

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

ПОТОКИ НА ПРЯМОЙ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
механико-математического факультета для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению 010101 “Математика”

Нижний Новгород
2013

УДК 517.9(07)
ББК В161.6я7
П-65

Потоки на прямой в приложениях. Составители: **Починка О.В., Романов А.А.** Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 65 с.

Рецензент: к. ф-м. н., доц. **Е.Я. Гуревич**

Это пособие предназначено для студентов естественнонаучных специальностей. Его цель показать, как дифференциальные уравнения первого порядка и их бифуркации естественно появляются в окружающем нас мире. Уникальной особенностью пособия является его акцент на приложениях. Они включают в себя механические колебания, лазеры, вспышки насекомых, химические генераторы и др. В каждом случае, научные основы объясняются на элементарном уровне и точно описываются математически. Необходимым условием успешного усвоения материала является знание основ дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной, рядов Тейлора и дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. В основу учебно-методического пособия положены материалы книги [7].

Ответственный за выпуск: председатель методической комиссии механико-математического факультета ННГУ, к. ф-м. н., доц.
Н.А. Денисова

УДК 517
ББК В161.6

Оглавление

Введение	4
1 Потоки на прямой	6
1.1. Геометрический подход	6
1.2. Неподвижные точки и устойчивость	8
1.3. Рост популяции	10
1.4. Линейный анализ устойчивости	12
1.5. Существование и единственность	13
1.6. Невозможность колебаний	14
1.7. Потенциал	16
1.8. Решение уравнений на компьютере	17
2 Бифуркации	20
2.1. Бифуркация седло-узел	20
2.2. Транскритическая бифуркация	24
2.3. Лазерный порог	27
2.4. Бифуркация раздвоения — трезубец (вилка)	29
2.5. Бусинки на вращающемся обруче	36
2.6. Несовершенные бифуркации и катастрофы	39
2.7. Вспышки насекомых	43
Упражнения	50

Введение

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых прикладных разделов современной математики. Характеризуя математику как метод проникновения в тайны природы, можно сказать, что основным путем применения этого метода является формирование и изучение математических моделей реального мира. Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, математик получает сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Для составления математической модели в виде дифференциаль-

ных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени.

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию. Одними из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления решения.

Итак, первая черта теории дифференциальных уравнений — ее тесная связь с приложениями. Другими словами, можно сказать, что теория дифференциальных уравнений родилась из приложений. В этом своем разделе — теории дифференциальных уравнений — математика прежде всего выступает как неотъемлемая часть естествознания, на которой основывается вывод и понимание количественных и качественных закономерностей, составляющих содержание наук о природе. Именно естествознание является для теории дифференциальных уравнений замечательным источником новых проблем, оно в значительной мере определяет направление их исследований, дает правильную ориентацию этим исследованиям.

Глава 1

Потоки на прямой

В этом разделе мы будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = f(x).$$

Здесь $x(t)$ — вещественная функция времени t и $f(x)$ — гладкая вещественная функция x . Мы будем называть такие уравнения *одномерными или системами первого порядка*.

1.1. Геометрический подход

Картинки зачастую бывают более полезными, чем формулы для анализа нелинейных систем. Проиллюстрируем это на простом примере, заодно введем один из основных методов динамики — интерпретацию дифференциальных уравнений векторными полями. Рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = \sin x \quad (1)$$

Это одно из немногих нелинейных уравнений, которое можно разрешить. Мы разделим переменные, а затем проинтегрируем:

$$t = -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x \right| + c. \quad (2)$$

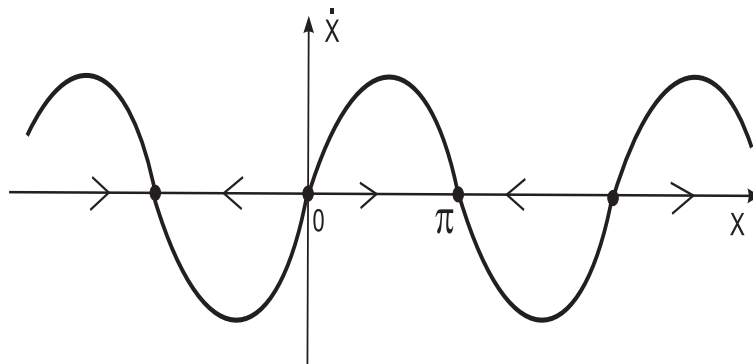


Рис. 1.1: Метод векторного поля

Этот результат является точным, но формула (2) ничего не дает для интерпретации, в отличие от ясного и простого графического анализа уравнения (1), показанного на рисунке 1.1.

Мы подразумеваем, что t это время, x — воображаемая частица, движущаяся по прямой, а \dot{x} — скорость этой частицы. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x} = \sin x$ представляет собой векторное поле на прямой: оно определяет вектор скорости \dot{x} в каждой точке x . Чтобы изобразить векторное поле, удобно откладывать вектор \dot{x} от точки x , при этом вектор направлен вправо, если $\dot{x} > 0$ и влево, если $\dot{x} < 0$.

Точки, где $\dot{x} = 0$ называются *неподвижными*. На рисунке 1.1 существуют два вида неподвижных точек: *стоки*, куда поток стекает и *источники*, откуда он вытекает. Вооружившись иллюстрацией 1.1, легко построить (см. рисунок 1.2) решения дифференциального уравнения (1) в плоскости (t, x) .

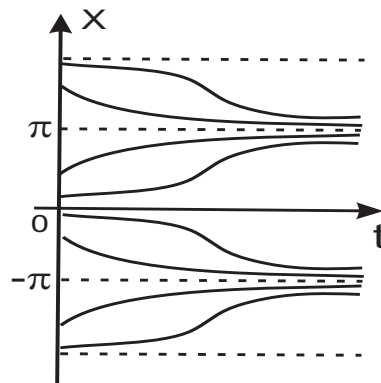


Рис. 1.2: Решение дифференциального уравнения (1)

1.2. Неподвижные точки и устойчивость

Идеи предыдущего раздела могут быть распространены на любую одномерную систему $\dot{x} = f(x)$. Нужно просто построить график функции $f(x)$, а затем использовать его, чтобы наметить векторное поле на прямой (см. рисунок 1.3). Чтобы найти решение с произвольным начальным условием x_0 , мы разместим воображаемую частицу в точке x_0 и проследим за ее движением вдоль векторного поля с течением времени. Точка движется вдоль оси x в соответствии с некоторой функцией $x(t)$, которая называется *траекторией*, проходящей через точку x_0 и является решением дифференциального уравнения с начальным условием x_0 . Качественная картина поведения всех траекторий системы называется *фазовым портретом*. Внешний вид фазового портрета контролируется неподвижными точками x_* , определяемыми уравнением $f(x_*) = 0$. С точки зрения исходного дифференциального уравнения, неподвижные точки представляют собой постоянные решения $x(t) = x_*$ при любом времени t или, так называемые, *состояния равновесия*. Решение называется *устойчивым*, если все достаточно близкие траектории стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$, в противном случае, оно называется неустойчивым.

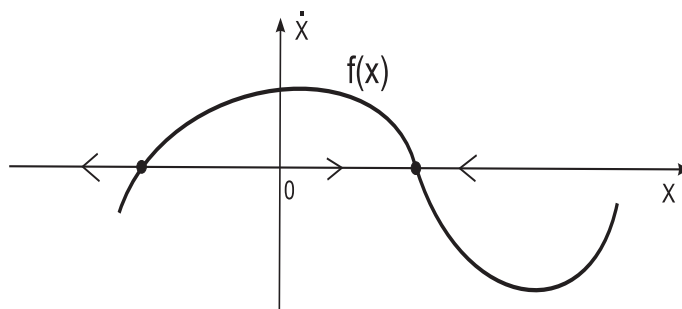


Рис. 1.3: Метод векторного поля

Пример 1 Рассмотрим электрическую схему, изображенную на рисунке 1.4. Резистор¹ R и конденсатор² C подключены последовательно с батареей постоянного тока постоянного напряжения V_0 . Предположим, что переключатель замкнут в момент времени $t = 0$ и что нет заряда на конденсаторе на начальном этапе. Обозначим через $Q(t)$ заряд на конденсаторе в момент времени $t > 0$. Постройте график функции $Q(t)$.

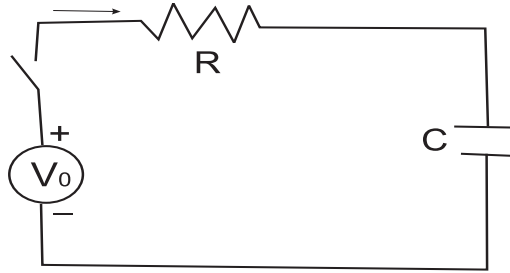


Рис. 1.4: Электрическая цепь

Решение: Напишем уравнения цепи. Из схемы цепи следует, что общее падение напряжения должно быть равно нулю, поэтому $-V_0 + RI + \frac{Q}{C} = 0$, где I — ток, протекающий через резистор. Этот ток вызывает накопление заряда на конденсаторе со скоростью $\dot{Q} = I$. Отсюда $-V_0 + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$ или $\dot{Q} = f(Q) = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{C}$. График функции $f(Q)$ представляет собой прямую линию с отрицательным наклоном (см. рисунок 1.5 (a)). Соответствующее векторное поле имеет неподвижную точку Q_* , где $f(Q_*) = 0$, что происходит в точке $Q_* = CV_0$.

¹Резистор (от англ. resistor — сопротивляюсь) — пассивный элемент электрической цепи, в идеале характеризуемый только сопротивлением электрическому току, то есть для идеального резистора в любой момент времени должен выполняться закон Ома для участка цепи: мгновенное значение напряжения на резисторе пропорционально току проходящему через него $U(t) = R \cdot I(t)$.

²Конденсатор (от лат. condensare — уплотнять, сгущать) — двухполюсник с определённым значением ёмкости C ; значения напряжения на конденсаторе прямо пропорционально заряду на нем и обратно пропорционально его ёмкости $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$.

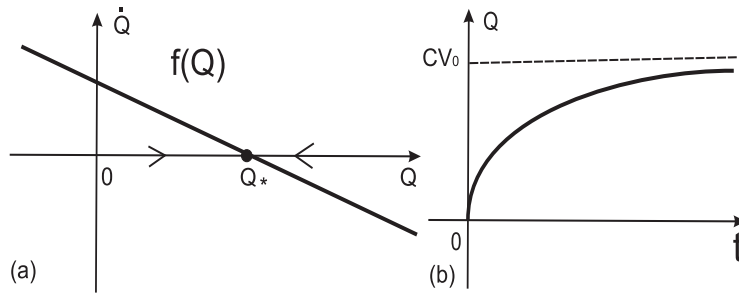


Рис. 1.5: Иллюстрация к упражнению 1

Поток всегда стремится к Q_ — это устойчивая неподвижная точка, а $Q(t)$ — его траектория, проходящая через начало координат (см. рисунок 1.5 (b)).*

1.3. Рост популяции

Простейшая модель роста популяции организмов $\dot{N} = r \cdot N$, где $N(t)$ — численность населения в момент времени $t > 0$ и r — темп ее роста. Эта модель предсказывает экспоненциальный рост: $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$, где N_0 — численность населения в момент времени $t = 0$. Конечно, такой экспоненциальный рост не может продолжаться вечно. Для моделирования перенаселенности и ограниченности ресурсов биологи и демографы часто предполагают, что скорость роста на душу населения $\frac{\dot{N}}{N}$ уменьшается, когда N становится достаточно большим (см. рисунок 1.6 (а)). Для малых N темп роста равен r , как и раньше. Тогда для численности населения, большей, чем определенное значение K (пропускная способность), темп роста на самом деле становится отрицательным — смертность превышает рождаемость.

Математически удобный способ включения этих идей заключается в предположении, что скорость роста на душу населения $\frac{\dot{N}}{N}$ линейно уменьшается с N (см. рисунок 1.6 (b)). Это приводит к *логистическому уравнению*

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

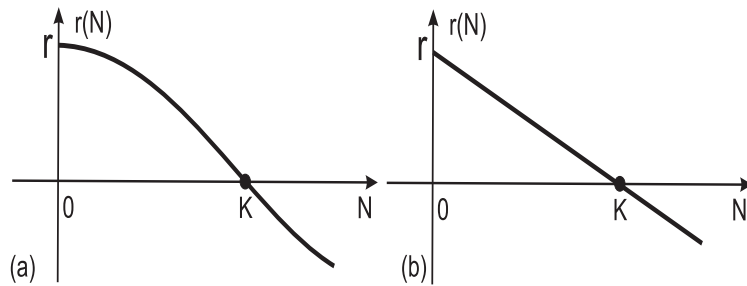


Рис. 1.6: Темпы роста популяции

впервые предложенному для описания роста человеческой популяции Ферхюльстом (Verhulst) в 1838 году. Это уравнение может быть решено аналитически, но мы снова используем графический подход. Построив график функции \dot{N} в координатах (N, \dot{N}) , можно увидеть, что векторное поле выглядит следующим образом (см. рисунок 1.7 (а)). Отметим, что мы рассматриваем график только при $N \geq 0$, так как нет смысла думать об отрицательном населении. Неподвижные точки функции находятся в точках $N_* = 0$ и $N_* = K$, при этом $N_* = 0$ является неустойчивой неподвижной точкой и $N_* = K$ является устойчивой неподвижной точкой. Биологическая интерпретация неустойчивого равновесия $N_* = 0$: небольшое население будет расти экспоненциально быстро и убежит от $N_* = 0$. Для любой точки $0 < N_0 < K$ ее траектория стремится к K при $t \rightarrow \infty$. Поэтому население всегда стремится к пропускной способности. Единственным исключением является $N_0 = 0$, когда нет никого вокруг, чтобы начать воспроизведение, то и $N = 0$ для всех t . Рисунок 1.7 (а) также позволяет вывести качественную форму решения. Например, если $N_0 < \frac{K}{2}$, то график $N(t)$ является S-образным или сигмовидным, а если $\frac{K}{2} < N_0 < K$ или $N_0 > K$, то график подобен части экспоненты (см. рисунок 1.7 (б)).

Алгебраическую форму модели не следует понимать буквально. Модель можно рассматривать как руководство для населения, которое имеет тенденцию к росту от нуля до некоторого K . Лабораторные эксперименты, в которых колонии бактерий, дрожжей и других простейших организмов были выращены в условиях постоянного климата, продовольственного снабжения, а также отсутствия хищников, дали сигмо-

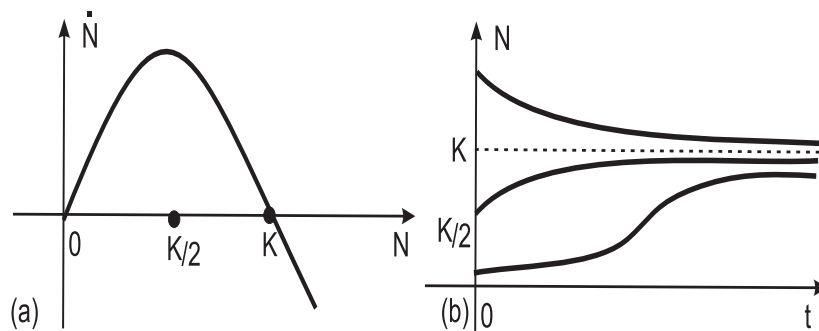


Рис. 1.7: Решения логистического уравнения

видную кривую роста. Ситуация была гораздо хуже с плодовыми мухами, жуками и другими организмами, которые имеют сложный жизненный цикл, включающий яйца, личинки, куколки и взрослых. Для этих организмов не наблюдалось асимптотического стремления к устойчивому состоянию равновесия, вместо этого численность населения давала стойкие колебания после начального периода логистического роста.

1.4. Линейный анализ устойчивости

До сих пор мы опирались на графические методы для определения устойчивости неподвижных точек. Аналитическая информация об устойчивости может быть получена путем линеаризации в окрестности неподвижной точки следующим образом. Пусть x_* — неподвижная точка уравнения $\dot{x} = f(x)$, то есть $f(x_*) = 0$. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_* : $f(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + o((x - x_*))$ или $f(x) \approx f'(x_*)(x - x_*)$. Линейное уравнение

$$\dot{x} = f'(x_*)(x - x_*)$$

называется *линеаризацией* дифференциального уравнения в точке x_* . Оно показывает, что возмущение растет в геометрической прогрессии, если $f'(x_*) > 0$ и убывает, если $f'(x_*) < 0$. Если $f'(x_*) = 0$, то линейного анализа недостаточно, чтобы определить устойчивость. Таким образом, наклон $f'(x_*)$ определяет устойчивость точки x_* следующим

образом: если наклон $f'(x_*)$ отрицательный, то неподвижная точка x_* устойчивая; если наклон $f'(x_*)$ положительный, то неподвижная точка x_* неустойчивая.

Пример 2 Исследовать устойчивость неподвижных точек следующих уравнений:

$$1) \dot{x} = x^3, \quad 2) \dot{x} = -x^3, \quad 3) \dot{x} = x^2.$$

Решение: Каждая из этих систем имеет единственную неподвижную точку $x_* = 0$, не поддающуюся линейному анализу. При этом в примере 1) неподвижная точка является устойчивой, в примере 2) — неустойчивой, а в примере 3) — полустойчивой или *проходимой кривкой*.

Эти примеры кажутся искусственными, но они естественно возникают в теории бифуркаций.

1.5. Существование и единственность

Метод векторных полей до сих пор использовался очень формально. В частности мы предполагали, что дифференциальное уравнение имеет единственное решение, что будем делать и далее. Однако существуют паталогические примеры.

Пример 3 Покажите, что решение уравнения $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$ с начальным условием $x_0 = 0$ не является единственным.

Решение: Точка $x = 0$ является неподвижной точкой, так что очевидным решением является $x(t) = 0$ для всех t . Удивительно то, что есть другое решение. Чтобы найти его, разделим переменные и проинтегрируем уравнение: $\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \int dt$. Так что $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}(t) = t + c$. С учетом начальных условий получаем, что $x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$ также является решением.

Когда единственность не выполняется, геометрический подход разрушается, потому что точка не знает куда двигаться. На самом деле, ситуация в примере 3 еще хуже, поскольку существует бесконечно много решений с теми же начальными условиями. Источник неоднозначности кроется в бесконечном наклоне в точке 0. В следующей теореме сформулированы условия, обеспечивающие достаточные условия существования и единственности решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$.

Теорема 1 (Теорема существования и единственности) Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Предположим, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на открытом интервале (a, b) оси Ox и предположим, что $x_0 \in (a, b)$. Тогда исходная задача Коши имеет решение $x(t)$ на некотором промежутке времени $(-\tau, \tau)$ и это решение единственно.

Доказательство теоремы можно найти в любом учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эта теорема утверждает, что если $f(x)$ является достаточно гладкой функцией, то решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ существуют и единственны. Тем не менее, нет никакой гарантии, что решения существуют бесконечно, как показывает следующий пример.

Пример 4 Проанализируйте существование и единственность решения задачи Коши $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = x_0$. Существуют ли решения для любого времени t ?

Решение: Функция $f(x) = 1 + x^2$ непрерывна и имеет непрерывную производную для всех x . Таким образом, теорема 1 утверждает, что решения существуют и являются единственными для любого начального условия x_0 . Но теорема не говорит о существовании решения для любого времени, она гарантирует только существование (возможно очень короткое) в окрестности времени $t = 0$. Например, рассмотрим случай, когда $x(0) = 0$. Тогда задача может быть решена аналитически методом разделения переменных, что дает решение $\arctg x = t$. Но это решение существует только для $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, так как $x(t) \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$. За пределами этого интервала времени, нет решения с начальным условием $x(0) = 0$.

Эффект достижения решением бесконечности за конечное время носит название *взрыв*. Как следует из названия, это явление встречается в физической модели горения. Мы не будем беспокоиться о вопросах существования и единственности, для наших векторных полей, как правило, функция будет достаточно гладкой, чтобы избежать неприятностей.

1.6. Невозможность колебаний

Неподвижные точки доминируют в динамике систем первого порядка. Во всех наших примерах пока все траектории либо приближались

к неподвижной точке, либо уходили на бесконечность. На самом деле, только такое поведение и может быть у векторного поля на прямой. Причина этого в том, что все траектории задаются монотонными или постоянными функциями, колебания невозможны в системе первого порядка. Следовательно, нет периодических решений уравнения $\dot{x} = f(x)$. Эти общие результаты принципиально топологического происхождения. Они отражают то, что этому уравнению соответствует поток на прямой.

Механическое объяснение: Может показаться удивительным, что решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ не может колебаться. Но этот результат становится очевидным, если рассмотреть механический аналог уравнения. Мы рассматриваем уравнение $\dot{x} = f(x)$ как предельный случай закона Ньютона, когда инерцией $m\ddot{x}$ можно пренебречь. Например, предположим, что масса m прикреплена к пружине с восстанавливающей силой $F(x)$, где x — смещение от начала координат. Кроме того, предположим, что масса погружена в ванну с очень вязкой жидкостью, такой как мёд или нефть (см. рисунок 1.8), с трением $b\dot{x}$. По закону Ньютона $m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x)$.

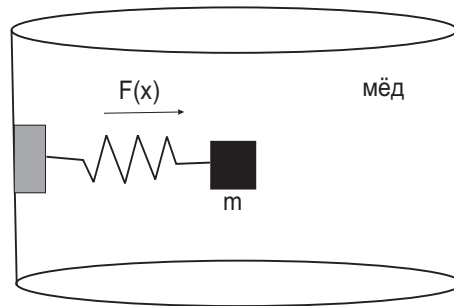


Рис. 1.8: Механическое объяснение невозможности колебаний

Если вязкое трение сильно по сравнению с инерцией ($b\dot{x} \succ m\ddot{x}$), система должна вести себя как $b\dot{x} = F(x)$ или, эквивалентно $\dot{x} = f(x)$, где $f(x) = \frac{F(x)}{b}$. В этом случае поведение механической системы ясно. Масса предпочитает находиться в устойчивом состоянии равновесия, немного переместившись, масса медленно возвращается в равновесие восстанавливающей силой.

1.7. Потенциал

Существует еще один способ визуализации динамики системы первого порядка $\dot{x} = f(x)$, основанный на физической идее потенциальной энергии. Для этого достаточно представить себе, что движения частицы сильно затухают по сравнению с ее инерцией, частица теряет потенциальную энергию V с течением времени. Математически это выражается уравнением

$$f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

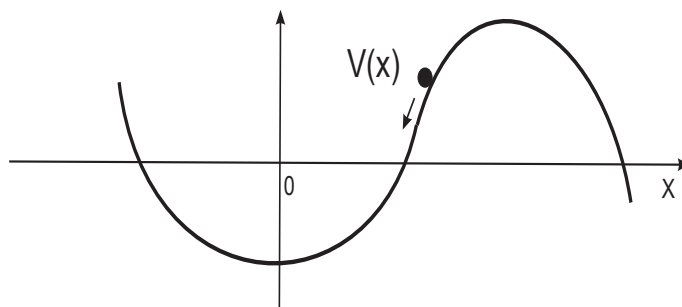


Рис. 1.9: Движение частицы в сторону уменьшения потенциала

Действительно, взяв производную по времени t от V получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \leq 0.$$

Таким образом, V убывает вдоль траекторий, так, что частица всегда движется в сторону уменьшения потенциала (см. рисунок 1.9). Если частица оказывается в точке, где $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, то эти точки соответствуют неподвижным точкам уравнения $\dot{x} = f(x)$. При этом локальные минимумы $V(x)$ соответствуют устойчивым неподвижным точкам, а локальным максимумам — неустойчивым.

Пример 5 Построить график потенциала для системы $\dot{x} = x - x^3$ и охарактеризовать все ее неподвижные точки.

Решение: Поскольку $-\frac{\partial V}{\partial x} = x - x^3$, то $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$. Тогда $V(x)$ имеет локальные минимумы в точках $x = \pm 1$ и локальный максимум в точке $x = 0$ (см. рисунок 1.10).

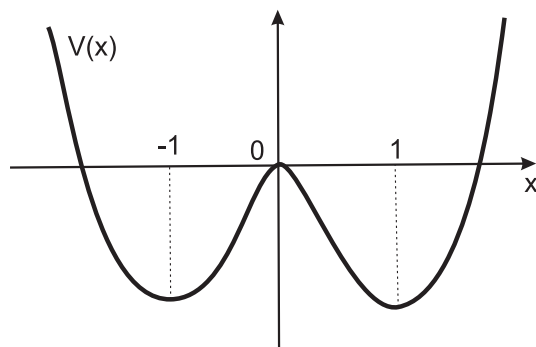


Рис. 1.10: График потенциала

1.8. Решение уравнений на компьютере

В этой главе мы использовали графические и аналитические методы для анализа систем первого порядка. Каждый начинающий “динамист” должен освоить третий инструмент: численные методы. Компьютеры позволяют аппроксимировать решения аналитически неразрешимых проблем, а также визуализировать эти решения. В этом разделе мы изучим два основных метода численного интегрирования уравнения $\dot{x} = f(x)$.

Метод Эйлера

Проблема ставится следующим образом: в зависимости от начального условия $x(0) = x_0$ найти способ приблизиться к решению уравнения $\dot{x} = f(x)$.

Используем интерпретацию векторного поля $\dot{x} = f(x)$. То есть, мы начинаем двигаться из точки x_0 со скоростью $f(x_0)$. За промежуток времени Δt мы переместимся на расстояние $f(x_0)\Delta t$. Конечно, что это не совсем правильно, потому что наша скорость менялась, но за достаточно малый шаг, скорость будет почти постоянной и наше приближение должно быть достаточно хорошим. Таким образом, наша новая позиция $x_1 = x_0 + f(x_0)\Delta t$ и мы применяем к нему наше приближение. Общая формула итерационного процесса

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t.$$

Эта простейшая схема численного интегрирования называется *метод Эйлера*. Его можно визуализировать на плоскости (t, x) . Хорошо видно,

что приближение хорошее только при малых Δt (см. рисунок 1.11), тем не менее метод Эйлера является базой для более точных методов.

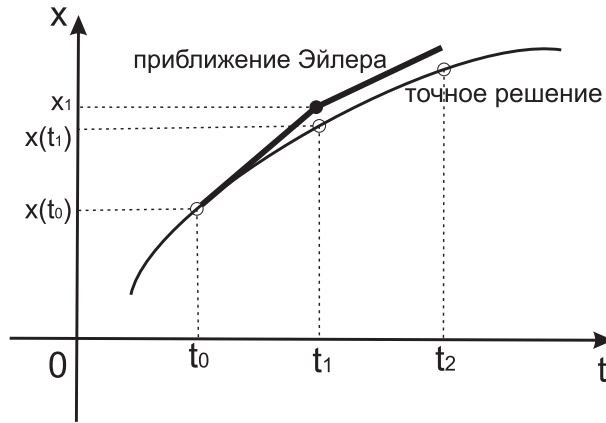


Рис. 1.11: Метод Эйлера

Одна из проблем метода Эйлера состоит в том, что используется только производная в левом конце интервала времени между t_n и t_{n+1} . Более разумно было бы использовать среднюю производную на этом интервале. Это идея *усовершенствованного метода Эйлера*. Сначала мы делаем пробный шаг, используя метод Эйлера. Это приводит к значению $\tilde{x}_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t$. Затем находим среднюю производную по концам отрезка и делаем реальный шаг

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(f(x_n) + f(\tilde{x}_{n+1}))\Delta t.$$

Этот метод более точен, чем метод Эйлера, в том смысле, что ошибка $E = |x(t_n) - x_n|$ стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$ быстрее, чем в методе Эйлера. Можно показать, что E имеет порядок малости Δt , а в улучшенном методе — $(\Delta t)^2$. На жаргоне численного анализа, метод Эйлера первого порядка, в то время как усовершенствованный метод Эйлера является методом второго порядка.

Существуют методы третьего, четвертого, и даже более высокого порядка, но чем выше порядок метода, тем больше требуется вычислений и оценок функций, а с этим связаны вычислительные расходы. На практике, хороший баланс достигается *методом Рунге-Кутты четвер-*

того порядка. Чтобы найти x_{n+1} через x_n сначала вычисляются следующие четыре числа.

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n)\Delta t, \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}k_1\right)\Delta t, \\k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}k_2\right)\Delta t, \\k_4 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}k_3\right)\Delta t.\end{aligned}$$

Тогда x_{n+1} задается формулой

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Этот метод обычно дает точные результаты, не требуя чрезмерно малого шага.

Глава 2

Бифуркации

Как мы видели в предыдущем разделе, динамика векторных полей на прямой очень ограничена: все решения либо стремятся в состояние равновесия, либо идут на $\pm\infty$. Однако интересной является зависимость системы от параметров. Качественное поведение потока может измениться при изменении параметров. В частности, неподвижные точки могут рождаться или исчезать, либо менять свою устойчивость. Эти качественные изменения в динамике называются *бифуркациями*, и значения параметров, при которых они возникают, называются *точками бифуркации*.

Бифуркации очень важны для моделирования — они позволяют выбрать подходящие параметры для модели. Рассмотрим, например, изгиб балки. Если малый вес находится в верхней части балки, то она может поддерживать нагрузку и оставаться вертикальной. Если же нагрузка слишком большая, вертикальное положение становится неустойчивым и балка может согнуться (см. рисунок 2.1). Здесь масса играет роль управляющего параметра, а максимальное отклонение балки от вертикали играет роль динамической переменной x .

Начнем с самых фундаментальных бифуркаций.

2.1. Бифуркация седло-узел

Седло-узловая бифуркация является основным механизмом, с помощью которого неподвижные точки рождаются и уничтожаются. В каче-

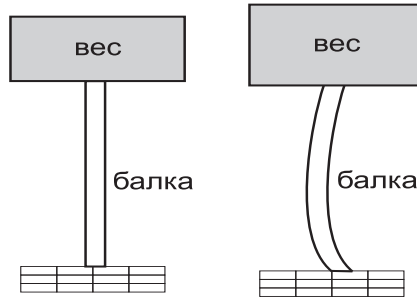


Рис. 2.1: Вес на балке

стве параметра используется расстояние между неподвижными точками. Прототипом седло-узловой бифуркации является параметрическое уравнение

$$\dot{x} = r + x^2,$$

где параметр r может быть положительным, отрицательным или нулевым. Когда r отрицательный, есть две неподвижные точки, одна устойчивая и одна неустойчивая. Когда r стремится к нулю снизу, парабола движется вверх и две неподвижные точки двигаются друг к другу. При $r = 0$, неподвижные точки сливаются в проходную точку. Как только $r > 0$, фиксированных точек нет (см. рисунок 2.2). В этом примере мы говорим, что бифуркация произошла при $r = 0$, так как векторные поля для $r < 0$ и $r > 0$ качественно различны.

Наиболее распространенный способ изображения бифуркации — *бифуркационная диаграмма* (см. рисунок 2.3).

Термин седло-узел не имеет смысла для векторных полей на прямой. Название происходит от совершенно аналогичной бифуркации в многомерном случае, где, как известно появляются седловые точки. При за самую изобретательную терминологию должны получить Авраам и Шоу [1], которые назвали бифуркацию “катастрофой голубого неба”. Прототипом этой бифуркации является обратная к седло-узловой бифуркации: пара неподвижных точек появляется на чистом голубом небе при изменении параметра. Например, векторное поле

$$\dot{x} = r - x^2$$

не имеет неподвижных точек при $r < 0$. При $r = 0$ появляется точка,

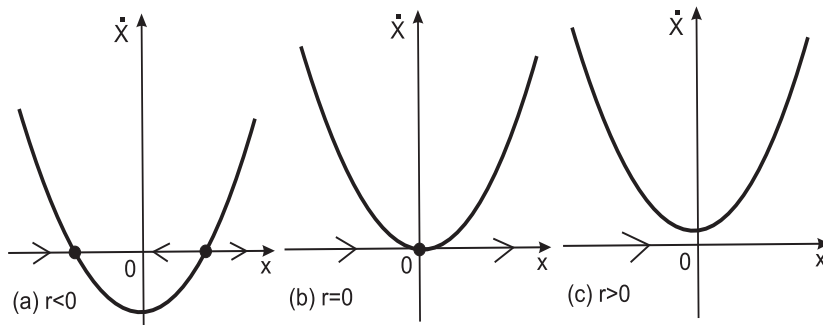


Рис. 2.2: Бифуркация седло-узел

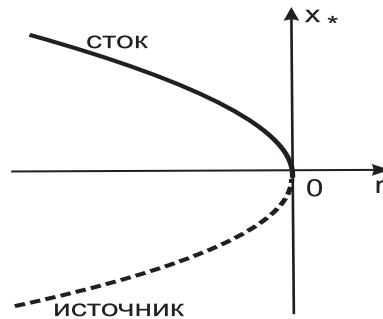


Рис. 2.3: Бифуркационная диаграмма седло-узла

которая распадается на две неподвижные точки при $r > 0$. Это объясняет, почему используется слово “бифуркация”: оно означает “расщепление на две ветви”.

Пример 6 Проведите линейный анализ устойчивости неподвижных точек катастрофы голубого неба.

Решение: Неподвижные точки уравнения $\dot{x} = r - x^2$ задаются формулой $x_* = \pm\sqrt{r}$ при $r \geq 0$. Для определения линейной устойчивости вычислим $f'(x_*) = -2x_*$. Таким образом, $x_* = +\sqrt{r}$ — устойчивая точка, так как $f'(+\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0$ для $r > 0$. Аналогичным образом

$x_* = -\sqrt{r}$ — неустойчивая точка, так как $f'(-\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0$ для $r > 0$. В точке бифуркации $r = 0$, получим $f'(x_*) = 0$; линейаризация исчезает, когда неподвижные точки сливаются.

Пример 7 *Покажите, что в системе первого порядка $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ появляется седло-узловая бифуркация и найти значение r в точке бифуркации.*

Решение: Уравнение неподвижных точек имеет вид $r - x - e^{-x} = 0$. Но неподвижные точки нельзя найти явно в зависимости от r . Вместо этого мы применим геометрический подход. Будем двигать прямую $r - x$ в зависимости от параметра r и следить за ее пересечением с графиком функции e^{-x} . Кроме того, наметим векторное поле на оси Ox . Бифуркационное значение определяется условием касания прямой и экспоненты: $-e^{-x_0} = -1$. Откуда $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и, следовательно, $r = 1$.

Нормальные формы

В определенном смысле, примеры $\dot{x} = r - x^2$ или $\dot{x} = r + x^2$ представляют все седло-узловые бифуркации, именно поэтому мы называем их “прототипами”. Идея заключается в том, что близко к седло-узловой бифуркации динамика обычно выглядит именно так. Так в примере 7 вблизи бифуркационной точки $x_* = 0$ и $r_* = 1$, используя разложение Тейлора, находим $\dot{x} = r - x - e^{-x} = r - x - (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots) = (r - 1) - \frac{x^2}{2!} + \dots$

Алгебраическая версия этого же аргумента состоит в рассмотрении правой части уравнения как функции двух переменных x , r , и разложении ее в ряд Тейлора вблизи бифуркационного значения (x_*, r_*) :

$$f(x, r) = f(x_*, r_*) + \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x_*, r_*)} (r - r_*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_*, r_*)} (x - x_*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_*, r_*)} (x - x_*)^2 + \dots,$$

где мы пренебрегли квадратичным членом для $(r - r_*)$ и кубическим членом для $(x - x_*)$.

Таким образом, $\dot{x} = a(r - r_*) + b(x - x_*)^2 + \dots$, где $a = \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{(x_*, r_*)}$ и $b = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_*, r_*)}$. То, что мы называем прототипом, более условно известно как *нормальная форма* седло-узловой бифуркации.

2.2. Транскритическая бифуркация

Есть определенные ситуации, когда с научной точки зрения неподвижные точки должны существовать для всех значений параметра. Например, в логистическом уравнении $\dot{N} = rN(1 - \frac{N}{K})$ и других простых моделях для роста одного вида, есть неподвижная точка нулевого населения, независимо от значения роста. Тем не менее, такая точка может изменить свою устойчивость в зависимости от значений параметра. Транскритическая бифуркация — это стандартный механизм такого изменения стабильности.

Нормальная форма для транскритической бифуркации

$$\dot{x} = rx - x^2.$$

Она выглядит как логистическое уравнение, но теперь мы позволяем x и r быть положительным или отрицательным. Рисунок 2.4 показывает векторное поле при изменении r .

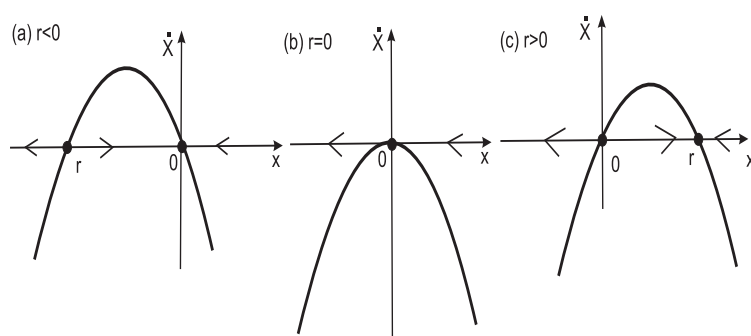


Рис. 2.4: Транскритическая бифуркация

Обратите внимание, что $x_* = 0$ — неподвижная точка для всех значений r . При $r < 0$, $x_* = r$ является неустойчивой неподвижной точкой и $x_* = 0$ является устойчивой неподвижной точкой. По мере увеличения r , неустойчивая неподвижная точка приближается к началу координат и сливается с ним, когда $r = 0$. Наконец, когда $r > 0$, начало координат становится неустойчивым и точка $x_* = r$ является устойчивой. Говорят, что имеет место смена устойчивости двух неподвижных точек. Обратите внимание на важное различие между седло-узловой и

транскритической бифуркацией: в транскритическом случае неподвижные точки не исчезают после бифуркации, а просто переключается их устойчивость. На рисунке 2.5 изображена бифуркационная диаграмма транскритической бифуркации. Параметр r рассматривается как независимая переменная, а неподвижные точки $x_* = 0$ и $x_* = r$ изображены в качестве зависимых переменных.

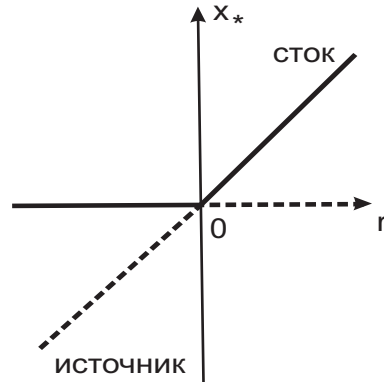


Рис. 2.5: Бифуркационная диаграмма транскритической бифуркации

Пример 8 *Покажите, что в системе первого порядка $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$ происходит транскритическая бифуркация в точке $x = 0$, когда параметры a, b удовлетворяют определённому уравнению. Это уравнение определяет бифуркационную кривую в пространстве параметров a, b .*

Решение: Заметим, что $x = 0$ является неподвижной точкой для всех a, b . При малых x , мы находим

$$1 - e^{-bx} = 1 - \left(1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \right) = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3).$$

Тогда

$$\dot{x} = x - a\left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2\right) + O(x^3) = (1 - ab)x + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^2 + O(x^3).$$

Следовательно, транскритическая бифуркация появляется, когда $ab = 1$ — это уравнение бифуркационной кривой. Ненулевая неподвижная точка является решением уравнения

$$1 - ab + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x \approx 0,$$

то есть $x_* \approx \frac{2(ab-1)}{ab^2}$.

Эта формула верна при малых x_* , так как на этом основаны разложения в ряды. Таким образом, формула справедлива только тогда, когда ab близко к 1, что означает, что параметры должны быть близки к бифуркационной кривой.

Пример 9 Проанализируйте динамику уравнения $\dot{x} = r \ln x + x - 1$ вблизи точки $x = 1$ и покажите, что в системе происходит транскритическая бифуркация при некотором значении r . Затем найдите новые переменные X и R , при которых система сводится к нормальной форме $\dot{X} \approx RX - X^2$ вблизи бифуркационного значения.

Решение: Заметим, что $x = 1$ является неподвижной точкой для всех значений r . Поэтому мы заинтересованы в динамике вблизи этой неподвижной точки. Введем новую переменную $u = x - 1$, где u мало. Тогда $\dot{u} = \dot{x} = r \ln(1+u) + u = r(u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3)) + u \approx (r+1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3)$. Следовательно, транскритическая бифуркация случается при $r_* = -1$. Чтобы представить это уравнение в нормальной форме, в первую очередь необходимо избавиться от коэффициента при u^2 . Пусть $u = av$, где a будет выбрано позже. Тогда уравнение для v имеет вид

$$\dot{v} = (r+1)v - \left(\frac{1}{2}ra\right)v^2 + O(v^3).$$

Если положить $a = \frac{2}{r}$, уравнение примет вид

$$\dot{v} = (r+1)v - v^2 + O(v^3).$$

Таким образом, для переменных $R = r + 1$ и $X = v = \frac{u}{a} = \frac{1}{2}r(x - 1)$ приближенно получается нормальная форма $\dot{X} \approx RX - X^2$.

Более точно, теория нормальных форм уверяет нас, что мы можем найти замену переменных, при которой система становится $\dot{X} \approx RX - X^2$ со строгим, а не приближительным равенством. Наше решение выше дает приближение к необходимой замене переменных. Если мы хотим лучшее приближение, мы сохраняем кубические члены ряда разложения и, возможно, даже более высокого порядка.

2.3. Лазерный порог

Теперь пришло время применить наши математические знания. Мы проанализируем упрощенную модель лазера, предложенную Хакеном в 1983 году [3].

Физические основы

Мы будем рассматривать конкретный тип лазера, который называют *твердотельным лазером*. Он состоит из набора специальных “лазерно-активных” атомов, встроенных в твердотельную матрицу, ограниченную частично отражающими зеркалами с каждой стороны. Источник внешней энергии используется для возбуждения или “раскачки” атомов из их основных состояний.

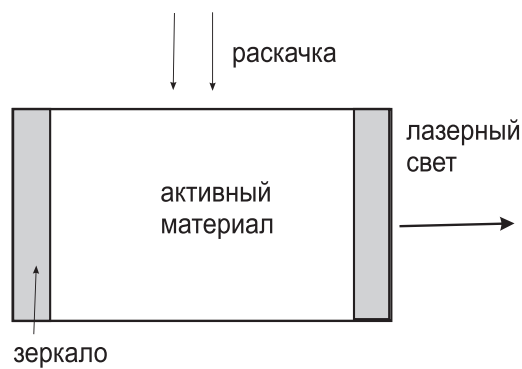


Рис. 2.6: Лазер

Каждый атом можно рассматривать как маленькую антенну, излучающую энергию. При относительно слабой раскачке лазер действует так же, как обычные лампы: возбужденные атомы колеблются независимо друг от друга и выделяют случайно поэтапно световые волны. Теперь предположим, что мы увеличиваем силу раскачки. Сначала ничего не происходит, но потом вдруг, когда сила раскачки превышает определенный порог, атомы начинают колебаться в фазе — лампа превратилась в лазер. Теперь триллионы маленьких антенн действуют как одна гигантская антенна и полученный пучок излучения гораздо более интенсивный, чем ранее. Эта внезапная согласованность удивительна, учитывая, что атомы возбуждаются совершенно случайным образом.

Мы имеем дело с процессом самоорганизации: согласованность развивается из-за кооперативного взаимодействия между самими атомами.

Модель

Динамической переменной является число чистых фотонов $n(t)$ в лазерном поле. Скорость его изменения задается формулой

$$\dot{n} = \text{прирост} - \text{потеря} = GnN - kn.$$

Термин *прирост* происходит от процесса стимулированного излучения, в котором фотоны стимулируют возбужденные атомы, испускающие дополнительные фотоны. Поскольку этот процесс происходит через случайные встречи между фотонами и атомами, то это происходит со скоростью пропорциональной n и число возбужденных атомов обозначается $N(t)$. Параметр $G > 0$ известен как коэффициент усиления. *Потеря* — выход фотонов через стенку лазера. Параметр $k > 0$ — константа скорости; его обратное значение $\tau = \frac{1}{k}$ представляет типичное время жизни фотона в лазере. Основная физическая идея состоит в следующем: после того, как возбужденный атом испускает фотон, он падает на более низкий энергетический уровень и больше не возбуждается. Таким образом, N уменьшается с испусканием фотонов. С учетом этого нужно написать выражение зависимости N от n . Предположим, что в отсутствие лазерного воздействия, насос сохраняет фиксированное число возбужденных атомов N_0 . Затем фактическое количество возбужденных атомов будет сокращено лазерным процессом. В частности, мы предполагаем,

$$N(t) = N_0 - \alpha n,$$

где $\alpha > 0$ — скорость, с которой атомы попадают обратно в невозбужденное состояние. Тогда

$$\dot{n} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn = (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2.$$

Мы, наконец, на знакомой земле — это система первого порядка для $n(t)$. Обратите внимание, что только положительные значения n имеют физический смысл.

Когда $N_0 < \frac{k}{G}$, неподвижная точка $n_* = 0$ устойчива. Это означает, что нет стимулированного излучения и лазер действует как лампа. С увеличением силы насоса система испытывает транскритическую бифуркацию, когда $N_0 = \frac{k}{G}$. Для $N_0 > \frac{k}{G}$, начало координат теряет устойчивость и появляется устойчивая неподвижная точка $n_* = \frac{GN_0 - k}{\alpha G} > 0$, что соответствует спонтанному действию лазерного излучения. Таким образом, $N_0 = \frac{k}{G}$ можно интерпретировать как лазерный порог в этой

модели. Рисунок 2.7 суммирует наши результаты. Хотя эта модель правильно предсказывает существование порога, она игнорирует динамику возбужденных атомов, существование спонтанного излучения и некоторые другие сложности.

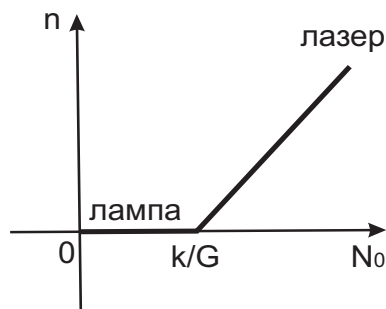


Рис. 2.7: Лазерный порог

2.4. Бифуркация раздвоения — трезубец (вилка)

Перейдем теперь к третьему виду бифуркации, так называемой, *бифуркации раздвоения*. Такое раздвоение является общим в физических задачах, которые имеют симметрию. В таких случаях, неподвижные точки, как правило, появляются и исчезают симметричными парами. Например на рисунке 2.1 стержень устойчив в вертикальном положении, если нагрузка мала. В этом случае есть неподвижная точка, соответствующая нулевому прогибу. Но если нагрузка превышает порог потери устойчивости, стержень может прогнуться либо влево, либо вправо. Вертикальное положение стало неустойчивым и появились две новые симметричные неподвижные точки, соответствующие изгибу влево и вправо.

Существуют два очень различных типа бифуркации раздвоения. Простой тип называется *суперкритическим или сверхкритическим* и будет обсуждаться в первую очередь.

Суперкритическая бифуркация раздвоения

Нормальная форма суперкритической бифуркации раздвоения имеет вид

$$\dot{x} = rx - x^3.$$

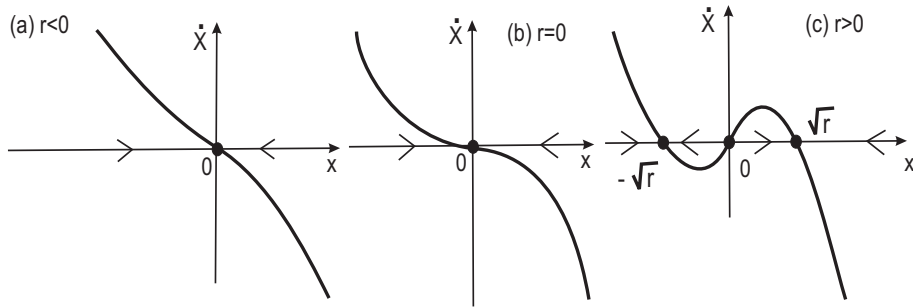


Рис. 2.8: Суперкритическая бифуркация

Отметим, что это уравнение инвариантно относительно замены переменной x на переменную $-x$.

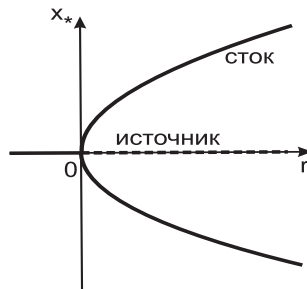


Рис. 2.9: Бифуркационная диаграмма трезубца

Эта инвариантность является математическим выражением левосторонней симметрии, упомянутой ранее. На рисунке 2.8 показано векторное поле для различных значений r .

При $r < 0$ начало координат является единственной неподвижной точкой и она устойчива. При $r = 0$ начало координат остается устойчивым, но с нулевой линейной частью. Теперь решения затухают не экспоненциально быстро, в физике это называется *критическое замедление*.

Наконец, когда $r > 0$, начало координат становится неустойчивым. Две новых устойчивых неподвижных точки появляются по обе стороны от нуля, симметрично расположенные в точках $x_* = \pm\sqrt{r}$. Причина термина “трезубец” становится ясной, когда мы построим бифуркационную диаграмму (см. рисунок 2.9).

Пример 10 Уравнения подобные уравнению $\dot{x} = -x + \beta thx$ возникают в моделях магнитов¹ и нейронных сетей. Показать, что в этом уравнении проходит суперкритическая бифуркация вилки при изменении β . Постройте точный график неподвижных точек для каждого β .

Решение: Мы используем стратегию примера с экспонентой для нахождения неподвижных точек. Графики $y = x$ и $y = thx$ показаны на рисунке 2.10, а их пересечения соответствуют неподвижным точкам. Главное понять, что при увеличении β , кривая βthx становится круче в начале координат (ее наклон равен β). Таким образом, для $\beta < 1$ начало координат является единственной неподвижной точкой. Бифуркация вилки происходит при $\beta = 1$ в $x_* = 0$, когда кривая thx имеет наклон 1 в начале координат. Наконец, когда $\beta > 1$, две новые устойчивые неподвижные точки появляются и начало координат становится неустойчивым.

Теперь мы хотим вычислить неподвижные точки для каждого β . Конечно, одна такая точка всегда находится в точке $x_* = 0$, другая определяется уравнением $x_* = \beta thx_*$ или $\beta = \frac{x_*}{thx_*}$ (см. рисунок 2.11).

Пример 11 Постройте потенциал $V(x)$ для системы $\dot{x} = rx - x^3$ при $r < 0, r = 0, r > 0$.

¹Простая модель магнита может быть смоделирована в виде большой коллекции электронных спинов. В простейшей модели спины направлены только вверх или вниз и принимают значения $S_i = \pm 1$, для $i = 1, \dots, N$. Важным свойством магнита является его средний спин или намагниченность $m = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N S_i \right|$. При высокой температуре спины в точках случайны по направлению и, следовательно, $m = 0$ — материал находится в парамагнитном состоянии. При понижении температуры, m остается вблизи нуля до критического значения температуры T_c . Затем происходит фазовый переход и материал спонтанно притягивает. Теперь $m > 0$, мы имеем ферромагнетик. Симметрия между верхом и низом спинов означает, что существует два возможных ферромагнитных состояния.

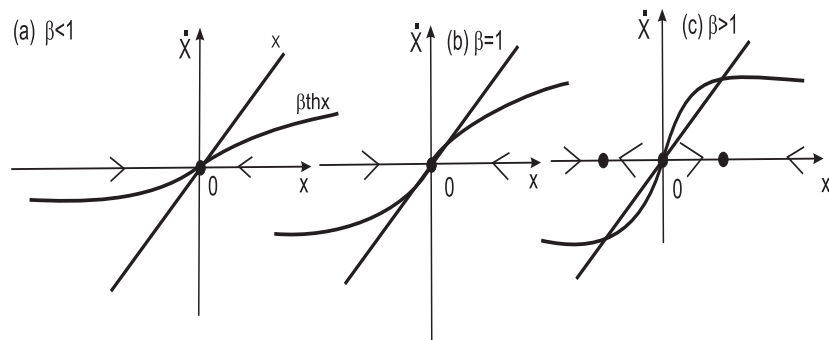


Рис. 2.10: Бифуркация вилки в примере 10

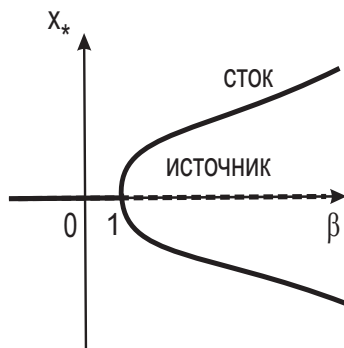


Рис. 2.11: Бифуркационная диаграмма к примеру 10

Решение: Напомним, что потенциал для системы $\dot{x} = f(x)$ определяется соотношением $f(x) = -\frac{dV}{dx}$. Следовательно, мы должны решить уравнение $-\frac{dV}{dx} = rx - x^3$. Интегрирование дает $V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}x^4$, где мы пренебрегаем произвольной постоянной интегрирования. Соответствующие графики показаны на рисунке 2.12. При $r < 0$ — квадратичный минимум в начале координат. В бифуркационном значении $r = 0$ минимум становится более плоским. Для $r > 0$, локальный максимум появляется в начале и симметричные минимумы возникают по обе стороны от него.

Докритическая бифуркация вилка

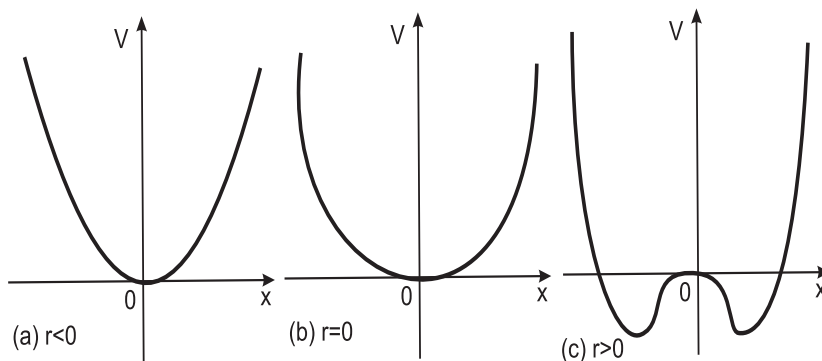


Рис. 2.12: Потенциал трезубца

В сверхкритическом случае $\dot{x} = rx - x^3$, о котором говорилось выше, кубический член выступает в качестве восстанавливающей силы, которая тянет $x(t)$ обратно к $x = 0$. Если взять кубический член дестабилизирующим, мы получим докритическую бифуркацию $\dot{x} = rx + x^3$ (см. бифуркационную диаграмму 2.13).

По сравнению со сверхкритическим случаем, вилка развернулась. Ненулевые неподвижные точки $x_* = \pm r$ неустойчивые и существуют только ниже бифуркационного значения ($r < 0$), что мотивирует термин “докритическая”. Можно показать, что $x(t) \rightarrow \pm\infty$, за конечное время, начиная с любого начального условия $x(0)$. В реальных физических системах, таким взрывам, как правило, противостоит стабилизирующее влияние членов высшего порядка. Предполагая, что система все еще симметрична относительно замены $x \rightarrow -x$, первое стабилизирующее слагаемое должно быть x^5 . Таким образом, канонический пример системы с докритической бифуркацией вилки

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5.$$

Не уменьшая общности можно считать, что коэффициенты при x^3 и x^5 по модулю равны 1. Проанализируем эту результаты. Рисунок 2.14 показывает бифуркационную диаграмму. Для малых x , картина выглядит так же, как для докритической бифуркации. Начало координат устойчиво при $r < 0$ и существуют две ветви неустойчивых неподвижных точек, раздваивающиеся в начале координат при $r = 0$. Новая функ-

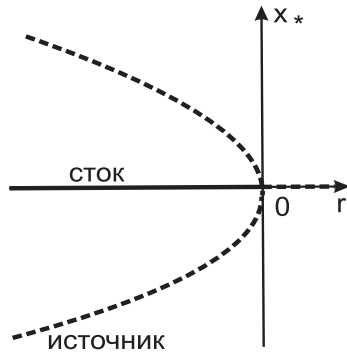


Рис. 2.13: Бифуркационная диаграмма докритической вилки

ция, благодаря x^5 , имеет еще две ветви, которые устойчивы при $r > r_s$, где $r_s < 0$ и называются *большеемплитудными*.

Есть несколько вещей, которые стоит отметить о рисунке 2.14:

1. В области $r_s < r < 0$, существуют три различных устойчивых состояния равновесия, а именно: начало координат и большеамплитудные неподвижные точки. Начальное условие x_0 определяет, к какой из них приближается траектория при $t \rightarrow \infty$. Следствием этого является то, что начало координат устойчиво к малым возмущениям, но неустойчиво к большим, в этом смысле начало координат является *локально*, но не *глобально* устойчивым.

2. Существование различных устойчивых состояний дает возможность для скачков и гистерезиса² при изменении r . Предположим, что

²*Гистерезис* — явление, которое состоит в том, что физическая величина, характеризующая состояние тела (например, намагниченность), неоднозначно зависит от физической величины, характеризующей внешние условия (например, магнитного поля). Гистерезис наблюдается в тех случаях, когда состояние тела в данный момент времени определяется внешними условиями не только в тот же, но и в предшествующие моменты времени. Неоднозначная зависимость величин наблюдается в любых процессах, т.к. для изменения состояния тела всегда требуется определённое время (время релаксации и реакция тела отстаёт от вызывающих её причин. Такое отставание тем меньше, чем медленнее изменяются внешние условия. Однако для некоторых процессов отставание при замедлении изменения внешних условий не уменьшается.

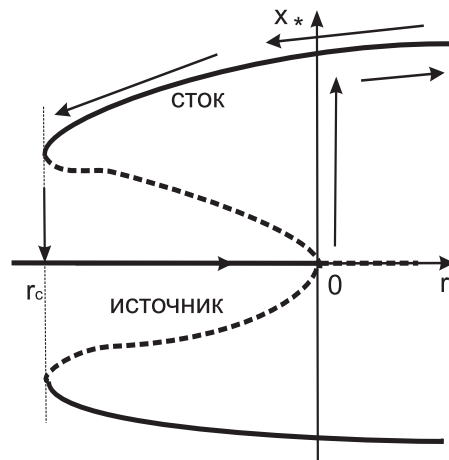


Рис. 2.14: Бифуркационная диаграмма стабилизированной докритической вилки

система стартует в состоянии равновесия $x_* = 0$, а затем постепенно увеличивается параметр r (как указано стрелками). Тогда равновесие остается в нуле пока $r = 0$, затем начало координат теряет стабильность. Теперь малейший толчок может привести к одной из большеамплитудных ветвей. При дальнейшем увеличении r , точка движется вдоль большеамплитудной ветви. Если теперь r уменьшилось, точка по-прежнему на большеамплитудной ветви, даже тогда, когда r меньше 0. Мы должны уменьшить r еще больше (до r_s), чтобы получить состояние, при котором точка движется к началу координат. Это отсутствие обратимости при изменении параметра называется гистерезис.

3. Бифуркации в r_s — катастрофа голубого неба, в которой устойчивая и неустойчивая неподвижные точки рождаются “из ясного неба” при увеличении r .

Терминология

Как обычно в теории бифуркаций есть несколько других названий для обсужденных бифуркаций. Послекритические вилы иногда называют *мягкой бифуркацией*, потому что ненулевые неподвижные точки

В этих случаях неоднозначная зависимость величин называется гистерезисной, а само явление — гистерезисом.

рождаются при небольшой амплитуде. Напротив, докритическую бифуркацию называют *жесткой*, поскольку происходит прыжок из нуля при большой амплитуде.

2.5. Бусинки на вращающемся обруче

В этом разделе мы проанализируем классическую проблему с первого курса физики, бусинки на вращающемся обруче. Эта проблема представляет собой пример бифуркации в механической системе. Он также иллюстрирует тонкости при замене закона Ньютона, который является уравнением второго порядка и будет заменен более простым уравнением первого порядка.

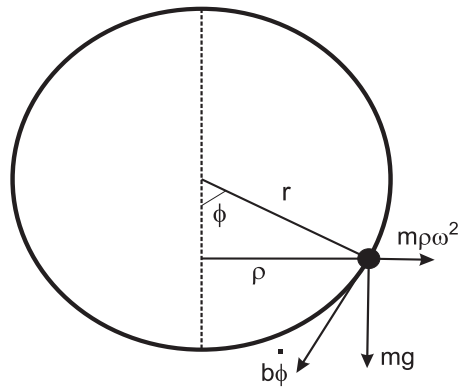


Рис. 2.15: Бусинки на вращающемся обруче

Механическая система показана на рисунке 2.15. Бусинка массой m скользит по обручу радиуса r . Обруч вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Проблема в том, чтобы проанализировать движение бусинки, учитывая, что на нее действует и гравитационная и центробежная сила. Предположим также, что есть сила трения об обруч, направленная против её движения.

Пусть ϕ — угол между радиус-вектором точки обруча и нисходящей вертикалью. По договоренности, мы ограничим ϕ в диапазоне $-\pi < \phi \leq \pi$, так что будет только один угол в каждой точке на обруче. Кроме того, пусть $\varrho = r \sin \phi$ — расстояние от обруча до вертикальной оси. Теперь

мы напишем закон Ньютона для бусинки. Существуют направленная вниз гравитационная сила mg , центробежная сила $m\rho\omega^2$ и касательная сила трения $b\dot{\phi}$. Обруч считается жестким, поэтому мы используем для решения касательное направление, как показано на рисунке 2.15. После подстановки $\rho = r\sin\phi$ в центробежный член, и напоминая, что касательное ускорение есть $r\ddot{\phi}$ мы получаем основное уравнение

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg\sin\phi + mr\omega^2\sin\phi\cos\phi.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, так как вторая производная является самой высокой из появляющихся. Мы еще не анализировали уравнения второго порядка, поэтому мы хотели бы найти условия, при которых мы можем смело пренебречь членом $mr\ddot{\phi}$. Тогда уравнение сводится к уравнению первого порядка и мы можем применить наши знания к нему.

Конечно, это рискованно: мы не можем просто игнорировать условия, потому что нам так нравится. Сейчас мы сделаем это, а в конце раздела мы постараемся найти режим, в котором наше приближение недействительно.

Анализ системы первого порядка

Наша задача теперь — система первого порядка

$$b\dot{\phi} = -mg\sin\phi + mr\omega^2\sin\phi\cos\phi = mg\sin\phi \left(\frac{r\omega^2}{g}\cos\phi - 1 \right).$$

Неподвижным точкам этого уравнения соответствуют положения равновесия для шарика. Что говорит Ваша интуиция о том, где такое равновесие может быть? Мы ожидаем, что шарик останется в покое, если его поместить в верхней или нижней части обруча. Могут ли быть другие неподвижные точки? А как насчет устойчивости? Является ли нижняя точка всегда устойчивой?

Уравнение показывает, что всегда есть неподвижные точки, где $\sin\phi = 0$, а именно: $\phi_* = 0$ (в нижней

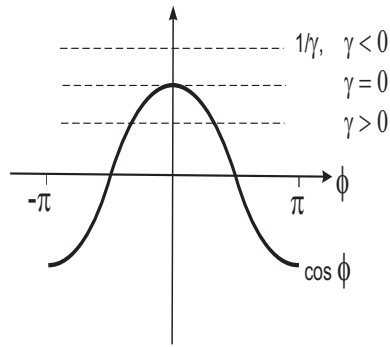


Рис. 2.16: Графическое представление уравнения $\cos\phi_* = \frac{1}{\gamma}$

части обруча) и $\phi_* = \pi$ (сверху). Более интересным является то, что есть две дополнительные неподвижные точки, если $\frac{r\omega^2}{g} > 1$, то есть, если обруч вращается достаточно быстро. Эти неподвижные точки удовлетворяют уравнению $\phi_* = \pm \arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)$. Чтобы представить их, введем параметр $\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$ и решим уравнение $\cos\phi_* = \frac{1}{\gamma}$ графически на рисунке 2.16.

Для $\gamma < 1$ пересечений нет, а для $\gamma > 1$ существует симметричная пара решений с обеих сторон от $\phi = 0$. При $\gamma \rightarrow \infty$, эти пересечения подходят к $\pm \frac{\pi}{2}$. На рисунке 2.17 изображены неподвижные точки на обруче для случаев $\gamma < 1$ и $\gamma > 1$.

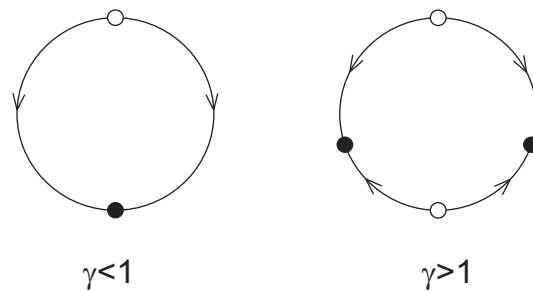


Рис. 2.17: Положение бусинки на обруче

На рисунке 2.18 изображена бифуркационная диаграмма. Как обычно, сплошные линии обозначают устойчивые неподвижные точки, и пунктирные линии обозначают неустойчивые неподвижные точки.

Теперь мы видим, что послекритическая бифуркация вилка проходит при $\gamma = 1$. Приведем физическую интерпретацию полученных результатов: при $\gamma < 1$, обруч вращается медленно и центробежная сила слишком мала, чтобы уравновесить силу тяжести. Таким образом, шарик скатывается вниз и остается там. Но если $\gamma > 1$, обруч вращается достаточно быстро, так, что что дно становится неустойчивым. Так как центробежная сила растет, то шарик движется дальше от дна. Бусинка выталкивается вверх по обручу, пока сила притяжения не сбалансируется центробежной силой; этот баланс достигается при $\phi_* = \pm \arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)$. Попадание в эти неподвижные точки на самом деле зависит от выбранного начального возмущения.

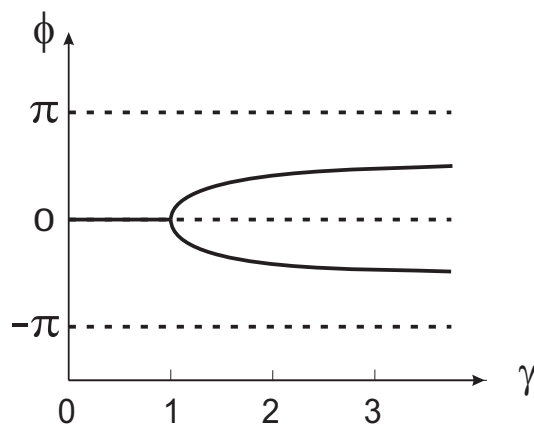


Рис. 2.18: Бифуркационная диаграмма

2.6. Несоввершенные бифуркации и катастрофы

Как мы уже упоминали ранее, бифуркация вилка имеет место в симметричных задачах. Например, шарик, вращающийся на обруче, имеющем симметрию между левой и правой сторонами обруча. Но во многих реальных задачах симметрия не точная, а приближительная, несовершенство приводит к небольшой разнице между левым и правым. Теперь мы хотим посмотреть, что происходит, когда такая разница присутствует. Например, рассмотрим систему

$$\dot{x} = h + rx - x^3.$$

Если $h = 0$, то это нормальная форма для послекритической бифуркации вилки, и выражает совершенную симметрию между x и $-x$. Но эта симметрия нарушается, когда $h \neq 0$, по этой причине мы называем h *параметром несовершенства*. Теперь уравнение анализируется немного сложнее, чем рассмотренные ранее, потому что у нас есть два независимых параметра h и r . Мы будем считать параметр r фиксированным и изучать эффекты при различных h . Первым шагом является анализ неподвижных точек. Они могут быть найдены в явном виде, но для этого нужно использовать формулу Кордано для корней кубического

уравнения. Гораздо лучше использовать графический подход, построив графики $y = rx - x^3$ и $y = -h$ на той же плоскости и найдя точки пересечения (см. рисунок 2.19). Эти пересечения соответствуют неподвижным точкам. Когда $r \leq 0$ кубическая парабола монотонно убывает и поэтому она пересекает горизонтальную линию $y = -h$ в одной точке. Более интересным является случай $r > 0$, когда возможны одно, два или три пересечения в зависимости от величины h .

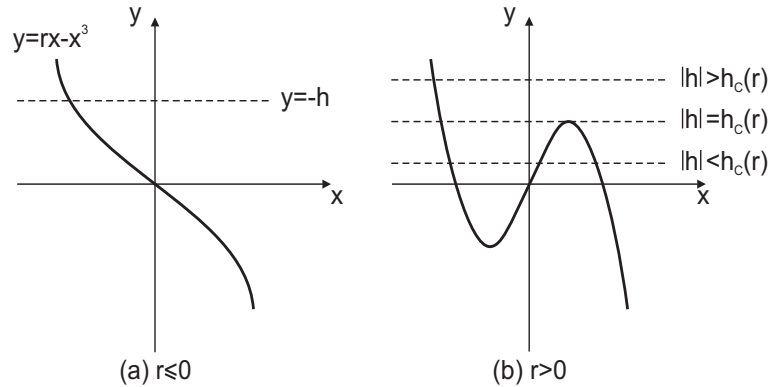


Рис. 2.19: Графическое решение

Критический случай возникает, когда горизонтальная линия является касательной к кубической кривой, поэтому у нас есть седло-узловая бифуркация. Чтобы найти значения h , при которых это происходит, найдем точки экстремума функции $y = rx - x^3$. Это точки $x = \pm\sqrt{\frac{r}{3}}$ и значение в них $\pm h_c(r) = \pm 2\left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Поэтому седло-узловая бифуркация возникает при $h = \pm h_c(r)$ и уравнение имеет три неподвижные точки при $|h| < h_c(r)$ и одну неподвижную точку для $|h| > h_c(r)$. Для подведения итогов построим бифуркационную кривую $h(r) = \pm 2\left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ в плоскости (r, h) . Две части этой кривой касаются в точке $(r, h) = (0, 0)$, такая точка называется *точкой возврата*. Мы также обозначим регионы, соответствующие различным числам неподвижных точек. Седло-узловая бифуркация происходит вдоль всей границы областей, за исключением точки возврата, где происходит бифуркация *коразмерности 2*. Эта терминология по существу означает, что нам пришлось настроить два параметра r и h для этого типа бифуркации. До сих пор все наши би-

фуркации достигались путем настройки одного параметра, а поэтому они были бифуркациями коразмерности 1.

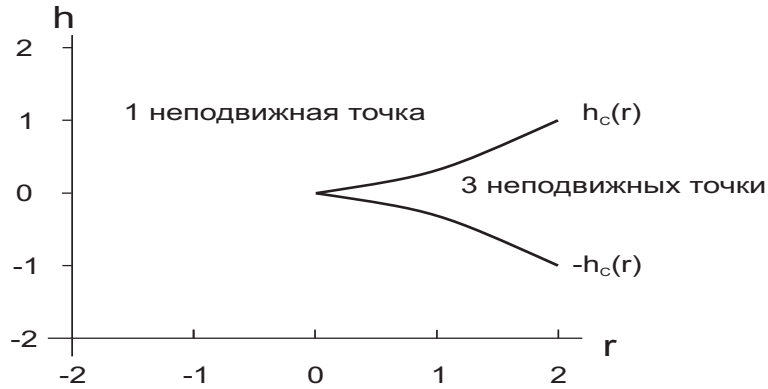


Рис. 2.20: Диаграмма стабильности

На рисунке 2.20 представлена *диаграмма стабильности*. Она показывает различные типы поведения, которые происходят, когда мы перемещаемся в пространстве параметров (в данном случае в (r, h) -плоскости). Теперь давайте представим результаты более привычным способом, показав бифуркационную диаграмму x_* в зависимости от r при фиксированном h (см. рисунок 2.21).

При $h = 0$ имеем обычную диаграмму вилки, но когда $h \neq 0$, вилка распадается на две части. Верхняя часть состоит полностью из устойчивых неподвижных точек, а нижняя часть имеет как устойчивые, так и неустойчивые ветви. Когда мы увеличиваем r от отрицательных значений, есть не резкий переход при $r = 0$; неподвижная точка просто легко скользит по верхней ветви. Кроме того, нижняя ветвь неподвижных точек не доступна, если мы делаем достаточно большое возмущение. Кроме того, можно построить x_* в зависимости от h при фиксированном r (см. рисунок 2.22).

Когда $r \leq 0$ существует единственная устойчивая неподвижная точка для каждого h . Тем не менее, при $r > 0$ существуют три неподвижные точки, когда $|h| < h_c(r)$, и одна в противном случае. В тройке значений, средняя ветвь неустойчива, а верхняя и нижняя ветви устойчивы.

Существует один последний способ построить результаты в трех измерениях. Этот метод презентации содержит все остальные, как сечения

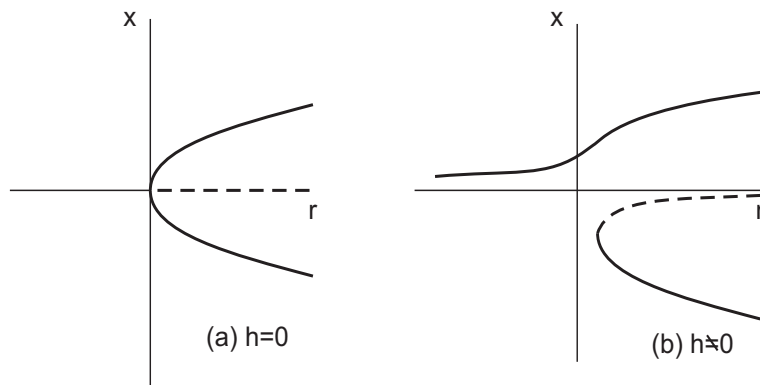


Рис. 2.21: Бифуркационная диаграмма при фиксированном h

или проекции. Если мы построим неподвижные точки x_* над плоскостью (r, h) , мы получим складку на поверхности в определенном месте, которая называется *катастрофой сборки* (см. рисунок 2.23). Проекция этой складки на плоскость (r, h) дает бифуркационную кривую. Сечения при фиксированных r или h дают рисунки выше. Термин *катастрофа* объясняется тем, что при изменении параметров состояния системы может подходить к краю верхней поверхности, после чего она падает скачком на нижнюю поверхность (см. рисунок 2.24). Этот скачок может быть по-настоящему катастрофическим для равновесия моста или здания. Мы увидим примеры катастроф в следующих разделах.

Шарик на наклонном проводе

В качестве простого примера несовершенной бифуркации и катастрофы, рассмотрим следующую механическую систему (см. рисунок 2.25).

Шарик массы m скользит по прямому проводу, наклоненному под углом θ к горизонтали. Масса прикреплена к жесткой пружине жесткости k и свободной длины L_0 , а также находится под действием силы тяжести. Выберем координатную ось вдоль провода, так что $x = 0$ находится в точке, ближайшей к опорной точке пружины. Пусть a — расстояние между этой точкой опоры и проводом.

Когда провод горизонтальный ($\theta = 0$), существует идеальная симметрия между левой и правой сторонами провода, и $x = 0$ всегда непо-

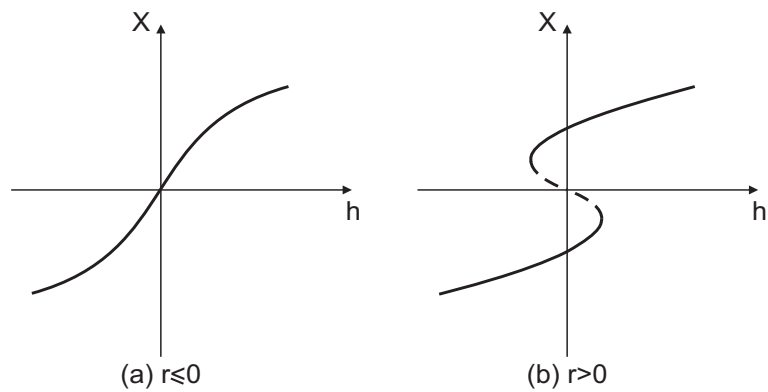


Рис. 2.22: Бифуркационная диаграмма при фиксированном r

движная точка. Устойчивость этой точки зависит от относительных размеров L_0 и a : если $L_0 < a$, пружина растянута и равновесие должно быть устойчивым. Но если $L_0 > a$, то пружина сжата, поэтому мы ожидаем неустойчивого равновесия в точке $x = 0$ и пары устойчивых состояний равновесия по обе стороны от него.

Проблема становится более интересной, когда мы наклоним провод ($\theta > 0$). Для небольшого наклона, мы ожидаем, что есть еще три точки равновесия, если $L_0 > a$. Однако если наклон становится слишком крутым, интуитивно понятно, что верхняя точка равновесия может исчезнуть, в результате чего шарик катастрофически падает вниз.

2.7. Вспышки насекомых

Для биологического примера несовершенной бифуркации и катастрофы складки, мы переходим к модели внезапной вспышки насекомых, которые называются *хвойные черви*. Это насекомое является серьезным вредителем в восточной части Канады, где оно нападает на хвойные деревья. Когда вспышка происходит, черви могут уничтожить растительность и убивают большинство елей в лесу в течение четырех лет. Людвиг и др. [5] предложили и проанализировали элегантную модель взаимодействия между червями и лесом.

Модель

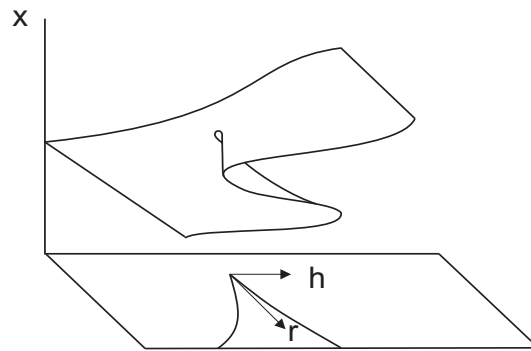


Рис. 2.23: Катастрофа сборки

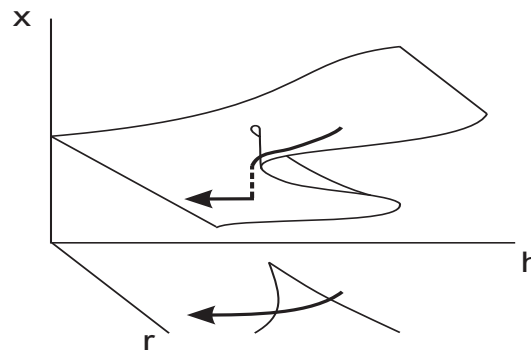


Рис. 2.24: Скачок при катастрофе сборки

Предложенная модель для динамики популяции червей

$$\dot{N} = RN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - p(N).$$

В отсутствие хищников популяция червей $N(t)$ растет как в логистической модели со скоростью R и пропускной способностью K . Пропускная способность зависит от количества листвы оставшейся на деревьях, она медленно меняется, поэтому в этой стадии мы считаем ее константой. Слагаемое $p(N)$ представляет из себя скорость смертности от хищников, главным образом птиц, и предполагается, что $p(N)$ имеют вид, показанный на рисунке 2.26. Практически нет хищников, когда червей мало,

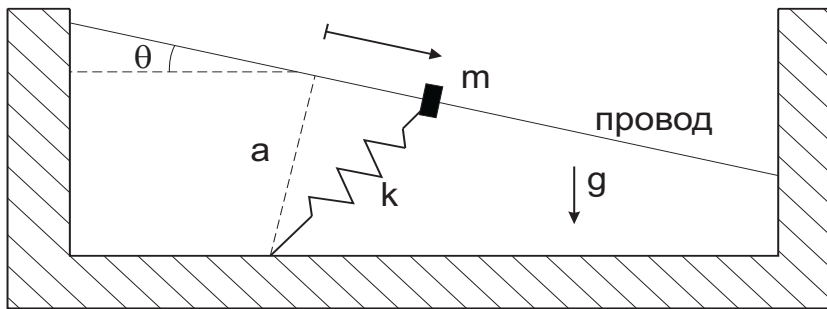


Рис. 2.25: Шарик на проводе

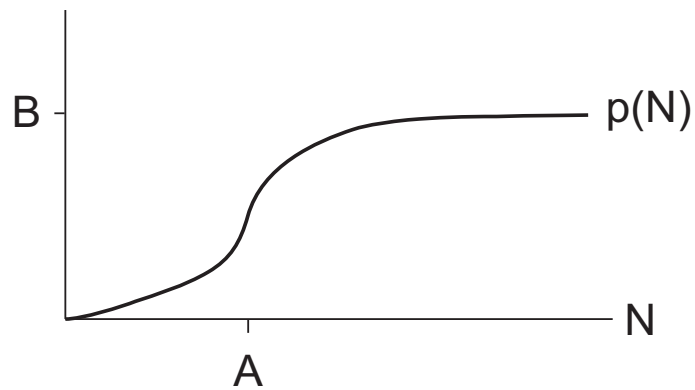


Рис. 2.26: Динамика популяции червей

птицы ищут пищу в других местах. Тем не менее, как только население превышает определенный критический уровень A , количество хищников резко увеличивается, а затем стабилизируется около значения B . В [5] взята конкретная функция

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}.$$

где $A, B > 0$. Таким образом, полная модель имеет вид

$$\dot{N} = RN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}.$$

Удобно переделать модель в безразмерную форму.

Безразмерная форма

Модель имеет четыре параметра: R, K, A, B . Как обычно, существуют различные способы безразмеривания системы. Например, A и K имеют ту же размерность, что и N и $\frac{N}{K}$ и $\frac{N}{A}$ могут служить безразмерным уровнем населения. В этом случае все безразмерные группы вставляются в логистическую часть динамики, а не в хищническую. Это удобно для графического анализа неподвижных точек. Чтобы избавиться от параметров в хищнической части, мы разделим уравнение на B и пусть $x = \frac{N}{A}$, что дает

$$\frac{A}{B} \frac{dx}{dt} = \frac{R}{B} Ax \left(1 - \frac{Ax}{K}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Уравнение показывает, что мы должны ввести безразмерное время $\tau = \frac{B}{A}t$ и безразмерные группы $r = \frac{RA}{B}$ и $k = \frac{K}{A}$. Тогда уравнение приобретает вид.

$$\frac{dx}{d\tau} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Здесь r и k — безразмерные скорость роста и пропускная способность, соответственно.

Анализ неподвижных точек

Уравнение имеет неподвижную точку $x_* = 0$, которая всегда неустойчива. Интуитивное объяснение этому в том, что хищничество крайне слабо для малых x и популяция червей растет в геометрической прогрессии для x близких к нулю. Другие неподвижные точки являются решениями уравнения

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Это уравнение легко анализировать графически, мы просто строим графики правой и левой частей уравнения и смотрим на их пересечения. Левая часть представляет собой прямую с отсекаемыми отрезками k и r , а правая часть представляет из себя кривую, которая не зависит от параметров. Как показывает рисунок 2.27, если k достаточно небольшое, то существует только одно пересечение для любого $r > 0$. Тем не менее, при больших k , мы можем иметь одно, два или три пересечения, в зависимости от значения r . Давайте предположим, что есть

три пересечения a, b, c . Если мы уменьшаем r при фиксированном k , то прямая линия вращается против часовой стрелки вокруг k . Тогда неподвижные точки b и c сближаются и в конце концов сливаются в седло-узловой бифуркации, когда прямая касается кривой касательной (пунктирная линия на рисунке 2.28). После бифуркации остается только неподвижная точка a (в дополнение к $x_* = 0$, конечно). Точно так же a и b могут столкнуться и уничтожиться, если r увеличивается.

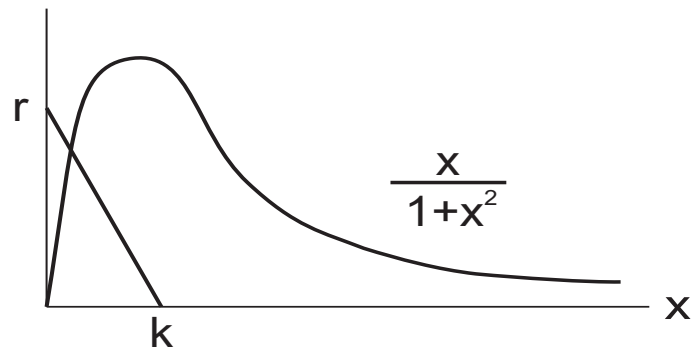


Рис. 2.27: Графическое представление при незначительном k

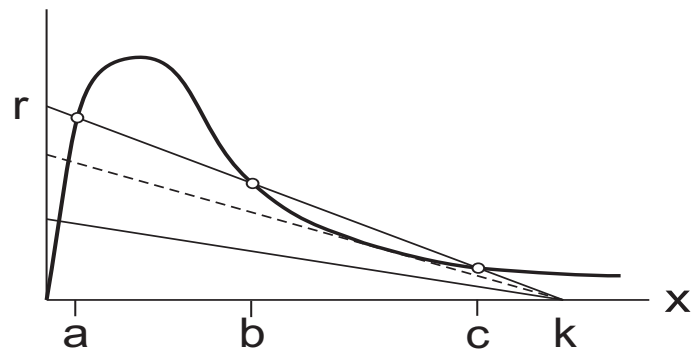


Рис. 2.28: Графическое представление при значительном k

Для определения устойчивости неподвижных точек, напомним, что $x_* = 0$ неустойчиво, а также отметим, что тип стабильности должен чередоваться по мере продвижения вдоль оси Ox . Получается, a — устой-

чивая, b — неустойчивая и c — устойчивая. Таким образом, для r, k , соответствующим трем положительным неподвижным точкам, векторное поле качественно выглядит так, как показано на рисунке 2.29.

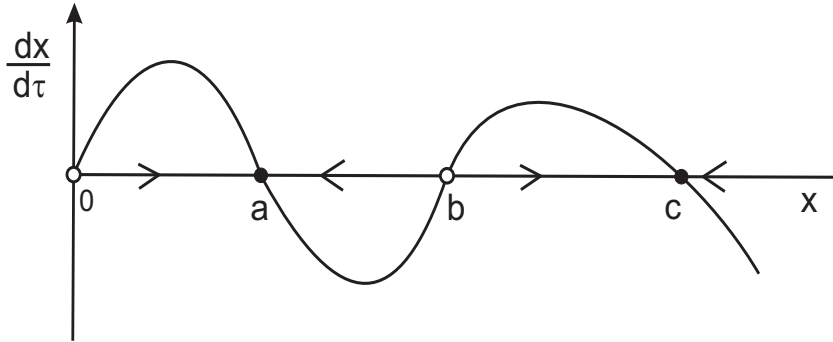


Рис. 2.29: Векторное поле

Меньшая устойчивая неподвижная точка называется *убежищем*, в то время как большая устойчивая точка называется *вспышкой*. С точки зрения борьбы с вредителями, хотелось бы держать население между a и b . Судьба системы определяется начальным состоянием x_0 , вспышка происходит тогда и только тогда, когда $x_0 > b$. В этом смысле неустойчивая точка b играет роль *порога*.

Вспышка может быть также вызвана седло-узловой бифуркацией. Если параметры r и k дрейфуют таким образом, что неподвижная точка a исчезает, то население вдруг прыгает на уровень вспышки. Ситуация усугубляется, наблюдается эффект гистерезиса, даже если параметры будут восстановлены до их значения до вспышки, население не упадет обратно в убежище.

Вычисление бифуркационных кривых

Теперь вычислим кривые в координатах (k, r) , где система подвергается седло-узловой бифуркации. Расчет несколько сложнее, чем ранее: мы не сможем записать r в явном виде функцией от k , например. Вместо этого, бифуркационные кривые будут записаны в параметрической форме $(k(x), r(x))$, где x пробегает все положительные значения.

Как уже говорилось ранее, условие седло-узловой бифуркации состоит в том, что прямая $y = r(1 - \frac{x}{k})$ касается кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$. Таким

образом, мы требуем чтобы

$$r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2} \quad (*)$$

$$\frac{d}{dx} \left(r\left(1 - \frac{x}{k}\right) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1+x^2} \right).$$

После дифференцирования получаем

$$-\frac{r}{k} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (**)$$

Подставим это выражение для $\frac{r}{k}$ в (*), которая позволяет выразить r исключительно через x . В результате

$$r(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда подставляя в (**)

$$k(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}.$$

Условие $k > 0$ влечет, что $x > 1$, $r(x)$, $k(x)$ определяют бифуркационные кривые. Для каждого $x > 1$ можно построить соответствующие точки $(k(x), r(x))$ в (k, r) -плоскости. В результате кривые показаны на рисунке 2.30.

Различные регионы на рисунке 2.29 помечены в соответствии с устойчивыми неподвижными точками, которые всегда существуют. Убежище уровня является единственным устойчивым состоянием для малых r , и вспышка — единственное устойчивое состояние для больших r . В бистабильных регионах существуют оба стабильных состояния. Схему можно рассматривать как проекцию поверхности катастрофы со складкой, как схематически показано на рисунке 2.31.

Сравнение с наблюдениями

Теперь нам нужно принять решение о биологически обоснованных значениях безразмерных групп $r = \frac{RA}{B}$ и $k = \frac{K}{A}$. Сложность в том, что эти параметры могут дрейфовать медленно, как меняется состояние лесов. По словам Людвиг и соавт., r увеличивается по мере роста леса, в то время как k остается неизменным. Они рассуждают так: пусть S — средний размер деревьев. Тогда пропускная способность K должна быть пропорциональна имеющейся листве, то есть $K = K'S$. Кроме

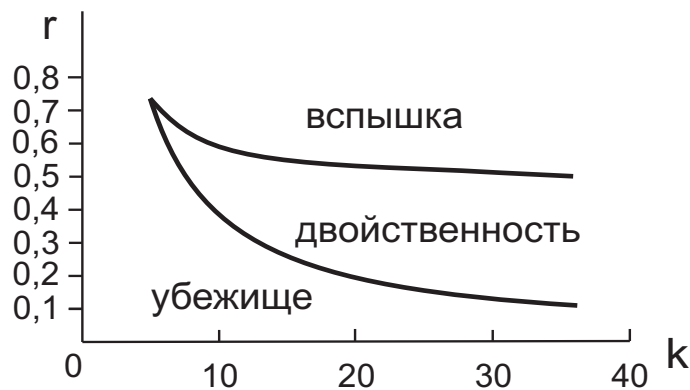


Рис. 2.30: Схема состояний

того, параметр количества хищников должен быть пропорционален S . Отсюда $A = A'S$ и, следовательно,

$$r = \frac{RA'}{B}S, \quad k = \frac{K'}{A'}.$$

Экспериментальные наблюдения показывают, что для молодого леса, как правило, $k \approx 300$, $r < \frac{1}{2}$ так, что параметры лежат в бистабильном регионе. Популяция червей уменьшается птицами, которым легко найти их в небольшом количестве листьев. Однако, когда лес растёт, S увеличивается и, следовательно, точка (k, r) дрейфует вверх в пространстве параметров к началу области вспышки. Людвиг и др. [5] оценили, что $r \approx 1$ для полностью зрелого леса, что находится в начале опасного региона. После того, как вспышка происходит, хвойные деревья умирают и лес становится лиственным. Но они менее эффективны при использовании питательных веществ, и в конечном итоге ели появляются снова и восстанавливаются. Такая реконструкция занимает около 50-100 лет [6].

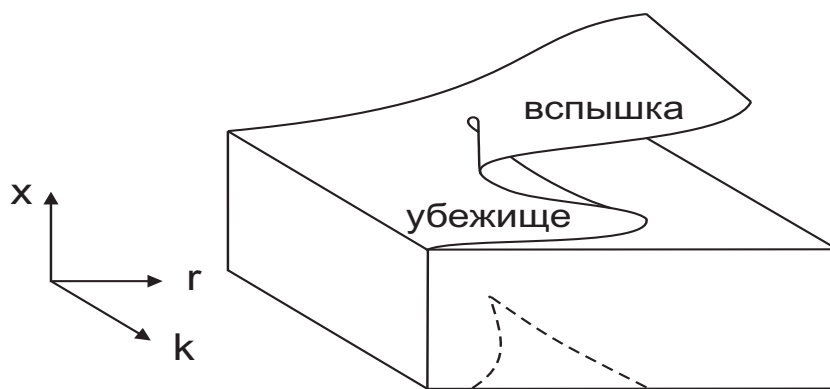


Рис. 2.31: Трёхмерное представление

Упражнения

1 Потоки на прямой

1.1 Геометрический подход

В следующих трех упражнениях представьте $\dot{x} = \sin x$ как поток на прямой.

1.1.1 Найдите все неподвижные точки потока

1.1.2 В каких точках поток имеет наибольшую скорость вправо?

1.1.3 а) найдите ускорение \ddot{x} потока как функцию от x б) найдите точки, в которых поток имеет максимальное положительное ускорение

1.1.4 Найдите механическую систему, приближаемую уравнением $\dot{x} = \sin x$. Объясните с точки зрения физики, почему $x = 0$ — неустойчивая неподвижная точка, а $x = \pi$ — устойчивая.

1.2 Неподвижные точки и устойчивость

1.2.1 Проанализируйте следующие уравнения графически: изобразите векторное поле на прямой, найдите все неподвижные точки, классифицируйте их устойчивость и схематично постройте график $x(t)$ при различных начальных условиях. Если возможно, найдите аналитическое решение $x(t)$.

1. $\dot{x} = 4x^2 - 16$;

2. $\dot{x} = 1 - x^{14}$;

3. $\dot{x} = x - x^3$;

4. $\dot{x} = e^{-x} \sin x$;

5. $\dot{x} = 1 + \frac{1}{2} \cos x$;
6. $\dot{x} = 1 - 2 \cos x$;
7. $\dot{x} = e^x - \cos x$.

1.2.2 Скорость $v(t)$ парашютиста, падающего на землю, определяется уравнением $m\dot{v} = mg - kv^2$, где m — масса парашютиста, g — ускорение свободного падения и $k > 0$ — постоянная, связанная с сопротивлением воздуха.

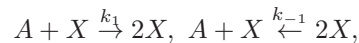
1. получить аналитическое решение для $v(t)$, предполагая, что $v(0) = 0$.
2. Найти предел $v(t)$ при $t \rightarrow \infty$ — предельную скорость.
3. Сделать графический анализ этой проблемы и тем самым повторно вывести формулу для предельной скорости.

1.3 Рост популяции

1.3.1 Решите логистическое уравнение $\dot{N} = rN(1 - \frac{N}{K})$ аналитически двумя путями для произвольного начального условия N_0 :

1. разделите переменные и интегрируйте как элементарные дроби
2. сделайте замену переменных $x = 1/N$ и решите получившееся дифференциальное уравнение для x

1.3.2 (Автокатализ) Рассмотрите модель химической реакции



в которых одна молекула X соединяется с одной молекулой A с образованием двух молекул X . Это означает, что X стимулирует собственное производство (процесс называется *автокатализом*). Этот процесс приводит к цепной реакции, которая в конечном счете упирается в “обратную реакцию”, при которой $2X$ возвращается в $A + X$. В соответствии с *законом действия масс* химической кинетики, скорость элементарных реакций пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ $x = [X]$ и $a = [A]$. Предположим, что есть огромный избыток вещества A , так что его концентрацию можно считать постоянной. Тогда уравнение кинетики для x имеет вид

$$\dot{x} = k_1 a x - k_{-1} x^2,$$

где k_1 и k_{-1} — положительные параметры, называемые *константами скорости*.

1. найдите все неподвижные точки этого уравнения и классифицируйте их устойчивость;
2. нарисуйте график $x(t)$ для различных начальных значений x_0 .

1.3.3 (Рост опухоли) Рост раковых опухолей может быть смоделирован по *закону Гомпертца* $\dot{N} = -aN \ln(bN)$, где $N(t)$ число клеток в опухоли и $a, b > 0$ — параметры. Изобразите векторное поле и затем график $N(t)$ для различных начальных значений.

1.3.4 (Эффект Али) Для некоторых видов организмов, эффективный уровень роста $\frac{\dot{N}}{N}$ является самым высоким для средних значений N . Это называется *эффектом Али*. Например, представьте себе, что слишком трудно найти товарищей, когда N очень мало, и слишком много конкуренции за пищу и другие ресурсы, когда N велико.

1. докажите, что в уравнении $\frac{\dot{N}}{N} = r - a(N - b)^2$ наблюдается эффект Али, если r, a, b удовлетворяют определенным соотношениям, установите их;
2. найдите все неподвижные точки системы и классифицируйте их устойчивость;
3. изобразите решения $N(t)$ при различных начальных условиях;
4. сравните решения $N(t)$ с решениями логистического уравнения. Имеются ли качественные отличия?

1.4 Линейный анализ устойчивости

1.4.1 Используйте линейный анализ устойчивости, чтобы классифицировать неподвижные точки следующих систем

1. $\dot{x} = x(1 - x)$;
2. $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$;
3. $\dot{x} = tg x$;
4. $\dot{x} = x^2(6 - x)$;
5. $\dot{x} = \ln x$;

6. $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$;
7. $\dot{x} = ax - x^3$, где a может быть положительным, отрицательным или нулём (рассмотреть все случаи).

1.5 Существование и единственность

1.5.1 Частица перемещается по полупрямой $x \leq 0$ со скоростью, заданной $\dot{x} = -x^c$, где c действительное и постоянное

1. найдите все значения c , при которых $x = 0$ будет неподвижной устойчивой точкой;
2. предположим, что c выбрано такое, при котором точка $x = 0$ устойчива. Может ли частица когда-нибудь достичь нулевой точки за конечное время? В частности, сколько потребуется времени для перемещения частицы из $x = 1$ в $x = 0$ в зависимости от различных c ?

1.5.2 Рассмотрите уравнение $\dot{x} = rx = x^3$, где $r > 0$ и фиксированно. Покажите, что $x(t) \rightarrow \pm\infty$ за конечное время, при любом начальном условии $x_0 \neq 0$.

1.5.3 (Бесконечно много решений с одним и тем же начальным условием) Покажите, что начальная задача $\dot{x} = x^{1/3}$, $x(0) = 0$ имеет бесконечное число решений. (Подсказка: постройте решение, которое остаётся в точке $x = 0$ до некоторого произвольного времени t_0 , после чего растёт вверх)

1.5.4 (Общий пример неоднозначности) Рассмотрим начальную задачу $\dot{x} = |x|^{p/q}$, $x(0) = 0$, где p и q натуральные числа, не имеющие общих делителей.

1. покажите, что существует бесконечное число решений, если $p < q$;
2. покажите, что существует единственное решение при $p > q$.

1.6 Невозможность колебаний

1.6.1 Объясните парадокс: простой гармонический осциллятор $m\ddot{x} = -kx$ является системой, которая колеблется в одном измерении (вдоль оси x). Но в тексте сказано, что одномерные системы не могут колебаться.

1.7 Потенциал

Для каждого из следующих векторных полей, построить потенциал $V(x)$ и определить все точки равновесия и характер их устойчивости.

1. $\dot{x} = x(1 - x)$;
2. $\dot{x} = 3$;
3. $\dot{x} = \sin x$;
4. $\dot{x} = 2 + \sin x$;
5. $\dot{x} = \sinh x$;
6. $\dot{x} = r + x - x^3$ для различных r .

1.8 Решение уравнений на компьютере

1.8.1 Нарисовать наклон поля для следующих дифференциальных уравнений. “Интегрировать” уравнения вручную, опираясь на траектории, везде параллельные локальному уклону

1. $\dot{x} = x$;
2. $\dot{x} = 1 - x^2$;
3. $\dot{x} = 1 - 4x(1 - x)$;
4. $\dot{x} = \sin x$.

1.8.2 (Калибровка методом Эйлера) Применить метод Эйлера для начальной задачи $\dot{x} = -x, x(0) = 1$

1. решить проблему аналитически. Какое такое точное значение $x(1)$?
2. используя метод Эйлера с шагом $\Delta t = 1$, оцените $x(1)$ численно-приближённым результатом $\tilde{x}(1)$. Затем повторите, используя $\Delta t = 10^{-n}$ для $n = 1, 2, 3, 4$;
3. постройте ошибку $E = |\tilde{x}(1) - x(1)|$ как функцию от Δt . Затем $\ln E$ от $\ln t$. Поясните результаты.

1.8.3 Решите задачу упражнения 1.8.2 усовершенствованным методом Эйлера.

1.8.4 Решите задачу упражнения 1.8.2 методом Рунге-Кутты

2 Бифуркации

2.1 Бифуркация седло-узел

2.1.1 Для каждого из следующих упражнений изобразите все качественно различные векторные поля, которые возникают при различных r . Покажите, что седло-узловая бифуркация происходит при критическом значении r , определите его. Изобразите бифуркационные диаграммы неподвижных точек в зависимости от r .

1. $\dot{x} = 1 + rx + x^2$;
2. $\dot{x} = r - \cosh x$;
3. $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$;
4. $\dot{x} = r + 0,5x - x/(1 + x)$.

2.2 Транскритическая бифуркация

2.2.1 Для каждого из следующих упражнений изобразите все качественно различные векторные поля, которые возникают при различных r . Покажите, что транскритическая бифуркация происходит при критическом значении r , определите его. Изобразите бифуркационные диаграммы неподвижных точек в зависимости от r .

1. $\dot{x} = rx + x^2$;
2. $\dot{x} = x - rx(1 - x)$;
3. $\dot{x} = rx - \ln(1 + x)$;
4. $\dot{x} = x(r - e^x)$.

2.4 Бифуркация трезубец

2.4.1 Для каждого из следующих упражнений изобразите все качественно различные векторные поля, которые возникают при различных r . Покажите, что бифуркация трезубец происходит при критическом значении r , определите его, классифицируйте как сверхкритическую или докритическую. Изобразите бифуркационные диаграммы неподвижных точек в зависимости от r .

1. $\dot{x} = rx + 4x^3$;
2. $\dot{x} = rx - \sinh x$;
3. $\dot{x} = rx - 4x^3$;
4. $\dot{x} = x + rx/(1 + x^2)$.

2.4.2 (Интересная диаграмма бифуркации) Рассмотрим систему $\dot{x} = rx - \sin x$.

1. Для случая $x = 0$ найти и классифицировать все неподвижные точки и изобразить векторное поле;
2. Показать, что при $r > 1$ есть только одна неподвижная точка, определить её;
3. При изменении x от ∞ до 0 описать все происходящие бифуркации;
4. Для $0 < r \ll 1$ найти приближённую формулу для значений r , при которых происходят бифуркации;
5. Опишите все бифуркации при уменьшении r от 0 до $-\infty$;
6. Постройте бифуркационную диаграмму для $-\infty < 0 < \infty$ и укажите устойчивость различных групп неподвижных точек.

2.4.3 (“Квадрофуркация”) Можете ли вы построить пример “квадрофуркации”, в которой $\dot{x} = f(x, r)$ не имеет неподвижных точек для $r < 0$ и четыре группы неподвижных точек при $r > 0$? Расширьте результат на случай произвольного количества групп

2.4.4 Рассмотрим систему $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$, которой соответствует докритическая бифуркация трезубца.

1. Найти алгебраические выражения для всех неподвижных точек при изменении r ;

2. Изобразите векторные поля при изменении r , укажите неподвижные точки и тип их устойчивости;
3. Рассчитайте r_s , параметр, при котором ненулевые неподвижные точки рождаются из седло-узловой бифуркации.

2.4.5 (Фазовый переход) Рассмотрим потенциал $V(x)$ для системы $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$. Рассчитайте r_c , определяемый условием, что V имеет три одинаковых впадины, то есть значения V в трёх локальных минимумах равны.

2.4.6 (Потенциал) Пусть $V(x)$ - потенциал, в том смысле, что $\dot{x} = -dV/dx$. Представьте потенциал как функцию от r . Не забудьте рассмотреть все качественно различные случаи, в том числе бифуркационные значения.

1. (Седло-узел) $\dot{x} = r - x^2$;
2. (Транскритическая) $\dot{x} = rx - x^2$;
3. (Докритические вилы) $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$.

2.5 Бусинки на вращающемся обруче

2.5.1 (Модельная задача о сингулярных ограничениях) Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение $\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ с начальными условиями $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

1. Решите задачу аналитически для всех $\varepsilon > 0$;
2. Предположив, что $\varepsilon \ll 1$, покажите, что существуют две сильно различных шкалы времени, и оцените их через ε ;
3. Постройте график зависимости $x(t)$ для $\varepsilon \ll 1$, указав на нём две шкалы времени;
4. Что вы скажете по поводу обоснованности замены $\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ на её сингулярный предел $\dot{x} + x = 0$?
5. Сформулируйте два физических аналога данной проблемы, в виде механической системы и в виде электрической цепи. В обоих случаях найдите безразмерное сочетание параметров, соответствующее ε , и выразите физический смысл предела $\varepsilon \ll 1$.

2.5.2 (Безразмерное логистическое уравнение) Рассмотрим логистическое уравнение $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ с начальным условием $N(0) = N_0$

1. Покажите, что система может быть переписана в безразмерной форме $dx/d\tau = x(1 - x)$, $x(0) = x_0$ при соответствующем выборе безразмерных переменных x, x_0, τ ;
2. Найдите другую безразмерную форму через переменные u и τ , где τ выбрана так, что начальное условие всегда $u_0 = 1$;
3. Можете ли вы назвать какие-либо преимущества одной безразмерной формы по сравнению с другой?

2.5.3 (Безразмерные докритические вилы) Система первого порядка $\dot{u} = au + bu^3 - cu^5$, где $b, c > 0$, имеет бифуркацию типа докритические вилы при $a = 0$. Покажите, что это уравнение можно переписать в виде $dx/d\tau = rx + x^3 - x^5$, где $x = u/U$, $\tau = t/T$, и U, T, r должны быть выражены через a, b, c

2.6 Несовершенные бифуркации и катастрофы

2.6.1 (Несовершенная транскритическая бифуркация) Рассмотрим систему $\dot{x} = h + rx - x^2$. Когда $h = 0$ система имеет транскритическую бифуркацию при $r = 0$. Задача состоит в том, чтобы рассмотреть изменение диаграммы \dot{x} от r в зависимости от изменения параметра h .

1. Постройте бифуркационные диаграммы для $dx/d\tau = rx + x^3 - x^5$ при $h < 0, h = 0, h > 0$;
2. Выделить области на плоскости (r, h) , которые соответствуют качественно различным векторным полям, а также определить бифуркации, которые происходят на границах этих областей;
3. Построить график потенциала $V(x)$ для всех различных областей плоскости (r, h) .

2.6.2 (Возмущения на сверхкритических вилах) Рассмотрим систему $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, где $-\infty < a < \infty$. Если $a = 0$, мы имеем нормальную форму сверхкритических вил. Изучим влияние нового параметра a .

1. Нарисуйте все качественно различные бифуркационные диаграммы \dot{x} от r , которые могут быть получены путем изменения a ;

2. Обобщите результаты, выделив области плоскости (r, a) , которые соответствуют качественно различным классам векторных полей. Определите типы бифуркаций, происходящих на границах этих областей.

2.6.3 (Несовершенная бифуркация седло-узел) Что произойдет, если добавить небольшое несовершенство системе, которая имеет седло-узловую бифуркацию?

2.6.4 (Механический пример несовершенной бифуркации и катастрофы) Рассмотрим шарик на наклонном проводе из раздела 2.6

1. Покажите, что положения равновесия шарика удовлетворяют уравнению $mg \sin \theta = kx(1 - L_0/\sqrt{x^2 + a^2})$;
2. Покажите, что это уравнение равновесия можно записать в безразмерном виде $1 - h/u = R/\sqrt{1 + u^2}$ при соответствующем выборе R, h, u ;
3. Дайте графический анализ безразмерного уравнения для случаев $R < 1$ и $R > 1$. Сколько положений равновесия может существовать в каждом конкретном случае?
4. Возьмите $r = R - 1$. Покажите, что уравнение равновесия сводится к $h + ru - 1/2u^3 \approx 0$ для малых h, r, u ;
5. Найдите приближенные формулы для седло-узловой бифуркации в пределах малых h, r, u ;
6. Покажите, что точные уравнения для бифуркационных кривых можно записать в параметрической форме как $h(u) = -u^3$, $R(u) = (1 + u^2)^{3/2}$, где $-\infty < u < \infty$. Убедитесь, что этот результат сводится к приближительному результату в пункте 4;
7. Интерпретируйте результаты физически, в терминах исходных размерных переменных.

2.7 Вспышки насекомых

2.7.1 Покажите, что неподвижная точка $\dot{x} = 0$ всегда неустойчива для уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

2.7.2 (Бифуркационные кривые для модели вспышки насекомых) Используя уравнения $r(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$, $k(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$, постройте зависимости $r(x)$ и $k(x)$. Определите предельное поведение при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 1$. Найдите точные значения r, k, x , соответствующие острой точке на рисунке 41.

2.7.3 (Модель рыбной ловли) Уравнение $\dot{N} = rN(1 - N/K) - H$ обеспечивает чрезвычайно простую модель рыболовного промысла. В отсутствие рыбалки предполагается, что популяция растёт логистически. Воздействие промысла моделируется параметром $-H$, который показывает, что рыбу ловят или “собирают” на постоянной скорости $H > 0$, не зависящей от популяции N . (При этом полагается, что рыбаки вне зависимости от популяции поймают определённое количество рыбы каждый день)

1. Покажите, что система может быть переписана в безразмерной форме $dx/d\tau = x(1 - x) - h$ для соответствующе определенных безразмерных величин x, τ и h ;
2. Постройте векторные поля для различных значений h ;
3. Покажите, что бифуркация происходит при определённом значении h_C , и классифицируйте эту бифуркацию;
4. Обсудите долгосрочный прогноз динамики популяции рыб при $h > h_C$ и $h < h_C$, и дайте биологическую интерпретацию в каждом конкретном случае.

Эта модель нелогична, так как в соответствии с ней популяция может стать отрицательной. Лучшая модель должна иметь неподвижную точку в нуле популяции для всех значений H . Смотрите следующее упражнение для такого улучшения.

2.7.4 (Улучшенная модель рыболовного промысла) Уточним модель из предыдущего упражнения до вида

$$\dot{N} = rN(1 - N/K) - HN/(A + N)$$

где $H > 0$, $A > 0$. Эта модель является более реалистичной в двух отношениях: она имеет неподвижную точку $N = 0$ для всех значений параметров, а также скорость, с которой ловят рыбу, уменьшается вместе с N . Ведь когда рыбы меньше, то её труднее найти, и улов падает.

1. Дайте биологическую интерпретацию параметра A , в чём он измеряется;
2. Покажите, что система может быть переписана в безразмерной форме

$$dx/d\tau = x(1-x) - hx/(a+x)$$

для соответствующе определенных безразмерных величин x, τ, a и h ;

3. Покажите, что система может иметь одну, две или три неподвижных точки, в зависимости от значений a и h . Оцените устойчивость неподвижных точек в каждом конкретном случае;
4. Проанализируйте динамику около $x = 0$ и покажите, что бифуркация происходит при $h = a$. Какого типа эта бифуркация?
5. Покажите, что другая бифуркация происходит, когда $h = 1/4(a+1)^2$ для $a < a_C$, где a_C должна быть определена. Классифицируйте эту бифуркацию;
6. Постройте диаграмму устойчивости системы в плоскости параметров (a, h) . Может ли гистерезис произойти в любой области диаграммы?

2.7.5 (Модель эпидемии) В новаторской работе в области эпидемиологии, Кермак и МакКендрик [4] предложили следующую простую модель развития эпидемии. Предположим, что население можно разделить на три класса: $x(t)$ - число здоровых людей, $y(t)$ - число больных людей, $z(t)$ - число погибших человек. Предположим, что общая численность населения остается постоянной по величине, за исключением смертей в результате эпидемии (то есть эпидемия развивается так быстро, что мы можем игнорировать медленные изменения в популяции за счет рождаемости, эмиграции, или смерти от других причин). Эта модель выглядит как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly\end{aligned}$$

где k и l - положительные константы. Уравнение основано на двух предположениях: а) Здоровые люди заболевают со скоростью, пропорциональной произведению x и y . Это было бы верно, если здоровые и больные люди сталкиваются друг с другом со скоростью, пропорциональной

их числу, и если бы была постоянная вероятность того, что каждая такая встреча приведет к передаче болезни. б) Больные люди умирают с постоянной скоростью l . Целью этого упражнения является сведение модели, которая представляет собой систему третьего порядка, к системе первого порядка, которую можно проанализировать нашими методами

1. Покажите, что $x + y + z = N$, где N - постоянная;
2. Используя уравнения x и z , покажите, что $x(t) = x_0 \exp(-kz(t)/l)$, где $x_0 = x(0)$;
3. Покажите, что z удовлетворяет уравнению первого порядка $\dot{z} = l(N - z - x_0 \exp(-kz/l))$;
4. Покажите, что уравнение может быть сведено к $du/d\tau = a - bu - e^{-u}$ соответствующим масштабированием;
5. Покажите, что $a \geq 0$ и $b > 0$;
6. Определите количество неподвижных точек \dot{u} и классифицируйте тип их устойчивости;
7. Покажите, что максимум $\dot{u}(t)$ происходит в то же время, что и максимумы $\dot{z}(t)$ и $y(t)$ (этот момент называется пик эпидемии. В такое время наибольшее число больных людей и наибольший рост смертности, чем в другие периоды);
8. Покажите, что если $b < 1$, то \dot{u} возрастает от $t = 0$ и достигает максимума при некотором $t_* > 0$. Таким образом, всё становится хуже, прежде чем начнётся улучшение. Покажите, что \dot{u} в конечном итоге уменьшится до 0;
9. С другой стороны, покажите, что $t_* = 0$ при $b > 1$;
10. Условие $b = 1$ является пороговым значением для возникновения эпидемии. Дайте ему биологическую интерпретацию.

Литература

- [1] Abraham, R. H., and Shaw, C. D. (1988) Dynamics: The Geometry of Behavior. Part 4: Bifurcation Behavior (Aerial Press, Santa Cruz, CA).
- [2] Gleick, J. (1987) Chaos: Making a New Science (Viking, New York).
- [3] Haken, H. (1983) Synergetics, 3rd ed. (Springer, Berlin).
- [4] Kermack, W. O., and McKendrick, A . G . (1927) Contributions to the mathematical theory of epidemics-I. Proc. Roy. Soc. USA, 700.
- [5] Ludwig, D . , Jones, D . D., and Holling, C. S. (1978) Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. J. Anim. Ecol. 47, 315.
- [6] Murray, J. (1989) Mathematical Biology (Springer, New York).
- [7] Strogatz, Steven H. (1994) Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering (Perseus Books,Massachusetts).