МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА СТУДЕНТА: ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ОФОРМЛЕНИЕ НИР

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Рекомендовано методической комиссией механико-математического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
38.03.05 «Бизнес-информатика»

Нижний Новгород
2014

УДК 378.14(07)
ББК Ч484.711
Н 34

Н34 НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА СТУДЕНТА: ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ОФОРМЛЕНИЕ НИР: Учебно-методическое пособие. Часть 1. Авторы: Кузнецов Ю.А., Круглов Е.В., Мичасова О.В., Перова В.И., Семенов А.В., Тюхтина А.А. / Под ред. проф. Ю.А. Кузнецова, доц. В.И. Перовой. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014.– 87с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор **Д.Т. Чекмарев**

Учебно-методическое пособие рассказывает о научно-исследовательской работе (НИР) студента, предусмотренной учебным планом для студентов третьего курса механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика». В пособии приведены образцы типовых заданий, их решений, выводов по проведенным исследованиям и примеры оформления НИР.

Учебно-методическое пособие призвано оказать необходимую помощь студентам при выполнении научно-исследовательских работ и может быть полезно преподавателям, осуществляющим руководство НИР.

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 378.14(07)
ББК Ч484.711

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5
Литература 7
ЧАСТЬ I. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ НИР ПО ТЕМЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ» 8
ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ 8
1.1. Работа с матрицами. Системы линейных уравнений 8
1.2. Полиномы 10
1.3. Функции и графики 11
1.4. Ряды и пределы 11
1.5. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений . 12
1.6. Интерполяция и аппроксимация 13
1.7. Численное дифференцирование 16
1.8. Численные и аналитические методы интегрирования 17
1.9. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений 18
1.10. Математическое программирование 20
Список литературы к главе 1 23
ГЛАВА 2. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ЭКОНОМИКЕ 24
2.1. Особенности нелинейных задач в экономике 24
2.2. Решение линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 26
2.3. Решение линейных систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами 30
2.4. Исследование устойчивости и определение типа состояния равновесия систем с непрерывным временем 31
2.4.1. Устойчивость по первому приближению 31
2.4.2. Метод функций Ляпунова 32
2.5. Исследование устойчивости и определение типа состояния равновесия систем с дискретным временем 33
Список литературы к главе 2 35
ГЛАВА 3. ЛОГИСТИКА 36
3.1. Задачи 37
3.2. Пример решения задачи 40
Список литературы к главе 3 47
ЧАСТЬ II. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ НИР ПО ТЕМЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ» 48

ГЛАВА 4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ 48
4.1. Дискретный принцип максимума в задачах оптимального управления с дискретным временем 49
4.2. Пример решения задачи 52
4.3. Задача для самостоятельной работы 55
Список литературы к главе 4 56
ГЛАВА 5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ 57
5.1. Кластеризация данных 58
5.2. Применение нейросетевого моделирования в научных исследованиях студентов 59
5.3. Примеры задач для научно-исследовательских работ студентов 61
5.4. Образец оформления результатов научных исследований 63
5.4.1. Результаты и их экономический смысл 70
Список литературы к главе 5 71
ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ 72
6.1. Взгляд на проблему и характеристика курса 72
6.2. Описание характерного задания по курсу, выполняемого в рамках междисциплинарной научно-исследовательской работы 75
6.2.1. Общая характеристика задания 75
6.2.2. Постановка задачи. Математическая модель 76
6.2.3. Задания по НИР 78
6.3. Некоторые примеры заданий по курсу, выполняемых в рамках междисциплинарной научно-исследовательской работы 79
Список литературы к главе 6 80
Приложение №1 82
Приложение №2 83
Приложение №3 84
Приложение №4 85
Приложение №5 86

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние полтора десятилетия в Нижегородском университете на кафедре математического моделирования экономических процессов ННГУ (кафедра ММЭП, до 2014 года кафедра математического моделирования экономических систем) сформировалась и успешно функционирует многоуровневая система подготовки высококвалифицированных кадров в области математических методов в экономике. Кафедра ММЭП является одним из основных подразделений ННГУ, ориентированных на подготовку высококвалифицированных специалистов, способных к аналитическому и компьютерному обеспечению экономической деятельности, а также к проведению научных исследований в области математического моделирования экономических систем. В обучении студентов участвуют ведущие преподаватели многих подразделений ННГУ. Это преподаватели механико-математического и радиофизического факультетов, факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) и института экономики и предпринимательства.

Как следствие этой работы, выпускники кафедры ММЭП отличаются высоким качеством подготовки. На это качество влияют *организация учебного процесса*, *структура и содержание* реализуемых образовательных программ, соответствие уровня подготовки обучающихся требованиям государственных образовательных стандартов и т.д.

Одним из важнейших факторов обеспечения качества подготовки являются новые принципы организации самостоятельной работы студентов. В российских федеральных государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования (ФГОС) большая роль отводится самостоятельной работе студентов. Компетентностный подход в образовании предусматривает активную внеаудиторную работу студентов, широкое использование в учебном процессе компьютерных технологий с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся. Внедрение в образовательный процесс современных педагогических технологий, поддерживающих самостоятельную работу студентов, соответствует актуальным потребностям российской экономики.

Одной из таких технологий, позволяющих повысить эффективность самостоятельной работы студентов, являются *проектно-ориентированные методы обучения*. Существуют различные точки зрения на проектные методы, их концепции и теории, и анализ показывает, что эти методы эффективно обеспечивают качество самостоятельной работы студентов. В настоящее время проектно-ориентированные методы обучения достаточно широко применяются в образовательном процессе в рамках преподавания как гуманитарных, так и естественнонаучных дисциплин. Данная технология (в различных вариантах) применяется во многих российских вузах и за рубежом. Проектные методы обучения широко используются и на кафедре ММЭП.

Кафедра ММЭП является выпускающей по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика». В рамках бакалавриата (профиль подготовки – «Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса») рабочий учебный план предусматривает выполнение студентами двух научно-исследовательских работ (НИР) на третьем курсе и двух НИР на четвертом курсе. В организации выполнения студентами НИР используется целый ряд приемов, характерных для проектных методов обучения. В частности, приветствуется и поощряется самостоятельная поисковая исследовательская работа студента по теме выполняемой НИР. На *третьем* курсе в соответствии с рабочим учебным планом студенты выполняют следующие *две* (междисциплинарные) НИР:

1. Методы решения экономико-математических задач.
2. Математические модели и методы и информационные технологии в исследовании экономико-математических задач.

Научно-исследовательские работы включают в себя задания, относящиеся к дисциплинам математического и естественнонаучного цикла и к базовой (общепрофессиональной) части учебного плана.

Первая НИР «*Методы решения экономико-математических задач*», выполняемая студентами в *первом семестре* учебного года, включает в себя задания по дисциплинам:

- «Применение систем компьютерной математики в экономико-математических исследованиях»;
- «Прикладные методы нелинейной динамики в экономике»;
- «Логистика».

Вторая НИР «*Математические модели и методы и информационные технологии в исследовании экономико-математических задач*», выполняемая студентами во *втором семестре* учебного года, включает в себя задания по дисциплинам и блокам дисциплин:

- «Методы оптимизации»;
- «Информационные технологии в экономике» (дисциплины: «Теоретические основы информатики», «Программирование (Си)», «Объектно-ориентированный анализ и программирование (С++)», «Нечеткая логика и нейронные сети»);
- «Математические модели современного естествознания».

В настоящем пособии представлены краткие характеристики перечисленных курсов с точки зрения их роли в формировании тех или иных компетенций, знаний, навыков и умений. Даны примеры описаний заданий по каждой из дисциплин, краткие комментарии о выполнении того или иного этапа работы, а также краткие списки возможных других заданий по курсу. В конце каждой главы приводится список литературы учебного и продвинутого уровня.

В Приложениях №1 – №5 представлены образцы оформления титульного листа научно-исследовательской работы, аннотации, содержания НИР, структуры НИР и списка литературы.

Работа представляется на кафедру ММЭП в бумажном виде и на электронном носителе. Более подробно о подготовке научно-исследовательской работы к защите см. в [1, 2].

Авторы выражают искреннюю благодарность за поддержку и ценные замечания при подготовке рукописи учебно-методического пособия заместителю по очной форме обучения проректора по учебной и воспитательной работе, заведующей кафедрой прикладной статистики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, доценту Н.Р. Стронгиной.

Авторы выражают искреннюю благодарность за полезные замечания при рецензировании рукописи учебно-методического пособия д.ф.-м.н., профессору кафедры численного моделирования физико-механических процессов механико-математического факультета ННГУ Д.Т. Чекмареву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Ю.А., Перова В.И., Стронгина Н.Р. Подготовка и защита выпускных квалификационных и научно-исследовательских работ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.
2. Учебная, научно-исследовательская, научно-педагогическая и предквалификационная практики: цели, задачи и оценка их выполнения: Учебно-методическое пособие. Авторы: Кузнецов Ю.А., Перова В.И., Стронгина Н.Р., Жидков А.В. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 60 с.

ЧАСТЬ I. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ НИР ПО ТЕМЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Целью освоения дисциплины «Применение систем компьютерной математики в экономико-математических исследованиях» является получение основных навыков работы с системами компьютерной математики на примере ППП MatLab, для выполнения расчетов и проведения исследований в различных областях математики и экономики.

Задания для комплексных курсовых работ охватывают основные разделы численных методов, применяемых в разного рода исследованиях, и некоторые типы прикладных экономических задач. В главе приведена краткая информация по работе с MatLab и примеры задач для самостоятельного выполнения. Более подробную информацию по работе с программой и решению описанных заданий можно найти в [1 – 12].

1.1. Работа с матрицами. Системы линейных уравнений

Матрицы являются основным видом данных, которые используются внутри MatLab. Операции с матрицами выполняются с помощью стандартных операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с учетом законов алгебры. Ранг матрицы определяется с помощью функции rank(A); определитель – det(A). Обратную матрицу для матрицы A можно найти с помощью функции inv(A).

Для приведения матрицы A к верхнему треугольному виду U может использоваться LU-разложение ([L,U]=lu(A)), где матрица L является нижней треугольной матрицей (возможно с перестановками).

Решать системы линейных уравнений вида $AX=B$ можно методом Гаусса, по правилу Крамера, а также с помощью обратных матриц $X=A^{-1}B$. Также в MatLab существует альтернативная запись решения системы линейных уравнений с помощью операции левого матричного деления X=A\B.

Вектор $x\neq 0$ называется собственным вектором квадратной матрицы A, если $Ax=\lambda x$ для некоторого числа λ (собственное число). Собственные числа матрицы A являются корнями характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$. Проблема собственных значений матрицы A решается в MatLab с помощью функции [V,D]=eig(A), где V – матрица, содержащая в качестве столбцов нормированные собственные вектора, а D – диагональная матрица с собственными числами.

Примеры заданий

1. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислите, если возможно, *A+B, AC, CA, CB, BC, AB, BA, (A-B)C* и *AC-BC.*

2. Определите собственные значения матрицы и ее характеристический полином:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите собственные значения матриц *A*, *B* и *C*:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}.$$

4. Решите систему тремя способами:

a) $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3+5x_4=14 \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=9 \\ 3x_1-3x_2+2x_3+4x_4=19 \\ 4x_1+2x_2+5x_3+x_4=27 \end{cases}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & =2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ -14 \\ 7 \end{bmatrix}$.

5. Покажите, что система *AX=B* эквивалентна верхнетреугольной системе *UX=Y* двумя способами:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ 4x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

1.2. Полиномы

Полиномы в MatLab имеют 2 способа представления: символьное (3*x^2+6*x-10) и в виде вектора-строки из числовых коэффициентов ([3 6 -10]). Для преобразования из одного формата в другой используется функции poly2sym и sym2poly. Для вычисления значения полинома y в точке x используется функция y=polyval(p,x), где p – вектор коэффициентов.

Команда r=roots(h) позволяет найти корни любого полинома, где h – строка, содержащая коэффициенты полинома. Если вектор x представляет корни полинома, то определить его коэффициенты (вектор p) можно с помощью функции p=poly(x).

Чтобы задать символьный полином, нужно сначала объявить независимую символьную переменную x (syms x), а затем определить полином q как функцию от x. Для вычисления значения символьного полинома q используется функция subs(q,n), которая подставляет на место независимой символьной переменной x число или символьное выражение (n). Для нахождения корней символьного полинома q может быть использована функция solve(q). Для разложения полинома q на множители используется функция factor(q), а для упрощения и раскрытия скобок – функции simplify и expand.

Примеры заданий

6. Определите коэффициенты полинома второй степени, который проходит через точки (0, 0), (π/2, 1) и (π, 0). Какой метод использует выбранная функция?

7. Найдите корни полинома: $p(z) = z^5 + 7z^4 + 19z^3 + 25z^2 + 16z + 4$

8. Определите полином, у которого два корня при *x=-2,000* и три корня при *x=-3,000*.

9. Вычислите значение полинома $p(x) = x^3 + 8x^2 + 10x + 4$ в точке *x=1,25* подстановкой и с помощью специальной функции. Сравнить результаты.

1.3. Функции и графики

Функция – это одна из разновидностей m-файлов, в первой строке которого стоит оператор function. Функции могут получать исходные данные в виде списка входных параметров и возвращать результаты своей работы как список выходных параметров. Имя m-файла должно совпадать с именем функции.
Чтобы построить график функции y=f(x), нужно задать вектор значений аргументов (x) и вектор соответствующих значений функции (y). Для построения графика используется процедура plot(x,y). Чтобы построить несколько графиков в одних осях, можно воспользоваться процедурой hold on, которая блокирует создание нового графического окна. Для добавления координатной сетки используется команда grid on.

Примеры заданий

10. Напишите m-функцию, которая для переменной *x* вычисляет значение 2^x. Функция должна работать для скалярных, векторных и матричных переменных.
11. Функции *f(x)* и *g(x)* имеют вид: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ и $g(x) = \tan x$. Напишите программу для вычисления этих функций, постройте их графики (должны быть достаточно гладкие) на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Также постройте графики функций *f(g(x))* и *g(f(x))*.
12. Напишите программу, которая позволит пользователю ввести коэффициенты в квадратичной функции $q(x) = ax^2 + bx + c$ и строит график функции *q(x)* для $x = \sin y$, где $y \in [0, \pi]$.

1.4. Ряды и пределы

Для вычисления конечной суммы ряда можно воспользоваться функцией symsum(expr,var,a,b), где выражение expr определяет элемент ряда по отношению к символьной переменной var, значение которой меняется от a до b.

Разложение в ряд Тейлора для функции f по переменной v в окрестности точки a можно вычислить с помощью функции taylor(f,v,a,Name,Value). Name и Value – дополнительные пары аргументов, определяющие различные свойства.
Для вычисления пределов можно воспользоваться символьной функцией limit(expr,x,a), которая вычисляет предел символьного выражения expr когда x стремится к a.

Примеры заданий

13. Вычислите первые четыре элемента ряда Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $a = -\frac{\pi}{4}$.

14. Вычислите для заданного пользователем значения *p* сумму $\sum_{j=1}^{p+1} j^p$.

15. Покажите, что выполняется равенство (с учетом точности, заданной в MatLab):

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 .$$

1.5. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Самыми известными численными методами нахождения корней заданной функции является метод Ньютона (касательных) и метод деления отрезка пополам (бисекций). В рамках первого метода задаётся начальное приближение вблизи предположительного корня, после чего строится касательная к исследуемой функции в точке приближения, для которой находится пересечение с осью абсцисс. Эта точка и берётся в качестве следующего приближения.

Второй метод рассматривает ситуацию, что если корень функции есть на рассматриваемом отрезке, то на концах отрезка функция должна быть разных знаков. Чтобы определить корень, отрезок делится пополам и рассматривается та из половинок, на концах которой функция по-прежнему принимает значения противоположных знаков. Если значение функции в серединной точке оказалось искомым нулём, то процесс завершается.

Для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным в MatLab может использоваться функция x=fzero(fun,x0), которая ищет точку x (с некоторого начального значения x0), в которой fun(x)=0. работа функции основана на комбинации метода бисекции, метода секущих и метода обратной квадратичной интерполяции. Чтобы облегчить работу по определению начального приближения, можно построить график.

Для решения систем нелинейных уравнений вида F(x)=0 используется функция x=fsolve(F,x0).

Для решения нелинейных уравнений и систем в символьном виде может быть использована функция solve().

Примеры заданий

16. Постройте график $f(x)=x^4+x-3$, убедитесь, что *f(1)* и *f(2)* имеют противоположные знаки. С помощью метода Ньютона оцените корень $f(x)=0$, который лежит между 1 и 2.

17. Постройте график $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$, убедитесь, что *f(2)* и *f(4)* имеют противоположные знаки. С помощью метода бисекции оцените корень $f(x)=0$, который лежит между 2 и 4.

18. Исследуйте корни функции: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}$

19. Найдите решение системы с точностью до 10 знаков после запятой:

$$\begin{cases} x^2-x+y^2+z^2-5=0 \\ x^2+y^2-y+z^2-4=0 \\ x^2+y^2+z^2+z-6=0 \end{cases}$$

20. Найдите решение уравнения: $-2x+x^5+x^2=4$

1.6. Интерполяция и аппроксимация

Если на координатной плоскости заданы пары чисел (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$, то задача одномерной аппроксимации состоит в том, чтобы построить функцию $y=f(x)$, которая приближает эти данные. Роль таких функций могут играть полиномы и сплайны.

В методах вычислений доказывается, что существует единственный интерполяционный полином степени не выше *n-1* для заданных x_i и y_i. Коэффициенты аппроксимирующего полинома P(x) степени m, наилучшим образом приближающего функцию $y(x)$ в смысле наименьшего квадратичного отклонения в узлах, можно найти с помощью функции polyfit(x,y,m).

Сплайны – это полиномы небольшой (обычно третьей) степени, которые приближают данные локально, между соседними узлами. Для их построения используется функция yy=spline(x,y,xx), использующая интерполяцию кубическими сплайнами: yy – это значения неизвестной функции *y(x)* для абсцисс контрольных точек xx; x и y – это абсциссы и ординаты аппроксимируемой функции. Если эту функцию записать в спецификации вида pp=spline(x,y), то в результате будет получена кусочно-полиномиальная форма (специальный формат MatLab для представления сплайнов). Значения сплайна в любых точках xx можно найти с помощью команды yy=ppval(pp,xx).

Примеры заданий

21. Определите сплайн для точек (-π, 0), (-π/2, -1), (0, 0), (π/2, 1) и (π, 0), на интервале (-π, π) с шагом π/10. Учитывая, что начальные данные задаются функцией $y = \sin x$, определите сумму квадратов отклонений для этих точек.

22. В таблице 1.1 приведены данные о температуре в пригороде Лос-Анджелеса за 12 часов (в °F). Переведите данные в градусы Цельсия. Определите коэффициенты кубического сплайна, который описывает эти данные. Постройте сплайн и исходные данные на одном графике. Определите среднюю температуру.

Таблица 1.1

Температура в пригороде Лос-Анджелеса за 12 часов (в °F)

Время, a.m.	Температура	Время, a.m.	Температура
1	58	7	57
2	58	8	58
3	58	9	60
4	58	10	64
5	57	11	67
6	57	12	68

23. Испанский производитель цитрусовых характеризуется следующим объемом продаж (табл. 1.2):

Таблица 1.2

Динамика объема продаж цитрусовых

год	1965	1970	1980	1985	1990	1991
объем продаж ($)	17769	24001	25961	34336	29036	33417

Используя кубический сплайн, оцените объем продаж в 1962, 1977 и 1992 годах. Также вычислите эти значения с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Сравните полученные результаты с реальными значениями: 12380, 27403 и 32059, соответственно.

24. Менеджер по продажам желает спрогнозировать объем продаж компании на три следующих года по данным за 15 лет, которые приведены в таблице 1.3. Определите коэффициенты полинома, который может описать эти данные, и постройте прогноз на три года.

Таблица 1.3

Динамика объема продаж за 15 лет

Год	Продажи ($)	Год	Продажи ($)	Год	Продажи ($)
1	9 149 548	9	112 642 574	11	148 678 983
2	13 048 745	10	130 456 321	12	176 453 837
3	19 147 687	6	54 545 369	13	207 547 632
4	28 873 127	7	72 456 782	14	206 147 352
5	39 163 784	8	89 547 216	15	204 456 987

25. Получены данные по продолжительности жизни граждан двух регионов Европы (табл. 1.4):

Таблица 1.4

Динамика продолжительности жизни в регионах Европы

	1975	1980	1985	1990
Западная Европа	72,8	74,2	75,2	76,4
Восточная Европа	70,2	70,2	70,3	71,2

С помощью интерполяционного полинома третьей степени оцените продолжительность жизни в 1970, 1983 и 1988 годах. Также экстраполируйте значения для 1995 года. Как изменится оценка для 1995 года, если станет известно, что продолжительность жизни в 1970 году составляла 71,8 года для граждан Западной Европы и 69,6 лет – для Восточной Европы.

26. В таблице 1.5 приведены цены на журнал в евро. Оцените стоимость издания в ноябре 2002 года, экстраполируя эти данные.

Таблица 1.5

Динамика цен на журнал (в евро)

ноябрь 1987	декабрь 1988	ноябрь 1990	январь 1993	январь 1995	январь 1996	ноябрь 1996	ноябрь 2000
4,5	5,0	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,0

1.7. Численное дифференцирование

В MatLab существует функция diff(x,n), которая по заданному вектору x строит вектор разностей порядка n. Для численного дифференцирования функции *y(x)*, заданной как пара векторов x и y, можно взять отношение diff(y)./diff(x), либо воспользоваться следующими формулами (полученными с помощью интерполяционных формул Ньютона и Стирлинга):

$$f'(x_i) = \frac{\Delta y_{i-1} + \Delta y_i}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \ i = \overline{2, n-1},$$

$$f'(x_1) = \frac{\Delta y_1 - \Delta^2 y_1 / 2}{h} = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2h},$$

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y_{n-1} - \Delta^2 y_{n-2} / 2}{h} = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

Для вычисления производной в символьном виде следует воспользоваться функцией diff(F,var,n), которая вычисляет n-ую производную от символьной функции F по переменной var.

Примеры заданий

27. Вычислите значение производной функции (численными методами) *f(x)* в точке x_0 с точностью 10 знаков после запятой. Сравните результат с аналитическими расчетами.

a) $f(x) = 60x^{45} - 32x^{33} + 233x^5 - 47x^2 - 77$, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

b) $f(x) = \tan\left(\cos\left(\frac{\sqrt{5} + \sin x}{1 + x^2}\right)\right)$, $x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}$.

28. Значения в таблице 1.6 характеризуют изменение численности популяции во времени *n(t)*, темп рождаемости в популяции постоянен (*b=2*), а уровень смертности – $d(t) = 0{,}01n(t)$:

Таблица 1.6

Динамика численности популяции

t (месяцы)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
n	100	147	178	192	197	199	200

Используя эти данные, вычислите как можно более точный темп роста популяции. Сравните полученный результат с точным значением: $n'(t) = 2n(t) - 0{,}01n^2(t)$.

1.8. Численные и аналитические методы интегрирования

Для вычисления интеграла *y(x)* по формуле трапеций в MatLab используется формула trapz(x,y). Кумулятивное суммирование по формуле трапеций осуществляется с помощью функции cumtrapz(x,y). Она возвращает вектор, i-ая компонента которого представляет сумму первых i слагаемых формулы трапеций. Значение этой функции можно рассматривать как дискретный аналог интеграла с переменным верхним пределом.

Более точным методом численного интегрирования является правило Симпсона, которое в MatLab реализовано функцией quad(fun,a,b), которая вычисляет определенный интеграл функции fun от a до b с погрешностью 1e-6. Существует несколько вариаций функции quad, информацию о которых можно найти в справке программы MatLab. Также для численного интегрирования можно воспользоваться функцией integral(fun,xmin,xmax), которая аппроксимирует интеграл функции fun от xmin до xmax, используя правило глобальной адаптивной квадратуры.

Для аналитического вычисления интегралов используется функция int, которая имеет 2 варианта спецификации: int(expr,var,a,b) вычисляет определенный интеграл символьного выражения expr по переменной var от a до b; int(expr,var) используется для вычисления неопределенного интеграла expr по переменной var.

Примеры заданий

29. Используя правило трапеции, вычислите интеграл полинома $x^2 - 3x + 2$ на отрезке $x = 1$ и $x = 3$. Сравните приближенное решение с точным результатом.
30. Вычислите интеграл функции $x \ln x$ на отрезке [1, 2] различными способами, сравните результаты.
31. Используя правило Симпсона, вычислите определенный интеграл и сравните результат с аналитическим значением: $\int_0^{\pi} \sin x dx$

1.9. Решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка заключается в отыскании функции $y=y(t)$, удовлетворяющей этому уравнению и начальному условию $y(t_0)=y_0$, где t_0 и y_0 известны. Библиотека MatLab включает несколько функций, реализующих различные методы решения задачи Коши: ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb. Все эти функции (решатели) имеют одинаковый синтаксис, но различаются методами и предназначением. Простейшее обращение имеет вид:

[T,Y]=ode***(fun,tspan,y0),

где fun – указатель на функцию правых частей ДУ; tspan – вектор контрольных значений; y0- начальное значение зависимой переменной; T – вектор-столбец контрольных значений независимой переменной; Y – решение, представленное массивом, в котором каждая строка соответствует одному элементу в столбце T.

Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения заключается в отыскании функции $y=y(x)$, удовлетворяющей на отрезке $[a,b]$ этому уравнению и граничным условиям, наложенным на значения функции и (или) ее производной на концах отрезка. Для ее решения следует воспользоваться функцией sol=bvp4c(fun,bcfun,solinit), где fun – указатель на функцию правых частей; bcfun – функция, вычисляющая вектор граничных условий; solinit – структура, которая задает начальные значения x и y (помощью функции bvpinit).

Аналитически системы ОДУ решаются с помощью функции [y1,...,yN]=dsolve(eqns,conds), которая решает символьную систему обыкновенных дифференциальных уравнений eqns при начальных или граничных условиях conds.

Примеры заданий

32. Решите систему дифференциальных уравнений при $x(0)=(1,-1)^T$:

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x .$$

33. Сравните приближенное и точное решение ДУ $\frac{dy}{dt}=-y+t^2$, если $y(0)=1$, а интегрирование выполняется на отрезке от $t=0$ до $t=2$.
34. Решите ДУ $y''=x\cos x$, с учетом $y'(0)=0$ и $y(1)=0$. Сравните численный и аналитический результаты.

35. Решите дифференциальное уравнение $\frac{d^2y}{dt^2}+ty=\sin t$ численно, с учетом начальных условий $y(0)=y(2)=0$, на интервале $t\in[0,2]$. Также решите это уравнение для начальных условий $y(0)=1$ и $y'(0)=0$. Сравните результаты.

36. Решите дифференциальное уравнение первого порядка $(t^2+1)y'+2ty=0$ численно и аналитически, с учетом начального условия $y(0)=1$, на интервале $t\in[0,5]$.
37. Решите дифференциальное уравнение третьего порядка $y'''-2y''-y'+2y=0$ численно и аналитически, с учетом начальных условий $y(0)=y'(0)=0$ и $y''(0)=1$.

38. Найдите аналитическое решение $y'=3x^2$ при начальном условии $y(2)=0{,}5$ и постройте график. Найдите численное решение (ode23) и постройте на том же графике в интервале $2\le x\le 4$. Сравните результаты.
39. Модель хищник - жертва описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)-Bx(t)y(t) \\ y'(t)=Cx(t)y(t)-Dy(t) \end{cases}$$

Пусть *x(t)* и *y(t)* определяют популяцию кроликов и лис, соответственно, в момент времени *t*. Коэффициенты модели задаются: *A=2; B=0,02; C=0,0002; D=0,8.* Используя метод Рунге-Кутта для решения систем дифференциальных уравнений, определите, какое количество животных будет в системе через 5 лет, если в 0-ой момент времени было *x(0)=3000* кроликов и *y(0)=120* лисиц.

1.10. Математическое программирование

Для решения задачи линейного программирования в MatLab используется функция [x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0), где x – вектор решений, fval – оптимальное значение целевой функции (минимум), f – вектор коэффициентов целевой функции, A и b – матрица коэффициентов и вектор правых частей для ограничений типа неравенства ($A \cdot x \le b$), Aeq и beq – матрица коэффициентов и вектор правых частей для ограничений типа равенства ($Aeq \cdot x = beq$), lb и ub – ограничения на координаты ($lb \le x \le ub$), x0 – стартовая точка.

Задача квадратичного программирования решается в MatLab с помощью функции [x,fval]=quadprog(H,f,...), которая минимизирует функционал 1/2*x'*H*x+f'*x. Область поиска задается аналогично предыдущему случаю, то есть остальные параметры функции совпадают с параметрами linprog().

Для многомерной безусловной оптимизации используется функция x=fminsearch(fun,x0), которая по указателю на функцию fun ищет ее минимум, начиная с x0 и используя алгоритм симплексного поиска. Если функция является достаточно гладкой, то для поиска минимума можно использовать функцию x=fminunc(fun,x0).

Задача условной оптимизации вида:

$$\min_x f(x), \text{ где } \begin{cases} c(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

решается с помощью функции fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon), где fun – указатель на целевую функцию, которая может быть нелинейной; x0 – стартовая точка, nonlcon – указатель на функцию, которая определяет нелинейные ограничения неравенства *c(x)≤0* и равенства *ceq(x)=0*.

Примеры заданий

40. У коммивояжера есть 4 часа, чтобы посетить 4 своих потенциальных покупателей. Размер комиссионных зависит от длительности визита (см. таблицу 1.7). Вычислите оптимальное распределение времени, которое он должен потратить на своих покупателей, чтобы получить максимальные комиссионные. Рассмотрите только целое количество часов, время передвижения между покупателями считайте нулевым. Строка «0» показывает комиссию, которую коммивояжер получит, если просто позвонит покупателю вместо посещения.

Таблица 1.7

Длительность посещения покупателей коммивояжером

Длительность посещения (часов)	**Покупатели**			
	1	**2**	**3**	**4**
0	20$	40$	40$	80$
1	45$	45$	52$	91$
2	65$	57$	62$	95$
3	75$	61$	71$	97$
4	83$	69$	78$	98$

41. Корпорация «ABC Полупроводники» производит микропроцессоры и кристаллы памяти. Для их производства требуются материалы типа A и B. Затраты материалов и прибыль от продажи приведены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

Затраты материалов корпорации «ABC Полупроводники»

	Затраты материалов	
	Микропроцессоры	Кристаллы памяти (1000 шт.)
Полупроводник A	3	2
Полупроводник B	5	10
Прибыль	25$ за 1 шт.	20$ за 1000 шт.

В силу некоторых ограничений на рынке сырья корпорация может купить только 450 единиц полупроводника A и 1000 единиц материала B. Определите, какое количество микропроцессоров и кристаллов памяти должна производить корпорация «ABC Полупроводники», чтобы максимизировать свою прибыль.

42. Точка A на графе (рис. 1.1) представляет аэропорт в Нью-Йорке, а остальные узлы – это различные аэропорты в Европе и Азии (B, C, D, E, F, H, J, K, L).

Все полеты начинаются в аэропорту Нью-Йорка, а затем самолеты направляются на восток. Коммивояжер из Нью-Йорка должен прибыть в один из аэропортов H, J, K или L за минимально возможное время. Число в круглой рамке показывает время ожидания в часах в каждом из аэропортов. Число в квадратной рамке обозначает время, которое займет дорога от соответствующего аэропорта до пункта назначения на автомобиле (в часах). Число рядом с линией – это время полета в часах. Какой из аэропортов следует выбрать коммивояжеру и сколько составит минимальная общая длительность путешествия?

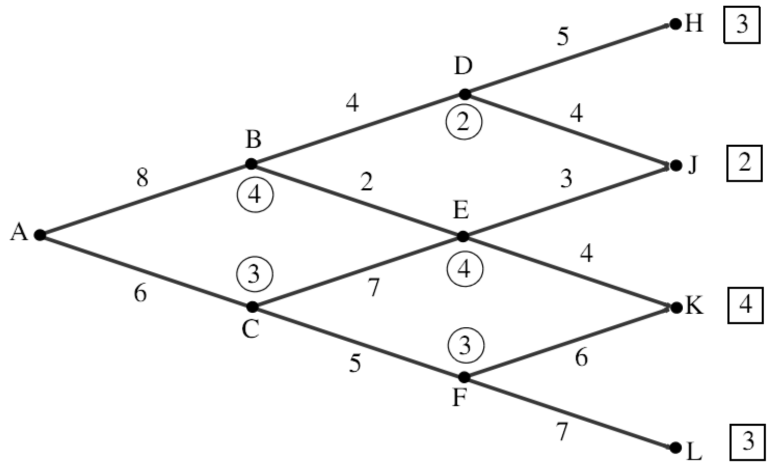

Рис. 1.1. Граф к задаче 42

43. У компании есть 5 фабрик A, B, C, D и E, расположенных в точках с координатами (10; 10), (30; 50), (16,667; 29), (0,555; 29,888) и (22,2221; 49,988), соответственно, на плоскости *xy*. Пусть расстояние между двумя точками отражает расстояние, которое проезжает водитель между фабриками в милях. Компания планирует построить склад в некоторой точке плоскости. Предполагается, что в среднем в неделю совершается 10, 18, 20, 14 и 25 поставок с фабрик A, B, C, D и E, соответственно. Где нужно построить склад, чтобы минимизировать расстояние, проезжаемое водителем еженедельно?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 1

1. Иглин С. Математические расчеты на базе MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.
2. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. MATLAB 7. Программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 742 с.
3. Мэтьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MatLab: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
4. Anderson P.L. Business Economics and Finance with MATLAB®, GIS, and Simulation Models. – Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2005. – 457 p.
5. Brandimarte P. Numerical Methods in Finance and Economics. A MATLAB-Based Introduction. - New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006. – 694 p.
6. Karris S.T. Numerical Analysis Using MATLAB and Excel. Third Edition. – Fremont: Orchard Publications, 2007. – 627 p.
7. Martinez W.L., Martinez A.R. Computational Statistics Handbook with MATLAB. – Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2002. – 585 p.
8. Otto S.R., Denier J.P. An introduction to programming and numerical methods in MATLAB. – London: Springer-Verlag, 2005. – 468 p.
9. Quarteroni A., Saleri F. Scientific Computing with MATLAB and Octave. – Berlin: Springer, 2006. – 342 p.
10. Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S. Solving ODEs with MATLAB. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 273 p.
11. White R.E. Computational mathematics: models, methods and analysis with MATLAB and MPI. – Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2004. – 388 p.
12. Yang W.Y., Cao W., Chung T.S., Morris J. Applied numerical methods using MATLAB. – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2005. – 520 p.

ГЛАВА 2. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ЭКОНОМИКЕ

2.1. Особенности нелинейных задач в экономике

Нелинейная динамика в экономике предполагает исследование моделей экономической динамики, представленных нелинейными непрерывными или дискретными системами. Непрерывные модели чаще всего задаются автономными системами дифференциальных уравнений, заданными в нормальной форме (или эквивалентными им дифференциальными уравнениями), то есть динамическими системами с непрерывным временем или *потоками*; дискретные модели – разностными системами (разностными уравнениями), то есть динамическими системами с дискретным временем или *каскадами*.

Нелинейность является существенным условием моделирования экономической динамики, поскольку линейные модели слишком упрощают реальные процессы и в большинстве случаев не являются адекватными средствами для отображения всего многообразия свойств, присутствующих процессам в экономике. Достаточно вспомнить дискретную модель Самуэльсона-Хикса циклов деловой активности или эквивалентную ей непрерывную модель Филлипса, которые явились важной ступенью в исследовании упомянутых циклов в плане понимания механизма связи мультипликатора и акселератора, но которые, в силу своей линейности, никак не могут применяться для объяснения механизма цикличности экономического развития (как должно быть известно из курса дифференциальных и разностных уравнений, линейные модели задают периодические режимы только в исключительных случаях, например, при полном отсутствии сопротивления в механической системе).

Однако линейные системы, тем не менее, играют существенную роль для объяснения поведения нелинейных систем. Дело в том, что в случае, когда состояние равновесия той или иной нелинейной системы является гиперболической точкой (то есть корни характеристического уравнения линейного приближения нелинейной системы в окрестности этого состояния равновесия таковы, что их вещественные части отличны от нуля в непрерывном случае; либо, в дискретном случае, модули корней характеристического уравнения отличны от единицы), окрестность состояния равновесия нелинейной системы устроена так же (говорят: имеет одну и ту же топологическую структуру), что и окрестность состояния равновесия (с теми же координатами) соответствующей линейной системы, правые части которой являются линейными приближениями правых частей исходной нелинейной системы в окрестности изучаемого состояния равновесия (говорят: линеаризованная система). (То есть неподвижная точка линеаризованной системы имеет тот же тип, что и соответствующая неподвижная точка нелинейной системы.) Этот факт является содержанием теоремы Гробмана-Хартмана, точную формулировку которой мы здесь не приводим. Поэтому определение типа состояния равновесия нелинейной системы в большинстве случаев сводится к определению типа состояния равновесия соответствующей линейной системы, как в непрерывном, так и в дискретном случае.

Аналогичная методика возможна для изучения состояний равновесия с точки зрения устойчивости в смысле Ляпунова. Теория Ляпунова, однако, предполагает и другой методы изучения устойчивости состояния равновесия нелинейной системы – а именно, метод функций Ляпунова. В некотором смысле этот метод более универсален, поскольку позволяет определить устойчивость состояния равновесия в случае, когда оно есть негиперболическая неподвижная точка.

Изучение периодических траекторий (орбит) нелинейных систем сводится к изучению некоторых неподвижных точек дискретных динамических систем. В самом деле, в непрерывном случае (в случае потока) окрестность периодической траектории исследуется с помощью отображений секущих Пуанкаре. Делается это следующим образом: рассматривается гиперповерхность (в двумерном случае это кривая (прямая) линия, в трехмерном – двумерная поверхность (например, плоскость), и т.д.), пересекающая периодическую траекторию (*цикл*) так, что никакая траектория системы этой гиперповерхности не касается (говорят: пересечение гиперповерхности и траекторий системы трансверсально), и изучается отображение, порождающееся на гиперповерхности траекториями системы в результате их пересечения с гиперповерхностью. Это отображение есть каскад размерности на единицу меньше, чем размерность потока, имеющий неподвижную точку, которая есть результат пересечения цикла и гиперповерхности. Характер этой неподвижной точки такой же, что и характер цикла исходной непрерывной системы, и структура окрестности периодической траектории непрерывной системы полностью определяется структурой окрестности полученной дискретной системы, называемой отображением последования или отображением Пуанкаре.

В дискретном случае вместо периодических орбит периода k n-мерного каскада $\bar{x} = f(x)$ могут быть изучены неподвижные точки каскада $\bar{x} = f^k(x)$, где $f^k(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{k \text{ раз}}$.

Таким образом, и изучение состояний равновесия, и изучение периодических движений нелинейных систем сводится к изучению окрестностей неподвижных точек линейных потоков или каскадов. Поэтому задания для комплексной курсовой работы в части нелинейной динамики в экономике включают в себя как решение линейных систем дифференциальных и разностных уравнений и исследование типов их неподвижных точек, равно как и исследование неподвижных точек нелинейных систем (на устойчивость и определение типа).

Ниже приводятся решения различных типов задач, включенных в задания.

2.2. Решение линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Общим решением линейной системы дифференциальных уравнений *n*-ого является максимальная линейная комбинация её линейно независимых частных решений, то есть линейная комбинация *n* линейно независимых частных решений. Такие частные решения легко находятся в случае, когда корни характеристического уравнения данной системы действительны и различны. В случае наличия комплексно сопряженных пар корней характеристического уравнения; или кратных корней характеристического уравнения ход решения несколько иной.

Подробно теоретические аспекты теории линейных систем дифференциальных уравнений можно изучить по источникам [1] и [2].

Пример 1 [3, №796]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}, z = Ce^{\lambda t}$. Данные функции подставим в систему:

$$\begin{cases} A\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t} + Ce^{\lambda t}, \\ B\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} - Ce^{\lambda t}, \\ C\lambda e^{\lambda t} = 2Ae^{\lambda t} - Be^{\lambda t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\lambda = A - B + C, \\ B\lambda = A + B - C, \\ C\lambda = 2A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)A - B + C = 0, \\ A + (1-\lambda)B - C = 0, \\ 2A - B - \lambda C = 0 \end{cases}$$

В результате получим однородную алгебраическую систему, которая имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда её определитель равен нулю. Из этого условия получаем уравнение, называемое характеристическим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2 + 2 - 1 - 2(1-\lambda) - \lambda - (1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2).$$

(Корни кубического уравнения в данном случае ищем среди целых делителей свободного члена.)

Итак, только при $\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2$ найдутся ненулевые значения A, B, C такие, что функции $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}, z = Ce^{\lambda t}$ будут решениями исходной системы дифференциальных уравнений. Поскольку функции вида $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ линейно независимы (доказательство см. в [1]), то и три частных решения, которые мы получим, тоже будут линейно независимыми, и их линейная комбинация будет общим решением системы.

Итак, пусть $\lambda = 1$; подставим функции $x = Ae^t, y = Be^t, z = Ce^t$ в исходную систему. После сокращения на e^t получим: $\begin{cases} -B + C = 0, \\ A - C = 0, \\ 2A - B - C = 0. \end{cases}$

Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно, например, $A = B = C = 1$. Итак, первое частное решение системы найдено: $x = e^t, y = e^t, z = e^t$.

Положим $\lambda = -1$; подставим функции $x = Ae^{-t}, y = Be^{-t}, z = Ce^{-t}$ в решаемую систему. После сокращения на e^{-t} получим: $\begin{cases} 2A - B + C = 0, \\ A + 2B - C = 0, \\ 2A - B + C = 0. \end{cases}$

Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно. Положим, например, $C = -1$; получим:

$$\begin{cases} 2A - B = 1, \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A - 2B = 2, \\ A + 2B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 1, \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/5, \\ B = -3/5. \end{cases}$$

Полученное решение отличается от других решений этой системы произвольным множителем, поэтому выберем более удобную тройку

$(A,B,C)=(1,-3,-5)$. Итак, второе частное решение, линейно независимое с первым, выглядит следующим образом: $x=e^{-t}, y=-3e^{-t}, z=-5e^{-t}$.

Положим $\lambda=2$; подставим функции $x=Ae^{2t}, y=Be^{2t}, z=Ce^{2t}$ в решаемую систему. После сокращения на e^{2t} получим:

$$\begin{cases}-A-B+C=0,\\ A-B-C=0,\\ 2A-B-2C=0.\end{cases}$$

Определитель этой системы, как известно, равен нулю, поэтому она имеет бесконечно много решений, из которых нам необходимо одно. Положим, например, $C=1$; получим:

$$\begin{cases}-A-B=-1,\\ A-B=+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=0,\\ A=1.\end{cases}$$

Таким образом, найдено третье частное решение: $x=e^{2t}, y=0, z=e^{2t}$.

Общее решение, записанное в векторной форме, выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\\ e^t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\ -3e^{-t}\\ -5e^{-t}\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}e^{2t}\\ 0\\ e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Оно же в координатной форме:

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{2t},\ \ y=C_1e^t+-3C_2e^{-t},\ z=C_1e^t-5C_2e^{-t}+C_3e^{2t}.$$

В случае наличия сопряженных комплексных корней характеристического уравнения решение ищут в виде $x=Ae^{(\alpha+i\beta)t}, y=Be^{(\alpha+i\beta)t}, z=Ce^{(\alpha+i\beta)t}$, находят *A*, *B* и *C* непосредственной подстановкой в систему, и переходом к тригонометрической форме функции комплексного переменного находят вещественную и мнимую части решения – именно они и будут парой линейно независимых частных решений. Подробности в [1 – 3].

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения частные решения ищут следующим образом. Пусть корень $\lambda=\lambda_1$ кратности 2. Соответствующее ему решение ищем в виде функций, являющихся произведением многочлена первого порядка относительно *t* с неопределёнными коэффициентами на $e^{\lambda_1 t}$, а именно:

$$x=(At+B)e^{\lambda_1 t},\ y=(Ct+D)e^{\lambda_1 t}.$$

Пример 2 [3, №794]. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

Пропуская этап подстановки функций $x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}$ в систему, перейдём сразу к характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

Решение ищем в виде

$$x = (At + B)e^{-t},\ y = (Ct + D)e^{-t}.$$

Эти функции подставим в систему и получим следующие тождества:

$$\begin{cases} (A - At - B)e^{-t} = -3(At + B)e^{-t} + 2(Ct + D)e^{-t}, \\ (C - Ct - D)e^{-t} = -2(At + B)e^{-t} + (Ct + D)e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -At + (A - B) = (-3A + 2C)t + (-3B + 2D), \\ -Ct + (C - D) = (-2A + C)t + (-2B + D). \end{cases}$$

Записанные тождества будут иметь место, если соответствующие коэффициенты линейных функций совпадут, а именно

$$-A = -3A + 2C,\ A - B = -3B + 2D,\ -C = -2A + C,\ C - D = -2B + D$$

или

$$A = C,\ \ A + 2B - 2D = 0, \text{ или } B = \tfrac{1}{2}(-A + 2D).$$

Переобозначим $A = C = C_1$, $D = C_2$, тогда

$$B = \tfrac{1}{2}(-C_1 + 2C_2).$$

По смыслу C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функции e^{-t} и te^{-t} – линейно независимые частные решения (доказательство см. в [1]).

Итак, общее решение системы:

$$x = C_1 te^{-t} + \tfrac{1}{2}(-C_1 + 2C_2)e^{-t},\ y = C_1 te^{-t} + C_2 e^{-t}.$$

В векторном виде это решение запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, частные решения, линейная комбинация которых здесь записана:

$$x_1 = te^{-t} - \tfrac{1}{2}e^{-t},\ y_1 = te^{-t};\ x_2 = e^{-t},\ y_2 = e^{-t}.$$

2.3. Решение линейных систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами

Общие подходы решения линейных разностных систем похожи на подходы к решению линейных дифференциальных систем (подробно см. в [4]). Общим решением разностной системы также будет максимальная линейная комбинация его линейно независимых частных решений.

Пример 3 [4, №169]. Решить линейную разностную систему второго порядка:

$$\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - 4y_k, \\ y_{x=1} = 2x_k + 2y_k. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде $x_k = A\lambda^k,\ y_k = B\lambda^k$.

Имеем:

$$\begin{cases} A\lambda^{k+1} = -2A\lambda^k - 4B\lambda^k, \\ B\lambda^{k+1} = 2A\lambda^k + 2B\lambda^k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-\lambda)A - 4B = 0, \\ 2A + (2-\lambda)B = 0. \end{cases}$$

Нетривиальные решения однородная система имеет только в случае, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i.$$

Функции $x_k = A(2i)^k,\ y_k = B(2i)^k$ подставим в исходную систему, при этом получим:

$\begin{cases} (-2-2i)A - 4B = 0, \\ 2A + (2-2i)B = 0 \end{cases}$ (первое уравнение получается из второго путем умножения обеих частей на $-1-i$).

Пусть $B = 1$, тогда $A = \dfrac{-2-2i}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Имеем:

$$x_k=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(2i)^k=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)2^k\left(\cos\frac{\pi}{2}k+i\sin\frac{\pi}{2}k\right)=$$

$$=2^{k-1}\left(\left(-\cos\frac{\pi}{2}k+\sin\frac{\pi}{2}k\right)+i\left(-\cos\frac{\pi}{2}k-\sin\frac{\pi}{2}k\right)\right),\; y_k=(2i)^k=2^k\left(\cos\frac{\pi}{2}k+i\sin\frac{\pi}{2}k\right).$$

Таким образом, независимые действительные частные решения:

$$x_k^{(1)}=2^{k-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}k+\sin\frac{\pi}{2}k\right),\quad y_k^{(1)}=2^k\cos\frac{\pi}{2}k;\quad x_k^{(2)}=2^{k-1}\left(-\cos\frac{\pi}{2}k-\sin\frac{\pi}{2}k\right),$$

$$y_k^{(2)}=2^k\sin\frac{\pi}{2}k.$$

Соответственно, общее решение:

$$\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=C_1\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix}-\cos\frac{\pi}{2}k+\sin\frac{\pi}{2}k\\ 2\cos\frac{\pi}{2}k\end{pmatrix}+C_2\cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix}-\cos\frac{\pi}{2}k-\sin\frac{\pi}{2}k\\ 2\sin\frac{\pi}{2}k\end{pmatrix}.$$

2.4. Исследование устойчивости и определение типа состояния равновесия систем с непрерывным временем

2.4.1. Устойчивость по первому приближению

Пример 4 [3, №905]. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия системы $\begin{cases}\dot{x}=\operatorname{tg}(z-y)-2x,\\ \dot{y}=\sqrt{9+12x}-3e^y,\\ \dot{z}=-3y.\end{cases}$

Пользуясь известными стандартными разложениями функций одного переменного по формуле Маклорена до первого порядка, получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x-y+z,\\ \dot{y}=2x-3y,\\ \dot{z}=-3y.\end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0,$$

то есть $\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i$.

Имеем: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1,2,3$. Поэтому начало координат – устойчивое (асимптотически устойчивое) состояние равновесия[1].

Замечание 1. Определить отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения можно было с помощью критерия Рауса-Гурвица (см. [3], [6]).

Замечание 2. Значения корней характеристического уравнения свидетельствуют о том, что состояние равновесия – устойчивый фокус (подробности см. в [5, п.2.2]). Поэтому данный способ может быть применим и при изучении типа состояния равновесия нелинейной системы с непрерывным временем.

2.4.2. Метод функций Ляпунова

Из глобальной теории динамических систем [7, гл.10] следует, что каждой динамической системе соответствует некоторая функция, которая убывает вдоль траекторий системы и имеет критические точки в неподвижных точках этой системы. Для исследования устойчивости состояний равновесия непрерывных систем такие функции впервые использовал А.М. Ляпунов, поэтому такие функции называются функциями Ляпунова. Метод заключается в том, чтобы найти некоторую функцию, которая в изучаемом состоянии равновесия системы имеет экстремум, и удовлетворяет некоторым другим условиям. А именно, если эта функция такова, что её значения в некоторой окрестности состояния равновесия имеют противоположный знак по сравнению с производной по времени в силу системы от этой функции, то изучаемая неподвижная точка устойчива (теорема Ляпунова). Если же существует некий сектор произвольной окрестности неподвижной точки, в точках которого значения функции Ляпунова и её производной в силу системы совпадают, то состояние равновесия системы неустойчиво (теорема Четаева). См. [3], [6].

Пример 5 [3, №924]. Исследовать на устойчивость нулевое состояние равновесия системы

[1] Точные определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости траектории динамической системы (решения системы дифференциальных уравнений) см., например, в [2] и [3].

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

Заметим, прежде всего, что если рассмотреть линеаризованную в окрестности начала координат систему, то корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми, то есть (0,0) не является гиперболической точкой, и неприменимы как теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, так и теорема Гробмана – Хартмана.

В качестве функции, претендующей на роль функции Ляпунова, выберем $V(x,y) = x^2 + y^2$. Она положительна в любой проколотой окрестности точки (0,0), $V(0,0) = 0$. Найдём производную от этой функции в силу изучаемой системы:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2x(-x + y + xy) + 2y\left(x - y - x^2 - y^3\right) =$$

$$= -2x^2 + 2xy + 2x^2y + 2xy - 2y^2 - 2x^2y - 2y^4 = -\left(x^2 + y^2\right) - (x+y)^2 - 2y^4 < 0$$

в любой проколотой окрестности начала координат. Таким образом, нулевое решение системы устойчиво.

Что касается типа состояния равновесия, то методом функций Ляпунова можно определить только, является ли данное состояние равновесия стоком. Седловую точку и источник с помощью этого метода не различают.

2.5. Исследование устойчивости и определение типа состояния равновесия систем с дискретным временем

Неподвижные точки систем с дискретным временем мы будем исследовать только в гиперболическом случае, то есть в случае, когда корни характеристического уравнения линеаризованной системы по модулю не совпадают с единицей. В этом случае в силу теоремы Гробмана – Хартмана [5, 7] неподвижная точка является источником, если все корни характеристического уравнения линеаризованной в окрестности исследуемой точки системы по модулю больше 1; неподвижная точка является стоком, если все корни характеристического уравнения линеаризованной в окрестности исследуемой точки системы по модулю меньше 1; неподвижная точка седловая, если все корни характеристического уравнения линеаризованной в окрестности исследуемой точки системы отличны от единицы, но некоторые из них по модулю больше 1, а некоторые по модулю меньше 1.

Пример 6. Исследовать на устойчивость нулевую неподвижную точку системы

$$\begin{cases} x_{k+1} = \operatorname{tg}(z_k - y_k) - 2x_k, \\ y_{k+1} = \sqrt{9+12x_k} - 3e^{y_k}, \\ z_{k+1} = -3y_k. \end{cases}$$

Пользуясь известными стандартными разложениями функций одного переменного по формуле Маклорена до первого порядка, получим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - y_k + z_k, \\ y_{k+1} = 2x_k - 3y_k, \\ \dot{z}_{k+1} = -3y_k. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ или

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0,$$

то есть $\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i$.

Имеем: $|\lambda_1| = 3 > 1,\ |\lambda_{2,3}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 1$.

Таким образом, нулевая неподвижная тоска исходной системы источник, то есть неустойчивая.

Замечание 3. В случае, когда состояние равновесия системы находится не в начале координат, а, например (в двумерном случае), в точке $x = x_0,\ y = y_0$, проблему исследования устойчивости (определение типа состояния равновесия) можно решить с помощью замены переменного в системе: $u = x - x_0\ \ v = y - y_0$. В полученной системе относительно u, v исследуем уже нулевое состояние равновесия.

Замечание 4. Задания курсовой работы в части прикладных методов нелинейной динамики в экономике подобны следующим задачам.

1. Источник [3]: №№786-812, 851-866, 899-912, 915-930, 961-992, 1021-1034. Решения некоторых задач можно посмотреть в [8].

2. Источник [4]: №№167-198, 213-219.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 2

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: наука, 1969 – 424 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 7-е, стереотипное. М.: ГИТТЛ, 1958. – 468 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Интеграл-Пресс, 1998. – 208 с.
4. Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие. – БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 112 с.
5. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Пер. с англ. С.С. Пашкиной. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 428 с.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 472 с.
7. Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. – 2nd ed. – CRC Press LLC, 1999. – 506 p.
8. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.

ГЛАВА 3. ЛОГИСТИКА

Логистика – наука о планировании, организации, управлении и контроле движения материальных потоков в пространстве и во времени от их первичного источника до конечного потребителя – является неотъемлемой частью экономики промышленно-развитых стран.

Содержание дисциплины «Логистика» направлено на ознакомление с теоретическими вопросами логистики и принципами математического моделирования логистических систем.

Специфика логистики как подхода, объединяющего различные области деятельности с целью достижения желаемого результата с минимальными затратами времени и ресурсов путем оптимального сквозного управления, обуславливает многообразие моделей и методов ее исследования. Модели логистики включают наряду с размещением фирм, управлением запасами, маршрутизацией и выбором транспортных средств, множественные цели фирмы, статистические модели и т.д. При моделировании логистических систем используются экономические, экономико-математические, статистические методы.

Можно выделить два основных типа математических моделей логистической системы – модели проектирования логистического цикла и модели управления. Модели проектирования определяют конфигурацию распределительной сети. Модели управления включают в себя управление запасами, производственные модели и задачи определения транспортных маршрутов.

В связи с невозможностью построения универсальной модели, способной учитывать все ситуации и возможные сценарии, большое внимание уделяется отдельным функциям логистики и также разработке объединенных моделей нескольких логистических функций. С точки зрения моделирования выделяются три категории объединения решений, касающихся различных функций: снабжение и производственное планирование, производственное и распределительное планирование, управление запасами и распределением.

В курсе «Логистика» излагается общая концепция логистических систем, выделяется круг проблем, рассматриваемых при их экономико-математическом моделировании. Исследуются затем основные математические модели распределения, транспортировки и управления запасами, при этом особое внимание уделяется задачам, возникающим при изучении автотранспортного обслуживания потребителей и фирм. Рассматриваются также модели распределительной логистики, связанные с определением размещения объектов, и модели, объединяющие задачи управления запасами и задачи маршрутизации в распределительной сети.

Поскольку логистика должна обеспечивать достижение оптимальной, то есть наилучшей с точки зрения определенных критериев и ограничений, цели предприятия, многие математические задачи логистического управления являются задачами оптимизации. Исследование перечисленных моделей сопровождается, в связи с этим, изучением методов решения специальных задач линейного программирования (в частности, задач транспортного типа), задач дискретного линейного программирования, динамического программирования. Дается понятие об эффективности эвристических алгоритмов решения поставленных задач.

Основная учебная задача курса состоит в ознакомлении студентов с основными понятиями и принципами построения логистических систем, а также в расширении и углублении знаний и умений студентов в области математического моделирования экономических процессов.

В результате изучения дисциплины студенты должны иметь представление о теоретических и методологических основах логистики, о месте логистики среди экономических дисциплин; знать основные логистические проблемы, при решении которых возникает необходимость в математическом инструментарии, классификацию и сущность основных методов решения задач дискретного программирования; уметь формализовать некоторые задачи логистического управления, выбирать приемлемый для данной задачи метод решения, использовать для решения задач готовые программные средства, анализировать полученные результаты и делать выводы, адекватные поставленной задаче; владеть методами решения специальных задач линейного программирования, основными методами решения задач дискретной оптимизации.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ОК-1, ОК-5, ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-9, ОК-11, ОК-12, ОК-13, ОК-16, ОК-17; ПК-3, ПК-19, ПК-20, ПК-21, ПК-28.

Целью научно-исследовательской работы по курсу «Логистика» является решение предложенной оптимизационной задачи, моделирующей одну из простейших задач логистического управления – транспортной задачи с дополнительными условиями, задачи коммивояжера, дискретной задачи размещения. Метод решения может быть любым, если это не оговорено при постановке задачи, допускается применение вычислительной техники и готовых программных средств. В последнем случае требуется описание используемого алгоритма.

3.1. Задачи

1. На трех базах находится однородный груз в количестве 150, 200, 150 условных единиц. Этот груз необходимо развести пяти потребителям, потребности которых в данном грузе оставляют 60, 140, 100, 80, 120 условных единиц соответственно.

Стоимость перевозок пропорциональна расстоянию и количеству перевозимого груза. Матрица тарифов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 19 & 8 & 14 & 5 & 9 \\ 6 & 10 & 5 & 25 & 11 \\ 7 & 13 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Возможны поставки груза на вторую базу от первой и третьей по стоимости 1 за условную единицу и от первого и третьего потребителя остальным со стоимостью 2 за условную единицу.

От первой базы четвертому потребителю разрешается перевозить не более 80 единиц груза, от третьего потребителя второму не более 90 единиц груза. От второй базы первому потребителю должно быть доставлено не менее 30 единиц груза.

Составить план перевозок такой, чтобы их общая стоимость была минимальной.

2. На трех базах находится однородный груз в количестве 150, 150, 200 условных единиц. Этот груз необходимо развести пяти потребителям, потребности которых в данном грузе оставляют 120, 90, 150, 130, 110 условных единиц соответственно.

Стоимость перевозок пропорциональна расстоянию и количеству перевозимого груза. Матрица тарифов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 16 & 48 \end{pmatrix}.$$

Возможна поставка груза на первую базу со второй и третьей со стоимостями 3 и 2 за условную единицу соответственно и от второго потребителя остальным потребителям по тарифам 6, 5, 6, 5.

От первой базы второму потребителю разрешается перевозить не более 400 единиц груза, от второго потребителя пятому – не более 100 единиц.

Штраф за недопоставку груза потребителям – 1 за условную единицу.

Составить план перевозок такой, чтобы их общая стоимость была минимальной.

3. Для графа, изображенного на рис. 3.1, найти центр, абсолютный центр, главный центр, абсолютный 2-центр.

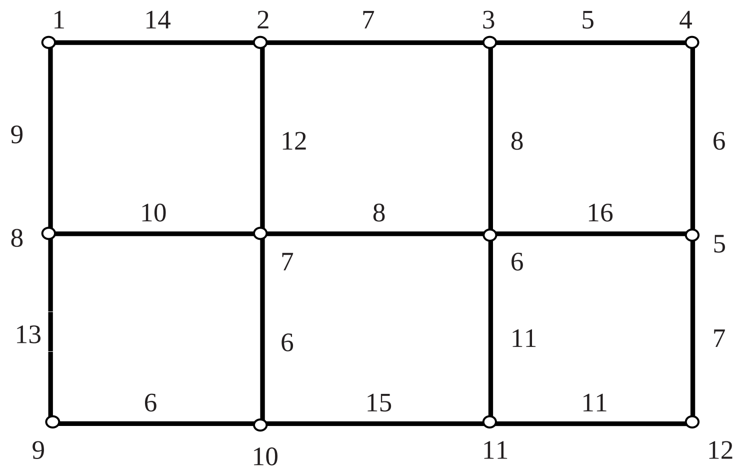

Рис. 3.1. Граф для задачи 3

4. Для графа, изображенного на рис. 3.2, найти медиану, главную медиану, 2-медиану.

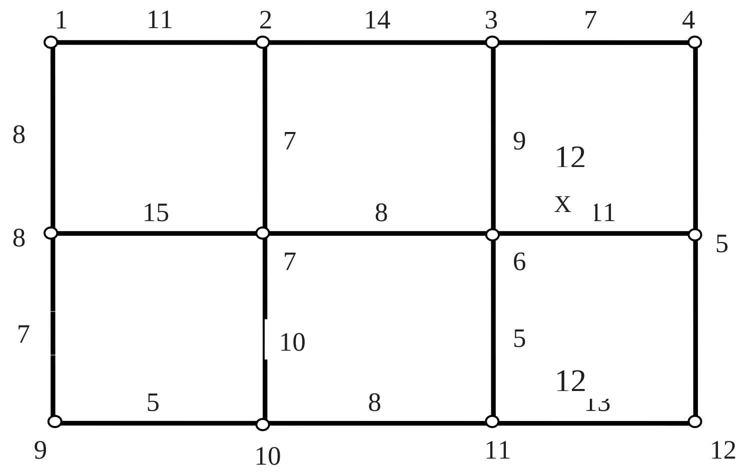

Рис. 3.2. Граф для задачи 4

5. Найти оптимальный порядок объезда пунктов, расстояния между которыми заданы матрицей.

–	33	6	21	46	37	41
33	–	30	40	14	25	17
6	30	–	19	51	43	38
21	40	19	–	43	65	52
46	14	51	43	–	31	28
37	25	43	65	31	–	15
41	17	38	52	28	15	–

6. Найти приближенное решение общей задачи коммивояжера с данной матрицей расстояний, используя несколько алгоритмов.

–	4	45	39	28	3	44	53	1
4	–	17	90	46	88	26	30	8
45	17	–	80	88	18	33	15	22
39	90	80	–	33	46	27	9	40
28	46	88	33	–	92	84	70	10
3	88	18	46	92	–	39	45	77
44	26	33	27	84	39	–	6	15
53	30	15	9	70	45	6	–	28
1	8	22	40	10	77	15	28	–

3.2. Пример решения задачи

На трех базах находится однородный груз в количестве 200, 250, 250 условных единиц. Этот груз необходимо развести пяти потребителям, потребности которых в данном грузе оставляют 80, 260, 100, 140, 120 условных единиц соответственно.

Стоимость перевозок пропорциональна расстоянию и количеству перевозимого груза. Матрица тарифов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 & 4 & 18 \\ 13 & 25 & 8 & 15 & 5 \\ 5 & 11 & 6 & 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

Возможна перевозка до 100 единиц груза со второй и третьей базы на первую со стоимостью 1 за условную единицу, также можно перевозить груз от первого и третьего потребителя остальным по тарифам

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок такой, чтобы их общая стоимость была минимальной.

Задача является сбалансированной:

$$200+250+250=700=80+260+100+140+120.$$

Первая база, первый и третий потребители являются транзитными пунктами. Для учёта транзитных перевозок введём буфер ёмкостью B=700. Построим транспортную таблицу (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Начальная транспортная таблица

	1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б 700
1б 900	7	9	15	4	18	0
2б 250	13	25	8	15	5	1(100)
3б 250	5	11	6	20	12	1(100)
1п 700	0	4	7	6	5	-
3п 700	6	7	0	5	4	-

Решение

Применим для решения задачи ***метод потенциалов***. Избавимся от ограничений на объём перевозок, введя дополнительные столбцы в транспортной таблице. Блокируем клетки с запретом на перевозки (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Транспортная таблица с учётом ограничений

	1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б 500	1б1 100	1б2 100
1б 900	7	9	15	4	18	0	0	0
2б 250	13	25	8	15	5	M	1	M
3б 250	5	11	6	20	12	M	M	1
1п 700	0	4	7	6	5	M	M	M
3п 700	6	7	0	5	4	M	M	M

Поскольку столбец 1б в табл. 3.2 содержит только одну допустимую клетку, заполняем её и исключаем этот столбец, корректируя предложение первой строки.

Начальный опорный план, найденный методом Фогеля, проверяем на оптимальность, рассчитывая потенциалы строк и столбцов таблицы (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Начальный опорный план

	1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100	
1б 400	7 60	9	15	4 140	18	0 100	0 100	7
2б 250	13 130	25	8	15	5 120	1	M	13
3б 250	5 150	11	6 100	20	12	M	1	5
1п 700	0 440	4 260	7	6	5	M	M	0
3п 700	6	7	0 700	5	4	M	M	-1
	0	4	1	-3	-8	-7	-7	

Условия оптимальности нарушаются для клеток (1б,2п), (2б,3п), (2б,1б1). Выбираем для заполнения клетку (2б,3п). Цикл пересчёта для неё содержит также клетки (2б,1п), (3б,1п), (3б,3п), перемещаемый по циклу объём поставок равен min{130,100}=100 (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Первая итерация метода потенциалов

	1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100
1б 400	7 60	9	15	4 140	18	0 100	0 100
2б 250	13 130	25	8	15	5 120	1	M
3б 250	5 150	11	6 100	20	12	M	1
1п 700	0 440	4 260	7	6	5	M	M
3п 700	6	7	0 700	5	4	M	M

Новый опорный план проверяем на оптимальность, клетку (2б,1б1) следует заполнить. Строим для неё цикл пересчёта, он включает клетки (1б,1б1), (1б,1п), (2б,1п). Объём перемещаемого груза равен 30 (табл. 3.5).

Условие оптимальности нарушается для полученного опорного плана в клетке (1б,2п), цикл пересчёта для неё содержит клетки (1б,1п), (1п,1п), (1п,2п), по циклу перемещается 90 единиц груза (табл. 3.6).

Условие оптимальности нарушается для полученного опорного плана в клетке (3б,3п), цикл пересчёта для неё содержит клетки (2б,3п), (2б,1б1), (1б,1б1), (1б,2п), (1п,2п), (1п,1п), (3б,1п), по циклу перемещается 70 единиц груза (табл. 3.7).

Таблица 3.5

Вторая итерация метода потенциалов

	1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100	
1б 400	7 60	9	15	4 140	18	0 100	0 100	7
2б 250	13 30	25	8 100	15	5 120	1	M	13
3б 250	5 250	11	6	20	12	M	1	5
1п 700	0 440	4 260	7	6	5	M	M	0
3п 700	6	7	0 700	5	4	M	M	5
	0	4	-5	-3	-8	-7	-7	

Таблица 3.6

Третья итерация метода потенциалов

		1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100	
1б	400	7 90	9	15	4 140	18	0 70	0 100	7
2б	250	13	25	8 100	15	5 120	1 30	M	8
3б	250	5 250	11	6	20	12	M	1	5
1п	700	0 440	4 260	7	6	5	M	M	0
3п	700	6	7	0 700	5	4	M	M	0
		0	4	0	-3	-3	-7	-7	

Таблица 3.7

Четвёртая итерация метода потенциалов

		1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100	
1б	400	7	9 90	15	4 140	18	0 70	0 100	5
2б	250	13	25	8 100	15	5 120	1 30	M	6
3б	250	5 250	11	6	20	12	M	1	5
1п	700	0 530	4 170	7	6	5	M	M	0
3п	700	6	7	0 700	5	4	M	M	-2
		0	4	2	-1	-1	-5	-5	

Получен оптимальный опорный план (табл. 3.8).

Таблица 3.8

Оптимальный план перевозок

		1п 780	2п 260	3п 800	4п 140	5п 120	1б1 100	1б2 100	
1б	400	7	9 160	15	4 140	18	0	0 100	5
2б	250	13	25	8 30	15	5 120	1 100	M	6
3б	250	5 180	11	6 70	20	12	M	1	5
1п	700	0 600	4 100	7	6	5	M	M	0
3п	700	6	7	0 700	5	4	M	M	-1
		0	4	1	-1	-1	-5	-5	

Получаем, что от первой базы доставляется 160 единиц груза второму потребителю и 140 – четвертому, от второй базы – 30 единиц груза третьему потребителю, 120 – пятому и 100 единиц груза отправляется на первую базу. С третьей базы доставляется 180 единиц груза первому потребителю и 70 третьему, первый потребитель поставляет второму 100 единиц груза. Общая стоимость перевозок равна

$$9\cdot160+4\cdot140+8\cdot30+5\cdot120+100+5\cdot180+6\cdot70+4\cdot100=4660.$$

Задача может быть решена любым другим методом, например, с помощью ***прямо-двойственного («венгерского») алгоритма***.

Приводим матрицу стоимостей и решаем ограниченную прямую задачу поиска максимального потока, используя алгоритм Форда-Фалкерсона (метки вершин указаны справа и внизу транспортной таблицы). Слева и вверху таблицы записаны нераспределенные остатки и неудовлетворённый спрос соответственно (табл. 3.9).

Таблица 3.9

Первая итерация венгерского алгоритма

	1п 340	2п 0	3п 100	4п 0	5п 0	1б 0	
1б 60	7	5	15	0 140	14	0 700	s
2б 130	12	20	7	10	0 120	0(100)	s
3б 250	4	6	5	15	7	0(100)	s
1п 0	0 440	0 260	7	2	1	–	
3п 0	6	3	0 700	1	0	–	
				1	2	1	

Преобразуем матрицу стоимостей, вычитая 4 из элементов отмеченных строк и прибавляя 4 к элементам отмеченных столбцов. Решаем ограниченную прямую задачу для новой матрицы (табл. 3.10).

Таблица 3.10

Вторая итерация венгерского алгоритма

	1п 90	2п 0	3п 100	4п 0	5п 0	1б 0	
1б 60	3	1	11	0 140	14	0 700	s
2б 130	8	16	3	10	0 120	0(100)	s
3б 0	0 250	2	1	15	7	0(100)	
1п 0	0 440	0 260	7	6	5	–	
3п 0	6	3	0 700	5	4	–	
				1	2	1	

Преобразуем матрицу стоимостей, вычитая 1 из элементов отмеченных строк и прибавляя 1 к элементам отмеченных столбцов. Решаем ограниченную прямую задачу для новой матрицы (табл. 3.11).

Таблица 3.11

Третья итерация венгерского алгоритма

		1п 0	2п 0	3п 100	4п 0	5п 0	1б 0	
1б	0	2	0 90	10	0 140	14	0 670	6
2б	100	7	15	2	10	0 120	0(100) 30	s
3б	0	0 250	2	1	16	8	1(100)	1
1п	0	0 530	0 170	7	7	6	–	2
3п	0	6	3	0 700	6	5	–	
		4	1		1	2	2	

Преобразуем матрицу стоимостей, вычитая 1 из элементов отмеченных строк и прибавляя 1 к элементам отмеченных столбцов. Решаем ограниченную прямую задачу для новой матрицы (табл. 3.12).

Вычитаем 1 из элементов отмеченной строки и прибавляем 1 к элементам отмеченного столбца. Заполняя ставшую допустимой клетку (2б, 3п), получаем оптимальное решение задачи (табл. 3.13). Его стоимость рассчитывается по исходной матрице стоимостей.

Таблица 3.12

Четвёртая итерация венгерского алгоритма

		1п 0	2п 0	3п 30	4п 0	5п 0	1б 0	
1б	0	2	0 160	9	0 140	14	0 600	
2б	30	7	15	1	10	0 120	0(100) 100	s
3б	0	0 180	2	0 70	16	8	1(100)	
1п	0	0 600	0 100	6	7	6	–	
3п	0	7	4	0 700	7	6	–	
						2		

Таблица 3.13

Оптимальный план перевозок

		1п 0	2п 0	3п 0	4п 0	5п 0	1б 0
1б	0	2	0 160	9	0 140	15	0 600
2б	0	6	14	0 30	9	0 120	-1(100) 100
3б	0	0 180	2	0 70	16	9	1(100)
1п	0	0 600	0 100	6	7	7	–
3п	0	7	4	0 700	7	7	–

Нетрудно проверить, что в данном случае решение транспортной задачи, полученное с помощью прямо-двойственного алгоритма, совпадает с решением, полученным методом потенциалов (табл. 3.14).

Таблица 3.14

Итоговая транспортная таблица

		1п 80	2п 260	3п 100	4п 140	5п 120	1б 0
1б	200	7	9 160	15	4 140	18	0
2б	250	13	25	8 30	15	5 120	1(100) 100
3б	250	5 180	11	6 70	20	12	1(100)
1п	0	0 600	4 100	7	6	5	–
3п	0	6	7	0 700	5	5	–

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 3

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М. Наука, 1981. – 340 с.
2. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
4. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. Пер. с англ. – М.: Мир,1981. – 328 с.
5. Модели и методы теории логистики / Под ред. В.С. Лукинского. – СПб.: Питер, 2008. – 448 с.
6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
7. Рыжиков Ю. Теория очередей и управление запасами: Учебное пособие. – М.: Дело, 2001. – 341 с.
8. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
9. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
10. Тюхтина А.А. Математические модели логистики. Транспортная задача: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. – 62 с.
11. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
12. Bramel J., Simchi-Levi D. The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management. – Springer-Verlag New York, 1997.

ЧАСТЬ II. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ НИР ПО ТЕМЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

ГЛАВА 4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Тема «Задачи оптимального управления с дискретным временем» соответствует разделу дисциплины Б3.ДВ3 «Методы оптимизации» по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика». Данная дисциплина относится к профессиональному циклу Б3; преподается на 3 курсе в 5 и 6 семестрах.

Процесс изучения дисциплины «Методы оптимизации» направлен на формирование общекультурных (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-17) и профессиональных (ПК-14, ПК-19, ПК-20, ПК-21) компетенций. В результате освоения дисциплины обучающийся должен *знать* основные понятия, принципы и методы оптимизации; существующие вычислительные методы, позволяющие получить численные результаты для решения оптимизационных задач, для обоснования и принятия оптимальных решений в области управления и бизнеса; возможности и границы применения различных подходов к исследованию оптимизационных задач. *Уметь:* давать математическую постановку экономико-математическим задачам поиска оптимального решения; сравнивать математические модели и выбирать для анализа изучаемой проблемы адекватные математические модели и методы оптимизации. *Владеть:* навыками использования методов оптимизации и численных методов, а также методов математического моделирования для анализа, оценки и прогнозирования макроэкономической динамики; навыками использования прикладных программ для исследования оптимизационных экономико-математических моделей.

Методы теории оптимального управления интенсивно используются в различных прикладных областях: в механике полета (решение различных задач оптимизации полета самолетов и космических кораблей), в технике (оптимизация работы технических систем, робототехника), в физике и энергетике (оптимизация режимов работы ядерных реакторов, оптимизация режимов передачи электрической энергии), в экономике (нахождение оптимальных режимов функционирования в различных микро- и макромоделях экономики), а также во многих других отраслях человеческой деятельности.

Центральным результатом математической теории оптимального управления является принцип максимума Понтрягина, представляющий собой необходимое условие в задаче оптимального управления. Он был высказан Л.С. Понтрягиным в качестве гипотезы в 1955 году, а затем доказан его учениками: Р.В. Гамкрелидзе – для линейного случая и В.Г. Болтянским – для общей нелинейной задачи с функциональными ограничениями.

После доказательства принципа максимума для задач оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, были созданы и получили развитие теория оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных, теория оптимального управления стохастическими процессами, теория некорректных задач оптимального управления, теория импульсного управления, а также теория дискретных оптимальных процессов. В общем случае для дискретных задач принцип максимума Понтрягина не имеет места: существуют примеры, в которых дискретное оптимальное управление не удовлетворяет условию максимума, т.е. функция Гамильтона-Понтрягина не достигает на оптимальном управлении своего максимума. Однако при дополнительных предположениях на постановку задачи принцип максимума имеет место и в дискретном случае.

Одновременно с принципом максимума Понтрягина и независимо от него в теории оптимального управления коллективом американских ученых во главе с Р. Беллманом был разработан метод динамического программирования. В его основе лежит, так называемый, принцип оптимальности Беллмана, впервые сформулированный автором в 50-х годах 20 века.

4.1. Дискретный принцип максимума в задачах оптимального управления с дискретным временем

Постановка задачи оптимального управления дискретным объектом (объектом с дискретным временем) аналогична постановке задачи математической теории оптимальных процессов (см. [1-4]). Отличие состоит в том, что независимая переменная (время) пробегает лишь дискретное множество значений $t = 0, 1, \dots, T$, а закон движения объекта (развития процесса) описывается системой разностных (а не дифференциальных) уравнений.

Пусть задан многошаговый процесс, состояние которого в каждый момент времени t описывается фазовым вектором

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \qquad t = 0, 1, 2, \dots, T.$$

Пусть процесс таков, что переход из состояния $x(t)$ в состояние $x(t+1)$ зависит от управления $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_r(t))$ и осуществляется по правилу, задаваемому отображением

$$x(t+1)=f(t,\,x(t),\,u(t)),\qquad t=0,1,\,2,\,\ldots,T-1. \tag{4.1}$$

Зная начальное состояние объекта

$$x(0)=x_0$$

и выбрав управление, т.е. последовательность векторов

$$u(0),\,u(1),\,\ldots,\,u(T-1)),$$

согласно рекуррентным соотношениям (4.1) получаем соответствующую траекторию

$$x(0),\,x(1),\,\ldots,\,x(T).$$

Наборы векторов

$$([x(0),x(1),\ldots,x(T)],[u(0),u(1),\ldots,u(T-1)]) = ([x],[u]),$$

удовлетворяющие (4.1), называются ***дискретным управляемым процессом***. Как и в случае с непрерывным временем, рассматриваются только допустимые управления, т.е. такие, что выполнено условие

$$u(t)\in U_t\subset R^r,\,t=0,1,\,\ldots,\,T-1, \tag{4.2}$$

где U_t - заданная область управления, меняющаяся от одного момента времени к другому (как частный случай, возможно, что $U_t\equiv U$, где U – заданное множество). Кроме того, в задаче могут присутствовать условия

$$x(0)=x_0\in X_0\subset R^n, \tag{4.3}$$

$$x(t)\in X_t\subset R^n,\,t=1,\,\ldots,\,T-1, \tag{4.4}$$

$$x(T)\in X_T\subset R^n. \tag{4.5}$$

Ограничения (4.4) называются фазовыми, условие (4.3) – начальным, (4.5) – терминальным. Множества X_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, U_t, $t = 0, \ldots, T-1$ могут быть заданы в виде системы ограничений типа равенств и неравенств.

Набор векторов управлений $[u]$ называется допустимым, если он удовлетворяет ограничениям (4.2) и для заданного начального $x_0 \in X_0$ набор векторов состояний $[x]$, построенный согласно соотношениям (4.1), удовлетворяет условиям (4.4), (4.5). Пара $([x],[u])$, состоящая из допустимых элементов, – ***допустимый процесс***.

Рассмотрим следующую ***дискретную задачу оптимального управления***: среди допустимых $([x],[u])$ требуется найти процесс, минимизирующий функцию

$$J([x],[u]) = \sum_{t=0}^{T-1} f_0(t, x(t), u(t)) + F(x(T)) \tag{4.6}$$

при ограничениях (4.1) – (4.5). Функции f_0, f, F предполагаются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов. Управление и траектория, дающие решение этой задачи, называются ***оптимальными***.

Для решения задач дискретного оптимального управления (в т.ч. и более общего вида, чем сформулированная выше) применяются метод динамического программирования, достаточные условия оптимальности в форме Кротова, необходимые условия оптимальности в виде дискретного принципа максимума Понтрягина.

Рассмотрим пример использования ***принципа максимума Понтрягина*** в исследовании дискретной задачи без ограничений на управление. Задача состоит в нахождении минимума функции (4.6) среди процессов, удовлетворяющих (4.1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Дискретный принцип максимума Понтрягина в данном частном случае воплощается в следующей системе необходимых условий оптимальности процесса $([\bar{x}], [\bar{u}])$:

1)

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)\\ \psi=\psi(t+1)}} = 0 \tag{4.7}$$

– ***основное соотношение принципа максимума*** для «внутреннего решения». Здесь $H(t, x, u, \psi) = \psi f(t, x, u) - f_0(t, x, u)$ – ***функция Гамильтона-Понтрягина***;

2)

$$\psi(t)=\frac{\partial H}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)\\ \psi=\psi(t+1)}}=0 \qquad (4.8)$$

– ***сопряженная система***;

3)

$$\psi(T)=-\frac{\partial F(x)}{\partial x}\Bigg|_{x=\bar{x}(T)} \qquad (4.9)$$

– ***условие трансверсальности*** для свободного конца.

4.2. Пример решения задачи

Исследовать дискретную задачу оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина:

$$J([x],[u])=\sum_{t=0}^{3}\left[x^2(t)+u^2(t)\right]+3x^2(4)\to\inf\ ,$$

$$x(t+1)=-x(t)+2u(t)),\qquad t=0,1,2,3,$$

$$x(0)=1.$$

Строим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,\,x(t),u(t),\psi(t))=\psi(-x+2u)-x^2-u^2.$$

Из условия (4.7) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial u}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)\\ \psi=\psi(t+1)}}=2\psi(t+1)-2\bar{u}(t)=0\,,$$

$$\bar{u}(t)=\psi(t+1)\,.$$

Из уравнения процесса управления задачи $x(t+1) = -x(t) + 2u(t))$ находим

$$\bar{x}(t) = 2\bar{u}(t) - \bar{x}(t+1) = 2\psi(t+1) - \bar{x}(t+1).$$

Сопряженная система (4.8) имеет вид

$$\psi(t) = \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t) \\ \psi=\psi(t+1)}} = -\psi(t+1) - 2\bar{x}(t).$$

Отсюда

$$\psi(t) = -\psi(t+1) - 2\bar{x}(t) = -\psi(t+1) - 2(2\bar{u}(t) - \bar{x}(t+1)) = -5\psi(t+1) + 2\bar{x}(t+1).$$

Следовательно,

$$\bar{x}(t) = 2\psi(t+1) - \bar{x}(t+1),$$
$$\psi(t) = -5\psi(t+1) + 2\bar{x}(t+1).$$

Данные выражения позволяют вести итерационный процесс.

Для $t = 3$ имеем

$$\bar{x}(3) = 2\psi(4) - \bar{x}(4),$$
$$\psi(3) = -5\psi(4) + 2\bar{x}(4).$$

При $t = 2$ получаем

$$\bar{x}(2) = 2\psi(3) - \bar{x}(3) = 2(-5\psi(4) + 2\bar{x}(4)) - 2\psi(4) + \bar{x}(4) = -12\psi(4) + 5\bar{x}(4),$$
$$\psi(2) = -5\psi(3) + 2\bar{x}(3) = -5(-5\psi(4) + 2\bar{x}(4)) + 2(2\psi(4) - \bar{x}(4)) = 29\psi(4) - 12\bar{x}(4),$$

при $t = 1$ получаем

$$\bar{x}(1) = 2\psi(2) - \bar{x}(2) = 58\psi(4) - 24\bar{x}(4) + 12\psi(4) - 5\bar{x}(4) = 70\psi(4) - 29\bar{x}(4),$$
$$\psi(1) = -5\psi(2) + 2\bar{x}(2) = -145\psi(4) + 60\bar{x}(4) - 24\psi(4) + 10\bar{x}(4) =$$
$$= -169\psi(4) + 70\bar{x}(4),$$

при $t = 0$ получаем

$$\bar{x}(0) = 2\psi(1) - \bar{x}(1) = -338\psi(4) + 140\bar{x}(4) - 70\psi(4) + 29\bar{x}(4) =$$
$$= -408\psi(4) + 169\bar{x}(4),$$
$$\psi(0) = -5\psi(1) + 2\bar{x}(1) = 845\psi(4) - 350\bar{x}(4) + 140\psi(4) - 58\bar{x}(4) =$$
$$= 985\psi(4) - 408\bar{x}(4).$$

Из условия трансверсальности (4.9) получаем

$$\psi(4) = -6\bar{x}(4),$$

отсюда

$$\bar{x}(0) = 2448\bar{x}(4) + 169\bar{x}(4) = 2617\bar{x}(4) = 1.$$

Следовательно,

$$\bar{x}(4) = \frac{1}{2617},$$

$$\psi(4) = -\frac{6}{2617}.$$

Подставляя найденные значения в правые части проведенных выше итераций, найдем искомые функции управления и состояния системы:

$$\bar{u}(3) = \psi(4) = -\frac{6}{2617},$$

$$\bar{x}(3) = 2\psi(4) - \bar{x}(4) = -\frac{13}{2617},$$

$$\bar{u}(2) = \psi(3) = -5\psi(4) + 2\bar{x}(4) = \frac{32}{2617},$$

$$\bar{x}(2) = -12\psi(4) + 5\bar{x}(4) = \frac{77}{2617},$$

$$\bar{u}(1) = \psi(2) = 29\psi(4) - 12\bar{x}(4) = -\frac{186}{2617},$$

$$\bar{x}(1) = 70\psi(4) - 29\bar{x}(4) = -\frac{449}{2617},$$

$$\bar{u}(0) = \psi(1) = -169\psi(4) + 70\bar{x}(4) = \frac{1084}{2617}.$$

Таким образом,

$$[\bar{x}] = [\bar{x}(0) = 1, \bar{x}(1) = -\frac{449}{2617}, \bar{x}(2) = \frac{77}{2617}, \bar{x}(3) = -\frac{13}{2617}, \bar{x}(4) = \frac{1}{2617}],$$

$$[\bar{u}] = [\bar{u}(0) = \frac{1084}{2617}1, \bar{u}(1) = -\frac{186}{2617}, \bar{u}(2) = \frac{32}{2617}, \bar{u}(3) = -\frac{6}{2617}]$$

– единственный допустимый процесс, подозрительный на решение задачи. Найденный процесс будет оптимальным в силу линейности уравнений процесса и выпуклости целевой функции.

4.3. Задача для самостоятельной работы

На основе дискретного принципа максимума Понтрягина исследовать задачу:

$$J([x],[u]) = \sum_{t=0}^{3}\left[\alpha u^2(t) - x(t)\right] - x^2(4) \to \inf ,$$

$$x(t+1) = 2x(t) - u(t)), \qquad t = 0, 1, 2, 3,$$

$$x(0) = \beta.$$

Значения параметров α, β соответствуют номеру варианта из таблицы 4.1.

Таблица 4.1

Значения параметров α, β

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 4

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. – М.: Высшая школа, 2006. – 584 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981. – 350 с.
3. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Оптимизация экономических систем. Основы теории и примеры расчетов в системе MATLAB. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2007. – 256 с.
4. Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.

ГЛАВА 5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ

При решении задач в экономике приходится иметь дело с многомерными совокупностями данных, когда каждый объект характеризуется целым набором признаков. В таких случаях высокую эффективность демонстрируют многомерные статистические методы анализа [1, 2] и нейронные сети – важнейшее направление искусственного интеллекта. Нейросетевые технологии являются одним из перспективных и совершенных средств, дающих новые подходы к исследованию многомерных задач [3, 7 – 11].

Реализация этих методов связана с применением информационных технологий. В настоящее время для анализа многомерных данных имеется свободно распространяемое программное обеспечение, программы собственного производства, коммерческие программные пакеты.

При обучении студентов в Нижегородском государственном университете им. Н.И Лобачевского (ННГУ) по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» рамках дисциплин: «Теоретические основы информатики», «Программирование», «Объектно-ориентированный анализ и программирование», «Нечёткая логика и нейронные сети» при проведении учебных занятий и самостоятельных исследований студенты эффективно используют язык программирования С++ [5, 6] и различные пакеты прикладных программ: MATLAB, STATISTICA®, DEDUCTOR, VISCOVERY SOMINE и др. Подробные инструкции по работе с пакетами и примеры, основанные на реальных статистических данных, приведены в адаптированных авторских учебных пособиях [7 – 10].

Эти учебные пособия охватывают многие актуальные задачи современной бизнес-информатики, поскольку в настоящее время нейросетевые технологии интенсивно развиваются и все больше применяются при решении задач распознавания образов, обработки зашумленных данных, классификации, составления расписаний, оптимизации, прогноза, моделирования сложных процессов, а также в социально-общественных и финансово-экономических исследованиях.

Указанным выше дисциплинам отводится важная роль формирования у студентов, с одной стороны, базовых знаний по информационным технологиям; с другой стороны, практических навыков по работе с конкретными программными продуктами.

Главной целью данных дисциплин при подготовке студентов к следующим видам профессиональной деятельности: аналитическая; исследование и анализ рынка информационных систем (ИТ) и информационно-коммуникационных технологий (ИКТ); анализ и оценка применения ИТ и ИКТ для управления бизнесом; научно-исследовательская; инновационно-предпринимательская; поиск, сбор, обработка, анализ и систематизация информации в экономике, управлении и ИКТ; подготовка обзоров, отчетов и научных публикаций является развитие студентов как компетентных личностей.

Процесс изучения дисциплин: «Теоретические основы информатики», «Программирование», «Объектно-ориентированный анализ и программирование», «Нечёткая логика и нейронные сети» направлен на формирование следующих компетенций:

общекультурные компетенции (ОК): ОК-1, ОК-6, ОК-7, ОК-9, ОК-11, ОК-12, ОК-13, ОК-16, ОК-17, ОК-18.

профессиональные компетенции (ПК):

- аналитическая деятельность: ПК-2, ПК-3;
- научно-исследовательская деятельность: ПК-20, ПК-21;
- инновационно-предпринимательская деятельность: ПК-28.

Следует отметить, что применение современных информационных технологий способствует качественному обучению студентов. Знания, полученные ими, помогут студентам эффективно использовать их в своей дальнейшей профессиональной деятельности.

5.1. Кластеризация данных

Решение многих задач в экономике требует проведения кластеризации данных.

Кластеризация – это разбиение множества примеров на несколько компактных областей (кластеров, групп). При этом количество кластеров заранее неизвестно. Распределение исходного набора примеров по кластерам называется ***кластерным решением*** [1, 2, 4].

Разделение примеров на кластеры должно удовлетворять следующим требованиям [1, 2, 4]:

- Каждый пример входит только в одну группу.
- Примеры внутри одного кластера похожи друг на друга.
- Примеры из разных групп имеют заметные различия.

При применении алгоритмов кластеризации одной из проблем является выбор оптимального количества кластеров. Общее количество кластеров и их состав зависят от выбираемых критериев разбиения. Если число кластеров выбрать слишком малым, могут быть упущены некоторые существенные характеристики данных. Если же кластеров будет очень много, то не получится эффективной итоговой информации о данных.

Каждый кластер имеет следующие математические характеристики: центр, радиус, среднеквадратическое отклонение, размер кластера [1, 2, 4].

Центр кластера – это среднее геометрическое место точек в пространстве данных.

Радиус кластера – максимальное расстояние точек от центра кластера.

Размер кластера определяется либо по радиусу кластера, либо по ***среднеквадратичному отклонению*** объектов для этого кластера. Объект относится к кластеру, если расстояние от объекта до центра кластера меньше радиуса кластера. В случае, когда это условие выполняется для двух и более кластеров, то объект является *спорным*. В этом случае неоднозначность задачи может быть устранена экспертом или аналитиком.

При проведении кластеризации с помощью ***многомерных статистических методов анализа данных*** используются различные меры расстояния между объектами (примерами, наблюдениями). Выбор метрики является узловым моментом исследования. В каждом конкретном случае он производится по-своему в зависимости от целей исследования. При данном алгоритме разбиения от выбора метрики зависит окончательный вариант разбиения на кластеры.

Для кластеризации данных обычно применяются две основные процедуры: *иерархическая кластеризация* и *метод К-средних*.

Иерархическая кластеризация происходит путем последовательного объединения меньших кластеров в большие кластеры. Процесс такого объединения можно представить на графике в виде *дендрограммы*, или *дерева объединения*. Дендрограмма наглядно показывает, каким образом кластеры соотносятся друг с другом. Кластерное решение получается путем обрезания дендрограммы на нужном уровне, образованном на дендрограмме при объединении кластеров.

Метод К-средних относится к ***неиерархической кластеризации***. Он представляет собой разделение набора данных на множество отдельных кластеров. Целью данного алгоритма является определение кластера там, где имеется большое количество сходных элементов данных. Для того чтобы воспользоваться методом K-средних, необходимо сначала задать число K – количество кластеров, а построить их должен алгоритм.

Следует отметить, что сложность методов иерархической кластеризации заключается в ограничении объема набора исходных данных. При большом количестве примеров желательно использовать метод K-средних. Однако преимуществом иерархического кластерного анализа по сравнению с методом K-средних являются:

а) более высокая устойчивость по отношению к шумам и выбросам, которые могут искажать среднее;

б) более высокая устойчивость по отношению к некорректному выбору метрики;

в) включение в набор данных, участвующий в кластеризации, незначимых примеров.

5.2. Применение нейросетевого моделирования в научных исследованиях студентов

Наряду с многомерными статистическими методами анализа данных, рассмотренными в разделе 5.1, в настоящее время для проведения кластеризации многомерных данных эффективно применяются ***нейронные сети, обу-***

чаемые без учителя. Одна из таких сетей – ***самоорганизующаяся карта (СОК) Кохонена*** [3, 8, 10, 11]. СОК эффективно можно использовать для анализа финансовой отчетности компаний, анализа инвестиционных возможностей, долгосрочного прогнозирования динамики процентных ставок и выявления предпосылок к банкротству предприятий, анализа перспективности инвестиций во взаимные фонды и акции, оценки недвижимости, сегментирования покупателей и клиентов, информационного обеспечения выработки маркетинговых стратегий и анализа рынка и др.

Алгоритм СОК основывается на соревновательном обучении без учителя. Он реализует сохраняющее топологию отображение из пространства большой размерности в элементы карты, или нейроны [3, 8, 10]. Поскольку нейроны образуют обычно двумерную решетку, то такое отображение является отображением пространства большой размерности на плоскость.

Свойство сохранения топологии заключается в следующем. Сходные векторы входных данных СОК распределяет по нейронам так, что точки, которые в пространстве входов расположены близко друг к другу, отображаются на близко расположенные элементы самоорганизующейся карты. Следовательно, самоорганизующаяся карта Кохонена может быть эффективным средством не только кластеризации многомерных данных, но и визуального представления данных большой размерности.

К инструментарию, реализующему СОК Кохонена, относятся следующие пакеты прикладных программ: Viscovery SOMine, STATISTICA®, NeuroShell, NeuroScalp, Deductor, MATLAB и др.

Программные пакеты Deductor и Viscovery SOMine, указанные в примерах заданий для научно-исследовательских работ, созданы в двух вариантах: для коммерческого применения существуют платные варианты пакетов – Deductor Professional и Viscovery SOMine Pro, а для образовательных целей используются бесплатные варианты – Deductor Academic и Viscovery SOMine Lite. Использование бесплатных версий в коммерческих целях запрещено.

В основу Viscovery SOMine положены концепции и алгоритмы пакетных СОК Кохонена – современного и прогрессивного варианта самообучающихся нейронных сетей [3, 8, 10]. Данный пакет позволяет решать целый ряд важных задач в научно-исследовательской деятельности. К таким задачам относятся: кластеризация данных, анализ зависимостей, нелинейная регрессия, ассоциация данных, распознавание образов и др.

Отметим, что пакет Deductor Academic включен в учебную программу многих высших учебных заведений России, Украины и Белоруссии. Среди них такие ВУЗы, как Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова, Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ), Санкт-Петербургский государственный университет, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижегородский технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижегородский филиал ГУ – Высшая школа экономики, Новосибирский государственный университет, Харьковский национальный экономический университет, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники и др.

Применение нейросетевого моделирования с использованием информационных технологий для анализа многомерных данных в научных исследованиях студентов способствуют получению качественных знаний в области анализа, которые отвечают современным потребностям экономики, техники и бизнеса [3, 12]. Студенты, которые умеют проводить научные исследования, анализировать их результаты, эффективно применять информационные технологии, по окончании обучения в ННГУ являются конкурентоспособными на рынке труда.

5.3. Примеры задач для научно-исследовательских работ студентов

Рассмотрим некоторые варианты задач для выполнения научно-исследовательских работ студентов.

В задачах предусмотрено:

1) поиск реальной статистической информации;
2) применение нейросетевого моделирования для проведения кластеризации данных;
3) использование информационных технологий, в частности пакетов Deductor и Viscovery SOMine.

Вариант № 1

Название работы: **«Применение информационных технологий в экономике: анализ денежных доходов населения в регионах Российской Федерации с использованием нейронных сетей»**

Задача:

Провести кластеризацию регионов РФ, используя исходные данные. Исследования необходимо выполнить с применением нейронных сетей, реализованных в пакете **Deductor**. Провести анализ результатов и получить экономические выводы по проведённым исследованиям.

Исходная информация на сайте:

http:/www.gks.ru/

Тема: «Уровень жизни населения: денежные доходы населения»

Последовательно выбрать пункты:

1. Официальная статистика.
2. Публикации.
3. Статистические издания в 2013 г. (либо в 2012 г.).
4. № 20.

Из представленной на сайте информации выбрать следующие данные:
1. Среднедушевые денежные доходы населения (руб.)
2. Средний размер назначенных пенсий (руб.)
3. Потребительские расходы в среднем на душу населения (руб.)
4. Численность собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения (штук)

Замечания:
1. В рассматриваемых таблицах использовать данные столбца только за один год (например, 2012 г., либо 2011 г.).
2. Удалить из таблиц строки с названиями федеральных округов и строку с общими итогами по РФ.
3. При необходимости провести стандартизацию исходных данных.

Вариант № 2

Название работы: «**Применение информационных технологий в экономике: нейросетевой анализ распределения числа предприятий и организаций по видам экономической деятельности в регионах России»**

Задача:

Провести кластеризацию регионов РФ, используя исходные данные. Исследования необходимо выполнить с применением нейронных сетей, реализованных в пакете **Viscovery SOMine**. Провести анализ результатов и получить экономические выводы по проведённым исследованиям.

Исходная информация на сайте:

http:/www.gks.ru/

Тема: «Предприятия и организации: распределение числа предприятий и организаций по видам экономической деятельности»

Последовательно выбрать пункты:
1. Официальная статистика.
2. Публикации.
3. Статистические издания в 2013 г. (либо в 2012 г.).
4. № 19.

Из представленной на сайте информации выбрать следующие данные:

1. Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство (штук).
2. Добыча полезных ископаемых (штук).
3. Обрабатывающие производства (штук).
4. Рыболовство, рыбоводство (штук).

Замечания:

1. В рассматриваемых таблицах использовать данные столбца только за один год (например, 2012 г., либо 2011 г.).
2. Удалить из таблиц строки с названиями федеральных округов и строку с общими итогами по РФ.
3. При необходимости провести стандартизацию исходных данных.

5.4. Образец оформления результатов научных исследований

Для выполнения студентами научно- исследовательских работ нужно:

1. Создать таблицу исходных данных в Excel и привести её в работе.
2. При необходимости стандартизовать исходные данные и привести в работе таблицу стандартизованных данных.
3. При использовании пакета Deductor привести в работе содержимое текстового файла, предназначенного для импорта в Deductor.
4. Провести кластеризацию данных с применением нейронных сетей, реализованных в программных пакетах, указанных в задании для НИР.
5. Провести анализ полученных результатов и сделать экономические выводы.
6. Привести список используемой литературы.

Этапы проведения нейросетевого моделирования с применением пакетов Deductor , Viscovery SOMine и других пакетов прикладных программ приведены в учебных пособиях [7 – 10]. Учебные пособия в необходимом количестве имеются в Фундаментальной библиотеке ННГУ. Они активно используются студентами механико-математического факультета на учебных занятиях, при выполнении самостоятельных работ, при написании научно-исследовательских и выпускных квалификационных работ. Учебными пособиями пользуются также студенты других факультетов ННГУ.

Рассмотрим оформление таблиц, рисунков и экономических выводов для варианта №1 заданий, приведённых в разделе 5.3, на примере использования программного пакета Deductor.

Исходные данные, подготовленные в Excel, приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные

	A	B	C	D	E
1		Среднедушевые денежные доходы по субъектам Российской Федерации 2012г.	Назначенные пенсии по субъектам Российской Федерации	Потребительские расходы в среднем на душу населения	Число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения
2	Белгородская область	21 562,9	8776,9	14149	245,7
3	Брянская область	17 421,6	8578	13194	139,3
4	Владимирская область	16 136,0	9018,4	12024	238,4
5	Воронежская область	18 885,1	8501,5	14810	280,2
6	Ивановская область	15 930,1	8789,6	11863	196,5
7	Калужская область	20 621,2	9138,9	14404	276,8
8	Костромская область	15 808,2	8669,6	10709	235,9
9	Курская область	18 807,8	8271,2	12803	237
10	Липецкая область	19 777,4	8583,9	14504	277
11	Московская область	29 699,1	9825,1	19680	326,6
12	Орловская область	16 762,2	8856,1	11598	271,7
13	Рязанская область	17 664,4	8663,3	12245	340,2
14	Смоленская область	18 250,4	8670,1	12990	263,5
15	Тамбовская область	17 469,8	8180,1	13110	239,1
16	Тверская область	17 247,3	8922,7	12973	319
17	Тульская область	19 291,1	8997,6	13502	291,3
18	Ярославская область	18 512,5	9229	12694	194,8
19	г.Москва	48 621,6	9845,1	37175	291,5
20	Республика Карелия	20 037,4	11226,3	13917	300,4
21	Республика Коми	26 787,3	11643,4	17701	242,8
22	Архангельская область	23 635,8	11437,4	16018	227,5
23	Ненецкий авт.округ	61 936,9	14075,7	18093	228,6
24	Вологодская область	18 125,2	9414,4	12066	254,7

Введём обозначения:

Reg – Регионы РФ.

X1 – Среднедушевые денежные доходы по субъектам Российской Федерации 2012 г.

X2 – Назначенные пенсии по субъектам Российской Федерации.

X3 – Потребительские расходы в среднем на душу населения.

X4 – Число собственных легковых автомобилей на 1000 человек.

Стандартизованные данные показаны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Стандартизованные данные

	A	B	C	D	E
1	Reg	x1	x2	x3	x4
2	Белгородская область	0,0353	-0,3524	-0,0319	-0,0189
3	Брянская область	-0,4232	-0,4609	-0,2296	-2,0961
4	Владимирская область	-0,5655	-0,2206	-0,4717	-0,1614
5	Воронежская область	-0,2612	-0,5027	0,1049	0,6546
6	Ивановская область	-0,5883	-0,3454	-0,5050	-0,9794
7	Калужская область	-0,0690	-0,1548	0,0208	0,5882
8	Костромская область	-0,6018	-0,4109	-0,7439	-0,2102
9	Курская область	-0,2697	-0,6284	-0,3105	-0,1888
10	Липецкая область	-0,1624	-0,4577	0,0415	0,5921
11	Московская область	0,9360	0,2197	1,1128	1,5604
12	Орловская область	-0,4962	-0,3092	-0,5599	0,4887
13	Рязанская область	-0,3963	-0,4144	-0,4260	1,8259
14	Смоленская область	-0,3314	-0,4107	-0,2718	0,3286
15	Тамбовская область	-0,4179	-0,6781	-0,2470	-0,1478
16	Тверская область	-0,4425	-0,2728	-0,2753	1,4121
17	Тульская область	-0,2162	-0,2319	-0,1658	0,8713
18	Ярославская область	-0,3024	-0,1056	-0,3331	-1,0126
19	г.Москва	3,0307	0,2306	4,7335	0,8752
20	Республика Карелия	-0,1336	0,9845	-0,0799	1,0489
21	Республика Коми	0,6136	1,2121	0,7032	-0,0755
22	Архангельская область	0,2647	1,0997	0,3549	-0,3742
23	Ненецкий авт.округ	4,5048	2,5396	0,7843	-0,3527
24	Вологодская область	-0,3453	-0,0044	-0,4630	0,1568

Для начала работы необходимо импортировать данные табл. 5.2 в среду Deductor Academic. Поскольку версия Deductor Academic является обучающей и бесплатной, она не поддерживает взаимодействие с Microsoft Excel. Поэтому в Excel стандартизованные данные преобразуем в текстовый файл.

Для этого необходимо выполнить следующие действия.

1. Таблицу 5.2 дополняем столбцом, содержащим символ «**;**» (точка с запятой), так как завершение каждой строки в текстовом файле должно быть отмечено (см. табл. 5.3).
2. Сохраняем в Excel файл с таблицей 5.3 как текстовый, указав тип файла: **Текстовые файлы (с разделителями табуляции)(*.txt)**. На рис.5.1 приведен образец текстового файла, подготовленного для импорта его в пакет Deductor Academic.
3. При импорте текстового файла в среду Deductor Academic нужно указать разделитель для столбцов в текстовом файле. Выбираем пункт «**Символ табуляции**».

Таблица 5.3

Стандартизованные данные, подготовленные в Excel для создания текстового файла

	A	B	C	D	E	F
1	Reg	x1	x2	x3	x4	
2	Белгородская область	0,0353	-0,3524	-0,0319	-0,0189	;
3	Брянская область	-0,4232	-0,4609	-0,2296	-2,0961	;
4	Владимирская область	-0,5655	-0,2206	-0,4717	-0,1614	;
5	Воронежская область	-0,2612	-0,5027	0,1049	0,6546	;
6	Ивановская область	-0,5883	-0,3454	-0,5050	-0,9794	;
7	Калужская область	-0,0690	-0,1548	0,0208	0,5882	;
8	Костромская область	-0,6018	-0,4109	-0,7439	-0,2102	;
9	Курская область	-0,2697	-0,6284	-0,3105	-0,1888	;
10	Липецкая область	-0,1624	-0,4577	0,0415	0,5921	;
11	Московская область	0,9360	0,2197	1,1128	1,5604	;
12	Орловская область	-0,4962	-0,3092	-0,5599	0,4887	;
13	Рязанская область	-0,3963	-0,4144	-0,4260	1,8259	;
14	Смоленская область	-0,3314	-0,4107	-0,2718	0,3286	;
15	Тамбовская область	-0,4179	-0,6781	-0,2470	-0,1478	;
16	Тверская область	-0,4425	-0,2728	-0,2753	1,4121	;
17	Тульская область	-0,2162	-0,2319	-0,1658	0,8713	;
18	Ярославская область	-0,3024	-0,1056	-0,3331	-1,0126	;
19	г.Москва	3,0307	0,2306	4,7335	0,8752	;
20	Республика Карелия	-0,1336	0,9845	-0,0799	1,0489	;
21	Республика Коми	0,6136	1,2121	0,7032	-0,0755	;
22	Архангельская область	0,2647	1,0997	0,3549	-0,3742	;
23	Ненецкий авт.округ	4,5048	2,5396	0,7843	-0,3527	;
24	Вологодская область	-0,3453	-0,0044	-0,4630	0,1568	;

```
os — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
Reg     x1      x2      x3      x4
Белгородская область    0,0353  -0,3524 -0,0319 -0,0189 ";"
Брянская область        -0,4232 -0,4609 -0,2296 -2,0961 ";"
Владимирская область    -0,5655 -0,2206 -0,4717 -0,1614 ";"
Воронежская область     -0,2612 -0,5027 0,1049  0,6546  ";"
Ивановская область      -0,5883 -0,3454 -0,5050 -0,9794 ";"
Калужская область       -0,0690 -0,1548 0,0208  0,5882  ";"
Костромская область     -0,6018 -0,4109 -0,7439 -0,2102 ";"
Курская область -0,2697 -0,6284 -0,3105 -0,1888 ";"
Липецкая область        -0,1624 -0,4577 0,0415  0,5921  ";"
Московская область      0,9360  0,2197  1,1128  1,5604  ";"
Орловская область       -0,4962 -0,3092 -0,5599 0,4887  ";"
Рязанская область       -0,3963 -0,4144 -0,4260 1,8259  ";"
Смоленская область      -0,3314 -0,4107 -0,2718 0,3286  ";"
Тамбовская область      -0,4179 -0,6781 -0,2470 -0,1478 ";"
Тверская область        -0,4425 -0,2728 -0,2753 1,4121  ";"
Тульская область        -0,2162 -0,2319 -0,1658 0,8713  ";"
Ярославская область     -0,3024 -0,1056 -0,3331 -1,0126 ";"
г.Москва        3,0307  0,2306  4,7335  0,8752  ";"
Республика Карелия      -0,1336 0,9845  -0,0799 1,0489  ";"
Республика Коми 0,6136  1,2121  0,7032  -0,0755 ";"
Архангельская область           0,2647  1,0997  0,3549  -0,3742 ";"
Ненецкий авт.округ      4,5048  2,5396  0,7843  -0,3527 ";"
Вологодская область     -0,3453 -0,0044 -0,4630 0,1568  ";"
Калининградская область -0,2074 -0,3811 -0,1313 1,2403  ";"
Ленинградская область   -0,3675 -0,0081 -0,0841 0,7366  ";"
Мурманская область      0,8147  1,6778  1,0130  0,6214  ";"
Новгородская область    -0,1766 -0,2465 0,0047  0,1646  ";"
Псковская область       -0,5349 -0,3889 -0,3442 0,8869  ";"
г.Санкт-Петербург       0,7251  0,6136  1,6192  0,8225  ";"
```

Рис. 5.1. Содержимое текстового файла для импорта в Deductor

В результате нейросетевого моделирования с использованием СОК Кохонена получаем карту разбиения анализируемых данных на кластеры (см. рис. 5.2).

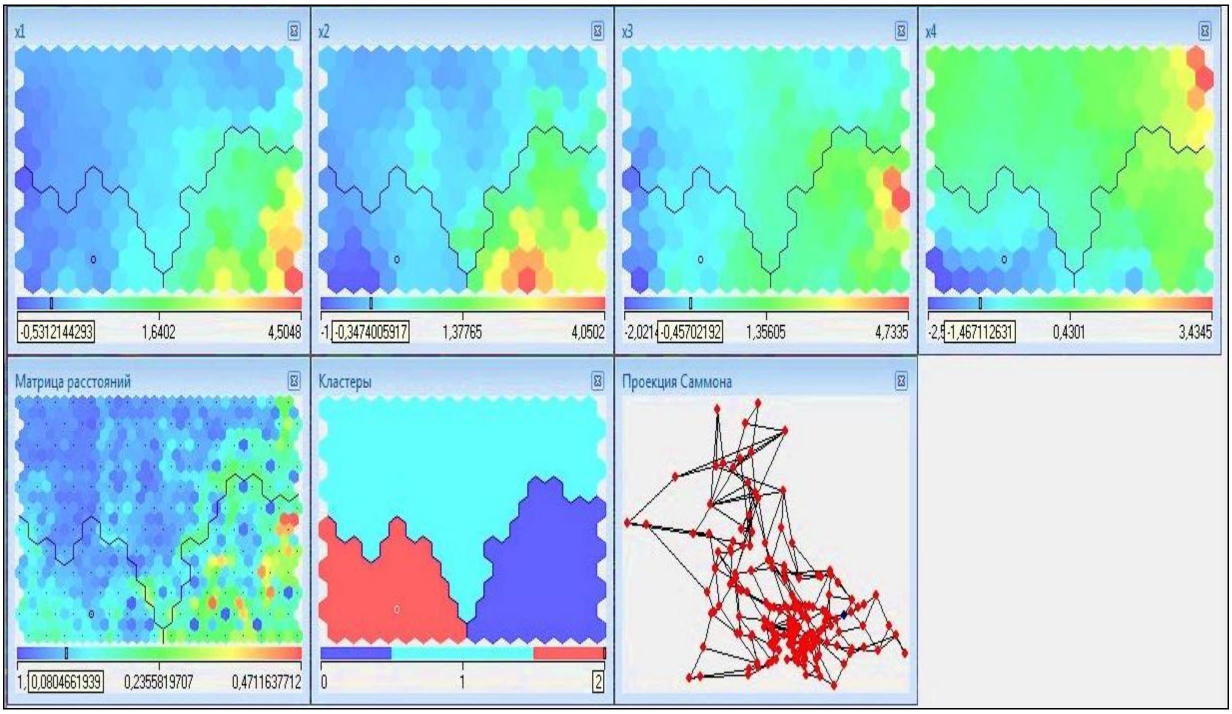

Рис. 5.2. Карты входов (4 карты), матрица расстояний, разбиение на кластеры и проекция Саммона

Из рис. 5.2 видно, что 83 региона РФ в 2012 г. по исследуемым показателям распределились по трём кластерам, состав которых приведён в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Распределение регионов РФ по кластерам

Номер кластера (количество регионов)	**Состав кластера**
0 (13)	г. Москва, Республика Коми, Ненецкий автономный округ, Мурманская область, г.Санкт-Петербург, Тюменская область , Ханты-Мансийский автономный округ, Ямало-Ненецкий автономный округ, Республика Саха (Якутия), Камчатский край, Магаданская область, Сахалинская область, Чукотский автономный округ
	Белгородская область, Владимирская область, Воронежская область, Калужская область, Костромская область, Курская область, Липецкая область, Московская область, Орловская область, Рязанская область, Смоленская область, Тамбовская область ,Тверская область, Тульская область, Республика Карелия, Архангельская область, Вологодская область, Калининград-

1 (52)	ская область, Ленинградская область, Новгородская область, Псковская область, Республика Адыгея, Краснодарский край, Астраханская область, Волгоградская область, Ростовская область, Ставропольский край, Республика Башкортостан, Республика Марий Эл, Удмуртская Республика, Нижегородская область, Оренбургская область, Пензенская область, Самарская область, Саратовская область, Ульяновская область, Курганская область, Свердловская область, Челябинская область, Республика Алтай, Алтайский край, Забайкальский край, Красноярский край, Иркутская область, Кемеровская область, Новосибирская область, Омская область, Томская область, Приморский край, Хабаровский край, Амурская область, Еврейская автономная область
2 (18)	Ярославская область, Чувашская Республика, Чеченская Республика, Республика Хакасия, Республика Тыва, Республика Татарстан, Республика Мордовия, Республика Калмыкия, Республика Ингушетия, Республика Дагестан, Республика Бурятия, Республика Северная Осетия – Алания, Пермский край, Кировская область, Карачаево-Черкесская Республика, Кабардино-Балкарская Республика, Ивановская область, Брянская область

Рис. 5.3 демонстрирует содержимое вкладки **Профили кластеров**, где показана значимость каждого показателя на формирование кластеров.

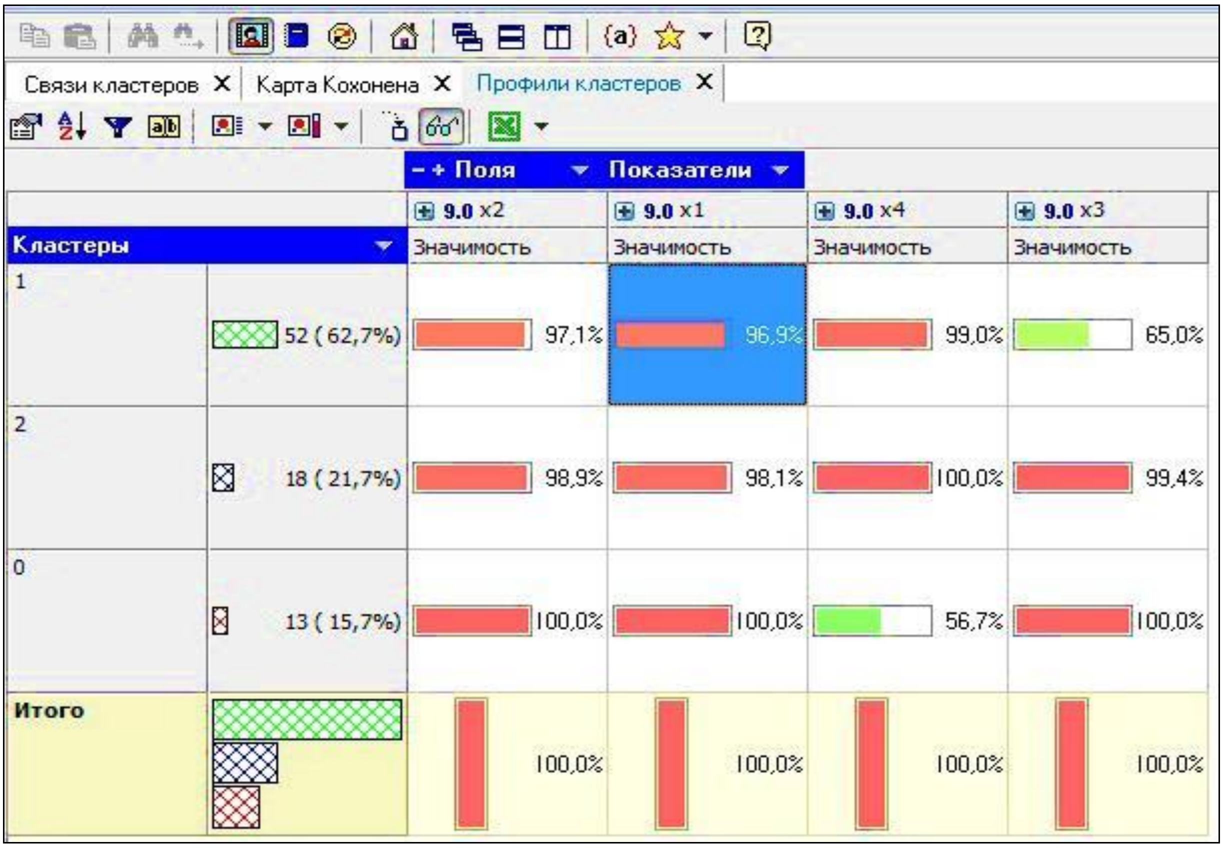

Рис. 5.3. Окно вкладки **Профили кластеров**

В табл. 5.5 приведены средние значения показателей в кластерах.

Таблица 5.5

Таблица средних значений показателей в кластерах

Номер кластера / **Показатель**	**0**	**1**	**2**
Среднедушевые денежные доходы по субъектам Российской Федерации	4,505	-0,264	-0,573
Назначенные пенсии по субъектам Российской Федерации	4,050	-0,270	-0,620
Потребительские расходы в среднем на душу населения	1,484	-0,125	-0,712
Число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения	0,230	0,389	-1,291

В табл. 5.6 и табл. 5.7 представлены соответственно минимальные и максимальные значения показателей в кластерах.

Таблица 5.6

Минимальные значения показателей в кластерах

Номер кластера / **Показатель**	**0**	**1**	**2**
Среднедушевые денежные доходы по субъектам Российской Федерации	0,614	-0,964	-1,224
Назначенные пенсии по субъектам Российской Федерации	0,231	-0,718	-1,295
Потребительские расходы в среднем на душу населения	0,234	-1,327	-2,021
Число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения	-1,702	-0,638	-2,574

Таблица 5.7

Максимальные значения показателей в кластерах

Показатель \ Номер кластера	0	1	2
Среднедушевые денежные доходы по субъектам Российской Федерации	4,505	0,936	0,306
Назначенные пенсии по субъектам Российской Федерации	4,050	1,100	-0,106
Потребительские расходы в среднем на душу населения	4,733	1,595	1,018
Число собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения	1,115	3,434	-0,232

5.4.1. Результаты и их экономический смысл

Из табл. 5.4 – 5.7 следует, что 18 регионов РФ, вошедших **в кластер № 0**, обладают очень высокими показателями среднедушевых денежных доходов, назначенных пенсий и потребительских расходов в среднем на душу населения. Однако количество собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения ниже, чем в регионах, распределившихся в кластер № 1. Несмотря на это все показатели в кластере № 0 намного выше средних значений показателей по России.

Кластер № 1 является наибольшим по количеству регионов – 52 региона, в том числе *Нижегородская область*. Регионы, составившие кластер № 1, имеют по сравнению с кластером № 0 низкий уровень по показателям назначенных пенсий, среднедушевых денежных доходов и потребительских расходов в среднем на душу населения. Эти показатели в данном кластере ниже средних показателей по всем регионам РФ. Показатель количества собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения в регионах, распределившихся в кластер № 1, является самым высоким.

Кластер № 2 составили регионы, в которых все показатели ниже средних показателей по России и особенно показатель количества собственных легковых автомобилей на 1000 человек населения.

Таким образом, применение в экономических приложениях информационных технологий, в частности нейронных сетей, позволяет быстро проводить анализ многомерных данных с целью принятия эффективных экономических и управленческих решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 5

1. Балабанов А.С., Стронгина Н.Р. Анализ данных в экономических приложениях: Учебное пособие. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 135 с.
2. Балабанов А.С., Стронгина Н.Р. Анализ данных в экономических приложениях: компьютерный практикум в SPSS. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2003. – 100 с.
3. Дебок Г., Кохонен Т. Анализ финансовых данных с помощью самоорганизующихся карт: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «АЛЬПИНА», 2001. – 317 с.
4. Кузнецов Ю.А., Перова В.И. Кластерный анализ в экономических приложениях с применением ППП «STATISTICA»: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009. – 88 с.
5. Перова В.И. Программирование на C++ в среде Visual Studio.NET: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. – 261 с.
6. Перова В.И., Сабаева Т.А. Программирование на языке C++: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 132 с.
7. Перова В.И. Нейронные сети в экономических приложениях. Часть 1. Нейронные сети, обучаемые с учителем: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 130 с.
8. Перова В.И. Нейронные сети в экономических приложениях. Часть 2. Нейронные сети, обучаемые без учителя: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 135 с.
9. Перова В.И. Нейронные сети. Часть 1: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 155 с.
10. Перова В.И. Нейронные сети. Часть 2: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 111 с.
11. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
12. Basegroup Labs. Аналитический пакет Deductor: руководство пользователя. 2002. – 184 с. – Режим доступа: http://www.basegroup.ru/, свободный.

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

6.1. Взгляд на проблему и характеристика курса

Применение математических методов для исследования разнообразных задач биологии, экологии, химии и физики имеет весьма давнюю традицию. Проблемы количественного выражения и описания основных тенденций и закономерностей, а также анализа эмпирических данных, привели к формированию многочисленных научных направлений, носящих междисциплинарный характер и интегрирующих как специальные, специфические для данной предметной области, так и общие математические подходы и методы в некоторую целостную систему. На этом пути возникли такие дисциплины, как «математическая биофизика», «математическая теория горения и взрыва», «математическая физика» и многие другие. Можно сказать, что математические методы (в том или ином объеме) входят теперь в обязательный минимум подготовки и биологов, и химиков, и экономистов, и становятся для них столь же обычным инструментом анализа и исследования, как и для физиков.

Знакомство с перечисленными выше областями приложений математики является актуальной задачей и для современного экономиста.

Целью курса «Математические модели современного естествознания» является ознакомление слушателей с основными понятиями и принципами метода математического моделирования и системного анализа. Освоение данного курса включает в себя изучение элементов современных математических методов, широко применяемых при анализе математических моделей, возникающих в естественнонаучных и инженерно-технических исследованиях, а также в знакомстве с рядом классических математических моделей биологических, химических, физических и экологических процессов и явлений.

К числу важнейших задач, стоящих перед настоящим курсом, относятся следующие:

- формирование вкуса к естественнонаучным и инженерно-техническим исследованиям и разработкам;
- устранение тематического и психологического барьера между фундаментальной теоретической подготовкой выпускника механико-математического факультета и его возможной деятельностью в различных областях приложений математики;
- повышение востребованности будущего экономиста-математика;

- установление преемственности данного курса по отношению к классическим математическим дисциплинам, и, в первую очередь, к дисциплинам «Математический анализ», «Дифференциальные и разностные уравнения», «Методы оптимизации» и другие;
- расширение кругозора будущего экономиста-математика, позволяющее в дальнейшем ориентироваться в научной и специальной литературе, касающейся как общих математических методов, так и конкретных областей знания.

В курсе демонстрируются процессы формализации постановок задач, построения соответствующих математических моделей, их исследования и содержательной интерпретации в терминах предметной области. Устанавливаются единство структуры математических моделей из различных областей знания, имеющих различную содержательную интерпретацию, а также единство математических методов исследования разнообразных математических моделей. Теоретическая часть курса отражает совокупность методов качественной теории динамических систем, общей теории систем, методов оптимизации и теории оптимального управления, которые могут использоваться в различных прикладных исследованиях. Основная учебная задача курса состоит в расширении и углублении знаний студентов в области математического моделирования и исследования проблем естествознания, в установлении междисциплинарных связей, в выявлении роли природных и иных (внешних по отношению к собственно экономическим явлениям) факторов в макроэкономических процессах.

Знания, приобретенные в данном курсе, позволяют получить более основательное представление о проблемах естествознания, что создает основу как для успешного освоения последующих специальных теоретических и прикладных дисциплин, так и для возможной научно - исследовательской деятельности.

Изучение дисциплины «Математические модели современного естествознания» направлено на формирование у студентов следующих компетенций:

Общекультурные компетенции (ОК):

- ✓ владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- ✓ способен анализировать социально-значимые проблемы и процессы, происходящие в обществе, и прогнозировать возможное их развитие в будущем (ОК-4);
- ✓ способен логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6);
- ✓ готов к ответственному и целеустремленному решению поставленных задач во взаимодействии с обществом, коллективом, партнерами (ОК-7);

- ✓ способен к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);
- ✓ способен критически оценивать свои достоинства и недостатки, наметить пути и выбрать средства развития достоинств и устранения недостатков (ОК-10);
- ✓ осознает социальную значимость своей будущей профессии, обладает высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности (ОК-11);
- ✓ способен работать с информацией из различных источников (ОК-16);
- ✓ способен к организованному подходу к освоению и приобретению новых навыков и компетенций (ОК-17);

Профессиональные компетенции (ПК):

научно-исследовательская деятельность:

- ✓ использовать основные методы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования (ПК-19);
- ✓ использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-20);
- ✓ готовить научно-технические отчеты, презентации, научные публикации по результатам выполненных исследований (ПК-21);

В результате изучения курса студент должен: знать возможности математических методов в области математического моделирования проблем современного естествознания; общую схему применения метода математического моделирования, основные теоретические принципы, аналитические (теоретические) подходы и прикладные методики, позволяющие получить решение разнообразных прикладных задач; уметь давать математическую постановку некоторым наиболее характерным задачам современного естествознания, возникающим при исследовании математических моделей теории биологических, химических и физических систем; сравнивать математические модели и выбирать для анализа изучаемой проблемы адекватные математические модели, теоретические принципы и прикладные методики; иметь представление о возможностях и границах применения различных подходов к исследованию проблем современного естествознания, о возможностях и границах применения существующих математических моделей, основных принципов и методов их построения; обладать навыками использования некоторых методов математического моделирования для анализа ряда характерных задач современного естествознания, возникающих в области математических моделей теории биологических, химических и физических систем.

6.2. Описание характерного задания по курсу, выполняемого в рамках междисциплинарной научно-исследовательской работы

6.2.1. Общая характеристика задания

В настоящее время во многих исследованиях, относящимся к техническим, естественнонаучным и социально-экономическим наукам, достаточно широко используются биологические аналогии и терминология, восходящая к биологическим наукам. При этом, весьма часто применяются и различные модификации математических моделей, первоначально возникших в рамках математической биофизики (см., например, [1, 3, 7 – 10, 15] и др.). В частности, в задачах, связанных с моделированием процесса распространения нововведений (диффузии инноваций), широко применяются математические модели динамики роста и конкурентного взаимодействия биологических популяций, особенно модели типа модели Лотки – Вольтерра, в которых «внутривидовое» взаимодействие элементов популяции описывается моделью Ферхюльста – Пирла – Рида. Можно сказать, что, в определенном смысле, модели этого типа в настоящее время занимают доминирующее положение. Однако имеются факты, свидетельствующие о том, что описанные выше модели типа Лотки – Вольтера далеко не всегда адекватно описывает наблюдающиеся факты. Поэтому в последнее время в задачах моделирования диффузии инноваций всё чаще делаются попытки использования других «базовых» математических моделей динамики роста и взаимодействия биологических популяций.

Значительный интерес в исследованиях в указанной области может представлять применение модели Гилпина – Айала (Gilpin M.E., Ayala F.J.), введенной в рассмотрение в работах [12 – 14]; для этой модели используется также другое наименование – θ – логистическая модель (θ – *logistic model, theta-logistic model*). Она содержит дополнительные параметры, служащие характеристикой взаимодействия биологических популяций, и, тем самым, расширяет возможности сопоставления теоретических исследований и экспериментальных данных. В частности, модель Гилпина – Айала включает в себя как частный случай и хорошо известную модель Лотки – Вольтерра.

Целью настоящей НИР является исследование одного из частных вариантов модели Гилпина – Айала (получающегося из общей модели при частных значениях параметров).

6.2.2. Постановка задачи. Математическая модель

В достаточно общем виде модель Гилпина – Айала динамики *конкурентного* взаимодействия двух биологических популяций может быть записана следующим образом:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[1 - \left(\frac{N_1}{K_1}\right)^{\theta_1} - \varepsilon_1 \frac{N_2}{K_2}\right], \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[1 - \left(\frac{N_2}{K_2}\right)^{\theta_2} - \varepsilon_2 \frac{N_1}{K_1}\right]. \tag{6.1}$$

Здесь, как обычно, N_1 и N_2 – численности популяций, K_1 и K_2 – емкости их экологических ниш, r_1 и r_2 – темпы роста численности популяций при малых численностях популяций (когда внутри- и межвидовой борьбой можно пренебречь), θ_1 и θ_2 – характеристики внутривидовой, а $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ – межвидовой конкуренции.

Понятно, что естественным фазовым пространством системы (6.1) является множество $\mathbf{R}_+^2$ (по определению, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbf{R}_{++} = (0, \infty)$).

Заметим, что при $\theta_i = 1$, $i = 1,2$, из модели (6.1) получается традиционная модель Лотки – Вольтерра. В математической теории биологических популяций проведено достаточно подробное исследование этой модели (см., например, [1, 7 – 10, 15] и др.). В частности, для модели Лотки – Вольтерра установлено, что при $\varepsilon_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, система (6.1) описывает динамику конкурентного *сосуществования* первой и второй популяций. В то же время, при $\varepsilon_1 \in (1, \infty)$, $\varepsilon_2 \in (0,1)$ система (6.1) описывает динамику конкурентного *вытеснения* первой популяции второй популяцией.

Вводя в рассмотрение нормированные переменные $u_i(t) = N_i(t)/K_i$, $i = 1,2$, можно преобразовать систему (6.1) к следующей «безразмерной» форме (см. **Задание № 1**):

$$\frac{du_1}{dt} = r_1 u_1 \left[1 - u_1^{\theta_1} - \varepsilon_1 u_2\right], \quad \frac{du_2}{dt} = r_2 u_2 \left[1 - u_2^{\theta_2} - \varepsilon_2 u_1\right]. \tag{6.2}$$

Легко видеть, что система (6.2) имеет на границе множества $\mathbf{R}_{+}^{2}$ три состояния равновесия – $O(0,0)$, $S_1(1,0)$ и $S_2(0,1)$ (см. **Задание № 2**).

Вопрос о существовании состояний равновесия внутри первого квадранта (множество $\mathbf{R}_{++}^{2}$) решается на основе рассмотрения графиков горизонтальной ($1-u_2^{\theta_2}-\varepsilon_2 u_1=0$) и вертикальной ($1-u_1^{\theta_1}-\varepsilon_1 u_2=0$) изоклин системы (6.2) и определения количества и расположения их точек пересечения и легко сводится к исследованию количества и расположения корней функции.

Всё многообразие качественно различных фазовых портретов модели (6.2), отвечающих различным значениям параметров этой модели, можно описать следующими таблицами.

Таблица 6.1

Характеристики внутривидовой конкуренции

$\theta_2>1$	**III**	**VI**	**IX**
$\theta_2=1$	**II**	**V**	**VIII**
$0<\theta_2<1$	**I**	**IV**	**VII**
	$0<\theta_1<1$	$\theta_1=1$	$\theta_1>1$

Таблица 6.2

Характеристики межвидовой конкуренции

$\gamma_2>1$	**C**	**F**	**J**
$\gamma_2=1$	**B**	**E**	**H**
$0<\gamma_2<1$	**A**	**D**	**G**
	$0<\gamma_1<1$	$\gamma_1=1$	$\gamma_1>1$

Например, вариант № **I + G** отвечает случаю **I** таблицы 6.1 и случаю **G** таблицы 6.2, то есть следующему набору параметров:

Вариант № **I + G:** $0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1,\ \gamma_1>1,\ 0<\gamma_2<1.$

Каждый студент получает «свой» вариант модели (6.2), отвечающий конкретному набору областей значений параметров этой модели из таблиц 6.1, 6. 2 (этот вариант расшифровывается вполне аналогично приведенному выше). Исследование «своего» варианта модели (6.2) включает в себя ряд этапов. *Все эти этапы и конкретные задания в рамках каждого этапа перечислены в задании* (см. **Задание № 3**). По вопросам методов качественного исследования динамических систем на плоскости см., например, [2 – 6, 11].

6.2.3. Задания по НИР

Ниже приведены задания по данному разделу НИР. Все пункты заданий обязательны для выполнения. Отсутствие или неполнота того или иного пункта задания приводит к снижению оценки за данный раздел НИР.

Задание № 1

Преобразовать систему (1) к безразмерной форме (2). В работе должны быть приведены соответствующие подробные выкладки (формулы – в ***Microsoft Equation***).

Задание № 2

Исследовать три «граничных» состояния равновесия системы (2) (т.е. состояния равновесия на границе множества $\mathbf{R}_{+}^{2}$) – $O(0{,}0)$, $S_1(1{,}0)$ и $S_2(0{,}1)$. *Определить* характеристические уравнения, *вычислить* характеристические числа линеаризованной в этих точках системы (2), и для Вашего варианта набора областей значений параметров из таблиц № 1, 2 *определить* тип состояний равновесия $O(0{,}0)$, $S_1(1{,}0)$ и $S_2(0{,}1)$. В работе должны быть приведены соответствующие подробные выкладки (формулы – в ***Microsoft Equation***).

Задание № 3

Исследование Вашего варианта модели (6.2). В этом исследовании необходимо:

(1) *Построить* для Вашего варианта модели (6.2) с помощью пакета ***Microsoft Paint*** графики горизонтальной и вертикальной изоклин системы (6.2) (качественный вид!).

(2) На основе анализа расположения горизонтальной и вертикальной изоклин системы (6.2) внутри первого квадранта (множество $\mathbf{R}_{++}^{2}$) попытаться *определить* возможное *количество* состояний равновесия, их расположение, а также их тип. *Нарисовать* возможный вид фазового портрета модели (6.2) (качественный вид!).

(3) *Самостоятельно выбрать конкретные численные значения* параметров модели, отвечающие Вашему варианту набора областей значений параметров из таблиц 6.1, 6.2. Эти значения параметров должны быть приведены в работе и использованы на следующем этапе задания № 3.

(4) Для выбранных конкретных значений параметров модели (6.2) с помощью пакета ***MatLab*** *построить* пример фазового портрета модели (6.2).

В работе должны быть приведены:

- текст m-файла программы, с помощью которой Вы проводили исследование модели;

- построенный Вами с помощью пакета ***MatLab*** фазовый портрет модели (2).

(5) Необходимо провести *сопоставление* результатов численного (пункт (4)) и теоретического (пункт (2)) анализа фазового портрета модели (6.2) для Вашего варианта.

6.3. Некоторые примеры заданий по курсу, выполняемых в рамках междисциплинарной научно-исследовательской работы

1. Обобщенная модель «хищник-жертва» (модель В. Вольтерра – А. Лотки – Р. Мей). Свойства стационарного решения системы уравнений модели В. Вольтерра – А. Лотки – Р. Мей с положительными координатами.
2. Обобщения модели В.Вольтерра – А.Лотки. Взаимодействие трех популяций. Математическая модель в случае двух «жертв» и одного «хищника».
3. Обобщения модели В.Вольтерра – А.Лотки. Взаимодействие трех популяций. Математическая модель в случае двух «хищников» и одной «жертвы».
4. Обобщения модели В.Вольтерра – А.Лотки. Взаимодействие трех популяций. Математическая модель в случае трофической цепи, состоящей из «жертвы», «хищника» и «суперхищника».
5. Элементарная теория теплового взрыва (Семенов Н.Н., Франк – Каменецкий Д.А.). Исследование простейшей математической модели теплового взрыва при различных значениях параметров $\beta > 0$ и $\chi > 0$
$$\frac{d\theta}{dt} = e^{\frac{\theta}{1+\beta\theta}} - \frac{1}{\chi}\theta.$$
6. Применение теории устойчивости для исследования модели динамики ЯЭУ с «температурной» обратной связью (ОС). Система уравнений «точечной кинетики» при наличии «температурной» ОС. Случай «малой» реактивности и постоянного теплоотвода.
7. Применение теории устойчивости для исследования модели динамики ЯЭУ с «температурной» ОС. Система уравнений «точечной кинетики» при наличии «температурной» ОС. Случай «малой» реактивности и теплоотвода «по закону Ньютона».
8. Применение теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных для исследования модели динамики ЯЭУ с учетом ОС, обусловленной «отравлением» реактора ксеноном. «Ксеноновые колебания».
9. Пространственные математические модели протекания химических реакций. Модель Колмогорова – Петровского – Пискунова. Модель бегущей волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 6

Список литературы к разделу 6.2

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
3. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложения математики. – М.: Наука, 1990. – 360 с.
4. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. – Красноярск: Изд-во Красноярского университета. 1995. – 429 с.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Пер. с англ. под ред. А.Д. Морозова. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
6. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 301 с.
7. Кузнецов Ю.А. Математические модели современного естествознания. Часть 1. Избранные математические модели динамики биологических систем. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2010. – 101 с.
8. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983. – 397 с.
9. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 310 с.
10. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
11. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. / Перевод с англ. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
12. Ayala F.J., Gilpin M.E., Ehrenfeld J.G. Competition between species: Theoretical models and experimental tests // Theoretical Population Biology. 1973. Vol. 4, № 3. P. 331 – 356.
13. Gilpin M.E., Ayala F.J. Global Models of Growth and Competition // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 1973. Vol. 70, № 12, Part I. P. 3590 – 3593.
14. Gilpin M.E., Case T.J., Ayala F.A., θ-Selection // Mathematical Biosciences. 1976. Vol. 32, № 1–2. P. 131 – 139.
15. Murray J. D. Mathematical Biology. I. An Introduction. 3rd Edition. – New York: Springer – Verlag. 2001. – 551pp. Русский перевод 1-го издания – см. [9].

Список литературы к разделу 6.3

1. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. – М.: Наука, 1975. – 394 с.
1. Горяченко В.Д. Качественные методы в динамике ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1977. – 429 с.
2. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980. – 478 с.
3. Кузнецов Ю.А. Математические задачи динамики ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 384 с.
4. Мержанов А.Г., Хайкин Б.И. Теория волн горения в гомогенных средах. – Черноголовка: Изд – во ИСМ РАН, 1992. – 161 с.

Приложение № 1

Образец оформления титульного листа НИР

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Механико-математический факультет
Институт экономики и предпринимательства
Кафедра математического моделирования экономических процессов

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Математические модели и методы и информационные технологии в исследовании экономико-математических задач

Исполнитель:
студент группы 635-1

Фамилия И.О.

Научные руководители:
Должность, ученая степень,
ученое звание

Фамилия И.О.

Должность, ученая степень,
ученое звание

Фамилия И.О.

Должность, ученая степень,
ученое звание

Фамилия И.О.

Нижний Новгород, <год>

Приложение № 2

Пример оформления аннотации

Аннотация

Представленная работа является междисциплинарной (комплексной) научно-исследовательской работой по теме: «Математические модели и методы и информационные технологии в исследовании экономико-математических задач» по следующим дисциплинам и блокам дисциплин:

- «Методы оптимизации»;
- «Информационные технологии в экономике» (дисциплины: «Теоретические основы информатики», «Программирование (Си)», «Объектно-ориентированный анализ и программирование (Си++)», «Нечеткая логика и нейронные сети»);
- «Математические модели современного естествознания».

Объем работы – XX стр. (без учета приложений), XX рисунков, XX таблиц и XX приложений. Список литературы содержит XX наименований.

Приложение № 3

<u>Пример оформления содержания НИР</u>

Содержание

Введение 3
Глава 1. Математические модели современного естествознания 5
Введение в проблему 5
Постановка задачи 7
Решение 9
Основные результаты 16
Глава 2. Информационные технологии в экономике 18
Введение в проблему 18
Постановка задачи 20
Решение 22
Основные результаты 29
Глава 3. Методы оптимизации 31
Введение в проблему 31
Постановка задачи 33
Решение 35
Основные результаты 40
Заключение 42
Список литературы 45
Приложение №1 47
Приложение №2 48
Приложение №3 49

Приложение № 4

Пример структуры НИР

Введение

Глава 1. Математические модели современного естествознания

Введение в проблему

Характеристика современного состояния проблемы, которой посвящена работа, формулировка цели исследования, обоснование его актуальности и необходимости, место исследования среди аналогичных проблем.

Постановка задачи

Полный текст заданий.

Решение

Подробное описание решения, включая необходимые таблицы и рисунки.

Основные результаты

Выводы по выполненной работе.

Глава 2. Информационные технологии в экономике

Введение в проблему

Постановка задачи

Решение

Основные результаты

Глава 3. Методы оптимизации

Введение в проблему

Постановка задачи

Решение

Основные результаты

Заключение

Список литературы

Приложение № 5

Пример оформления списка литературы

Список литературы

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. Балабанов А.С., Стронгина Н.Р. Анализ данных в экономических приложениях: компьютерный практикум в SPSS. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. – 100 с.
3. Балабанов А.С., Стронгина Н.Р. Анализ данных в экономических приложениях: Учебное пособие. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. – 135 с.
4. Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 449 с.
5. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Оптимизация экономических систем. Основы теории и примеры расчетов в системе MATLAB: Учебное пособие. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 256 с.
6. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В., Власова М.Н. Математическое моделирование оптимального использования невозобновимых природных ресурсов // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – №32 (287). – С. 45–57.
7. Кузнецов Ю.А., Перова В.И., Стронгина Н.Р. Подготовка и защита выпускных квалификационных и научно-исследовательских работ: Учебно-методическое пособие. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.
8. Кузнецов Ю.А. Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. I // Экономический анализ: теория и практика. 2012. – № 43 (298). – С. 2 – 17.
9. Кузнецов Ю.А. Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. II // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – № 44 (299). – С. 2 – 14.
10. Перова В.И. Нейронные сети: Учебное пособие. Часть 1. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 155 с.
11. Перова В.И. Нейронные сети: Учебное пособие. Часть 2. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 111 с.
12. Перова В.И. Нейронные сети в экономических приложениях. Часть 1. Нейронные сети, обучаемые с учителем: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 130 с.
13. Перова В.И. Нейронные сети в экономических приложениях. Часть 2. Нейронные сети, обучаемые без учителя: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 135 с.
14. Acemoglu D., Angrist J. How Large Are Human-Capital Externalities? Evidence from Compulsory Schooling Laws // NBER Macroeconomics Annual. – 2000. – Vol. 15. – pp. 9-59.
15. http://www.gks.ru (Дата обращения: 20.02.2014 г.).

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА СТУДЕНТА:

ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ, ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ, ОФОРМЛЕНИЕ НИР

Авторы:

Юрий Алексеевич **Кузнецов**
Евгений Валентинович **Круглов**
Ольга Владимировна **Мичасова** и др.

Учебно-методическое пособие

Часть 1

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . .2014. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37