МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

В.Л. Котов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА)

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано научно-методическим советом
исследовательской школы «Компьютерная и экспериментальная механика»
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2018

УДК 539.3
ББК 22.2
К73

К73 Котов В.Л. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 30 с.

Рецензент: к.т.н., доц. **Н.В. Леонтьев**

Лабораторная работа студентов направлена на получение аналитического и численного решений задачи о расширении с постоянной скоростью сферической полости из точки в безграничной упругоидеальнопластической среде. Особое внимание уделяется процессу приведения начально-краевой задачи для системы двух уравнений в частных производных первого порядка к краевой задаче для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью автомодельного преобразования. Проводится сравнение аналитического решения в предположении несжимаемости среды с численным решением для двух случаев граничных условий. В приложениях приведены алгоритмы численного решения начальных и краевых задач методами стрельбы и Рунге-Кутты, таблица параметров материалов, текст программы на языке программирования С++.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Печатается по решению
научно-методического совета исследовательской школы
«Компьютерная и экспериментальная механика»

УДК 539.3
ББК 22.2

Содержание

1. Задача о расширении сферической полости в упругопластической среде

1.1. Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о расширении сферической полости с постоянной скоростью из точки в безграничном пространстве, занимаемом упруго-идеальнопластической средой [1]. В среде выделяются следующие динамические области: собственно полость, расширяющаяся с постоянной скоростью V_0, область пластического течения, область упругого деформирования и область, материал которой не подвергся возмущениям (рис. 1).

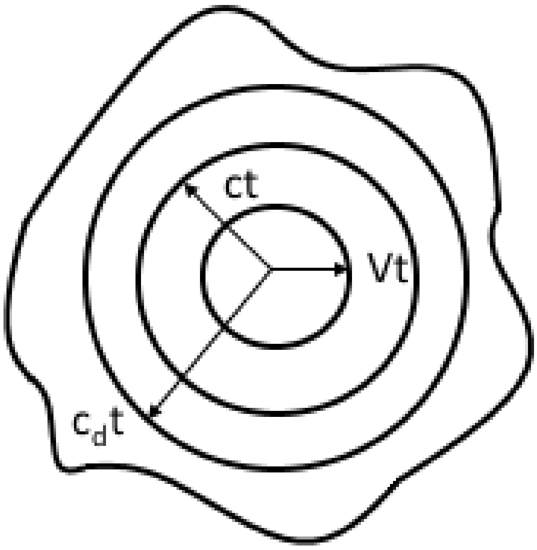

Рис. 1. Зонирование областей в задаче о расширении сферической полости: полость, пластическая, упругая и невозмущенная области.

Область пластического течения ограничена радиусами $r = V_0 t$ и $r = ct$, где V_0 - постоянная скорость расширения полости, c - скорость распространения фронта пластической волны на границе с упругой областью. Область упругого деформирования ограничена радиусами $r = ct$ и $r = c_d t$, где c_d –скорость расширения в упругой области (см. рис. 1). При $r > c_d t$ возмущения среды отсутствуют.

Математическая модель упруго-пластической сжимаемой среды в эйлеровой системе координат с учетом сферической симметрии описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, представляющих закон сохранения количества движения и закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = -\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + 2\frac{\upsilon}{r} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial \rho}{\partial r}\right), \tag{1}$$

где ρ – плотность в деформированном состоянии, υ – скорость, σ_r и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), r – радиальная координата, t – время.

Система дифференциальных уравнений замыкается в пластической области условием текучести Треска:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = Y \tag{2}$$

Y – напряжение пластического течения и законом Гука в упругой области:

$$-\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_r = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$-\sigma_\theta = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_\theta = \lambda\theta + 2\mu\frac{u}{r} \tag{3}$$

где λ, μ – упругие константы материала (параметры Ламе), θ – объемная деформация, $\theta=\varepsilon_r+2\varepsilon_\theta=\frac{\partial u}{\partial r}+2\frac{u}{r}$, σ_r, σ_θ и σ_φ - радиальная, окружная и меридианная компоненты тензора напряжений Коши ($\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ в силу сферической симметрии, $\sigma_r > 0$ при сжатии), $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ - радиальная и окружная компоненты тензора малых деформаций.

Введем в рассмотрение также гидростатическое давление p

$$p = -K\theta = K\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right),\ p = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta),$$

где K – объемный модуль упругости, ρ_0, ρ - плотности в начальном (недеформированном) и текущем (деформированном) состояниях, $p > 0$ при сжатии.

На границе расширяющейся полости радиуса $R_0=V_0t$ задается скорость V_0, внешняя поверхность сферического слоя R_∞ свободна от напряжений:

$$\upsilon\big|_{r=R_0} = V_0,\ \sigma_r\big|_{r=R_\infty} = 0, \tag{4}$$

в начальный момент времени:

$$R_0\big|_{t=0} = 0,\ \upsilon\big|_{t=0} = 0,\ \sigma_r\big|_{t=0} = 0$$

1.2. Задания для выполнения

- Записать начально-краевую задачу для системы двух уравнений в частных производных относительно двух неизвестных: радиальной компоненты тензора напряжений и вектора скорости.
- Выполнить автомодельную подстановку и получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка для двух безразмерных величин скорости и напряжения в области пластического течения.
- Сформулировать краевую задачу, приведя систему двух ОДУ первого порядка к нормальному виду.
- Получить ОДУ второго порядка относительно перемещения в области упругого деформирования.
- Выполнить автомодельную подстановку и получить ОДУ второго порядка относительно безразмерного перемещения в области упругого деформирования.
- Сформулировать и решить краевую задачу для ОДУ второго порядка, относительно безразмерного перемещения.
- Получить выражения для компонент вектора скорости, радиальной и окружной компонент тензора напряжений в области упругого деформирования.
- Получить аналитическое решение задачи в предположении несжимаемости среды в области пластического течения.
- Получить аналитическое решение задачи в предположении несжимаемости среды в области упругого деформирования
- Решить численно краевую задачу для системы двух ОДУ первого порядка, используя метод стрельбы и метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности.
- Сравнить аналитическое решение в предположении несжимаемости среды с численным решением в полной постановке для двух скоростей расширения полости, построив графики скоростей и напряжений в размерном и безразмерном виде.

2. Пример выполнения задания

2.1. Записать начально-краевую задачу для системы двух уравнений в частных производных относительно двух неизвестных: радиальной компоненты тензора напряжений и вектора скорости

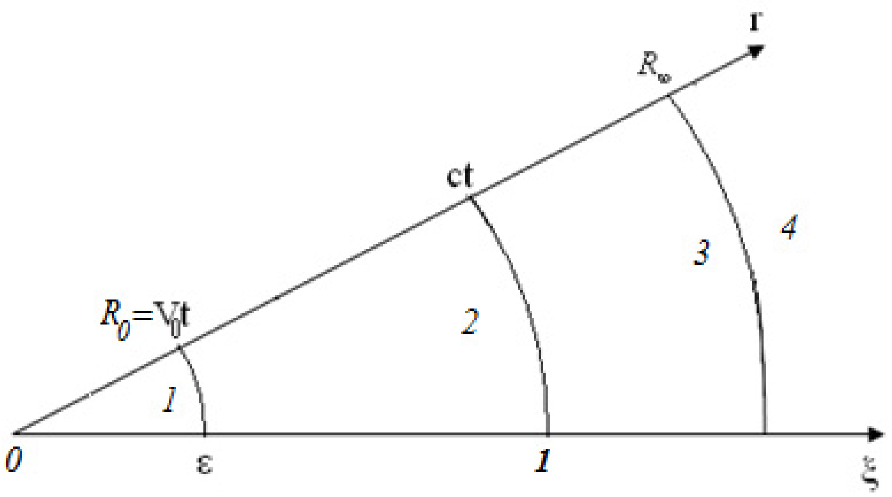

Рис. 2. Постановка задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упруго-пластической среде: 1- полость, 2- область пластического течения, 3 - область упругого деформирования, 4- невозмущенная область.

Полная производная по времени от скорости имеет вид

$$\frac{D\upsilon}{Dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial r}.$$

Полная производная от плотности выражена через производную от напряжения

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{D\rho}{D\sigma_r}\frac{D\sigma_r}{Dt} = \left(\frac{D\sigma_r}{D\rho}\right)^{-1}\frac{D\sigma_r}{Dt} = \frac{\rho^2}{\rho_0 K}\frac{D\sigma_r}{Dt},$$

$$\sigma_r = p + \frac{2}{3}Y,\ p = K\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

В области пластического течения система (1) с учетом выражений (2), (3) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2Y}{r} = -\frac{\rho_0}{1-\theta}\cdot\frac{D\upsilon}{Dt} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + \frac{2\upsilon}{r} = -\frac{1}{K(1-\theta)}\cdot\frac{D\sigma_r}{Dt},$$

2.2. Выполнить автомодельную подстановку и получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка для двух безразмерных величин скорости и напряжения в области пластического течения

Рассмотрим автомодельную переменную $\xi = \dfrac{r}{ct}$ и введем безразмерные переменные:

$$S = \frac{\sigma_r}{K}, T = \frac{Y}{K}, U = \frac{\upsilon}{c}, \varepsilon = \frac{V_0}{c}, \tag{6}$$

$$\beta = \frac{c}{c_p}, c_p^2 = \frac{K}{\rho_0}, K = \rho_0 c_p^2,$$

Для безразмерных переменных (6) частные производные определяются следующим образом:

$$\xi = \frac{r}{ct}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{ct}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2} = -\frac{\xi ct}{ct^2} = -\frac{\xi}{t}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r} = \frac{d\upsilon}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{ct}\frac{d\upsilon}{d\xi} = \frac{1}{t}\frac{dU}{d\xi}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{d\upsilon}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{ct^2}\right)\frac{d\upsilon}{d\xi} = -\frac{\xi c}{t}\frac{dU}{d\xi} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{1}{ct} \cdot \frac{d\sigma_r}{d\xi} = \frac{1}{ct}\sigma_r', \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \cdot \frac{d\sigma_r}{d\xi} = -\frac{\xi}{t}\sigma_r'$$

С учетом (6), (7) система (5) примет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{2T}{\xi} = \frac{\beta^2(\xi - U)}{(1 - S + 2/3T)} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{2U}{\xi} = \frac{(\xi - U)}{(1 - S + 2/3T)} \cdot \frac{\partial S}{\partial \xi} \tag{8}$$

2.3. Сформулировать краевую задачу, приведя систему двух ОДУ первого порядка к нормальному виду

Обозначим штрихом производная по ξ

$$S' + \frac{2T}{\xi} = \beta^2(\xi - U)U', \qquad U' + \frac{2U}{\xi} = (\xi - U)S',$$

Выразим U' из первого уравнения и подставим во второе, аналогично для S', получим

$$S'=\frac{\dfrac{2T}{\xi}+\dfrac{2\beta^2(\xi-U)U}{(1-\theta)\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2-1},\ U'=\frac{\dfrac{2U}{\xi}+\dfrac{2T(\xi-U)}{(1-\theta)\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2-1},\ \ \varepsilon<\xi<1$$

Для практически несжимаемой среды $\left(1-S+2/3T\right)$ = $1-\theta\approx1$ система уравнений (8) имеет вид:

$$S'=\frac{\dfrac{2T}{\xi}+\dfrac{2\beta^2(\xi-U)U}{\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2-1},\qquad U'=\frac{\dfrac{2U}{\xi}+\dfrac{2T(\xi-U)}{\xi}}{\beta^2(\xi-U)^2-1},$$

Граничные условия:

$$U\Big|_{\xi=\varepsilon}=\varepsilon,\ S\Big|_{\xi=1}=S^e,\ U\Big|_{\xi=1}=U^e$$

2.4. Получить ОДУ второго порядка относительно перемещения в области упругого деформирования.

В упругой области первое уравнение системы (1) примет вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+2\frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=-\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right),\ \upsilon=\frac{\partial u}{\partial t}$$

В перемещениях закон Гука преобразуется к виду:

$$-\sigma_r=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial r}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\lambda\frac{u}{r},$$

Производная от компоненты тензора напряжений по координате

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=-(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2\lambda}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+2\lambda\frac{u}{r^2}=-(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2\lambda}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right),$$

разность компонент тензора напряжений вычисляется на основе закона Гука,

$$\sigma_r-\sigma_\theta=2\mu\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

При вычислении производной от скорости по времени пренебрегаем конвективными составляющими в полной производной, полагая

$$\frac{D\upsilon}{Dt}=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в (1), будем иметь

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2\lambda}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)+4\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+2(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}=\frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (9)$$

где $c_d^2=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$ - скорость распространения фронта продольной волны в упругой среде

Для справки: закон Гука (E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона):

$$\sigma_r=\frac{-E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\nu\frac{u}{r}\right], \qquad \sigma_\theta=\frac{-E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right],$$

2.5. Выполнить автомодельную подстановку и получить ОДУ второго порядка относительно безразмерного перемещения в области упругого деформирования

Положим: $\xi=\dfrac{r}{ct}$, $\widetilde{u}=\dfrac{u}{ct}$ - безразмерные координата и перемещение

Выполним преобразование производных с учетом замены переменных:

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial t}{\partial\xi}}=\frac{\partial\dfrac{u}{ct}}{\partial t}\cdot\frac{1}{\left(-\dfrac{r}{ct^2}\right)}=-\frac{c^2t^2}{cr}\cdot\left(\frac{\dfrac{\partial u}{\partial t}ct-cu}{c^2t^2}\right)=\frac{1}{r}\cdot\left(u-t\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{r}-\frac{t}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial\xi}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{t}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{1}{\left(-\dfrac{r}{ct^2}\right)}=\frac{tct^2}{r\cdot r}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{t}{c}\cdot\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\xi}=\frac{\partial\dfrac{u}{ct}}{\partial r}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial\xi}{\partial r}}=\frac{1}{ct}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\cdot ct=\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial\xi}{\partial r}}=ct\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{u}{r}=\frac{\widetilde{u}}{\xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\widetilde{u}'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{1}{ct}\widetilde{u}'', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{c}{t}\xi^2\widetilde{u}''$$

$$\xi=\frac{r}{ct},\ \widetilde{u}=\frac{u}{ct},\ r=\xi ct$$

Подстановка в уравнение (9):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}=\frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \quad \frac{1}{ct}\tilde{u}''+\frac{1}{ct}\cdot\frac{2}{\xi}\tilde{u}'-\frac{1}{ct}\cdot\frac{2}{\xi^2}\tilde{u}=\frac{1}{c_d^2}\cdot\frac{c}{t}\cdot\xi^2\tilde{u}''$$

$$\left(1-\alpha^2\xi^2\right)\tilde{u}''+\frac{2\tilde{u}'}{\xi}-\frac{2\tilde{u}}{\xi^2}=0, \qquad (10)$$

где $\tilde{u}=\tilde{u}(\xi)$, $\alpha^2=\dfrac{c^2}{c_d^2}$, c -скорость фронта пластической волны (граница упругопластического раздела), c_d – скорость фронта упругой волны

2.6. Сформулировать и решить краевую задачу для ОДУ второго порядка относительно безразмерного перемещения

Рассмотрим краевые условия на границах области упругого деформирования. На границе с невозмущенной областью $\xi = 1/\alpha$ перемещение равно нулю

$$\tilde{u}\Big|_{\xi=1/\alpha}=0$$

На упругопластической границе $\xi=1$ выполняется условие пластического течения $\sigma_r\big|_{\xi=1}-\sigma_\theta\big|_{\xi=1}=Y$, а также закон Гука $\sigma_r-\sigma_\theta=2\mu\left(\dfrac{u}{r}-\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$ в силу непрерывности напряжений имеем

$$\sigma_r\big|_{\xi=1}-\sigma_\theta\big|_{\xi=1}=2\mu\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)=Y$$

$$\frac{u}{r}=\frac{\tilde{u}}{\xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\tilde{u}}{\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)=\frac{Y}{2\mu}$$

Таким образом, имеем следующую краевую задачу для ОДУ второго порядка

$$\left(1-\alpha^2\xi^2\right)\tilde{u}''+\frac{2\tilde{u}'}{\xi}-\frac{2\tilde{u}}{\xi^2}=0,\ 1<\xi<1/\alpha,$$

$$\tilde{u}\Big|_{\xi=1/\alpha}=0,\ \left.\left(\frac{\tilde{u}}{\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)\right|_{\xi=1}=\frac{Y}{2\mu}$$

Для решения задачи выполним последовательно преобразования. В результате замены $z=\alpha\xi$ получаем уравнение

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi}=\frac{d\tilde{u}}{dz}\frac{dz}{d\xi}=\alpha\frac{d\tilde{u}}{dz},\ \frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2}=\alpha^2\frac{d^2\tilde{u}}{d^2z},\ \frac{dz}{d\xi}=\alpha$$

$$\left(1-\alpha^2\xi^2\right)\frac{d^2\widetilde{u}}{d\xi^2}+\frac{2\widetilde{u}'}{\xi}-\frac{2\widetilde{u}}{\xi^2}=0 \;\Rightarrow\; \left(1-\alpha^2\xi^2\right)\alpha^2\frac{d^2\widetilde{u}}{dz^2}+\frac{2\alpha}{\xi}\frac{d\widetilde{u}}{dz}-\frac{2\widetilde{u}}{\xi^2}=0$$

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\widetilde{u}}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\widetilde{u}}{dz}-\frac{2\widetilde{u}}{z^2}=0, \qquad \frac{1}{\xi}=\frac{\alpha}{z}$$

В результате замены $\widetilde{u}=z\varphi$, $F=\dfrac{d\varphi}{dz}$ получаем уравнение первого порядка относительно $F(z)$

$$\frac{d\widetilde{u}}{dz}=\varphi+z\cdot\frac{d\varphi}{dz}=\varphi+z\cdot F, \qquad \frac{d^2\widetilde{u}}{dz^2}=\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\varphi}{dz}+z\frac{d^2\varphi}{dz^2}=2F+z\cdot\frac{dF}{dz}$$

$$\left(1-z^2\right)\left(2F+z\frac{dF}{dz}\right)+\frac{2}{z}(\varphi+zF)-\frac{2}{z^2}\cdot z\varphi=0$$

$$2F+zF'-2z^2F-z^3F'+2F=0$$

$$z\left(1-z^2\right)F'+2\left(2-z^2\right)F=0$$

$$\frac{dF}{F}=-\frac{2\left(2-z^2\right)}{z\left(1-z^2\right)}dz, \Rightarrow F(z)=\frac{A}{z^2}-\frac{A}{z^4},$$

так как $\displaystyle\int-\frac{2\left(2-z^2\right)}{z\left(1-z^2\right)}dz=-4\ln z+\ln(z-1)+\ln(z+1)+\ln A=\ln\left(\frac{A\left(z^2-1\right)}{z^4}\right)$,

$$F(z)=\frac{d\varphi}{dz}:\ \frac{d\varphi}{dz}=\frac{A}{z^2}-\frac{A}{z^4},\ \varphi(z)=\frac{A}{3z^3}-\frac{A}{z}+B,\ \widetilde{u}=z\varphi,$$

$$\widetilde{u}=z\varphi:\ \widetilde{u}=\frac{A}{3z^2}-A+Bz,\ z=\alpha\xi,\ \widetilde{u}=A\left(\frac{1}{3\alpha^2\xi^2}-1\right)+B\alpha\xi,$$

где *A, B* – константы интегрирования.

Для определения констант используются граничные условия:

$$\widetilde{u}\Big|_{\xi=1/\alpha}=0,\quad \alpha=\frac{c}{c_d}, \qquad \frac{1}{\alpha}=\frac{c_d}{c},\ \widetilde{u}\Big|_{\xi=1/\alpha}=A\left(\frac{1}{3}-1\right)+B=0,\ B=\frac{2}{3}A,$$

$$\sigma_r\Big|_{\xi=1}-\sigma_\theta\Big|_{\xi=1}=Y, \qquad \text{условие пластического течения}$$

$$\sigma_r-\sigma_\theta=2\mu\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\ \text{- закон Гука,}\Rightarrow\ \sigma_r\Big|_{\xi=1}-\sigma_\theta\Big|_{\xi=1}=2\mu\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)=Y$$

$$\frac{u}{r}=\frac{\widetilde{u}}{\xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}, \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\widetilde{u}}{\xi}-\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right)=\frac{Y}{2\mu}$$

$$\widetilde{u}=A\left(\frac{1}{3\alpha^2\xi^2}-1\right)+B\alpha\xi,\ \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}=-\frac{2A}{3\alpha^2\xi^3}+B\alpha,$$

$$\left(\frac{\widetilde{u}}{\xi}-\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=1}=A\left(\frac{1}{3\alpha^2}-1\right)+B\alpha+\frac{2}{3}\frac{A}{\alpha^2}-B\alpha=\frac{Y}{2\mu},$$

$$\frac{A}{\alpha^2} - A = \frac{Y}{2\mu}, \qquad A = \frac{\alpha^2 Y}{2\left(1-\alpha^2\right)\mu}, \quad B = \frac{2}{3}A = \frac{2}{3}\frac{\alpha^2 Y}{2\left(1-\alpha^2\right)\mu}$$

$$\tilde{u} = A\left(\frac{1-3\alpha^2\xi^2}{3\alpha^2\xi^2} + \frac{2}{3}\alpha\xi\right) = A\left(\frac{1-3\alpha^2\xi^2+2\alpha^2\xi^2}{3\alpha^2\xi^2}\right) = A\frac{(1-\alpha\xi)^2(1+2\alpha\xi)}{3\alpha^2\xi^2}$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{ct} = \frac{Y}{6\mu\xi^2}\frac{(1-\alpha\xi)^2(1+2\alpha\xi)}{\left(1-\alpha^2\right)}$$

2.7. Получить выражения для компонент вектора скорости, радиальной и окружной компонент тензора напряжений в области упругого деформирования

Скорость в размерном виде примет вид:

$$\upsilon = \frac{du}{dt} = \frac{d\tilde{u}}{dt}ct + \tilde{u}c, \qquad u = (\tilde{u})ct$$

$$\frac{\upsilon}{c} = U = \tilde{u} + \frac{d\tilde{u}}{dt}t$$

Применим правило определения производной от сложной функции

$$\xi = \frac{r}{ct}, \ \frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2} = -\frac{\xi ct}{ct^2} = -\frac{\xi}{t}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}t = -\frac{\xi}{t}\frac{d\tilde{u}}{d\xi}t = -\xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi}$$

Получим выражение для определения безразмерной скорости

$$U = \tilde{u} - \xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi},$$

Выполним ряд преобразований

$$\tilde{u} = A\left(\frac{1}{3\alpha^2\xi^2} + \frac{2}{3}\alpha\xi - 1\right), \ \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = A\left(-\frac{2}{3\alpha^2\xi^3} + \frac{2}{3}\alpha\right),$$

$$U = \tilde{u} - \xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = A\left(\frac{1}{3\alpha^2\xi^2} + \frac{2}{3}\alpha\xi - 1\right) - \xi A\left(-\frac{2}{3\alpha^2\xi^3} + \frac{2}{3}\alpha\right),$$

$$U(\xi) = A\left(\frac{1-\alpha^2\xi^2}{\alpha^2\xi^2}\right) = \frac{Y}{2\mu}\frac{\left(1-\alpha^2\xi^2\right)}{\left(1-\alpha^2\right)\xi^2}.$$

Радиальное напряжение определим из закона Гука, учитывая, что

$$\frac{u}{r} = \frac{\tilde{u}}{\xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$$

$$-\sigma_r = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} = \lambda\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2\frac{\tilde{u}}{\xi}\right) + 2\mu\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\tilde{u}}{\xi} = A\left(\frac{1}{3\alpha^2\xi^3} + \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{\xi}\right),\ \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = A\left(-\frac{2}{3\alpha^2\xi^3} + \frac{2}{3}\alpha\right),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2\frac{\tilde{u}}{\xi} = A\left(2\alpha - \frac{2}{\xi}\right)$$

$$-\sigma_r = \lambda A\left(2\alpha - \frac{2}{\xi}\right) + 2\mu A\left(-\frac{2}{3\alpha^2\xi^3} + \frac{2}{3}\alpha\right),$$

$$\sigma_r = A\left(\frac{2\lambda}{\xi} + \frac{4\mu}{3\alpha^2\xi^3} - 2\alpha K\right),\ K = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

$$\sigma_r = A\frac{(1-\xi\alpha)}{\alpha^2\xi^3}\left(2K\alpha^2\xi^2 + \frac{4\mu}{3}(1+\alpha\xi)\right),\ \lambda = K - \frac{2}{3}\mu$$

$$\sigma_r = \frac{(1-\xi\alpha)}{(1-\alpha^2)\xi^3}\frac{Y}{2\mu}\left(2K\alpha^2\xi^2 + \frac{4\mu}{3}(1+\alpha\xi)\right),\ A = \frac{\alpha^2 Y}{2(1-\alpha^2)\mu}$$

$$\frac{\sigma_r}{K} = S(\xi) = \frac{(1-\xi\alpha)}{(1-\alpha^2)\xi^3}\left(\frac{Y}{\mu}\alpha^2\xi^2 + \frac{2}{3}T(1+\alpha\xi)\right),\ T = \frac{Y}{K}$$

Принимая во внимание связь упругих постоянных

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},\ K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\frac{\sigma_r}{K} = S(\xi) = \frac{2T(1-\alpha\xi)\left[(1-2\nu)(1+\alpha\xi) + (1+\nu)\alpha^2\xi^2\right]}{3(1-2\nu)(1-\alpha^2)\xi^3}$$

Аналогично получено окружное напряжение

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = \frac{-T\left[(1-2\nu) - 3\alpha^2\xi^2 + 2(1+\nu)\alpha^3\xi^3\right]}{3(1-2\nu)(1-\alpha^2)\xi^3},\ 1 < \xi < 1/\alpha$$

Подстановка $\xi = 1$, приводит к решению S^e, U^e на границе упруго-пластической области:

$$\alpha = \frac{c}{c_d},\ c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}},\ \xi = \frac{r}{ct}$$

$$U^e = U\big|_{\xi=1} = \frac{T(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{Y}{2\mu},$$

$$S^e = S\big|_{\xi=1} = \frac{2T}{3}\left[1 + \frac{(1+\nu)\alpha^2}{(1-2\nu)(1+\alpha)}\right] = \frac{2T}{3} + \frac{Y}{\mu}\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)},$$

Полученные решения используются в качестве граничных условий для замыкания системы уравнений (8).

2.8. Получить аналитическое решение задачи в предположении несжимаемости среды в области пластического течения

В случае **несжимаемой среды** напряжения в **пластической области** описываются согласно условию Треска:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = Y$$

Полагая $\dfrac{dS}{d\xi} = 0$ или $\dot{\theta} = 0$, система (8) примет вид:

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{2U}{\xi} = 0,$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{2d\xi}{\xi}, \quad U\Big|_{\xi=\varepsilon_0} = \varepsilon_0$$

$$U = \frac{C_1}{\xi^2}, \Rightarrow C_1 = \varepsilon_0^3,$$

$$U(\xi) = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2}$$

При известной зависимости скорости от безразмерной координаты рассмотрим уравнение для безразмерного напряжения

$$\frac{dS}{d\xi} + \frac{2T}{\xi} = \beta^2(\xi - U)\frac{dU}{d\xi}$$

Полагаем $1 - S + \dfrac{2}{3}T \approx 1$, считая $S << 1$, $T << 1$ или $\sigma_r << K$, $Y << K$

$$\beta = \frac{c}{c_p}, \; S = \frac{\sigma_r}{K}, \; T = \frac{Y}{K},$$

$$U = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2}, \quad \frac{dU}{d\xi} = \left(-\frac{2\varepsilon_0^3}{\xi^3}\right),$$

$$\frac{dS}{d\xi} = -\frac{2T}{\xi} + \beta^2\left(\xi - \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2}\right)\left(-\frac{2\varepsilon_0^3}{\xi^3}\right) = -\frac{2T}{\xi} + \beta^2\left(-2\frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2} + \frac{2\varepsilon_0^6}{\xi^5}\right),$$

$$S^p = -2T\ln\xi + \frac{2\beta^2\varepsilon_0^3}{\xi} - \frac{\beta^2\varepsilon_0^6}{2\xi^4} + C_2,$$

Константу интегрирования C_2 найдем из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$S^p\Big|_{\xi=1} = S^e\Big|_{\xi=1}$$

2.9. Получить аналитическое решение задачи в предположении несжимаемости среды в области упругого деформирования

Получим **упругое решение** (в перемещениях). Выполним замену переменных:

$$\tilde{u} = \frac{u}{ct},\ \xi = \frac{r}{ct},\ r = \xi ct,\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{r}{ct^2}$$

Из закона сохранения массы (уравнения неразрывности, в данном случае – условия несжимаемости)

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2\frac{\tilde{u}}{\xi} = 0,$$

следует ОДУ первого порядка для безразмерного перемещения (с разделяющимися переменными)

$$\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = -2\frac{d\xi}{\xi}$$

Решение этого уравнения

$$\tilde{u} = \frac{A}{\xi^2}$$

содержит константу интегрирования A, которая определяется из граничного условия (критерия текучести) при $\xi = 1$:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \overset{\theta=0}{=} 6\mu\frac{u}{r},\ E = 2(1+\nu)\mu \overset{\nu=0.5}{=} 3\mu$$

– из условия упругости и несжимаемости, условия пластичности $\sigma_r - \sigma_\theta = Y$, следует зависимость безразмерных перемещений $\tilde{u}(\xi)$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2E\frac{u}{r} = 2E\frac{\tilde{u}}{\xi},\ \tilde{u} = \frac{A}{\xi^2},\ 2E\frac{A}{\xi^3}\bigg|_{\xi=1} = Y \Rightarrow A = \frac{Y}{2E},$$

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{Y}{6\mu\xi^2} = \frac{Y}{2E\xi^2}$$

Скорость на упруго-пластической границе:

$$U(\xi) = \frac{\varepsilon_0^3}{\xi^2},\ U = \frac{\upsilon}{c}\ \text{(пластичность)}$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{ct},\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial\left(\frac{u}{ct}\right)}{\partial t}\cdot\frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}\cdot ct - uc}{c^2t^2}\right)\cdot\left(-\frac{ct^2}{r}\right) = \left(t\frac{\partial u}{\partial t} - u\right)\left(-\frac{1}{\xi ct}\right) \Rightarrow$$

$$\xi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \left(\frac{u}{ct} - \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Rightarrow\ \upsilon = \frac{\partial u}{\partial t} = c\left(\tilde{u} - \xi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\right),\ \tilde{u} = \frac{Y}{2E\xi^2},$$

$$\frac{\upsilon}{c} = \tilde{u} - \xi\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \left(\frac{Y}{2E\xi^2} + \xi\frac{Y}{E\xi^3}\right)\bigg|_{\xi=1} = \frac{3}{2}\frac{Y}{E}\ \text{- упругость},\ \frac{\upsilon}{c}\bigg|_{\xi=1} = \frac{V_0^3}{c^3}\ \text{- пластичность}$$

$$\frac{Y}{2\mu}=\left(\frac{V_0}{c}\right)^3,\ c=\left(\frac{2\mu}{Y}\right)^{1/3}V_0 \text{ или } \frac{3}{2}\frac{Y}{E}=\left(\frac{V_0}{c}\right)^3,\ c=\left(\frac{2}{3}\frac{E}{Y}\right)^{1/3}V_0$$

скорость фронта пластической волны в несжимаемой среде

Уравнение движения преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+2\frac{(\sigma_r-\sigma_\theta)}{r}=-\rho\left(\frac{D\upsilon}{Dt}\right)=-\rho\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right),$$

$$\upsilon=\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial\upsilon}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}\Rightarrow\frac{D\upsilon}{Dt}=\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\left(\tilde{u}-\xi\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right),$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{1}{\left(-\frac{r}{ct^2}\right)}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}\cdot\left(-\frac{ct^2}{\xi ct}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}=-\frac{\xi}{t}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c\frac{\partial\left(\tilde{u}-\xi\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)}{\partial t}=c\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right)=c\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(\xi\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{c}{t}\xi^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{D\upsilon}{Dt}=\frac{c}{t}\xi^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+c\left(\tilde{u}-\xi\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)\left(-\frac{\xi}{t}\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{1}{ct}\frac{d\sigma_r}{d\xi}+\frac{4E}{\xi ct}\frac{\tilde{u}}{\xi}=-\rho\frac{c}{t}\left(\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2}-\left(\tilde{u}-\xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right)\cdot\xi\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2}\right)$$

$$\frac{dS}{d\xi}+\frac{4E}{K}\frac{\tilde{u}}{\xi}=-\beta^2\left(\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2}-\left(\tilde{u}-\xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right)\cdot\xi\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2}\right),\ \text{подставим } \tilde{u}=\frac{Y}{2E\xi^2}$$

$$S=\frac{\sigma_r}{K}=\frac{\sigma_r}{\rho c_p^2},\ \frac{d\tilde{u}}{d\xi}=-\frac{Y}{E\xi^3},\ \frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2}=\frac{3Y}{E\xi^4},$$

$$\frac{\partial S}{\partial\xi}+\frac{2Y}{K\xi^4}=-\beta^2\left(\frac{3Y}{E\xi^2}-\frac{9}{2}\frac{Y^2}{E^2\xi^5}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\xi}=-\frac{2T}{\xi^4}-\beta^2\frac{3Y}{E\xi^2}+\beta^2\frac{9}{2}\frac{Y^2}{E^2\xi^5}$$

$$S^e=\frac{2T}{3\xi^3}+\beta^2\frac{3Y}{E\xi}-\beta^2\frac{9}{8}\frac{Y^2}{E^2\xi^4}+B,\ B=const=0,\ \Leftarrow\ S^e=0,\ \xi=\infty$$

Напряжение на упруго-пластической границе $\xi=1$:

$$S^p=-2T\ln\xi+2\beta^2\frac{\varepsilon_0}{\xi}-\frac{\beta^2\varepsilon_0^6}{2\xi^4}-\beta^2\frac{9}{8}\frac{Y^2}{E^2\xi^4}+C_2,\xi=1,\ S^e=S^p,\ S=\frac{\sigma_r}{K}$$

$$\frac{2T}{3}+\beta^2\frac{3Y}{E}-\beta^2\frac{9}{8}\frac{Y^2}{E^2}=2\beta^2\varepsilon_0^3-\frac{\beta^2}{2}\varepsilon_0^6+C_2,\ \varepsilon_0^3=\frac{3Y}{2E},\ \varepsilon_0^6=\frac{9Y^2}{4E^2},\ \Rightarrow C_2=\frac{2}{3}T$$

С учетом параметров интегрирования напряжение в пластической области примет следующий вид:

$$S^p(\xi)=\frac{2}{3}T-2T\ln\xi+2\beta^2\frac{\varepsilon_0^3}{\xi}-\frac{\beta^2\varepsilon_0^6}{2\xi^4}$$

Безразмерное напряжение на границе полости

$$S^p(\xi=\varepsilon_0)=\frac{2}{3}T-\frac{2}{3}T\ln\varepsilon_0^3+2\beta^2\varepsilon_0^2-\frac{\beta^2\varepsilon_0^2}{2}=\frac{2}{3}T\left(1+\ln\left(\frac{2E}{3Y}\right)\right)+\frac{3}{2}\frac{V_0^2}{c_p^2}$$

Размерное напряжение на границе полости

$$\sigma_r^p(\xi=\varepsilon_0)=\frac{2}{3}Y\left(1+\ln\left(\frac{2E}{3Y}\right)\right)+\frac{3}{2}\rho_0V_0^2$$

2.10. Решить численно краевую задачу для системы двух ОДУ первого порядка, используя метод стрельбы и метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности

В систему уравнений входит неизвестный параметр c – скорость фронта на ударной волне. Нахождение неизвестной скорости c проводится итерационно методом стрельбы (**Приложение 1**) до выполнения с заданной точностью граничного условия $|U - \varepsilon| < \delta$. На каждой итерации метода стрельбы применяется метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности (**Приложение 2**) в области изменения автомодельной переменной ξ от границы упругопластического раздела при $\xi=1$ до границы полости $\xi=\varepsilon$.

Компьютерная программа, реализующая указанный алгоритм, приведена в **Приложении 3**. Упругие и прочностные параметры материала приведены в таблице (**Приложение 4**). Рассмотрим материал – сталь 3.

материал	E, кгс/см^2	ν	ρ, г/см^3	K, кгс/см^2	μ, кгс/см^2	Y, кгс/см^2
сталь 3	2080000	0.3	7.8	1733333	800000	2400

Скорость распространения упругой волны c_d=599.1 см/мс, скорость расширения полости примем равной V_0=60 и 6 см/мс, что составляет 10 и 1 % от величины скорости c_d.

2.11. Сравнить аналитическое решение в предположении несжимаемости среды с численным решением в полной постановке для двух скоростей расширения полости, построив графики скоростей и напряжений в размерном и безразмерном виде

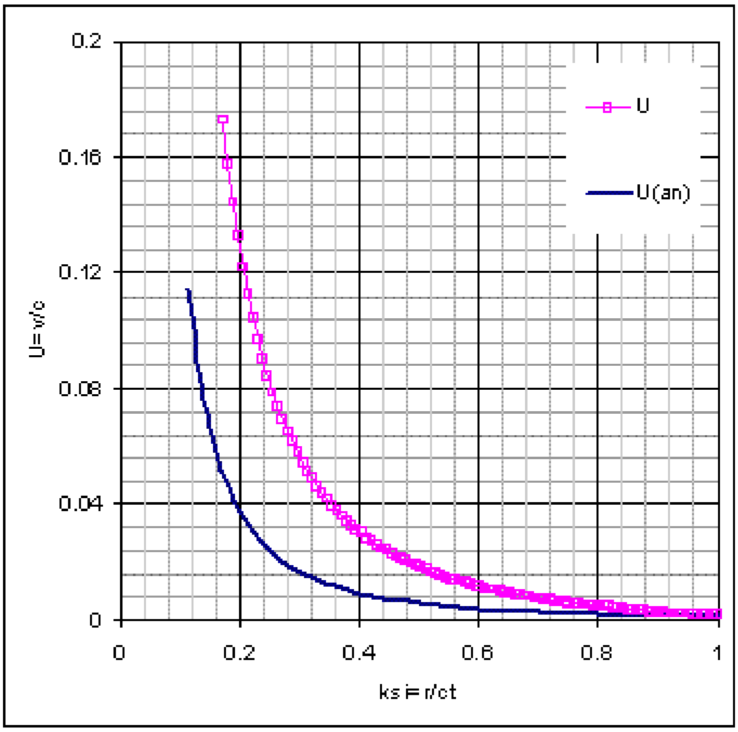

Рис. 4. Автомодельное решение - зависимость безразмерной скорости от безразмерной координаты: аналитическое и численное решение

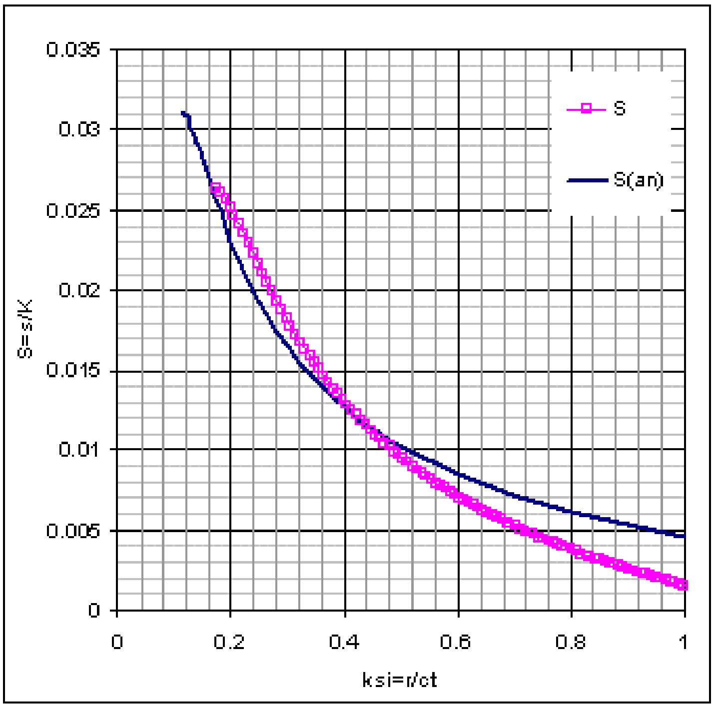

Рис. 4. Автомодельное решение - зависимость безразмерного напряжения от безразмерной координаты: аналитическое и численное решение

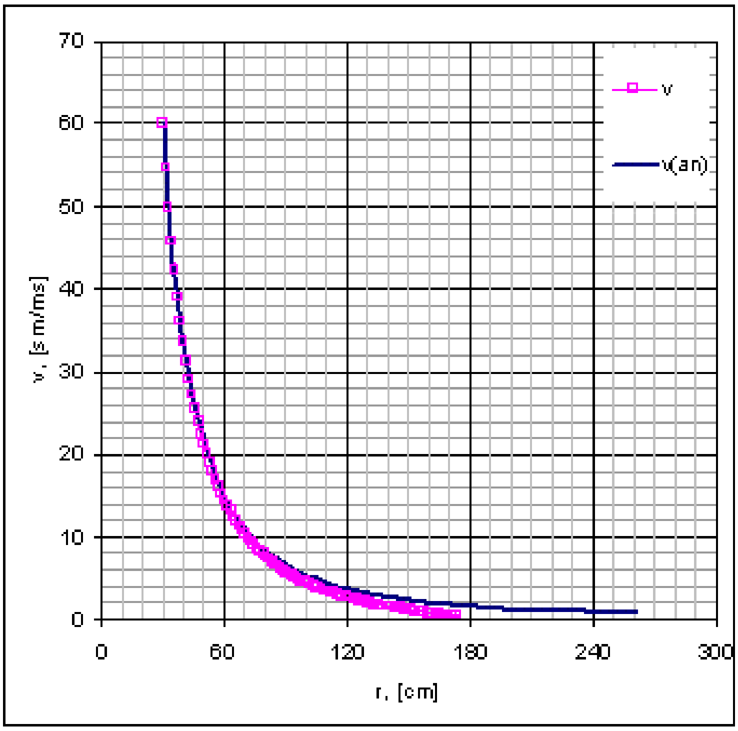

Рис. 5. Распределение радиальной компоненты вектора скорости вдоль координаты в момент времени 0.5 мс: аналитическое и численное решение

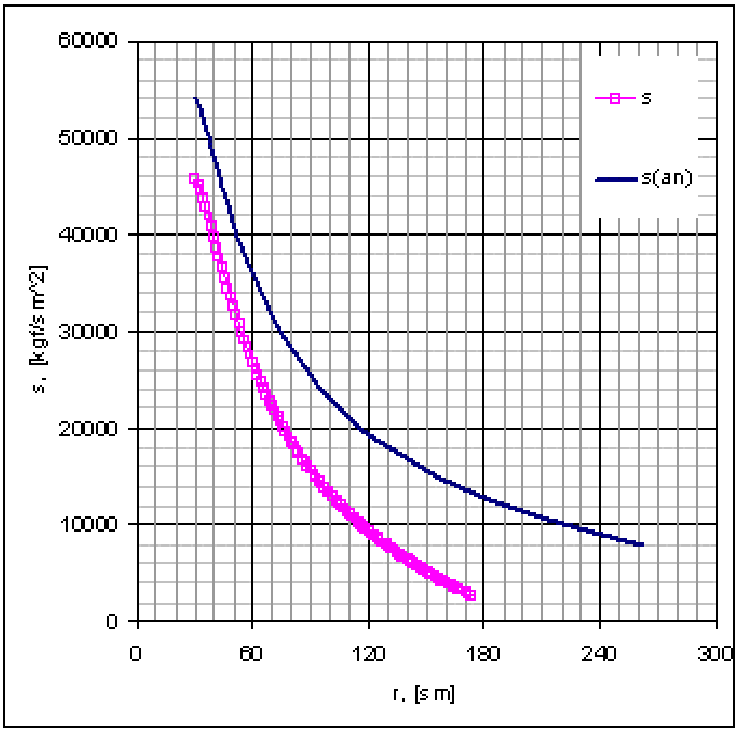

Рис. 6. Распределение радиальной компоненты тензора напряжений вдоль координаты в момент времени 0.5 мс: аналитическое и численное решение

Приложение 1

Метод стрельбы

Рассматривается [4] задача Коши вида:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = Y_0, \quad y(1) = Y_1, \end{cases} \tag{П-1.1}$$

с граничными условиями на обоих концах отрезка $0 \le x \le 1$, на котором надо найти решение *y=y(x)*.

Решение задачи (П-1.1) сводится к решению задачи (П-1.2), записанной в виде, удобном для численного решения:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = Y_0, \quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = tg\alpha, \end{cases} \tag{П-1.2}$$

где Y_0 – ордината точки (0, Y_0), из которой выходит интегральная кривая, α – угол наклона интегральной кривой к оси *Ox*.

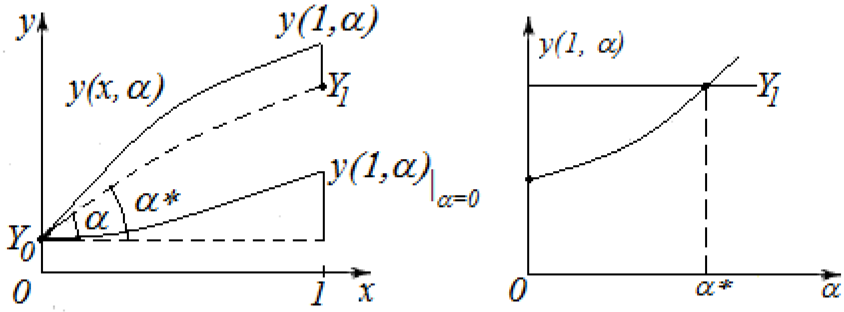

Рис. П-1. Графическое представление задачи Коши

При фиксированном Y_0 решение задачи (П-1.2) имеет вид $y=y(x, \alpha)$. При $x=1$ решение $y(x, \alpha)$ зависит только от α:

$$y(x,\alpha)|_{x=1} = y(1,\alpha).$$

Таким образом, задача Коши (П-1.1) заключается в следующем: найти такой угол $\alpha=\alpha*$, при котором интегральная кривая, выходящая из точки (0, Y_0) под углом а к оси абсцисс, попадает в точку (1, Y_1):

$$y(1,\alpha) = Y_1 \tag{П-1.3}$$

Следовательно, решение задачи Коши (П-1.1) сводится к решению уравнения (П-1.3) типа $F(\alpha) = 0$, где $F(\alpha) = y(1,\alpha) - Y_1$. Применяя к уравнению (П-1.3) метод половинного деления, рекуррентная формула для искомого угла *а* запишется следующим образом:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F(\alpha_n) - F(\alpha_{n-1})}(\alpha_n - \alpha_{n-1}), n = 1,2,\ldots$$

Процесс выполняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε: $|y(1,\alpha_n) - Y_1| < \varepsilon$.

Приложение 2

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

Рассматривается задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [5].

Пусть дана следующая система

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned} \qquad (\text{П-2.1})$$

Надо найти $y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad ..., \quad y_n = y_n(x)$, причем

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \qquad (\text{П-2.2})$$

Первоначально рассматривается простейший случай:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \qquad (\text{П-2.3})$$

При численном решении задача (П-2.1, П-2.2) или (П-2.3) сводится к поиску в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ приближенных значений $y_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n}$. Точки $x_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n}$ задают сетку, у которой $\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ - шаг сетки. Если шаг сетки постоянный и обозначить его $\Delta x_\kappa = h,$ то

$$x_\kappa = x_0 + \kappa h, \qquad \kappa = \overline{0, n}.$$

Наиболее известным и широко используемым методом Рунге-Кутты является метод, который представляется следующей формулой

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\ell_\kappa, \qquad \ell_\kappa = \frac{1}{6}(\ell_\kappa^{(1)} + 2\ell_\kappa^{(2)} + 2\ell_\kappa^{(3)} + \ell_\kappa^{(4)}),$$

$$\ell_\kappa^{(1)} = f(x_\kappa, y_\kappa), \qquad \ell_\kappa^{(2)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(1)}\right),$$

$$\ell_\kappa^{(3)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(2)}\right), \qquad \ell_\kappa^{(4)} = f(x_\kappa + h, y_\kappa + h\ell_\kappa^{(3)}).$$

Метод, в соотношении с задачами о вычислении интеграла

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx, \qquad x_0 \le x \le \mathrm{X},$$

порожден формулой Симпсона

$$y_{\kappa+1}=y_\kappa+\frac{h}{6}(f(x_\kappa)+4f(x_\kappa+1/2)+f(x_{\kappa+1})).$$

Этот метод, как и формула Симпсона, имеет четвертый порядок точности.

Рассмотренные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка можно применять и к решению задач Коши для систем. Форма записи претерпевает минимальные изменения:

- числа y_κ заменяем на векторы $\vec{y}_\kappa=(y_{1\kappa},y_{2\kappa},...,y_{n\kappa})^{\mathrm{T}}$;

- функции f заменяем на вектор-функции $\vec{f}$ и т.д.

В векторной форме задача Коши записывается следующим образом:

$$\frac{d\,\vec{y}}{d\,x}=\vec{f}(x,\vec{y}), \quad \vec{y}(x_0)=\vec{y}_0.$$

В случае дифференциального уравнения n-ого порядка

$$y^{(n)}=F(x,\,y,\,y',\,y^{(2)},...,\,y^{(n-1)}),$$

задача сводится к решению системы:

$$\frac{dy}{dx}=y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2,$$

....

$$\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,...,y_{n-1}).$$

Основные формулы выглядят следующим образом

$$\vec{y}_{\kappa+1}=\vec{y}_\kappa+h\vec{\ell}_\kappa,$$

$$\vec{\ell}_\kappa=\frac{1}{6}(\vec{\ell}_\kappa^{(1)}+2\vec{\ell}_\kappa^{(2)}+2\vec{\ell}_\kappa^{(3)}+\vec{\ell}_\kappa^{(4)}),$$

$$\vec{\ell}_\kappa^{(1)}=\vec{f}(x_\kappa,\vec{y}_\kappa),$$

$$\vec{\ell}_\kappa^{(2)}=\vec{f}(x_{\kappa+1/2},\vec{y}_\kappa+\frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(1)}),$$

$$\vec{\ell}_\kappa^{(3)}=\vec{f}(x_{\kappa+1/2},\vec{y}_\kappa+\frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(2)}),$$

$$\vec{\ell}_\kappa^{(4)}=\vec{f}(x_{\kappa+1},\vec{y}_\kappa+h\vec{\ell}_\kappa^{(3)}).$$

Для случая системы двух уравнений первого порядка метод Рунге-Кутты определяется следующими выражениями:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad y(x_0) = y_0,$$
$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \qquad z(x_0) = z_0$$

$$l^{(1)} = f(x_k, y_k, z_k) \qquad t^{(1)} = g(x_k, y_k, z_k)$$
$$l^{(2)} = f\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2} l^{(1)}, z_k + \frac{h}{2} t^{(1)}\right) \qquad t^{(2)} = g\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2} l^{(1)}, z_k + \frac{h}{2} t^{(1)}\right)$$
$$l^{(3)} = f\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2} l^{(2)}, z_k + \frac{h}{2} t^{(2)}\right) \qquad t^{(3)} = g\left(x_{k+1/2}, y_k + \frac{h}{2} l^{(2)}, z_k + \frac{h}{2} t^{(2)}\right)$$
$$l^{(4)} = f\left(x_{k+1}, y_k + hl^{(3)}, z_k + ht^{(3)}\right) \qquad t^{(4)} = g\left(x_{k+1}, y_k + hl^{(3)}, z_k + ht^{(3)}\right)$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(l^{(1)} + 2l^{(2)} + 2l^{(3)} + l^{(4)}\right) \qquad z_{k+1} = z_k + \frac{h}{6}\left(t^{(1)} + 2t^{(2)} + 2t^{(3)} + t^{(4)}\right)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Приложение 3

Текст программы на языке C++

```
// stdafx.h : include file for standard system include files,
// or project specific include files that are used frequently, but
// are changed infrequently
#include <stdio.h>

// TODO: reference additional headers your program requires here
#include <math.h>
#include <iostream>
#include <iomanip>


// RK.cpp : Defines the entry point for the console application.
//
#include "stdafx.h"
using namespace std;

const long double Ro= 7.8;
const long double E = 2.08e6;
const long double Nu= 0.3;
const long double Y = 2400.0;
const long double K = E/3.0/(1-2.0*Nu);
const long double G = E/2.0/(1+Nu);
const long double Cd= sqrt((K+4.0/3.0*G)/Ro);
const long double Cp= sqrt(K/Ro);
const long double T = Y/K;
```

```
const long double V0= 6.0;
const long double J = Ro*V0*V0/Y;

long double C,E0,alpha, beta;

long double f(long double x, long double U, long double S)
{
     long double Tet=S-2.0*T/3.0;
     long double b2=beta*beta;
     long double znum;
     znum=b2*(x-U)*(x-U)-1.0;
     return (2.0*U/x+2.0*T*(x-U)/x/(1.0-Tet))/znum;

}
long double g(long double x, long double U, long double S)
{
     long double Tet=S-2.0*T/3.0;
     long double b2=beta*beta;
     long double znum;
     znum=b2*(x-U)*(x-U)-1.0;
     return (2.0*T/x+2.0*b2*(x-U)*U/x/(1.0-Tet))/znum;
}

int RK(int N, long double a, long double b, long double *x, long
double *y, long double *z, long double Y0, long double Z0);

int main(int argc, char* argv[])
{
     cout<<"Hello, World!"<<endl;
     const int N=200;
     const long double a=1.0; long double b;
     long double x[N+1],U[N+1],S[N+1];
     long double U0, S0, C0;  int i;
     C0=pow(2.0*E/Y/3.0,1.0/3.0)*V0;
     //C=346.807; V0=60;
     //C=44.62279; V0=6;
     C=45;
     alpha=C/Cd; beta=C/Cp;

     E0=V0/C;  b=E0;
     U0=Y/2.0/G; S0=2.0*T/3.0+Y/G*alpha*alpha/(1+alpha);

     RK(N,a,b,x,U,S,U0,S0);
     cout<<endl;
     cout<<setw(11)<<setprecision(5)<<C0;
     cout<<setw(11)<<setprecision(5)<<C;
     cout<<setw(15)<<setprecision(7)<<E0*C;
     cout<<setw(15)<<setprecision(7)<<U[N]*C;
     cout<<setw(11)<<setprecision(7)<<S[N]*K;
     cout<<setw(11)<<setprecision(7)<<(V0-U[N]*C)/V0*100;
     cout<<endl;

     double Time=0.3;
```

```
	cout.setf(ios::scientific);
	for(i=0;i<N+1;i+=1);
	{
		cout<<setw(4)<<i<<"  ";
		cout<<setw(5)<<setprecision(5)<<x[i];//*C*Time;
		cout<<setw(15)<<setprecision(5)<<U[i];//*C;
		cout<<setw(15)<<setprecision(5)<<S[i];//*K;
		cout<<endl;
	}

	return 0;
}

int RK(int N, long double a, long double b, long double *x, long
double *y, long double *z, long double Y0, long double Z0)
{
	long double h,h2;
	h=(b-a)/N;     h2=h/2.0;
	int i;
	for(i=0; i<N+1; i++)
		x[i]=a+i*h;
	y[0]=Y0; z[0]=Z0;
	long double lf1,lf2,lf3,lf4,lf, lg1,lg2,lg3,lg4,lg;
	for(i=0;i<N;i++)
	{
		lf1=f(x[i],y[i],z[i]);
lg1=g(x[i],y[i],z[i]);
		lf2=f(x[i]+h2,y[i]+h2*lf1,z[i]+h2*lg1);
lg2=g(x[i]+h2,y[i]+h2*lf1,z[i]+h2*lg1);
		lf3=f(x[i]+h2,y[i]+h2*lf2,z[i]+h2*lg2);
lg3=g(x[i]+h2,y[i]+h2*lf2,z[i]+h2*lg2);
		lf4=f(x[i]+h, y[i]+h *lf3,z[i]+h *lg3); lg4=g(x[i]+h
,y[i]+h *lf3,z[i]+h *lg3);
		lf=(lf1+2.0*lf2+2.0*lf3+lf4)/6.0;
lg=(lg1+2.0*lg2+2.0*lg3+lg4)/6.0;
		y[i+1]=y[i]+h*lf;
z[i+1]=z[i]+h*lg;
	}
	return 0;
}
```

Приложение 4

Параметры, характеризующие сопротивление упругому и пластическому деформированию материалов [6, 7]

	Материал	E	G	ν	ρ	$\sigma_{0.2}$ (σ_B)
		Модуль Юнга, кгс/мм^2	Модуль сдвига, кгс/мм^2	Коэффициент Пуассона	Плотность, г/см^3	Предел текучести (прочности), кгс/мм^2
1.	Алюминий	7100	2650	0.34	2.698	2 (7.3)
2.	Бериллий	30000	14500	0.034	1.840	23 (32)
3.	Ванадий	12600	4700	0.36	6.100	9.1 (19.7)
4.	Висмут	3400	1200	0.33	9.840	(2.5)
5.	Вольфрам	40000	15500	0.29	19.24	76 (100)
6.	Гафний	14000	3100	0.35	13.10	38.4 (54)
7.	Железо	20500	7800	0.314	7.860	17 (29)
8.	Золото	7700	2700	0.42	19.299	13 (22)
9.	Индий	1050	350	0.46	7.310	0.3 (1.3)
10.	Иридий	51700	21000	0.26	22.420	8.8 (49)
11.	Кадмий	5300	1940	0.30	8.648	1 (7.5)
12.	Кобальт	20000	7000	0.428	8.80	31.4 (87.2)
13.	Магний	4250	1630	0.3	1.740	9.8 (17.6)
14.	Медь	13200	4200	0.35	8.940	6 (22.5)
15.	Молибден	32200	11900	0.335	10.218	27.5 (38.2)
16.	Никель	20000	7500	0.333	8.700	8 (40)
17.	Ниобий	11000	3700	0.486	8.400	24.8 (33.3)

		E	G	ν	ρ	$\sigma_{0.2}$ (σ_B)
18.	Олово ОВЧ000	5500	1700	0.33	7.290	0.6 (1.44)
19.	Осмий	56570	22200	0.25	22.500	100
20.	Палладий	11500	4500	0.39	12.160	5.6 (18.1)
21.	Платина	17100	6000	0.38	21.50	6 (13.7)
22.	Родий	38000	15000	0.267	12.440	7 (41.2)
23.	Рутений	41400	16300	0.3	12.060	49
24.	Свинец	1600	600	0.45	11.340	1.1 (1.4)
25.	Серебро	7440	2710	0.37	10.490	3.9 (15.7)
26.	Тантал	18600	7000	0.329	16.600	18 (41.3)
27.	Титан	10800	4300	0,36	4.500	33.3 (46.1)
28.	Хром	24000	9000	0.333	7.160	36.3 (41.2)
29.	Цинк	9900	3700	0.338	7.130	8.3 (13.6)
30.	Цирконий	9760	3630	0.344	6.500	7.8 (21.6)

Сплавы

	Материал	E, кгс/мм^2	G, кгс/мм^2	ν	ρ, г/см^3	$\sigma_{0.2}$ (σ_B), кгс/мм^2
31.	Бронза	10600	4400	0.31	8.800	20 (38)
32.	Д16	7200	2750	0.309	2.600	36 (46)
33.	Инвар	14000	5600	0.25	8.110	78
34.	Константан	16600	6200	0.33	8.880	43
35.	Латунь	10200	3700	0.378	8.500	15 (38)
36.	Манганин	12600	4700	0.33	8.500	14 (50)
37.	Нейзильбер	14000	4000	0.37	8.500	(42.5)
38.	Чугун	7500	3000	0.25	6.800	7 (10)

Литература

1. Forrestal M.J, Luk V.K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid. ASME Journal of Applied Mechanics. 1988. Vol. 55. P. 275-279.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Kachanov1969ru.djvu
3. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А. Решение одномерной задачи о расширении сферической полости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 46 с. – Фонд образовательных электронных ресурсов. Рег. № 809.14.06. http://www.unn.ru/books/met_files/Kotov.pdf
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
5. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем. Учебно-методическая разработка для студентов механико-математического факультета / Сост. Л.А.Игумнов, В.Л.Котов, С.Ю.Литвинчук, Д.Т.Чекмарев. – Н. Новгород: ННГУ, 2000. – 38 с.
6. Физические величины: Справочник/ А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под. ред. И. С. Григорьева, Е. 3. Мейлихова. – М.; Энергоатомиздат, 1991. - 1232 с.
7. Механические и технологические свойства металлов: Справ, изд. Бобылев А.В. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Металлургия, 1987. 208 с.

Василий Леонидович **Котов**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ (ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА)

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01