сравнения, предельная). *Пусть* $f(x) \ge 0$, $\varphi(x) > 0$ *и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K, \ (0 \le K \le \infty). \tag{1.19}$$

Тогда:
1) при $0 \le K < \infty$ *из сходимости интеграла (1.16) следует сходимость интеграла (1.2);*
2) при $0 < K \le \infty$ *из расходимости интеграла (1.16) следует расходимость интеграла (1.2).*
(Таким образом, при $0 < K < \infty$ *оба интеграла (1.16) и (1.2) сходятся или расходятся одновременно.)*

Δ 1) Пусть $0 \le K < \infty$. Тогда в силу (1.19), по определению предела, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 > a$: $\forall x \ge x_0$ будет

$$K-\varepsilon<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<K+\varepsilon. \qquad (1.20)$$

Отсюда, в частности, $f(x)<(K+\varepsilon)\cdot\varphi(x)$, и остаётся применить п.1) теоремы 1.1 и замечание 2.

2) Пусть $0<K\le\infty$. При $K=\infty$: $\forall q>0\ \exists x_0$: $\forall x\ge x_0 \Rightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)}>q$, т.е. $f(x)>q\cdot\varphi(x)$. Такое же неравенство при $0<K<\infty$ получим из левой части неравенства (1.20), положив $\varepsilon=K/2$ и $q=K/2$. ▲

Обычно при исследовании интеграла (1.2) на сходимость в качестве «функции сравнения» $\varphi(x)$ берут $\varphi(x)=\frac{C}{x^p}$, $C>0,\ p>0$, и используют результат (1.10).

Как частный случай теорем 1.1 и 1.2 получается

Теорема 1.3. *1) Если найдутся числа* $p>1$ *и* $C>0$, *что* $0\le f(x)\le\frac{C}{x^p}, \forall x\ge x_0$, *либо* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}\equiv\lim\limits_{x\to\infty}x^p f(x)<\infty$, *то интеграл (1.2) сходится.*

2) Если же существуют числа $0<p\le1$ *и* $C>0$, *что* $f(x)\ge\frac{C}{x^p}$, $\forall x\ge x_0$, *либо* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}\equiv\lim\limits_{x\to\infty}x^p f(x)>0$, *то интеграл (1.2) расходится.*

Замечание. Если $0<K<\infty$, в (1.19), то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют *одинаковый порядок* при $x\to\infty$, или что функции $f(x)$ и $K\varphi(x)$ эквивалентны и пишут $f(x)\sim K\varphi(x)$ при $x\to\infty$. При этом исследование на сходимость интеграла (1.2) можно заменить исследованием интеграла (1.16).

Примеры. 1) $\int\limits_0^\infty\frac{5\sin^2 x}{1+x^2}dx$. Здесь $0\le f(x)=\frac{5\sin^2 x}{1+x^2}\le\frac{5}{1+x^2}<\frac{5}{x^2}=\varphi(x)$; интеграл $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ сходится (взяли $x_0=1>0$); $p=2>1$, следовательно, сходится и данный интеграл.

2) $\int\limits_1^\infty\frac{x^5}{3x^6+2x^4+3}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx$. Подынтегральная функция $f(x)$ положительна и непрерывна на промежутке интегрирования, и при больших значениях x (говорят: при $x\to\infty$) имеем $e^{\frac{1}{x}}\sim1$, $f(x)\sim\frac{x^5}{3x^6}\cdot1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}$; $p=1$, поэтому интеграл

расходится. Отметим, что здесь определили *главную часть* функции $f(x)$, или её *асимптотическое поведение* при $x \to \infty$.

3) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$. Подынтегральная функция $f(x)$ имеет оценку $0 < f(x) < \frac{1}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^3}$; $p = 3 > 1$, интеграл сходится.

4. <u>Интегралы от функций, меняющих знак. Абсолютная сходимость.</u>

Определение 1. Если сходится интеграл

$$\int\limits_a^{\infty} |f(x)| dx, \tag{1.21}$$

то интеграл (1.2) называется *абсолютно сходящимся*, а функция $f(x)$ *абсолютно интегрируемой* на промежутке $[a, \infty)$.

Теорема 1.4 (Коши). *Абсолютно сходящийся интеграл и сам сходится, причём*

$$\left| \int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx \right| \le \int\limits_a^{\infty} |f(x)| dx. \tag{1.22}$$

Δ Функцию $f(x)$ представим как разность двух положительных функций.

Положим $\varphi(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$, $\psi(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$. (См. рис. 1.4.) Легко видеть, что $0 \le \varphi(x) \le |f(x)|$, $0 \le \psi(x) \le |f(x)|$ и $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$. Тогда, поскольку дано, что интеграл (1.21) сходится, по теореме 1.1, п.1), будут сходиться и интегралы от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а вместе с ними и от функции $f(x)$ – по свойству 3°. В таком случае из неравенства $\left| \int\limits_a^{B} f(x)\, dx \right| \le \int\limits_a^{B} |f(x)| dx$ в пределе при $B \to \infty$ получим оценку (1.22). ▲

<u>Пример</u>. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$. Здесь $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_3^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится. Поэтому данный интеграл сходится, притом абсолютно.

Теорема 1.4 полезна тем, что позволяет установить сходимость интеграла (1.2) (но только сходимость), если сходится интеграл (1.21), а к нему можно применять признаки сходимости – теоремы 1.1, 1.2, 1.3. Однако есть ситуации, когда интеграл (1.21) расходится, хотя сам интеграл (1.2) сходится. В этих случаях интеграл (1.2) называется *условно* или *неабсолютно* сходящимся. Понятно, что такие ситуации возможны лишь когда функция $f(x)$ меняет знак бесконечно

много раз. Например, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, но не абсолютно: интеграл $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ расходится (см. далее § 1.3, п.3).

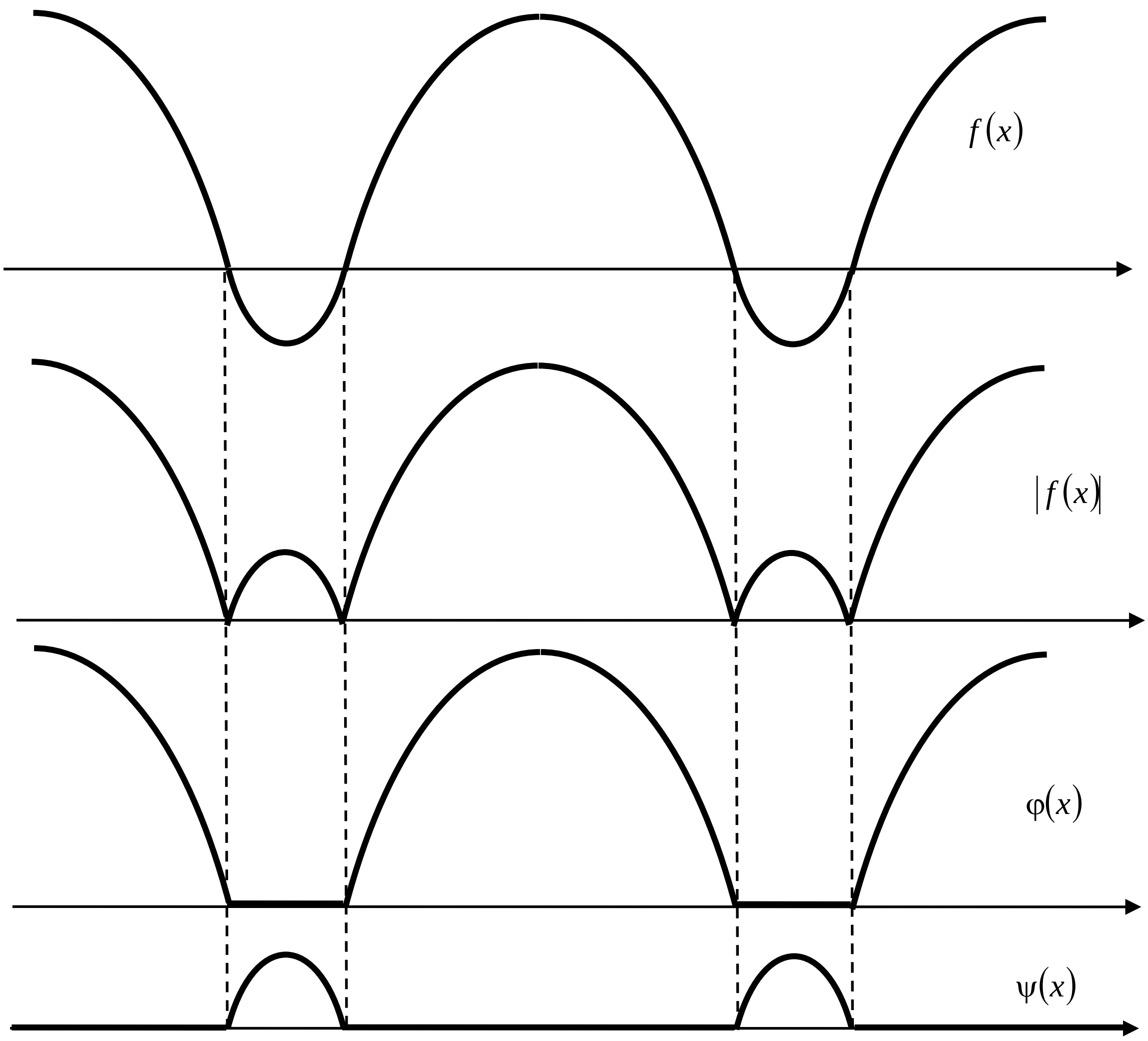


Рис. 1.4

§ 2. Интегралы от неограниченных функций, или несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* в полуоткрытом промежутке $[a,b)$, т.е. при $a \le x < b$, и неограничена при подходе к точке b: при $x \to b-0$; тогда точка разрыва $x = b$ называется *особой* точкой функции $f(x)$. В этом случае говорят для краткости: функция неограничена в точке b (слева). В *собственном смысле* функция не интегрируема на $[a,b)$, однако вводится

Определение 2. *Несобственным интегралом второго рода* называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1.23}$$

Если существует конечный предел, то говорят, что интеграл сходится (существует), а функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b)$ (в несобственном смысле). В противном случае интеграл называется расходящимся (не существует).

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и неограничена в точке a, определяется интеграл

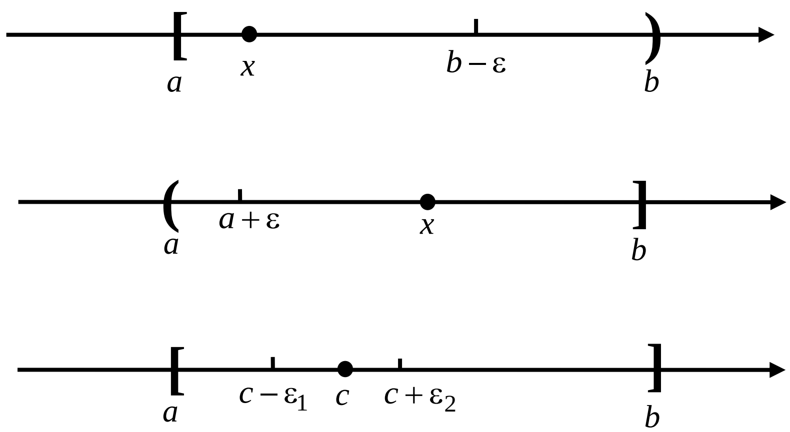
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{1.24}$$

Если особой является точка c, лежащая внутри $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \right\}. \tag{1.25}$$

Этот интеграл сводится к сумме интегралов вида (1.23) и (1.24) по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.25$'$}$$



Аналогично, когда на промежутке $[a,b]$ имеется несколько особых точек. Свойства рассмотренных интегралов – такие же, как и для интегралов первого рода.

Если $F(x)$ – первообразная для (непрерывной) функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a), \tag{1.26}$$

где $F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x) \equiv F(b-0)$ – в случае интеграла (1.23), и $F(a) = \lim\limits_{x\to a+0} F(x) \equiv F(a+0)$ – в случае интеграла (1.24). $F(b)$ и $F(a)$ есть определённые (конечные) числа в случае сходимости интегралов или просто символы, не имеющие смысла – в случае расходимости. И наоборот. Таким образом, интегралы (1.23) и (1.24) сходятся тогда и только тогда, когда первообразную $F(x)$ можно доопределить в точке b или a так, чтобы она стала *непрерывной*, соответственно слева или справа.

Для вычисления по формуле Ньютона-Лейбница интегралов вида (1.25) надо их сначала разбить на сумму $(1.25')$; но можно их вычислить и непосредственно по формуле (1.26), если $F(x)$ доопределима по непрерывности в точке с: $F(c-0) = F(c+0) \equiv F(c)$.

Если в случае (1.25) брать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, то определится *главное значение интеграла* (по Коши):

$$v.p. \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\}. \tag{1.27}$$

Главное значение может существовать и когда интеграл (1.25) в обычном смысле расходится.

Примеры. 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\mu}\,dx = -\int_a^b (b-x)^{-\mu}\,d(b-x) = [\text{при } \mu \neq 1] = \frac{-1}{-\mu+1}(b-x)^{-\mu+1}\Big|_a^b =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{-\mu+1}(b-a)^{-\mu+1}, \text{\it если } -\mu+1>0, \text{\it т.е. } \mu<1 \\ \infty, \text{\it если } -\mu+1<0, \text{\it т.е. } \mu>1. \end{cases}$$

При $\mu = 1$: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-x}\,dx = -\ln(b-x)\Big|_a^b = +\infty$.

Осознать этот факт можно так. Запишем $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\mu} = \left(\dfrac{1}{b-x}\right)^\mu$ $(\mu > 0)$. Говорят, что при $x \to b-0$ эта функция имеет порядок (порядок роста) μ относительно функции $\dfrac{1}{b-x}$ (или: при $x = b$ обращается в бесконечность вида ∞^μ): чем больше μ, тем хуже для сходимости ($\mu \ge 1$), наоборот, чем меньше μ, тем лучше для сходимости ($\mu < 1$). См. рис. 1.5.

Итак,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\mu}\,dx \begin{cases} \text{\it сходится, если } \mu<1, \\ \text{\it расходится, если } \mu \ge 1. \end{cases} \tag{1.28}$$

Аналогично для интеграла $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\mu}\,dx$ $(a<b)$ (рис. 1.6):

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\mu}\,dx \begin{cases} \text{\it сходится, если } \mu<1, \\ \text{\it расходится, если } \mu \ge 1. \end{cases} \tag{1.29}$$

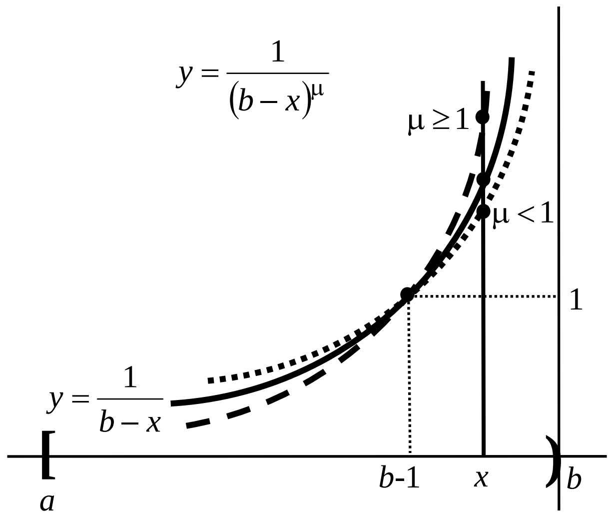


Рис.1.5

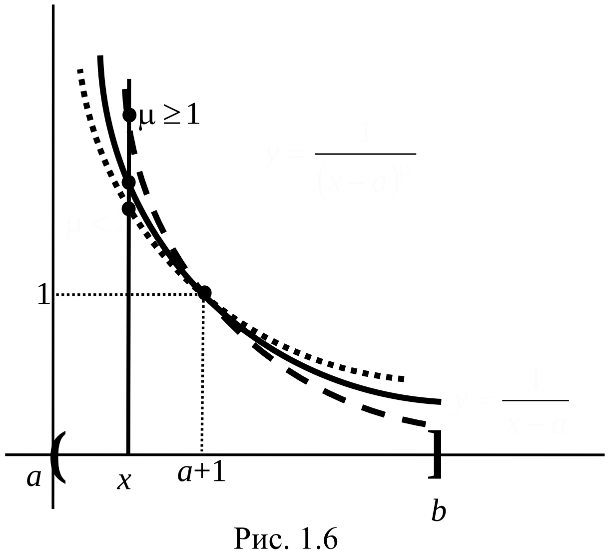


Рис. 1.6

Это «*интегралы сравнения*», а подынтегральные функции – *функции сравнения*.

Учитывая (1.28) и (1.29), имеем: интегралы $\int_a^b (b-x)^{\lambda}dx$ и $\int_a^b (x-a)^{\lambda}dx$ ($a<b$) сходятся при $\lambda>-1$ и расходятся $\lambda\le -1$.

Упражнение. Сравнить в смысле сходимости интегралы $\int_0^a \frac{1}{x^{\mu}}dx$ и $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\mu}}dx$, $a>0$ (и пояснить это геометрически).

3) Формально применяя правило (1.26) для положительной функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$, найдём $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2}=-\frac{3}{2}<0$, что совершенно абсурдно и из геометрических соображений (см. рис. 1.7). Применить формулу (1.26) нельзя, ибо здесь первообразная $F(x)=-\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ вообще не имеет смысла (тем более не является непрерывной). Правильный результат получим, если разобьём данный интеграл по формуле (1.25′) на сумму интегралов $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx=+\infty$ и $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2}dx=+\infty$. Эти три интеграла расходятся (не существуют).

4) Аналогично $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big\|_{-1}^{2}=\ln 2$, хотя интеграл расходится: расходятся интегралы $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx=-\infty$ и $\int_{0}^{2}\frac{1}{x}dx=+\infty$. Однако, данный интеграл существует в смысле главного значения:

$$v.p.\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{1}{x}\,dx\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln x\Big|_{\varepsilon}^{2}\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left((\ln\varepsilon-\ln 1)+(\ln 2-\ln\varepsilon)\right)=\ln 2\,.$$
Этот результат вполне объясним из геометрических соображений (рис. 1.8).

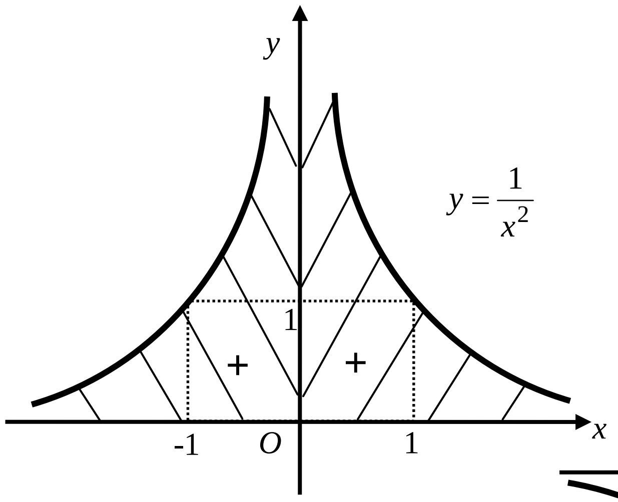


Рис. 1.7

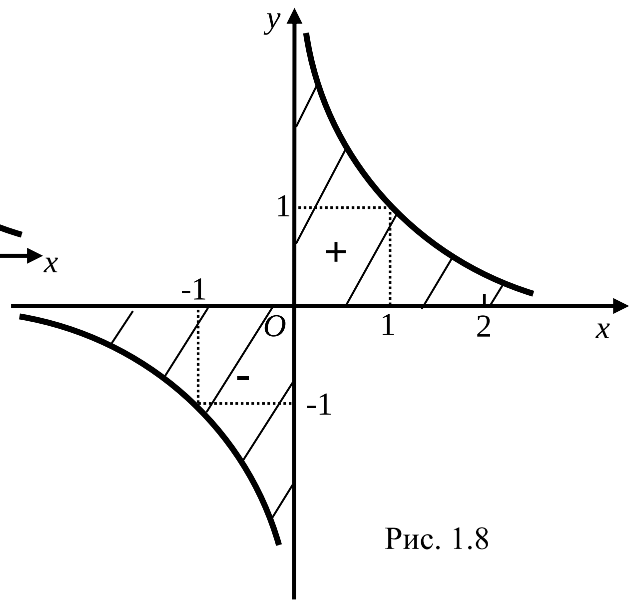


Рис. 1.8

Для интегралов (1.23) и (1.24) тоже вводится понятие абсолютной сходимости и справедливы теоремы типа 1.1– 1.4. (Интегралы (1.23) сравнивают с интегралом (1.28), интегралы (1.24) – с интегралом (1.29).) Сформулируем одну из них, обычно применяемую на практике.

Теорема 1.5 (Признаки сходимости интегралов второго рода).

Первый признак («обычный»). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* $a\le x<b$ *и неограничена в точке* b.

1) Если существуют такие числа $C>0$ *и* $\mu<1$, *что*

$$|f(x)|\le\frac{C}{(b-x)^{\mu}},\ \text{при}\ x\approx b,$$

то интеграл (1.23) сходится, и притом абсолютно.

2) Если найдутся числа $C>0$ *и* $\mu\ge 1$ *такие, что*

$$f(x)\ge\frac{C}{(b-x)^{\mu}},\ \text{при}\ x\approx b,$$

то интеграл (1.23) расходится.

Второй признак (предельный). *Пусть* $f(x)\ge 0$ *и найдётся число* $\mu>0$ *такое, что существует конечный или бесконечный предел*

$$K=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{(b-x)^{\mu}}}\equiv\lim_{x\to b-0}(b-x)^{\mu}f(x),\ (0\le K\le\infty).$$

Тогда: 1) если $\mu<1$ *и* $0\le K<\infty$*, то интеграл (1.23) сходится; 2) если* $\mu\ge1$ *и* $0<K\le\infty$*, то интеграл (1.23) расходится.*

Примеры. 5) $\int\limits_0^1\frac{3\sin 6x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; здесь особая точка $x=b=1$.

$\left|\frac{3\sin 6x}{\sqrt{1-x^2}}\right|\le\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}\le\frac{3}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$; $C=3$, $\mu=\frac{1}{2}<1$ – интеграл сходится, и притом абсолютно.

6) Найдём площадь S «бесконечного шпиля», ограниченного осью Ox, прямыми $x=a<0$, $x=b>0$ и линией $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Здесь первообразная $F(x)=3\sqrt[3]{x}$ доопределима в точке $x=0$ как непрерывная функция и поэтому можем применить формулу (1.26):

$$\int\limits_a^b\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3\sqrt[3]{x}\Big|_a^b=3(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})>0.$$

Однако, для интегралов $\int\limits_{-1}^2\frac{1}{x^2}dx$ и $\int\limits_{-1}^2\frac{1}{x}dx$ (см. примеры 3) и 4)) так поступить нельзя: получатся ошибочные результаты.

7) Пусть $f(x)=\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ 0\le x<1;\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}},\ 1<x\le2\right\}$. В качестве первообразной возьмём функцию $F(x)=\{\arcsin x,\ 0\le x\le1;\ 3\sqrt[3]{x-1}+\frac{\pi}{2},\ 1\le x\le2\}$ - она непрерывна в особой точке $x=1$ функции $f(x)$. Поэтому

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx=F(x)\Big|_0^2=F(2)-F(0)=3+\frac{\pi}{2}.$$

Так же для интегралов (1.25) можно поступать и в общем случае: если у взятой первообразной $F(x)$ существуют конечные пределы $F(c-0)$ и $F(c+0)$, то за счёт подбора произвольной постоянной C, например, на промежутке $c\le x\le b$, можем получить первообразную, непрерывную в точке c. Но делать так вряд ли целесообразно.

§ 3. Определённые интегралы, зависящие от параметра

Пусть при некоторых значениях величин $\alpha, \beta, \ldots$ существует определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x, \alpha, \beta, \ldots) dx$. Его значение, вообще, меняется вместе с величинами $\alpha, \beta, \ldots$ (их называют *параметрами интеграла*), поэтому это есть функция (однозначная) от $\alpha, \beta, \ldots$ – обозначим её буквой F:

$$F(\alpha, \beta, \ldots) = \int\limits_a^b f(x, \alpha, \beta, \ldots) dx. \qquad (1.30)$$

(С подобными интегралами встречались при сведении двойных интегралов к повторным.)

Наша задача: изучить свойства функции F по заданным свойствам функции f. Будем рассматривать интегралы, зависящие только от одного параметра α:

$$F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx. \qquad (1.31)$$

При этом потребуется понятие равномерной непрерывности функции двух переменных.

Определение 3. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, т.е. непрерывна в каждой её точке (x, y): $\lim\limits_{\substack{\bar{x} \to x \\ \bar{y} \to y}} f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y)$, или:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in D\colon\ |\bar{x} - x| < \delta,\ |\bar{y} - y| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, y)| < \varepsilon. \qquad (1.32)$$

Число δ может по существу меняться, быть разным для разных точек (x, y), т.е. $\delta = \delta(\varepsilon, x, y)$ (рис. 1.9). Однако, если найдётся число $\delta > 0$, не зависящее от (x, y), а зависящее только от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что неравенство (1.32) будет выполняться *сразу для всех* точек $(x, y) \in D$, то функция f называется *равномерно непрерывной* в D.

Теорема Кантора. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она и равномерно непрерывна в D*[1]. (Без доказательства.)

Условие замкнутости области существенно. Например, функция $f(x, y) = \dfrac{x^2}{1 - y}$ непрерывна в области $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y < 1\}$, однако не является равномерно непрерывной. Действительно, возьмём $\bar{x} = x$, так что условие $|\bar{x} - x| = 0 < \delta$ автоматически выполнится, при всяком δ, а разность

[1] Кантор Георг (1845-1918) – известный немецкий математик, основатель современной теории множеств. Родился в Петербурге, там же получил начальное образование.

$$\left|f(\bar{x},\bar{y})-f(x,y)\right|=\left|\frac{x^2(y-\bar{y})}{(1-\bar{y})(1-y)}\right|\to\infty$$

при $y\to 1$, следовательно, не может быть меньше ε (хотя бы при $\varepsilon=1$) сразу для всех y из какого бы ни было интервала $|\bar{y}-y|<\delta$.

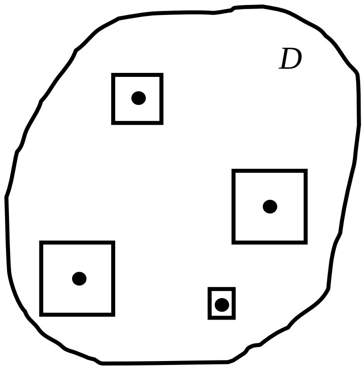


Рис. 1.9

Теорема 1.6. (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра). *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $R=\{a\le x\le b, c\le\alpha\le d\}$, то функция (1.31) непрерывна в промежутке $c\le\alpha\le d$.*

Δ Берём произвольную точку $\alpha\in[c,d]$. В силу равномерной непрерывности функции $f(x,\alpha)$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $|h|<\delta$ будет выполняться неравенство $|f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ *для всех* $x\in[a,b]$ (в (1.32) положено $\bar{x}=x, \bar{y}=\alpha+h$). Имеем

$$|\Delta F(\alpha)|\equiv|F(\alpha+h)-F(\alpha)|=\left|\int_a^b f(x,\alpha+h)\,dx-\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^b (f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha))dx\right|\le\int_a^b |f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|dx<[\text{при } |h|<\delta]<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.$$

Это означает, что функция $F(\alpha)$ непрерывна в точке α, а α – произвольная точка из $[c,d]$. ▲

<u>Следствие. (Переход к пределу по параметру под знаком интеграла.)</u> Если точка $\alpha_0\in[c,d]$, то при условиях теоремы 1.6

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b(\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx. \tag{1.33}$$

Δ По теореме 1.6 функция $F(\alpha)$ непрерывна в точке α_0, следовательно

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\equiv\lim_{\alpha\to\alpha_0}F(\alpha)=F(\alpha_0)\equiv\int_a^b f(x,\alpha_0)\,dx=\int_a^b\lim_{\alpha\to\alpha_0}f(x,\alpha)\,dx.\ ▲$$

На практике бывает, что пределы интегрирования a и b сами зависят от параметра α:

Теорема 1.6*. *Функция*

$$\Phi(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \qquad (1.34)$$

при выполнении условий теоремы 1.6 тоже непрерывна на промежутке $[c,d]$, *если непрерывны и функции* $a(\alpha)$ *и* $b(\alpha)$, *причём* $a \le a(\alpha)$ *и* $b(\alpha) \le b$.

Теорема 1.7. (Дифференцирование интеграла по параметру.) *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную* $f'_\alpha(x,\alpha)$ *по* α *в прямоугольнике* $R = \{a \le x \le b, c \le \alpha \le d\}$, *то функция (1.31) дифференцируема на промежутке* $c \le \alpha \le d$, *причём*

$$F'(\alpha) \equiv \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}(f(x,\alpha))\,dx. \qquad (1.35)$$

(Это есть *правило Лейбница* о перестановке операций дифференцирования и интегрирования.)

Δ Произвольно взятой, но фиксированной, точке $\alpha \in [c,d]$ даём приращение $h \ne 0$. Будем иметь $F(\alpha+h) = \int_a^b f(x,\alpha+h)\,dx$,

$\Delta F(\alpha) \equiv F(\alpha+h) - F(\alpha) = \int_a^b (f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha))\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\cdot h)\cdot h\,dx$, где $\theta \in (0,1)$ (по теореме Лагранжа о конечном приращении функции);

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta\cdot h)\,dx.$$

В силу условия о непрерывности производной f'_α, можем, согласно следствию к теореме 1.6, перейти к пределу при $h \to 0$ под знаком интеграла. Получим, что

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_a^b \lim_{h\to 0} f'_\alpha(x,\alpha+\theta\cdot h)\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx,$$

т.е. существует производная $F'(\alpha)$ и верно равенство (1.35). ▲

Теорема 1.8. *При условиях теоремы 1.7 и дополнительном предположении дифференцируемости функций* $a(\alpha)$ *и* $b(\alpha)$, *функция (1.34) тоже имеет производную, причём*

$$\Phi'(\alpha) \equiv \frac{d}{d\alpha}\left(\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'(\alpha). \qquad (1.36)$$

Δ Функцию (1.34) рассматриваем как сложную функцию от α (учитывая, что переменное α входит и в подынтегральную функцию, и в пределы интегрирования), обозначим её $\Phi(\alpha) = \psi(\alpha, a(\alpha), b(\alpha))$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $\frac{d\Phi}{d\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot 1+\frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}$. Отсюда и получается равенство (1.36): именно, $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$ находится по формуле (1.35), а $\frac{\partial\psi}{\partial b}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial a}$ как производные интеграла по верхнему пределу, например,

$$\frac{\partial\psi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(-\int\limits_{b(\alpha)}^{a(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right)=-f(a(\alpha),\alpha). \ \blacktriangle$$

<u>Упражнение.</u> Доказать, что функция $y(t)=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx$, $\omega=const$, является решением дифференциального уравнения $y''(t)+\omega^2 y(t)=f(t)$, и удовлетворяет нулевым начальным условиям $y(0)=y'(0)=0$. (Воспользоваться формулой (1.36), заметив, что переменная t входит как в верхний предел, так и в подынтегральное выражение.)

Теорема 1.9. (Интегрирование по параметру). *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $R=\{a\le x\le b, c\le\alpha\le d\}$, то существуют и равны повторные интегралы*

$$\int\limits_c^d\left\{\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx. \tag{1.37}$$

Δ Утверждение сразу следует из формул сведения двойного интеграла $\iint\limits_R f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$ к повторным интегралам. $\blacktriangle$

<u>Замечание.</u> Условие непрерывности функции $f(x,\alpha)$ существенно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, функцию $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $x^2+y^2\ne 0$, $f(0,0)=0$ в прямоугольнике $R=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$. Она не является непрерывной в точке $O(0,0)$, ибо неограничена в её окрестности: например, на прямых $y=kx$ имеем $f(x,y)=\frac{x^2(1-k^2)}{x^4(1+k^2)}\to\infty$ при $x\to 0$ (если $k\ne 1$) (рис. 1.10). Находим:

$$A=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right\}dx=\int\limits_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

$$B=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right\}dy=-\frac{\pi}{4},\ A\ne B\ !$$

Пример. Вычислим интеграл $F(b)=\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $0<a\le b$. Точки $x=0$ и $x=1$ особыми не являются – в них подынтегральную функцию можно доопределить по непрерывности (считать непрерывной); существование конечного предела в точке $x=1$ можно проверить по правилу Лопиталя. Интеграл зависит от двух параметров, но положим, что $a=const>0$. Подобные интегралы иногда удаётся вычислить при помощи *предварительного дифференцирования по параметру*. По теореме 1.7:

$\frac{dF}{db}=\int\limits_0^1 x^b\,dx=\frac{1}{b+1}\Rightarrow F(b)=\ln(b+1)+C$. Поскольку $F(b)\big|_{b=a}=0$, то отсюда при $b=a$: $0=\ln(a+1)+C\Rightarrow C=-\ln(a+1)$. Итак, $\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\ln\frac{b+1}{a+1}$. (1.37′)

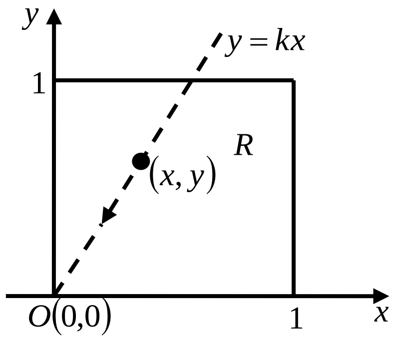


Рис. 1.10

§ 4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Предыдущие теоремы распространим на несобственные интегралы. Для них в первую очередь обязательно требование сходимости (существования), и в качестве дополнительного условия – требование «одинаковой» сходимости сразу для всех значений параметра, именно: *равномерной сходимости*. Пусть $Y=\{\alpha\}$ некоторое бесконечное множество значений величины α, например, промежуток $c\le\alpha\le d$, и интеграл

$$F(\alpha)=\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \tag{1.38}$$

сходится для всех значений параметра $\alpha\in Y$.Значит, при каждом $\alpha\in Y$

$$\int\limits_B^\infty f(x,\alpha)\,dx\to 0 \text{ при } B\to\infty.$$

Потребуем, чтобы этот «хвост» интеграла (1.38) стремился к нулю при $B\to\infty$ *одинаково быстро сразу для всех* $\alpha\in Y$, а именно: вводится

Определение 4. Интеграл (1.38) называется равномерно сходящимся (относительно α) на множестве *Y*, если 1) он сходится при каждом $\alpha \in Y$ и если 2) $\forall \varepsilon > 0$ сразу *для всех* $\alpha \in Y$ можно найти такое число $N = N(\varepsilon)$, что

$$\forall B > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int_a^B f(x,\alpha)\,dx \right| \equiv \left| \int_B^\infty f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon. \qquad (1.39)$$

Смысл этого понятия в том, что в отличие от обычной сходимости в каждой отдельно взятой точке α (так называемая *поточечная* сходимость), число *N* «обслуживает» *сразу все* точки $\alpha \in Y$, от α не зависит (а зависит только от заданной погрешности ε, какой бы малой её ни задали).

<u>Пример</u>. Покажем, что интеграл $\int_0^\infty y e^{-xy} dx$ сходится при каждом $y \ge 0$, причём равномерно на *всяком* отрезке $c \le y < \infty$, если $c > 0$, и не равномерно на всём промежутке $0 \le y < \infty$.

Δ Сходимость интеграла при $y = 0$ очевидна. Пусть $y > 0$. Тогда

$$\int_B^\infty y e^{-xy} dx = -e^{-xy}\Big|_B^\infty = e^{-By} \to 0 \text{ при } B \to +\infty.$$

Найдём *N*. Требуем: $e^{-By} < \varepsilon$, то $e^{By} > \frac{1}{\varepsilon}$, $By > \ln\frac{1}{\varepsilon}$,

$$B > \frac{1}{y}\ln\frac{1}{\varepsilon} = N = N(\varepsilon, y).$$

Итак, если $B > N$, то $e^{-By} < \varepsilon$. Но это *N* зависит от *y*, и хотя найденное *N* наименьшее возможное, оно, тем не менее, неограниченно возрастает при $y \to 0$. Однако, если число $c > 0$, то существует *N* (самое большое из всех возможных $N(\varepsilon, y)$) одно и то же *сразу для всех* $y \in [c, \infty)$, именно, $N = \frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon} \equiv N(\varepsilon)$, так что $\forall B > N(\varepsilon) \Rightarrow e^{-By} < \varepsilon$, $\forall y \in [c, \infty)$ - сходимость равномерная. Для промежутков же $[0, d]$, *d* – любое (а также и для $[0, \infty)$) при любых *B* будет $e^{-By} \to 1$ при $y \to 0$. Следовательно, даже, например, для $\varepsilon = 0{,}5$ не может быть $e^{-By} < 0{,}5$ при $B > N(\varepsilon)$ *сразу для всех* $y \in [0, d]$, какое бы большое $N(\varepsilon)$ ни взяли. (Это легко установить рассуждением от противного.) Равномерная сходимость нарушается именно в окрестности точки $y = 0$. Описанную ситуацию можно объяснить тем, что сходимость интеграла при $y = 0$ создана искусственно за счёт постоянного множителя *y*. Без него имеем интеграл $\int_0^\infty e^{-xy} dx$, расходящийся при $y = 0$, причём, чем ближе *y* к нулю (но $y \ne 0$), тем «хуже» сходится этот интеграл. ▲

Теорема 1.10. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла). *Если существует такая функция* $\varphi(x) \geq 0$*, что для всех* $\alpha \in Y$ *будет выполняться неравенство*

$$\left| f(x,\alpha) \right| \leq \varphi(x), \tag{1.40}$$

начиная хотя бы с некоторого x_0*, т.е.* $\forall x \geq x_0 \geq a$*, причём*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\,dx < \infty \tag{1.41}$$

(интеграл сходится), то интеграл (1.38) сходится абсолютно и равномерно (относительно α*) на множестве* Y*.*

Δ В силу условий (1.40) и (1.41), по признаку сравнения (теорема 1.1) интеграл (1.38) сходится абсолютно при всяком $\alpha \in Y$. Так как (1.41) сходится, то $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) > x_0$, такое, что $\forall B > N(\varepsilon) \Rightarrow \int\limits_{B}^{\infty} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$. Следовательно, при $B > N(\varepsilon)$:

$$\left| \int\limits_{B}^{\infty} f(x,\alpha)dx \right| \leq \int\limits_{B}^{\infty} \left| f(x,\alpha) \right| dx \leq \int\limits_{B}^{\infty} \varphi(x)\,dx < \varepsilon \ -$$

и это сразу для всех $\alpha \in Y$. (Число $N(\varepsilon)$ не зависит от α: оно подобрано для интеграла (1.41), не содержащего α.) ▲

При указанных условиях функция $\varphi(x)$ называется *мажорантной, или усиливающей*, для функции $f(x,\alpha)$ и говорят, что интеграл (1.38) при $a = x_0$ мажорируется сходящимся интегралом (1.41) (не содержащим параметра). Обычно мажоранту $\varphi(x)$ находят как наибольшее значение функции $\left| f(x,\alpha) \right|$ для всех $\alpha \in Y$.

<u>Пример</u>. Интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{k^2 + x^2} dx$, где $k = const \neq 0$, сходится равномерно относительно параметра α на всей оси $-\infty < \alpha < \infty$, т.к. мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} dx$.

Теорема 1.11. (О непрерывности равномерно сходящегося интеграла). *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна в полуполосе* $D = \{a \leq x < \infty, c \leq \alpha \leq d\}$ *и интеграл (1.38) равномерно сходится на промежутке* $[c,d]$*, то определяемая им функция* $F(\alpha)$ *непрерывна на этом промежутке.*

Δ Пусть $\varepsilon > 0$ любое наперёд заданное число. В силу равномерной сходимости интеграла, по ε найдётся число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $B > N$ будет

$$\left| \int\limits_{B}^{\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in [c,d]. \tag{1.42}$$

Фиксируем какое-нибудь число $B > N(\varepsilon)$ и запишем

$$F(\alpha) = \int_a^B f(x,\alpha)\,dx + \int_B^\infty f(x,\alpha)\,dx = \Phi(\alpha) + \int_B^\infty f(x,\alpha)\,dx,$$

где через $\Phi(\alpha)$ обозначили интеграл по конечному промежутку $[a, B]$.

Берём точку $\alpha \in [c,d]$, ей даём приращение $h \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} |F(\alpha+h) - F(\alpha)| &= \left|(\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)) + \int_B^\infty f(x,\alpha+h)dx - \int_B^\infty f(x,\alpha)dx\right| \le \\ &\le |\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)| + \left|\int_B^\infty f(x,\alpha+h)\,dx\right| + \left|\int_B^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| \end{aligned} \tag{1.43}$$

По теореме 1.6 функция $\Phi(\alpha)$ непрерывна, поэтому найдётся число $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ будет $|\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу этого и неравенств (1.42) для $y = \alpha$ и $y = \alpha + h$, из (1.43) получим $|F(\alpha+h) - F(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, если $|h| < \delta$. Это означает непрерывность функции $F(\alpha)$. ▲

<u>Следствие. (Переход к пределу под знаком несобственного интеграла).</u>

При условиях теоремы 1.11, если $\alpha_0 \in [c,d]$ имеем

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty (\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

Доказывается так же, как и следствие к теореме 1.6.

<u>Замечание</u>. Следствие установлено для конечных чисел α_0. На практике же часто требуется перейти к пределу при $\alpha \to \infty$. Однако, это не всегда возможно. Например, $F(\alpha) = \int_1^\infty \frac{\alpha}{x^3} e^{-\frac{\alpha}{x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty d(e^{-\frac{\alpha}{x^2}}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\alpha}) \to \frac{1}{2}$ при $\alpha \to +\infty$.

Однако, $\int_1^\infty (\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha}{x^3} e^{-\frac{\alpha}{x^2}})dx = \int_1^\infty 0 \cdot dx = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Теорема 1.12. (Интегрирование несобственного интеграла по параметру). *В условиях теоремы 1.11*

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha \equiv \int_c^d d\alpha \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \tag{1.44}$$

(т.е. можно менять порядок интегрирования).

Δ В силу равномерной сходимости интеграла (1.38), $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall\alpha \in [c,d]$ при $B > N \Rightarrow$

$$\left|\int_B^\infty f(x,\alpha)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}. \tag{1.45}$$

По теореме (1.9) $\int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^B f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^B dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha$. Составим и затем оценим разность

$$\left|\int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha - \int\limits_a^B dx\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right| = \left|\int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha - \int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^B f(x,\alpha)dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_c^d \left\{\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\,dx - \int\limits_a^B f(x,\alpha)dx\right\}d\alpha\right| = \left|\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_B^\infty f(x,\alpha)dx\right| \le \int\limits_c^d \left|\int\limits_B^\infty f(x,\alpha)dx\right| d\alpha <$$

$$<[\textit{при } B > N, \textit{ в силу } (1.45)] < \int\limits_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,d\alpha = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\exists \lim_{B\to\infty} \int\limits_a^B dx\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \equiv \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha = \int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha \equiv \int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\,dx. \ \blacktriangle$$

Иногда приходится переставлять интегралы, взятые оба по бесконечным промежуткам:

$$\int\limits_c^\infty d\alpha\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{1.46}$$

Оправдать такую перестановку сложно, и это удаётся сделать лишь для узкого класса функций. Например, справедлива

Теорема 1.13. *Пусть функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна при* $a \le x < \infty, c \le \alpha < \infty$, $f(x,\alpha) \ge 0$, *внутренние интегралы в (1.46) сходятся и являются непрерывными функциями от параметров* α *и* x *соответственно. Тогда если один из повторных интегралов в равенстве (1.46) существует, то существует и другой и это равенство имеет место.* (Без доказательства.)

Теорема 1.14. (Дифференцирование по параметру под знаком несобственного интеграла). *Пусть функция* $f(x,\alpha)$ *и её частная производная* $f'_\alpha(x,\alpha)$ *непрерывны в области* $D = \{a \le x < +\infty, c \le \alpha \le d\}$, *интеграл (1.38) сходится, а интеграл*

$$\int\limits_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)dx \tag{1.47}$$

равномерно сходится на промежутке $[c,d]$. *Тогда функция* $F(\alpha)$ *дифференцируема на этом промежутке, причём*

$$F'(\alpha) \equiv \frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_a^\infty f(x,\alpha)dx\right) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx. \tag{1.47$'$}$$

Δ Возьмём любое $\alpha \in [c,d]$. Поскольку интеграл (1.47) равномерно сходится на $[c,d]$, и тем более на $[c,\alpha]$, то по теореме 1.12

$$\int_c^\alpha d\alpha\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_a^\infty dx\int_c^\alpha f'_\alpha(x,\alpha)\,d\alpha\equiv\int_a^\infty[\,f(x,\alpha)]_c^\alpha\,dx=\int_a^\infty f(x,\alpha)dx-\int_a^\infty f(x,c)dx\,.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия сходимости интеграла (1.38), при этом второе слагаемое в правой части есть некоторая постоянная (обычный сходящийся несобственный интеграл). По теореме 1.11 функция (1.47) – это непрерывная функция от α. Тогда по теореме о производной интеграла по верхнему пределу существует производная (по α) от левой части, а, следовательно, существует производная и от правой части. Продифференцировав по α, получим равенство: $\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)dx=\dfrac{d}{d\alpha}\left(\int_a^\infty f(x,\alpha)dx\right)$. ▲

Замечание. Мы доказали, что функция (1.38) имеет производную. Но тогда она тем более непрерывна на $[c,d]$. Хотя равномерная сходимость самого интеграла (1.38) не требовалась в отличие от требования теоремы 1.11, зато вместо этого использовалась равномерная сходимость интеграла (1.47).

2. Случай несобственных интегралов второго рода. Мы рассмотрели интегралы вида (1.38), для которых единственной особой точкой является $x=\infty$. Пусть теперь функция $f(x,\alpha)$ при каждом $\alpha\in Y$ непрерывна на интервале $a\le x<b$, за исключением точки $x=b$, и эта точка является особой.

Определение 5. Интеграл

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx \tag{1.48}$$

называется *равномерно сходящимся* (относительно α) на множестве $Y=\{\alpha\}$, если: 1) он сходится при каждом $\alpha\in Y$ и 2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от α, такое, что при $0\le\eta<\delta$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)dx-\int_a^{b-\eta}f(x,\alpha)dx\right|\equiv\left|\int_{b-\eta}^b f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$$

сразу для всех $\alpha\in Y$.

Аналогично, если особой точкой является точка $x=a$. Если же имеется конечное число особых точек $a\le x_1<x_2<...<x_n\le b$ (допустимо $b=+\infty$, $a=-\infty$), то промежуток $[a,b]$ разбивают на частичные так, чтобы для них единственной особой точкой был один из концов. Тогда интеграл называется равномерно сходящимся на множестве *Y*, если равномерно сходятся интегралы на каждом из частичных промежутков.

Для равномерно сходящихся интегралов второго рода остаются в силе все теоремы об интегралах первого рода: теоремы 1.10-1.12, 1.14.

3. «Тонкие» признаки равномерной сходимости (признаки Абеля-Дирихле).

Рассмотрим интегралы

$$\int_a^{\infty} f(x,\alpha)g(x)dx, \qquad (1.49)$$

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x,\alpha)dx, \qquad (1.49')$$

где f и g непрерывные функции от x при каждом $\alpha \in Y$, и функция g, сверх того, монотонна и имеет непрерывную производную по x. Тогда

I. **Первый признак**. *Интеграл (1.49) сходится равномерно на множестве Y, если: 1) такой интеграл по конечному промежутку* $[a,B]$ *ограничен при всех* $B \geq a$ *и* $\alpha \in Y$ *(говорят: равномерно ограничен), именно выполняется неравенство* $\left|\int_a^B f(x,\alpha)dx\right| \leq K = const$, *2)* $g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$*, причём монотонно.*

II. **Второй признак**. *Интеграл* (1.49′) *сходится равномерно на множестве Y, если: 1) интеграл* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *сходится и 2) функция* $g(x,\alpha)$ *равномерно ограничена для всех* $x \in [a,\infty)$ *и* $\alpha \in Y$*:* $\quad |g(x,\alpha)| \leq K = const$.

(Для положительных функций f и g этот признак очевиден в силу признака Вейерштрасса.)

Оба признака – без доказательства.

Если функции f и g от α не зависят, т.е. являются функциями только переменной x, то здесь имеем «тонкие признаки» обычной сходимости несобственных интегралов. Эти признаки применяются *чаще всего* для исследования сходимости интегралов от *функций, меняющих знак*.

<u>Примеры</u>. 1) При $\lambda > 0$ интегралы

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx, \ \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}}dx, \ a > 0, \qquad (1.50)$$

сходятся при любом $\lambda>0$ по признаку I: $\left|\int_a^B \sin x dx\right| \leq 2$, а $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}} \to 0$ при $x \to \infty$, монотонно.

При $\lambda > 1$ интегралы (1.50) сходятся абсолютно (т.к. $\frac{|\sin x|}{x^{\lambda}} \leq \frac{1}{x^{\lambda}}$ и $\frac{|\cos x|}{x^{\lambda}} \leq \frac{1}{x^{\lambda}}$). Если же $0 < \lambda \leq 1$, то они сходятся неабсолютно. Докажем это для первого из этих интегралов: надо установить, что расходится интеграл $\int_a^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\lambda}}dx$. Рассуждаем от противного: если бы он сходился, то в силу неравенства $|\sin x| \geq |\sin x| \cdot |\sin x| = \sin^2 x$ сходился бы интеграл (по теореме 1.1)

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\lambda}dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^\lambda}dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx - \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x^\lambda}dx,$$

что неверно, поскольку в правой части второй из слагаемых интегралов сходится по тому же признаку I, а первый расходится.

В силу доказанного и интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ $(a=0, \lambda=1)$ сходится неабсолютно; здесь точка $x=0$ не является особой.

2) Убедимся, что интегралы $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ и $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ сходятся – это интегралы Френеля или дифракции. Рассмотрим первый из них. Формально запишем $\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^1 \sin(x^2)dx + \int_1^\infty \sin(x^2)dx$. Первый интеграл справа – обычный определённый интеграл от непрерывной функции, он существует. Второй интеграл исследуем двумя способами.

Сначала представим подынтегральную функцию в виде произведения двух сомножителей: $\sin(x^2) = \frac{1}{x}\cdot(x\sin x^2)$. Здесь $g(x) = \frac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$ монотонно, а $\left|\int_1^B x\sin x^2 dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_1^B \sin x^2 d(x^2)\right| = \left|\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_1^B\right| \le 1$, т.е. выполняются оба условия первого тонкого признака сходимости для несобственных интегралов. Значит второй интеграл, а вместе с ним и интеграл по промежутку $[0,\infty]$ существует.

Иначе: сделаем замену $x=\sqrt{t}$, то $\int_1^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$, а полученный интеграл сходится.

Интересно отметить, что подынтегральная функция $y=\sin(x^2)$ не стремится к нулю при $x\to\infty$ (не имеет никакого предела), график её колеблется между прямыми $y=-1$ и $y=1$. А сходимость обусловлена тем, что расстояние между соседними нулями $x_n = \sqrt{n\pi}$ $(n=0,1,2...)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, и положительные и отрицательные значения интегралов по промежуткам $[x_n, x_{n+1}]$ «взаимно погашаются».

(Оказывается, что $\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.)

4. <u>Вычисление интегралов с помощью предварительного дифференцирования по параметру</u>. Предположим, требуется вычислить, например, интеграл (1.38). Иногда это удаётся сделать с помощью следующего приёма. Допустим, можем вычислить этот интеграл при некотором значении $\alpha=\alpha_0$: $F(\alpha_0)=F_0$

(возможно $\alpha_0 = \infty$, т.е. когда $\alpha \to \infty$), и можем вычислить интеграл (1.47) – его обозначим $\varphi(\alpha)$. Тогда, согласно (1.47′), будет известна производная $F'(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Как решение этого дифференциального уравнения, с начальным условием $F(\alpha_0) = F_0$, восстанавливается сама функция $F(\alpha)$. Таким способом ранее был найден интеграл $(1.37')$.

Примеры. 1) $F(a) = \int\limits_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$. Интеграл сходится равномерно при всех $a \geq 0$ - по второму признаку (Абеля-Дирихле), поэтому функция $F(a)$ *непрерывна при* $a \geq 0$.

Дифференцируем под знаком интеграла:

$$F'(a) = -\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx = -\frac{1}{1+a^2}; \qquad (1.51)$$

это законно и равенство верно $\forall a > 0$. Именно, при всяком $\varepsilon > 0$ интеграл (1.51) сходится равномерно $\forall a \geq \varepsilon > 0$, т.к. он мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon x} dx$, а всякое число $a > 0$ можно поместить в соответственно подобранный промежуток $[\varepsilon, +\infty)$. Из (1.51), интегрируя, получим

$F(a) = -\operatorname{arctg} a + C$; $C = ?$ Имеем

$|F(a)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \to 0$ при $a \to \infty \equiv \alpha_0$. Следовательно, при $a \to +\infty$ находим $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, $C = \frac{\pi}{2}$. Итак,

$$F(a) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a. \qquad (1.52)$$

Это было получено при $a > 0$. Однако, в силу непрерывности функции $F(a)$ в точке $a = 0$, отсюда имеем $F(0) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim\limits_{a \to +0} F(a) = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

В этом интеграле сделаем замену $x = \lambda \cdot t$. При $\lambda > 0$ получим $\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt$, и при $\lambda < 0$: $\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{-\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt =$ [замена $t = -u$] $= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du$.

Итак (рис. 1.11),

$$I(\lambda) \equiv \int\limits_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \lambda > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \qquad (1.53)$$

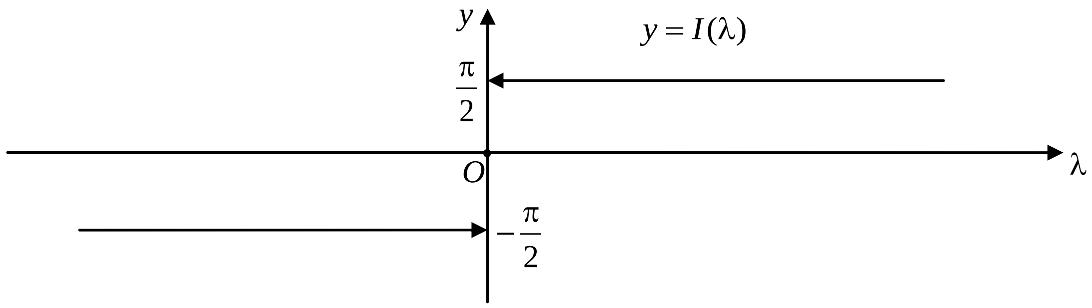


Рис.1.11

Отсюда для известной нам функции «сигнум λ» имеем интегральное представление

$$\operatorname{sign}\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \begin{cases} 1, \lambda > 0 \\ 0, \lambda = 0 \\ -1, \lambda < 0 \end{cases}. \qquad (1.53')$$

Замечания. 1) Следствие 2 и теорема 1.14 к интегралу (1.53) неприменимы: здесь $\lim\limits_{\lambda\to\pm 0} I(\lambda) = \pm\frac{\pi}{2}$, так что $\lim\limits_{\lambda\to\pm 0}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \neq \int_0^\infty \lim\limits_{\lambda\to\pm 0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = 0$. И дифференцирование по параметру λ под знаком интеграла приводит к расходящемуся при всяком λ интегралу $\int_0^\infty \cos\lambda t\,dt$.

2) Равномерная сходимость интеграла $F(a)$ на любом $(\forall\varepsilon > 0)$ промежутке $0 < \varepsilon \le a < \infty$ устанавливается непосредственно по признаку Вейерштрасса. Однако, для исследования интеграла на всей полуоси $0 \le a < \infty$, именно в окрестности точки a (справа), этого было бы недостаточно.

3) $\Phi(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$, $a > 0, b > 0$; считаем $b = const$.

$\Phi'(a) = -\int_0^\infty \frac{xe^{-ax}}{x}\,dx = \left.\frac{e^{-ax}}{a}\right|_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \Phi(a) = -\ln a + C$; $C = ?$ Положим $a = b$, то $\Phi(a)\big|_{a=b} = 0$, и $0 = -\ln b + C \Rightarrow C = \ln b$, так что $\Phi(a) = -\ln a + \ln b$. Итак, $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$; $a > 0,\ b > 0$. Обоснование очевидно.

4) Аналогично устанавливается, что $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; $a > 0, b > 0$. Впрочем, это сразу получается из интеграла $\Phi(a)$ в результате замены $x = \sqrt{t}$.

Достаточно общие методы вычисления подобных и других интегралов доставляет «Теория вычетов» – раздел курса «Комплексный анализ».

§ 5. Эйлеровы интегралы: Г (*гамма*) и В (*бета*) функции

Ознакомимся с некоторыми свойствами *гамма*-функции $\Gamma(\alpha)$ и *бета*-функции $B(\alpha,\beta)$ Эйлера. Эти функции относятся к разряду так называемых «Специальных функций», широко применяются в разных разделах науки. Являются функциями не элементарными, но изучены так же глубоко и подробно, как привычные нам элементарные функции. Изучение этих функций – прекрасный пример применения изложенной теории интегралов, зависящих от параметра.

1. Интеграл Эйлера 2-ого рода, или Г- функция. Так называется функция, определяемая интегралом

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx. \qquad (1.54)$$

Найдём, где сходится этот интеграл. Он является «смешанным» несобственным интегралом: первого рода (особая точка $x=\infty$), и второго – при $\alpha<1$ (особая точка $x=0$). Поэтому разбиваем его на две части:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\int_0^{1} e^{-x}x^{\alpha-1}dx+\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx. \qquad (1.55)$$

1) Если $x\to+0$, то $e^{-x}x^{\alpha-1}\sim x^{\alpha-1}$, поэтому интеграл по промежутку $0\le x\le 1$ сходится, если $\alpha-1>-1$, т.е. $\alpha>0$. Найдём, где он сходится равномерно. Для этого надо немного отступить от точки $\alpha=0$ – потребуем, чтобы было $\alpha\ge\varepsilon>0$. Тогда при $0\le x\le 1$:

$$\left|e^{-x}x^{\alpha-1}\right|\le 1\cdot x^{\alpha-1}\le x^{\varepsilon-1}=\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}.$$

Поскольку $1-\varepsilon<1$, то мажорантный интеграл $\int_0^1 x^{\varepsilon-1}dx$ сходится, поэтому сам интеграл сходится равномерно – при $\alpha\ge\varepsilon>0$.

2) Если $\alpha\le r<\infty$, где число r любое (и по желанию как угодно большое), то $\left|e^{-x}x^{\alpha-1}\right|\le e^{-x}x^{r-1}<\dfrac{1}{x^2}$ при достаточно больших x. Поэтому интеграл в (1.55) по промежутку $1\le x<\infty$ сходится равномерно при $\alpha\le r$. Следовательно, интеграл (1.54) сходится равномерно на всяком промежутке $0<\varepsilon\le\alpha\le r<\infty$. Но тогда функция $\Gamma(\alpha)$ по теореме 1.11 непрерывна на этом промежутке. Поскольку любое число $\alpha>0$ можно поместить в надлежаще подобранный промежуток $[\varepsilon,r]$, то интеграл (1.54) сходится при всех $\alpha>0$ и определяемая им функция $\Gamma(\alpha)$ *непрерывна при* $\alpha>0$.

Таким же образом можно убедиться в существовании и непрерывности *производных любого порядка*:

$$\Gamma'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x dx\,,\ \Gamma''(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}(\ln x)^2\,dx\,,\ldots \tag{1.56}$$

Получим некоторые *свойства гамма-функции.*

1°. В интеграле (1.54) заменим α на $\alpha+1$ и получающийся при этом интеграл проинтегрируем по частям, *считая* $\alpha>0$:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}dx=[u=x^{\alpha}, dv=e^{-x}dx]=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\alpha\, x^{\alpha-1}dx=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\,.$$

Итак,

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\,. \tag{1.57}$$

Это – *основное функциональное уравнение* для Γ-функции (оно относится к типу так называемых разностных уравнений), или: *формула приведения* Γ- *функции к аргументу, меньшему единицы* (или коротко: формула понижения аргумента). Последнее обусловлено следующим. Всякое число $\xi>0$ можно записать в виде $\xi=n+\alpha$, где n – целое неотрицательное число и $0<\alpha\le 1$. Применяя к $\Gamma(n+\alpha)$ свойство (1.57) последовательно n раз, найдём

$$\begin{gathered}\Gamma(\alpha+n)=(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)=(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\Gamma(\alpha+n-2)=\ldots=\\ =(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\cdot\alpha\,\Gamma(\alpha).\end{gathered} \tag{1.58}$$

Таким образом, вычисление Γ для любого аргумента $\xi=n+\alpha>0$ может быть приведено к вычислению Γ для $0<\alpha\le 1$.

Положим в (1.58) $\alpha=1$. Так как $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$, получим

$$\Gamma(n+1)=n!\,. \tag{1.59}$$

Поэтому функция $\Gamma(\alpha)$ носит название «обобщённый факториал»: она является естественным обобщением на область любых положительных значений аргумента функции целочисленного аргумента ($n!$). Из (1.59) при $n=0$ получаем известное соглашение $0!=1$.

2°. Интеграл (1.54) для $\alpha\le 0$ расходится, однако формула (1.57) позволяет доопределить или, как говорят, продолжить, функцию $\Gamma(\alpha)$ и для отрицательных значений α. Это осуществляется «по шагам», с шагом $h=1$. Имеем

$$\Gamma(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,. \tag{1.60}$$

<u>Первый шаг</u>: функция $\Gamma(\alpha+1)$ определена и непрерывна, когда $\alpha+1>0$,т.е. $\alpha>-1$, а функция $\dfrac{1}{\alpha}$ – при всех α, кроме $\alpha=0$. Поэтому левая часть равенства (1.60), именно $\Gamma(\alpha)$, определится как непрерывная функция при всех $\alpha>-1$, кроме $\alpha=0$.

<u>Второй шаг</u>: применяя равенство (1.60) к функции $\Gamma(\alpha+1)$:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\cdot\Gamma(\alpha+2),$$

приходим к тому, что $\Gamma(\alpha)$ оказывается непрерывной функцией при всех $\alpha > -2$, кроме $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$. Продолжая далее этот процесс, получаем, что функция $\Gamma(\alpha)$, заданная при $\alpha > 0$ интегралом (1.54), а при $\alpha < 0$ исходя из равенства (1.60), определена и непрерывна на всей оси $-\infty < \alpha < \infty$, кроме нуля и целых отрицательных значений: $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$.

Примечание. Описанное доопределение функции $\Gamma(\alpha)$ на случай $\alpha < 0$ в определённом смысле единственно, именно в силу единственности так называемого *аналитического продолжения*.

3°. Так как $\Gamma(1) = 1$, то из (1.60) имеем

$$\lim_{\alpha\to+0}\Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty,\ \lim_{\alpha\to-0}\Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to-0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to-1+0}\Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to-1+0}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \left(\frac{+\infty}{-1}\right) = -\infty,\ \lim_{\alpha\to-1-0}\Gamma(\alpha) = \left(\frac{-\infty}{-1}\right) = +\infty, \ldots.$$

То есть в точках $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$ функция $\Gamma(\alpha)$ имеет разрывы второго рода, именно бесконечный скачок.

4°. Теперь можно выяснить график функции $y = \Gamma(\alpha)$, сначала при $\alpha > 0$. Так как $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma'(\alpha)$ существует в интервале (1;2), то по теореме Ролля между 1 и 2 есть нуль α_0 производной $\Gamma'(\alpha)$: $\Gamma'(\alpha_0) = 0$. Поскольку, как видно из (1.56), $\Gamma''(\alpha) > 0$, то производная $\Gamma'(\alpha)$ строго возрастает при $\alpha > 0$. Следовательно, $\Gamma'(\alpha) < 0$ при $0 < \alpha \le \alpha_0$, значит здесь $\Gamma(\alpha)$ убывает, и $\Gamma'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$, так что $\Gamma(\alpha)$ возрастает: в точке α_0 – единственный минимум. Оказывается, что $\alpha_0 = 1{,}4616\ldots$, $\min\ \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_0) = 0{,}8856\ldots$

Так как $\Gamma(\alpha)$ возрастающая функция при $\alpha > \alpha_0$, то при $n+2 \ge \alpha \ge n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будет $(n+1)! \ge \Gamma(\alpha) \ge n!$, т.е. $\Gamma(\alpha) \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$ как $n!$ (рис 1.12).
При $\alpha < 0$ график строится по шагам, исходя из (1.60).

Наряду с «мистическими» числами π, *e*, во многих исследованиях всплывает *постоянная Эйлера-Маскерони* $C \equiv \gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-x}\ln x\, dx$

$$= \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-\frac{1}{u}}}{u}du = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right) = 0{,}5772157\ldots.^{2}$$

[2] Подробные таблицы Г-функции впервые составил французский математик Адриан Мари Лежандр (1752-1833).

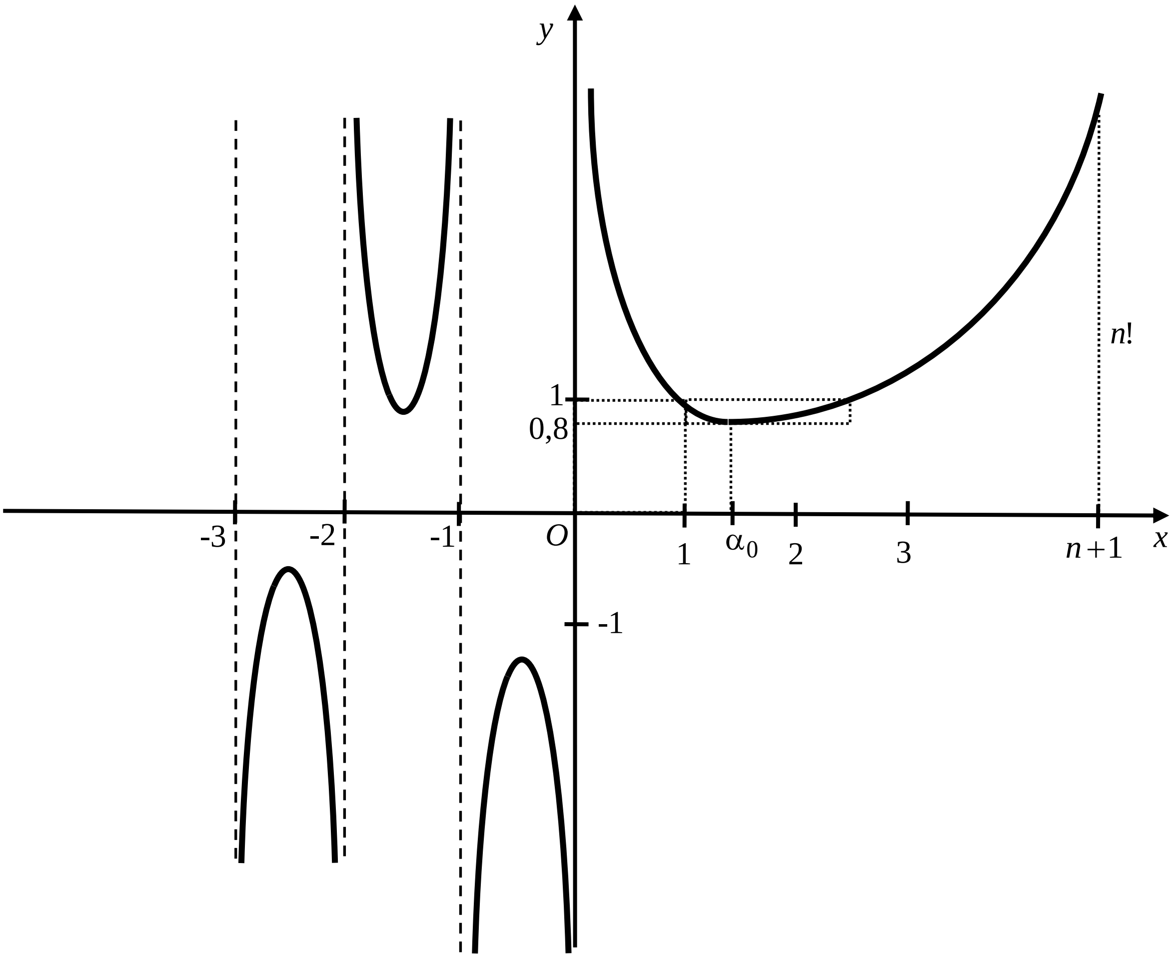


Рис. 1.12. График Г-функции.

2. Интеграл Эйлера первого рода, или бета-функция.
Так называется функция двух переменных α и β, определяемая интегралом

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\,. \qquad (1.61)$$

Это несобственный интеграл второго рода с особыми точками $x=0$ (при $\alpha<1$) и $x=1$ (при $\beta<1$). Поскольку $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\sim x^{\alpha-1}$при $x\to 0$, и $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\sim(1-x)^{\beta-1}$ при $x\to 1$, то интеграл (1.61) сходится, если $\alpha-1>-1$, $\beta-1>-1$, т.е. $0<\alpha<\infty$ и $0<\beta<\infty$, ибо при этом сходятся интегралы $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ и $\int_0^1 (1-x)^{\beta-1}dx$. Легко убедиться, что сколь бы мало ни отступили от концов, именно, при $0<\varepsilon_1\le\alpha\le r_1<\infty$, $0<\varepsilon_2\le\beta\le r_2<\infty$, интеграл будет сходиться равномерно, и тогда $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ есть непрерывная функция при $\alpha>0$, $\beta>0$.

Установим *связь* между функциями В и Г. В интеграле (1.61) заменим: $x=\dfrac{t}{t+1}$, $dx=\dfrac{dt}{(t+1)^2}$. Будем иметь

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha-1}}\cdot\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_{0}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt. \qquad (1.62)$$

Это – другое интегральное представление функции $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$.

В интеграле (1.54) заменим $x=ty$ ($t=const>0$):

$$\Gamma(\alpha)=t^{\alpha}\int_{0}^{\infty}e^{-ty}y^{\alpha-1}dy,\ \frac{\Gamma(\alpha)}{t^{\alpha}}=\int_{0}^{\infty}e^{-ty}y^{\alpha-1}dy. \qquad (1.63)$$

Здесь заменим α на $\alpha+\beta$ и t на $t+1$:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}}=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+t)y}y^{\alpha+\beta-1}dy.$$

Умножим на $t^{\alpha-1}$ и потом проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_{0}^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt=\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}dt\int_{0}^{\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

Считая $\alpha>1$ и $\beta>1$, переставим пределы интегрирования, что законно в силу теоремы 1.13:

$$\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}dt\int_{0}^{\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+t)y}dy=\int_{0}^{\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}dy\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-ty}dt.$$

Внутренний интеграл находим по формуле (1.63):

$$\int_{0}^{\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}dy\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-ty}dt=\int_{0}^{\infty}y^{\alpha+\beta-1}e^{-y}\,\frac{\Gamma(\alpha)}{y^{\alpha}}\,dy=\Gamma(\alpha)\cdot\int_{0}^{\infty}y^{\beta-1}e^{-y}dy=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).$$

Итак, в силу (1.62):

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \qquad (1.64)$$

Изложенный вывод этого *соотношения Эйлера* принадлежит Дирихле.

Из (1.64): $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$, т.е. В – функция симметрична относительно переменных α и β (впрочем, это получается непосредственно из определения (1.61) после замены $1-x=t$).

При натуральных $\alpha=m$, $\beta=n$ из (1.64) получаем $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$.

Приведём без доказательства некоторые <u>другие формулы</u>:

1) <u>Формула дополнения.</u>

$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, $0<\alpha<1$. (Название формулы идёт от того, что числа α и $1-\alpha$ дополняют друг друга до 1.)

Отсюда при $\alpha=\dfrac{1}{2}$: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Но поскольку

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx \overset{\substack{замена\\ x=t^2}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,2dt,$$

то

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (1.65)$$

Это – интеграл Эйлера-Пуассона[3] от e^{-t^2}. Тогда, при $\alpha>0$:

$$\mathrm{K}(\alpha)\equiv\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx=[\text{замена } \sqrt{\alpha}\cdot x=t]=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad (1.66)$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2k}e^{-\alpha x^2}dx=[x\sqrt{\alpha}=\sqrt{t}]=\frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{2k}}\int_0^{\infty} t^k e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{2k+1}}\int_0^{\infty} t^{k-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{2k+1}}\frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Применяя равенство (1.57) k раз, получим:

$$\frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{2k+1}}\frac{1}{2}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}},\ k=1,2,\ldots.$$

Здесь воспользовались первым из следующим обозначений для произведения нечётных либо чётных чисел: $(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)(2k-1)$, $(2k)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k-2)2k$.

Приведённые интегралы встречаются, в частности, в теории вероятностей и молекулярно-кинетической теории газов.

2) Формула Лежандра или формула удвоения:

$$2^{2\alpha+1}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\alpha).$$

3) Асимптотическое разложение или формула Стирлинга[4] (1730г.):

$$\Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}(1+\alpha(x)),\ \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty. \qquad (1.67)$$

Отсюда можно подсчитывать $\Gamma(x)$ для больших x со сколь угодно малой *относительной* погрешностью $\alpha(x)$. Известно, что $0<\alpha(x)<e^{\frac{1}{12n}}-1$, где $n=E(x)$ (целая часть x). В частности,

$$\Gamma(n+1)\equiv n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \text{ или } n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\ 0<\theta<1. \qquad (1.68)$$

Существует ещё много других формул, выявляющих глубокие свойства функций Γ и B. Некоторые из них получил также Н.И. Лобачевский (1792-

---

[3] Дени Симон Пуассон (1781-1840) – французский математик.

[4] Джемс Стирлинг (1692-1770) – английский математик.

1856) – один из создателей неевклидовой геометрии (именно: геометрии Лобачевского).

3. Приведём примеры вычисления некоторых интегралов с помощью функций Γ и B.

1) Считая $p>0, q>0, m>0$, найдём следующие интегралы от дифференциального бинома:

a) В интеграле $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx$ сделаем замену $x=y^{\frac{1}{m}}$. Получим:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx=\int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}}(1-y)^{q-1}\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}dy=\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

b) В интеграле $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cdot\cos^{b-1}\varphi\, d\varphi$, $a>0, b>0$, сделаем замену: $x=\sin x$, $dx=\cos\varphi\, d\varphi$. Получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cdot\cos^{b-1}\varphi\, d\varphi=$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b-1}{2}}(\sqrt{1-x^2})^{-1}dx=\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Заметим, что данный интеграл симметричен относительно *a* и *b*.

Полагая $b=1$ или $a=1$, найдём

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\, d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{a-1}\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Отсюда, используя равенство (1.57), при $a=m+1, m\in\mathbf{N}$, можно найти интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m}\varphi\, d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m}\varphi\, d\varphi=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, \textit{при чётном } m\\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, \textit{при нечётном} m\end{cases}.$$

2) Докажем: $J(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-k^2x^2}\cos\alpha x\, dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2|k|}e^{-\frac{\alpha^2}{4k^2}}$, $k\neq 0$. Имеем:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=-\int_0^{\infty}e^{-k^2x^2}\sin\alpha x\cdot x\,dx=\frac{1}{2k^2}\int_0^{\infty}e^{-k^2x^2}\sin\alpha x\,d(-k^2x^2)\overset{\substack{\textit{интегрируем}\\ \textit{по частям}}}{=}$$

$$=\frac{1}{2k^2}\left(e^{-k^2x^2}\sin\alpha x\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-k^2x^2}\cos\alpha x\cdot\alpha\,dx\right)=-\frac{\alpha}{2k^2}J(\alpha).$$

Отсюда $\frac{dJ}{J}=-\frac{\alpha}{2k^2}d\alpha$, интегрируем: $\ln|J|=-\frac{\alpha^2}{2k^2}\cdot\frac{1}{2}+\ln|C|$, $J=Ce^{-\frac{\alpha^2}{4k^2}}$. Полагая $\alpha=0$, получим $C=J(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k^2}}$ (см. (1.66)). Равенство доказано.

3) Найдём иное представление для интеграла $F(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin\alpha x\,dx$. $\frac{dF}{d\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-x^2}x\cos\alpha x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin\alpha x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}F(\alpha)$. Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами:

$$\frac{dF}{d\alpha}+\frac{\alpha}{2}F=\frac{1}{2}. \tag{1.69}$$

Решаем соответствующее однородное уравнение $\frac{dF}{d\alpha}+\frac{\alpha}{2}F=0$, $\frac{dF}{F}=-\frac{\alpha}{2}d\alpha$. Интегрируем: $\ln|F|=-\frac{\alpha^2}{4}+\ln|C|\Rightarrow F(\alpha)=Ce^{-\frac{\alpha^2}{4}}, \forall C=const$, включая $C=0$. Неоднородное уравнение (1.69) решаем методом Лагранжа вариации произвольных постоянных: решение ищем в том же виде $F(\alpha)=C(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$, но здесь считаем $C=C(\alpha)$ новой искомой функцией (в уравнении (1.69) производим *замену переменной*). Имеем $\frac{dF}{d\alpha}=C'(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4}}-\frac{1}{2}\alpha C(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. Подставляя в уравнение (1.69), будем иметь $C'(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow C(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}e^{\frac{\alpha^2}{4}}d\alpha+C_1$, $\forall C_1=const$. Получили $F(\alpha)=C_1e^{-\frac{\alpha^2}{4}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\int_0^{\alpha}e^{\frac{\alpha^2}{4}}d\alpha$. Замечая, что $F(0)=0$, при $\alpha=0$ найдём $C_1=0$. Итак, $F(\alpha)\equiv\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin\alpha x\,dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\int_0^{\alpha}e^{\frac{t^2}{4}}dt$.

Эта функция (как и все решения уравнения (1.69)) обладает свойством: $F(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to+\infty$, что легко проверить по правилу Лопиталя.

§ 6. Несобственные двойные и тройные интегралы

Понятие двойного и тройного интегралов расширим на случаи бесконечной области и неограниченной функции. При этом ограничимся общими замечаниями без достаточного обоснования приводимых результатов.

1. Случай бесконечной области. Пусть D – бесконечная область плоскости Oxy и в ней задана непрерывная (для простоты) функция $f(x,y)$. Рассмотрим ограниченную часть B области D и будем расширять её до области D. Именно, пусть γ – замкнутый контур, содержащий внутри начало $O(0,0)$, R – наименьшее из расстояний от точек $P(x,y)\in\gamma$ до начала координат (часто за γ достаточно брать окружность $x^2+y^2=R^2$), то полагаем $B=D_R=D\bigcap\bar{I}(\gamma)$ (рис. 1.13). Несобственным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{D_R} f(x,y)dxdy. \qquad (1.70)$$

Если существует *конечный* предел, то говорят, что интеграл сходится (существует), в противном случае – расходится (не существует).

Подобным образом вводится и несобственный тройной интеграл по бесконечной области V.

Теорема 1.15. (Достаточные условия существования двойного и тройного интегралов по бесконечной области.) *Пусть r – расстояние от произвольной точки P области D или V до начала координат и функция $f(P)$ при больших r удовлетворяет условию*

$$|f(P)|\le\frac{C}{r^p},\ C=const>0,\ r\ge r_0. \text{ Тогда}$$

1°. *Если $p>2$, то двойной интеграл (1.70) сходится.*

2°. *Если $p>3$, то сходится тройной интеграл*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz. \qquad (1.71)$$

Замечание. Пусть функция $f(P)$ удовлетворяет условию $|f(P)|\ge\dfrac{C}{r^\mu}$, где $C=const>0,\ r\ge r_0$. Тогда в случае $\mu\le 2$ расходится интеграл (1.70), а в случае $\mu\le 3$ расходится интеграл (1.71). Это можно пояснить тем, что при $r\to\infty$ функция $f(P)$ даже если и стремится к нулю, то достаточно медленно (в отличие от ситуаций 1° и 2°). По сравнению с несобственным интегралом по промежутку $[a,+\infty)$, сказанное (в случае расходимости) верно и когда оценивается модуль функции, а не только сама функция. Вычисляются интегралы (1.70) и

(1.71) как обычно сведением к повторным интегралам.

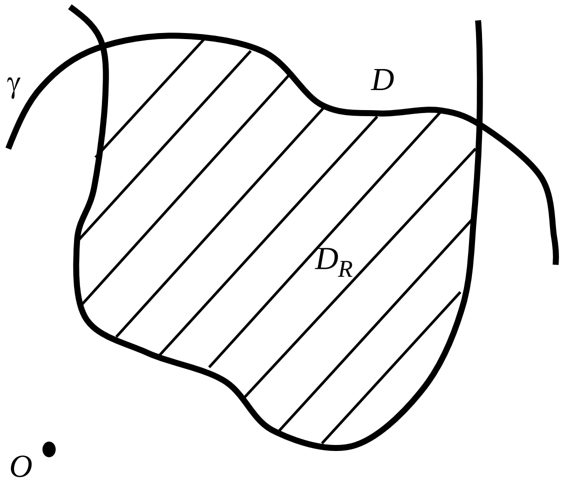


Рис. 1.13

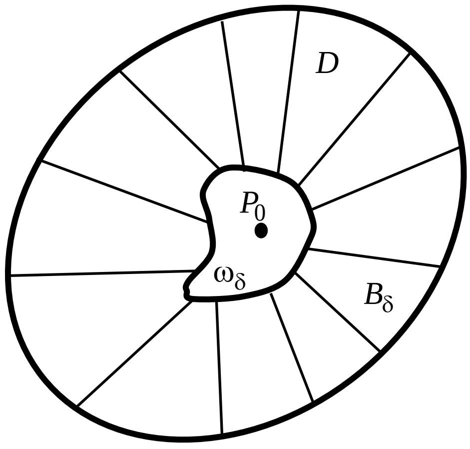


Рис. 1.14

<u>Пример</u>. Пусть D – вся плоскость Oxy. Найдём интеграл $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy$.

Если $r = \sqrt{x^2+y^2}$, то $e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2} < \dfrac{1}{r^3}$ при достаточно больших r. Здесь $p = 3 > 2$, поэтому интеграл сходится. Переходим к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$; $\rho \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$: $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \pi$.

С другой стороны, в декартовых координатах:

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Сравнивая полученные результаты, находим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Это интеграл Эйлера – Пуассона (1.65), вычисленный ранее с помощью Г-функции.

Интеграл I выражает объём бесконечного тела, ограниченного плоскостью Oxy и поверхностью $z = e^{-x^2-y^2}$, которая образована вращением кривой Гаусса $z = e^{-x^2}$ (в плоскости Oxz) вокруг оси Oz (колокол с бесконечным основанием).

2. <u>Случай неограниченной функции</u>. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в конечной области D, за исключением одной внутренней точки $P_0(x_0, y_0)$, в окрестности которой функция неограничена (для краткости говорят, что функция неограничена в точке P_0).

Вырежем из области D малую область ω_δ, содержащую точку P_0 (2δ – диаметр области ω_δ; в частности ω_δ – круг $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$). Оставшуюся часть области обозначим B_δ, т.е. $B_\delta = D \setminus \omega_\delta$ (рис. 1.14).

Несобственным двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{\delta\to 0} \iint\limits_{B_\delta} f(x,y)dxdy. \tag{1.72}$$

Если существует *конечный* предел, то говорят, что интеграл сходится (существует), в противном случае – расходится (не существует).

Подобным образом вводится и несобственный тройной интеграл от неограниченной функции (только из области вырезается не круг, а шар малого радиуса с центром в точке P_0).

Теорема 1.16. (Условия сходимости и расходимости интегралов от неограниченной функции.) *Пусть функция* $f(P)$ *непрерывна в конечной области D или объёме V, за исключением внутренней точки* P_0 *и вблизи этой точки удовлетворяет условию* $|f(P)| \le \dfrac{C}{r^\lambda}$, $r = P_0P < \varepsilon$, $C = const > 0$. *Тогда:*

1° *если* $\lambda < 2$, *то интеграл (1.72) сходится;*
2° *если* $\lambda < 3$, *то сходится тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz; \tag{1.73}$$

3° *если же* $\left|f(P)\right| \ge \dfrac{C}{r^\nu}$, $0 < r < \varepsilon$, *то при* $\nu \ge 2$ *расходится интеграл (1.72), а при* $\nu \ge 3$ *расходится интеграл (1.73).*

Пример. Пусть $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$. Переходя к полярным координатам, найдём :

$$\iint\limits_{D} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = -\iint\limits_{D} \ln\rho\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\ln\rho\, d\rho = -2\pi\left[\ln\rho\cdot\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(здесь $\int_0^1 \rho\ln\rho\, d\rho$ берется по частям). Этот интеграл выражает объём бесконечного цилиндрического тела, ограниченного снизу кругом $x^2 + y^2 \le 1$ (в плоскости Oxy) и сверху поверхностью $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ge 0$. Она образована вращением кривой $z = \ln\dfrac{1}{x}, 0 < x \le 1$ (в плоскости Oxz) вокруг оси Oz.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Издание 20-е, стереотипное. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985. – 384 с.

2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Часть 2. М., ГИТТЛ, 1959. – 358 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука. ГРФМЛ, 1965. – 608 с.
4. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Основы математического анализа. Часть 2. М., Физматлит, 2002. – 464 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М, Наука, ГРФМЛ, 1970. – 420 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 2, 13 издание. М., Наука, ГРФМЛ, 1985. – 560 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. Изд-е 21-е, стереотипное. – М., Наука, ГРФМЛ, 1974. – 656 с.
8. Солдатов М.А., Круглова С.С. Математический анализ функции одного переменного. Учебное пособие. Нижний Новгород, изд-во ННГУ, 2013. – 310 с.
9. Солдатов М.А., Круглова С.С., Левина Т.М. Интеграл Фурье. Ряды Фурье: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород, Нижегородский госуниверситет, 2011. – 59 с.
10. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.2. Издание 2-е, стереотипное. – М., Наука. ГРФМЛ, 1974. – 472 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 2. СПб., Лань, 2005. – 464 с.
12. Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа. Том 2. Издание 3-е, перераб. – М.-Л., ГИТТЛ, 1957. – 498 с.
13. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950. – 456 с.