МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Сангалова М.Е.

# ПРОЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано учебно-методической комиссией
Арзамасского филиала ННГУ,
центром проектно-ориентированных методов обучения для преподавателей высших учебных заведений

Арзамас
2013

УДК 510.6 (075)
ББК 22.10 Я7

*Рекомендовано УМО по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона в качестве учебного пособия для студентов педагогических направлений подготовки высших учебных заведений*

Материалы подготовлены в соответствии с планом работ по реализации дорожной карты ННГУ на 2013 – 2014 гг.

Задача 1.2. Внедрение современных педагогических технологий в учебный процесс

Мероприятие 1.2.1. Формирование учебно-методических материалов для проектно-ориентированного обучения (project based learning) по разным направлениям обучения

**Сангалова М.Е.** Проектно-ориентированное обучение математической логике. Учебно-методическое пособие. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2013. – 132 с.

В пособии представлены разработки занятий по курсу «Математическая логика», созданного в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению 050100.62 Педагогическое образование, профили Математика и Физика, Математика и Информатика. Оно содержит подробное описание организации проектно-ориентированного обучения на занятиях и их структуру.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей учреждений высшего профессионального образования педагогического направления, оно также будет полезно студентам и преподавателям математики средней школы для разработки занятий в активных формах.

Ответственные за выпуск

председатель учебно-методической комиссии Арзамасского филиала ННГУ проф. С.Н. Пяткин, руководитель центра проектно-ориентированных методов обучения проф. А.К. Любимов

**УДК 510.6 (075)**
**ББК 22.110 Я7**

# Содержание

# ***ВВЕДЕНИЕ***

Реформирование высшего профессионального образования ставит перед преподавателем вуза новые задачи: прежде всего, предоставление образовательных услуг на современном уровне. Отсюда вытекает необходимость переработки имеющихся и создания новых курсов. Современным требованиям должны отвечать содержание, методы проведения занятий, средства обучения и контроля. Все перечисленное определяет взаимосвязанные задачи, которые должен решить преподаватель при разработке учебного курса и подготовке к конкретному занятию.

Изменение целей образования приводит к кардинальному изменению организации учебного процесса, что отражено в разделе «Требования к условиям осуществления образовательных программ» ФГОС. Для повышения эффективности формирования и развития общекультурных и профессиональных компетенций предлагается 30% аудиторных занятий в рамках образовательной программы проводить в активных и интерактивных формах.

Активные методы проведения занятий меняют всю систему отношений в учебном процессе: «преподаватель – студент», «студент – учебный материал», «студент – другие студенты». Студент нацелен на конструктивный диалог с преподавателем и студентами, способность высказывать и отстаивать свою точку зрения, самодиагностику и самооценку, открытость новой информации, всесторонний анализ и осмысление информации, выявление особенностей, остающихся недоступными при беглом восприятии информации. Такой характер работы позволяет развивать и формировать общекультурные и профессиональные компетенции, повышает эффективность образовательного процесса в целом.

В пособии предлагается организация активной самостоятельной работы студентов над учебным материалом, как в аудитории, так и вне аудитории при изучении дисциплины «Математическая логика» на основе выстраивания занятий в технологии развития критического мышления через чтение и письмо (ТРКМЧП) [1]. Использование на занятии тех или иных приемов и стратегий технологии обуславливается особенностями изучаемого материала и преследуемыми целями. В данной технологии занятие (или его часть) имеет трехфазную структуру «Вызов – Осмысление – Рефлексия». Названия этих стадий до некоторой степени условны. По-Поэтому, чтобы более четко представлять себе такое разделение, имеет смысл остановиться на задачах каждой стадии.

Ниже перечислены эти задачи.

- «Вызов»:
  - актуализация знаний учащихся;
  - пробуждение познавательного интереса;
  - помощь в определении направления изучения темы (ориентация).
- «Осмысление»:
  - помощь в активном восприятии материала;
  - помощь в соотнесении старых и новых знаний;
- «Рефлексия»:
  - помощь в обобщении изучаемого материала;
  - помощь в определении направлений дальнейшего изучения материала.

Итак, для каждого занятия обязательно выделяются три фазы: «Вызов», «Осмысление» и «Рефлексия». Если же занятие состоит из нескольких смысловых блоков материала, то эти фазы выделяются в каждом блоке.

На занятиях, как правило, сочетается групповая и индивидуальная работа студентов. В пособии приняты обозначения:

– работа группой;

– работа в парах;

– индивидуальные задания.

Следовательно, большое внимание следует уделить организации работы групп. Учитывая физические возможности преподавателя, общее количество студентов при проведении работы по группам не должно превышать 25-30 человек (выделяются группы по 3-6 человек). Группы организуются в начале каждого занятия, причем лучше использовать группы сменного состава. Это поможет каждому студенту максимально проявить свои способности, попробовать работать в разных качествах, научиться строить деловые взаимоотношения с различными людьми.

Следует отметить, что далеко не каждое занятие по дисциплине «Математическая логика» целесообразно целиком выстраивать в технологии РКМЧП. Для многих тем оптимальным продолжает оставаться изучение традиционными методами (в первую очередь, доказательство теорем). В этих случаях следует рекомендовать лишь использование отдельных приемов технологии РКМЧП.

При выборе стратегии обучения ведущим должен являться *принцип единства содержания и метода*. Технологии и методы обучения должны обеспечивать усвоение содержания предмета, блока и каждой конкретной темы, а не являться самоцелью.

Таким образом, из 36 часов в традиционных формах проводится только 6 часов (описание данных занятий не дается), остальные 30 часов проводятся в активных формах.

Описанию организации работы студентов над учебным материалом предшествует изложение целей курса в терминах результатов его освоения. Исходя из поставленных целей разработано тематическое планирование курса. Затем описаны, определяемые целями и содержанием дисциплины, технологии обучения.

Пособие включает также текст раздаточных материалов для студентов и поэтому может использоваться для самостоятельного изучения математической логики, что актуально для студентов заочного отделения.

Хочется выразить благодарность за идеи и вдохновение к подготовке данного пособия Грудзинской Елене Юрьевне, Марико Валерии Валерьевне, а также всем преподавателям, работавшим на курсах повышения квалификации ННГУ в 2011 и в 2013 годах.

Автор будет признателен за отзывы или замечания, которые можно направлять по адресу: smolyanka77@mail.ru

## *Постановка целей курса «Математическая логика»*

В соответствии с ФГОС третьего поколения цели дисциплины должны быть сформулированы исходя из компетентностной модели выпускника, его будущей профессиональной деятельности. Они представлены в разделах IV и V Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) "бакалавр"), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17 января 2011 г. № 46 [7].

**I. Описание выпускника бакалавриата в контексте обучения математической логике.**

В процессе обучения математике, участником которого является педагог, взаимодействие логики и математики неизбежно. При этом логику можно рассматривать:

- как *объект, изучаемый в рамках математики*;
- как *инструмент изучения математики*.

Не останавливаясь на первой позиции, уже отраженной в учебном пособии [6, с. 5-9], перейдём ко второй.

Как отмечает В.И. Игошин [3, с. 12-13], чтобы сделать логику действенным инструментом обучения математике, необходимо соблюдать ряд принципов.

1. *Принцип обучения строению (структуре) математических утверждений (определений и теорем).* Нужно научиться видеть, где и какие связки участвуют в формулировке утверждения. Для каждой теоремы необходимо чётко уяснить, что в ней дано и что требуется доказать, каковы структура условий и структура заключения. Кроме того, необходимо уметь определять какие утверждения равносильны, то есть научиться преобразовывать структуру утверждения равносильным образом.
2. *Принцип обучения понятию доказательства математической теоремы.* Доказательство теоремы – это последовательность (цепочка) утверждений, каждое из которых есть либо условие теоремы, либо аксиома, либо получено

из двух предыдущих утверждений по правилу вывода: из утверждений $A$ и $A \rightarrow B$ следует утверждение $B$. Всякий раз при доказательстве теоремы нужно стремиться к тому, чтобы цепочка последовательных утверждений строилась в сознании учащегося как можно более отчётливо.

3. *Принцип обучения методам доказательства математических теорем.* В первую очередь необходимо научиться методам построения цепочки утверждений $A=A_0, A_1, \ldots, A_n= B$ для доказательства теоремы $A \rightarrow B$. Синтетический (или прямой) метод – построение цепочки в прямом направлении, то есть от $A$ к $B$. Аналитический метод – построение цепочки в обратном направлении, то есть от $B$ к $A$. Далее необходимо уяснить логические законы, лежащие в основании доказательств методом от противного, методом приведения к абсурду и т.д.
4. *Принцип обучения строению математических теорий.* Имеется в виду уяснение сути аксиоматического метода при построении математической теории и при её преподавании. Важно понимание сути неопределяемых понятий теории, её аксиом и теорем, вплоть до метатеории – непротиворечивости, полноты, категоричности, независимости системы аксиом.

Математическая логика помогает обосновать и облегчает применение указанных логических принципов. Они должны органично войти в сознание всякого преподающего и изучающего математику и составляют логическую культуру учителя.

Отметим также, что логику можно рассматривать как *профессиональный инструмент педагога*.

О логической культуре учителя свидетельствует применение принципов логики *в научно-исследовательской работе* (написание статей, подготовка презентаций, докладов, ведение научных дискуссий). В современном мире логика является важнейшим средством формирования формального мышления как мощнейшего способа познания истины. Логика дает возможность, с одной стороны, проанализировать правильность построения рассуждений, а с другой – отличить правильные рассуждения от неправильных, исходя только из одной их формы. Именно поэтому знание основ логики жизненно необходимо всем, связывающим себя с научной деятельностью.

Соблюдение логических законов важно не только при ведении научных дискуссий и подготовке докладов, но и в повседневном *взаимодействии* с учениками, родителями учащихся, коллегами. Знание основ логики определяет правильный выбор аргументации, последовательность в доказательствах, а, следовательно, и успех взаимодействия.

Логическая грамотность педагога наиболее очевидно проявляет себя на этапе *целеполагания*, будь то постановка и конкретизация цели урока или же формулировка задач профессионального роста.

Из приведённого выше описания модели выпускника, вытекают компетенции, на развитие которых направлено обучение математической логике.

## II. Компетенции, которыми должен обладать выпускник бакалавриата, развивающиеся у студентов в ходе занятий по математической логике.

Перечисленные компетенции взяты из ФГОС ВПО по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование [7]:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);
- способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК-6);
- готовность к взаимодействию с коллегами, к работе в коллективе (ОК-7);
- способность использовать навыки публичной речи, ведения дискуссии и полемики (ОК-16);
- способность реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1);
- владение основами речевой профессиональной культуры (ОПК-3);
- способность к подготовке и редактированию текстов профессионального и социально значимого содержания (ОПК-5).

## III. Конкретизация содержания дисциплины (главы, разделы, темы)

В результате освоения дисциплины «Математическая логика» обучающийся должен

знать:

- законы логической равносильности;
- компоненты (аксиомы и правила вывода) и характеристики (свойства) исчисления высказываний и важнейших теорий первого порядка;
- основные результаты о непротиворечивости и независимости в арифметике и теории множеств;
- методы математической логики для изучения математических доказательств и теорий;

уметь:

- распознавать тождественно истинные (простейшие общезначимые) формулы языка логики высказываний (предикатов);
- применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений;
- строить простейшие выводы в исчислениях высказываний и использовать эти модели для объяснения сути и строения математических доказательств;

владеть:

- техникой равносильных преобразований логических формул;
- методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул;
- дедуктивным аппаратом изучаемых логических исчислений.

На основании вышеперечисленного разработано тематическое планирование.

## Тематическое планирование

| №№ п.п. | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|
| I | Алгебра высказываний | 12 |
| 1. | Предмет математической логики. Логические операции над высказываниями. Булевы алгебры. Примеры. Таблицы истинности. | 2 |
| 2. | Формулы. Равносильные преобразования формул. Тавтологии – законы логики высказываний. | 2 |
| 3. | Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Закон двойственности. | 2 |
| 4. | Совершенные нормальные формы. | 2 |
| 5. | Булевы функции. Полные системы булевых функций. | 2 |
| 6. | Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике. | 2 |
| II | Исчисление высказываний | 10 |
| 7. | Понятие формальной теории. Аксиомы, правила вывода, теоремы исчисления высказываний. | 2 |
| 8. | Теорема дедукции в исчислении высказываний. | 2 |
| 9. | Полнота исчисления высказываний в широком смысле. | 2 |
| 10. | Непротиворечивость и полнота в узком смысле. | 2 |
| 11. | Независимость аксиом исчисления высказываний. | 2 |
| III | Логика предикатов | 8 |
| 12. | Предикаты. Кванторы. Область истинности и ложности предиката. | 2 |
| 13. | Равносильные формулы. Предваренная нормальная форма. Общезначимость формул. Свойства. | 2 |
| 14. | Проблема разрешимости логики предикатов. | 2 |
| 15. | Применение языка логики предикатов для записи математических предложений. | 2 |
| IV | Исчисление предикатов | 6 |
| 16. | Теории первого порядка. Теоремы и формулы. Логические и специальные аксиомы. Правила вывода. Теорема дедукции в исчислении предикатов. | 2 |
| 17. | Непротиворечивость и полнота исчисления предикатов. | 2 |
| 18. | Теоремы Гёделя о неполноте. Метаматематика. Логические парадоксы. | 2 |
| | Всего | 36 |

## IV. Образовательные технологии, способствующие формированию компетенций выпускника при обучении математической логике

В качестве технологии обучения выбрана технология развития критического мышления через чтение и письмо. Именно для критического мышления характерно:

- построение логических умозаключений;
- создание согласованных между собой логических моделей;
- принятие обоснованных решений, касающихся того, отклонить какое-либо суждение, согласиться с ним или временно отложить его рассмотрение;
- оценка самого мыслительного процесса – хода рассуждений, которые приводят к тем или иным выводам, или факторов, которые учитываются при принятии решения.

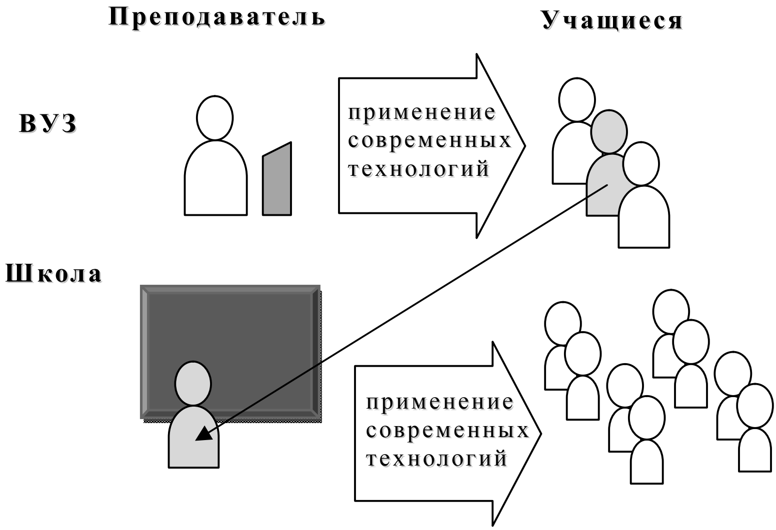
Критическое мышление априори логично: выдвигаемые в пользу того или иного мнения аргументы должны быть логически строгими, доказательства – последовательными и корректными, при проведении каких-либо рассуждений должны соблюдаться логические законы.

Также применяется образовательная технология портфолио. На протяжении всего курса (начиная с первого занятия) студенты ведут личный учебный портфолио, что также способствует формированию активной позиции каждого студента. Данная работа рассматривается с нескольких позиций:

- инструмент оценки и самооценки достижений студента по конкретной теме, блоку или всей дисциплине;
- метод организации самостоятельной работы студента;
- инструмент развития логического и критического мышления студента;
- способ самовыражения;
- развитие исследовательских умений студента;
- инструмент проектирования своей деятельности, включающий рефлексию учебной работы.

Данные педагогические технологии одновременно служат инструментарием организации занятий в активных формах и являются предметом изучения будущих педагогов. Поэтому применение указанных образовательных технологий способствует формированию у студентов следующих компетенций (не вошедших в предыдущий список):

- готовность применять современные методики и технологии, методы диагностирования достижений обучающихся для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса (ПК-3);
- способность организовывать сотрудничество обучающихся, поддерживать активность и инициативность, самостоятельность обучающихся, их творческие способности (ПК-7);
- способность разрабатывать современные педагогические технологии с учетом особенностей образовательного процесса, задач воспитания и развития личности (ПК-12).




## V. Адекватные методы оценки (прозрачные и понятные всем участникам образовательного процесса)

Для оценки достижений студентов используется учебный портфолио, критерии оценки которого вырабатываются совместно с ними. Процедура итогового контроля реализуется экзаменом. Также по завершении курса проводится анкетирование студентов (анкета и расшифровка [1, стр.181-182]).

***Занятие 1 (вводное). Предмет математической логики. Логические операции над высказываниями. Булевы алгебры.***

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

Так как данное занятие – вводное, то оно также реализует организационные функции в отношении всего курса, поэтому его целями являются:

- ориентация в предмете и постановка личной цели изучения дисциплины «Математическая логика»;
- заведение учебного портфолио по дисциплине «Математическая логика».

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- предмет, задачи и методы математической логики как науки;
- основные исторические этапы становления и развития математической логики как науки;
- определение булевой алгебры;
- определения операций над высказываниями;
- теоремы о приведении формул алгебры высказываний к нормальным формам;

уметь:

- доказывать свойства булевой алгебры путём построения цепочки доказательства;
- соотносить операции над высказываниями со связками русского языка.

***Основные приемы и методы занятия:*** перепутанные логические цепочки, метод «ИНСЁРТ» (чтение с пометками), работа с графическими организаторами (таблицами).

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ 1 (вызов первого блока)*

Сообщение преподавателя:

«Приступая к изучению математической логики следует разобраться, что же изучает математическая логика как наука, каковы задачи, предмет и методы этой науки. Чтобы ответить на эти вопросы, давайте обратимся к истории становления развития математической логики».

Задание 1. Сопоставьте (с помощью стрелок) ученого и сделанное им открытие.

**Таблица 1**

| Имена ученых | Открытия |
|---|---|
| Аристотель | Теоремы неполноты формальной арифметики |
| Евклид | Алгебра логики (к логике применяются методы алгебры) |
| Г.В. Лейбниц | Попытка обосновать всю математику через логику |
| Дж. Буль | Основные логические законы, теория логического вывода |
| Д. Гильберт | Построение геометрии как аксиоматической теории |
| К.Гёдель | Попытка создать универсальный язык, с помощью которого решались бы все споры между людьми |
| Г. Ферге | Аксиоматическая теория (логические формулы выводятся из аксиом) |

После выполнение этого задания мнение группы озвучивается и фиксируется преподавателем на доске в формате таблицы. Ниже приведен пример заполнения таблицы (записано мнение первой группы).

**Таблица 2**

| Группа / Ученый | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| Аристотель | Логические законы | … | … | … | … |
| Евклид | Геометрия | … | … | … | … |
| Г.В. Лейбниц | Математика через логику | … | … | … | … |
| Дж. Буль | Универсальный язык | … | … | … | … |
| Д. Гильберт | Аксиоматическая теория | … | … | … | … |
| К. Гёдель | Алгебра логики | … | … | … | … |
| Г. Ферге | Теоремы неполноты | … | … | … | … |

Далее проходит краткое обсуждение таблицы с резюме преподавателя.

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1 (осмысление первого блока)*

Задание 2. Прочтите историческую справку (раздаточный материал 1) с пометками (ИНСЁРТ):

«!» – «Это для меня абсолютно ново!»;

«+» – «Это я точно знал»;

«–» – «Это противоречит моим представлениям».

Записывайте на полях мысли, возникающие в ходе прочтения.

*РЕФЛЕКСИЯ 1 (рефлексия первого блока)*

Происходит коллективное обсуждение прочитанного текста с опорой на сделанные пометки. Студенты выступают по желанию. Обсуждение проходит последовательно, начиная с пометок «!». Студенты зачитывают цитаты, около которых стоит «!», поясняют смысл пометки, затем переходят к пометкам «+» и т.д.

Задание 3. Внесите исправления в таблицу 1.

*ВЫЗОВ 2 (вызов второго блока)*

Задание 4. Ответьте на вопрос: «Что является высказыванием?». Приведите примеры: истинных высказываний, ложных высказываний, невысказываний.

Выполняя это задание, студенты опираются на жизненный опыт и знания школьного и вузовского курса информатики.

*ОСМЫСЛЕНИЕ 2 (осмысление второго блока)*

Задание 5. Прочтите определения высказывания и булевой алгебры, примеры высказываний и невысказываний (текст раздаточного материала 2).

*РЕФЛЕКСИЯ 2 (рефлексия второго блока)*

Задание 5а. Докажите любое свойство булевой алгебры (на выбор) путем построения логической цепочки доказательства.

Задание 6. Вернитесь к вопросу, стоящему в начале блока. Внесите необходимые корректировки в ответ группы на задание 4.

*ВЫЗОВ 3 (вызов третьего блока)*

Задание 7. Сопоставьте в таблице операцию, ее обозначение и языковую связку. Приведите примеры сложных высказываний с соответствующими связками.

**Таблица 3**

| Логическая операция | Символ | Языковая связка | Пример |
|---|---|---|---|
| Конъюнкция<br>Импликация<br>Отрицание<br>Дизъюнкция<br>Эквиваленция | $\vee$<br>$\leftrightarrow$<br>$\wedge$<br>$\neg$<br>$\rightarrow$ | если…,то<br>не<br>и<br>или<br>тогда и только тогда, когда | |

При выполнении заданий 7 и 7а используются знания курса информатики и жизненные представления студентов.

Задание 7а. Заполните таблицу истинности логических операций.

**Таблица 4**

| $X$ | $Y$ | $\bar{X}$ | $X \wedge Y$ | $X \vee Y$ | $X \rightarrow Y$ | $X \leftrightarrow Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |

*ОСМЫСЛЕНИЕ 3 (осмысление третьего блока)*

Задание 8. Прочтите определения логических операций (раздаточный материал 3).

*РЕФЛЕКСИЯ 3 (рефлексия третьего блока)*

Задание 9. Внесите исправления в таблицы 3 и 4.

Задание 9а. Проверьте выполнение законов булевой алгебры с помощью таблиц истинности.

*РЕФЛЕКСИЯ всего занятия*

Обсуждение вопросов: «Что является предметом математической логики?», «Какие задачи ставит перед собой математическая логика?», «Какова цель математической логики как науки?»

*ЗАВЕДЕНИЕ ПОРТФОЛИО*

- Обсуждение предполагаемых рубрик портфолио.
- Презентация рубрик и их уточнение.
- Выбор рубрик для своего портфолио.

- 👪 Обсуждение критериев оценки портфолио, внесение предложений по их корректировке и модификации, если это требуется.

Обязательные рубрики:

1. Теоретический монолог.
2. Что бы это значило? (глоссарий)
3. Размышления о занятии.
4. Рабочие материалы.

Учащимся предоставляется выбор вести портфолио в бумажном или электронном варианте.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Найдите в литературе или в сети Internet ответы на обсуждаемые на занятии вопросы:

- «Что является предметом математической логики?»,
- «Какова цель математической логики как науки?»
- «Какие задачи ставит перед собой математическая логика?»,

и резюмируйте, представляя свою точку зрения:

- «Что я хочу узнать при изучении математической логики?»

Раздаточные материалы к занятию 1

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1*

***Историческая справка.***

**I.** *Античная логика* (~500 до н.э. – нач. н.э.)

Основателем логики как науки является древнегреческий философ Аристотель (384-322 гг. до н. э.). Он разработал теорию логического вывода (теорию силлогизма). Аристотель открыл основные принципы классической логики:

- принцип исключенного третьего – «любое высказывание таково, что истинно либо оно само, либо его отрицание»;
- принцип тождества – «всякое понятие тождественно самому себе»;
- принцип непротиворечивости – «никакое высказывание не может быть истинным и вместе с тем ложным».

Он обратил внимание на то, что в рассуждениях мы из одних утверждений выводим другие, исходя не из конкретного содержания этих утверждений, а из определенной взаимосвязи между их формами, структурами.

Древнегреческий математик Евклид (330-275 гг. до н. э.) впервые предпринял попытку упорядочить накопившиеся к тому времени сведения по геометрии, взглянув на эту науку с общелогических позиций. Он положил начало осознанию геометрии как аксиоматической теории, а всей математики как совокупности аксиоматических теорий. Это был первый этап развития формальной логики.

**II.** *Схоластическая логика* (нач. н.э. – первая половина XIX в.)

Второй этап связан с применением в логике математических методов. Р Декарт (1596-1650) считал, что основой всякого знания является разум. А основным методом познания является дедукция следствий из аксиом. Г.В. Лейбниц (1646-1716) пытался построить универсальный язык, с помощью которого разрешались бы все споры между людьми, а затем желательно и вовсе все "идеи заменить вычислениями". Он сформулировал принцип достаточного основания – «ни одно явление не может быть истинным или действительным, ни одно утверждение справедливым без достаточного основания, хотя эти основания в большинстве случаев вовсе не могут быть нам известны».

**III.** *Символическая логика* (сер. XIX в. – XX в.)

Важный период становления математической логики начинается с появления работ Джорджа Буля (1815-1864) "Математический анализ логики" и "Исследование законов мышления". Он применил к логике методы современной ему алгебры – язык символов и формул, составление и решение уравнений. Им была создана своеобразная алгебра – алгебра логики. В этот период она оформилась как алгебра высказываний (булева алгебра).

Значительный толчок к новому периоду развития математической логики дало создание Н.И. Лобачевским и независимо от него Я. Бойяи неевклидовой геометрии. Кроме того, создание анализа бесконечно малых подвело к необходимости обоснования понятия числа как фундаментального понятия всей математики. Довершали картину парадоксы (антиномии), обнаруженные в конце XIX века в теории множеств. Они отчетливо показали, что трудности обоснования математики являются трудностями логического и методологического характера. Таким образом, перед математической логикой встали задачи, которые перед логикой Аристотеля не возникали: она должна была исследовать математику как совокупность аксиоматических теорий, исследовать аксиоматический метод построения теорий. В развитии математической логики сформировалось три направления обоснования математики, о которых подробнее рассказано ниже.

1. *Логицизм.* Основоположником первого направления считают Г. Ферге (1848-1925). Он стремился всю математику обосновать через логику, применил аппарат математической логики для обоснования арифметики, но дальше пойти не смог: оказалось невозможным из чисто логических аксиом вывести существование бесконечного множества. Однако был создан богатый логический аппарат, без которого математическая логика не смогла бы оформиться как полноценная математическая теория.
2. *Формализм*. Д. Гильберт (1862-1943) предложил другой путь (второе направление) преодоления трудностей в обосновании математики: записать все математические утверждения в виде логических формул, некоторые из них выделить в качестве аксиом, а остальные логически вывести из них. Однако открытие К. Геделем (1906-1978) неполноты формализированной арифметики показало ограниченность программы Гильберта.
3. *Интуиционизм.* Представители третьего направления, основанного Л. Бауэром (1881-1966) предложили отказаться от рассмотрения бесконечных множеств, а также от логического закона исключенного третьего. Ими признавались только такие математические доказательства, которые конструктивно строят объект.

**IV.** *Современный этап.* XX век стал веком бурного развития математической логики. Возникли новые разделы, были построены различные аксиоматические теории множеств, была разработана теория алгоритмов. На стыке математической логики и алгебры возникла теория моделей. Немалый вклад в развитие математической логики внесли: Н.А. Васильев, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков и другие.

Возникли неклассические логики, к которым относятся многозначная логика (Я. Лукасевич, Э. Пост), релевантная логика, паранепротиворечивая логика (Н.А. Васильев).

В 80-90-е годы XX века логика находит широкое применение в информатике, программировании, исследованиях в области искусственного интеллекта.

Тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по двум направлениям. Эти методы используются как при физическом конструировании и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции – математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных систем составляющих элементарную базу компьютеров), так и при создании математического обеспечения к ним. В основе многочисленных языков программирования лежат теория алгоритмов, теория формальных систем, логика предикатов. Например, название языка ПРОЛОГ, сокращение от ПРОграмирование ЛОГическое.

Основными разделами логики являются логика высказываний, логика предикатов, металогика.

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2*

***Булевы алгебры. Примеры. Логические операции над высказываниями***

<u>Высказывание</u> – первый важнейший объект изучения математической логики.

<u>Алгебра высказываний</u> или булева алгебра представляет собой раздел логики на основе алгебраических методов изучающий логические операции над высказываниями. Она изучает способы построения высказываний из уже имеющихся, закономерности таких способов. Причем высказывания рассматриваются здесь только с точки зрения их истинности и ложности, безотносительно их внутренней логической структуре. Алгебра высказываний является фундаментов математической логики. Основы алгебры логики были разработаны Дж. Булем. В современной математике принято следующее определение.

Определение 1. Совокупность подмножеств $x$, $y$, $z$,…непустого множества $M$, имеющего выделенные элементы 0 и 1, с введенными на нем двумя бинарными операциями (конъюнкция, дизъюнкция), одной унарной операцией (отрицание), для которых выполняются законы 1-15, и называется алгеброй Буля.

Законы:

1. $\overline{\overline{x}} = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \vee y = y \vee x$
4. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
5. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
6. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
7. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
8. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
9. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
10. $x \wedge (x \vee y) = x$
11. $x \vee (x \wedge y) = x$
12. $x \wedge \overline{x} = 0$
13. $x \vee \overline{x} = 1$
14. $x \wedge x = x$
15. $x \vee x = x$

Кроме законов также удобно использовать некоторые свойства булевых алгебр:

$1^0$. $\overline{1} = 0$.

$2^0$. $\overline{0} = 1$.

$3^0$. $x \vee 1 = 1$.

$4^0$. $x \wedge 0 = 0$.

$5^0$. $x \wedge 1 = x$.

$6^0$. $x \vee 0 = x$.

Доказательство указанных свойств легко вытекает из законов. То есть, выражение стоящее в левой части, проводя преобразования на основе законов, можно привести к виду правой части.

Например, для первого свойства $\overline{1} \overset{13}{=} \overline{x \vee \overline{\overline{x}}} \overset{9}{=} \overline{x} \wedge \overline{\overline{x}} \overset{1}{=} \overline{x} \wedge x \overset{12}{=} 0$ (номер закона указан над знаком равенства). Аналогично несложно доказать и остальные законы.

Примеры. 1.Возьмем множество $M$ и рассмотрим множество всех его подмножеств $\boldsymbol{M}=\{A, B, C, \ldots, \varnothing, M\}$. На этом множестве можно ввести операции: пересечение ($A \cap B$), объединение ($A \cup B$) и дополнение $(\overline{A})$. Сопоставим $\cap - \wedge, \cup - \vee, \overline{A} - \overline{x}$, $\varnothing - 0$, $M - 1$. Тогда $\boldsymbol{M}$ с введенными операциями является примером алгебры Буля, представляющей теоретико-множественную интерпретацию алгебры высказываний

Если же сопоставить $\cup - \wedge, \cap - \vee, \overline{A} - \overline{x}$, $\varnothing - 1$, $M - 0$, то и с таким образом введенными операциями множество $\boldsymbol{M}$ будет являться булевой алгеброй.

2. Рассмотрим множество предложений русского языка. Выделим среди них повествовательные предложения.

Определение 2. Высказыванием называется повествовательное предложение, которое либо истинно, либо неистинно (ложно). Обозначаются высказывания начальными заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$

Истинные высказывания обозначают целостные суждения, тогда как ложные не имеют в основании суждения.

Примеры. 1. "А.С. Пушкин – великий русский математик", "Снег – белый", "7 < 4" – высказывания.

2. "Каша – вкусное блюдо", "Студент физико-математического факультета" – не является высказыванием.

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 3*

Высказывание, в котором одно подлежащее и одно сказуемое называют элементарным. Из элементарных высказываний можно составлять сложные с помощью частицы "не", союзов "и", "или". Для обозначения истинности высказываний выделим два слова "истина" и "ложь". Сопоставим логическим связкам логические операции: "не" – отрицание, "и" – конъюнкцию, "или" – дизъюнкцию.

Определение 3. Отрицанием высказывания $A$ называется новое высказывание обозначаемое $\overline{A}$ (читается: "не $A$" или "неверно, что

$A$"), которое истинно, если исходное высказывание $A$ ложно, и ложно, если высказывание $A$ истинно. То есть этот оператор выражает отношение между отдельным объектом и всеми другими объектами.

Пример. Пусть $A$ = «Земля круглая», тогда $\overline{A}$ = «Земля некруглая» или $\overline{A}$ = «Неверно, что Земля круглая».

Определение 4. Конъюнкцией (от лат. conjunctio – «соединение») двух высказываний, $A$ и $B$, называется новое высказывание $A \wedge B$ (читается "$A$ и $B$"), которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания, $A$ и $B$, и ложно во всех остальных случаях.

Пример. Пусть $A$ = «Наполеон – император» и $B$ = «Наполеон – француз», тогда $A \wedge B$ = «Наполеон – француз и император».

Определение 5. Дизъюнкцией (от лат. desjunctio – «разединение») двух высказываний $A$ и $B$, называется новое высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читается "$A$ или $B$"), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний $A$ или $B$, истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания $A$ и $B$, ложны.

Пример. Пусть $A$ = «Земля круглая» и $B$ = «Земля плоская», тогда $A \vee B$ = «Земля круглая или плоская».

Можно определить логические операции с помощью таблиц истинности.

Это таблицы, выражающие связь между истинностным значением сложного логического высказывания и истинностными значениями входящих в него простых высказываний.

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Если с помощью этой таблицы проверить 15 законов, записанных в определении булевой алгебры, можно убедиться, что множество высказываний с введенными операциями является булевой алгеброй.

Помимо вышеперечисленных в алгебре высказываний можно также ввести операции импликации и эквивалентности.

Определение 6. Импликацией (от лат. implicatio – «сплетение») двух высказываний $A$ и $B$, называется новое высказывание, обозначаемое $A \to B$ (читается "если $A$, то $B$", "из $A$ следует $B$", "$A$ влечет $B$"), которое ложно в единственном случае, когда высказывание $A$ истинно, а $B$ – ложно, а во всех остальных случаях – истинно.

Пример. Пусть $A$ = «Земля круглая» и $B$ = «Улетев из Москвы на запад, можно в конце концов прилететь в Москву с востока», тогда $A \to B$ = «Если Земля круглая, то улетев из Москвы на запад, можно в конце концов прилететь в Москву с востока».

Определение 7. Эквивалентностью двух высказываний $A$ и $B$, называется новое высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$ (читается "$A$ эквивалентно $B$", "$A$ тогда и только тогда, когда $B$"), которое истинно в том и только том случае, когда одновременно оба высказывания $A$ и $B$, либо истинны, либо ложны, а в остальных случаях – ложно.

Эти операции также можно определить с помощью таблиц истинности.

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Не следует отождествлять логические операторы со связками естественного языка. Они только в определенных контекстах могут быть рассмотрены как аналоги операторов. Например, импликативное высказывание, в котором ложны и посылка и заключение будет истинно (из определения импликации). Однако, такое предложение воспринимается как ложное или бессмысленное!

***Занятие 2. Формулы. Равносильные преобразования формул. Тавтологии***

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определения формулы алгебры высказываний, равносильных формул и равносильного преобразования формул;
- законы логической равносильности;
- классификацию формул в зависимости от их значений истинности;
- доказательство признака равносильности и следствия из него;
- основные тавтологии;

уметь:

- распознавать тождественно истинные формулы языка логики высказываний;
- применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений;
- строить простейшие выводы в исчислениях высказываний и использовать эти модели для объяснения сути и строения математических доказательств;

владеть:

- методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул.

***Основные приемы и методы занятия:*** прием прогнозирование, стратегия работы с информацией таблица ЗХУ (Знаю/ Хочу знать/ Узнал), эссе.

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ 1*

Сообщение преподавателя:

«В ходе изучения математики в школе и институте вы все сталкивались с формулами, которые бывают более или менее сложными, содержат некоторые символы и обозначения».

Задание 1. Ответьте на вопросы.

1. Как Вы можете представить формулы алгебры высказываний? Опишите их.
2. Можно ли классифицировать формулы алгебры высказываний? Если «да», то какие виды можно выделить?
3. Какие формулы Вы бы назвали равносильными?

Зафиксируйте ответ в рабочей тетради.

Выступление некоторых пар по результатам этой работы.

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1*

Чтение раздаточного материала 1, в ходе которого студенты выполняют задание 2.

Задание 2. Запишите, насколько были верны Ваши прогнозы (предположения), отметьте совпадения и противоречия с материалами лекции. Ответы представляйте по каждому из выделенных в задании 1 вопросов. Также запишите в тетрадь то, что вы узнали нового по теме.

Студентам можно предложить следующую организацию работы в парах: один студент при чтении отмечает противоречия, другой выписывает в тетрадь новую информацию, затем они обсуждают результаты своей работы.

*РЕФЛЕКСИЯ 1*

Результаты своей работы представляют пары, которые еще не выступали на этом занятии.

Сообщение преподавателя:

«Итак, в ходе нашей работы мы узнали, как определяются формулы в алгебре высказываний, какие можно выделить классы равносильных между собой формул. Особое значение в логике имеют тавтологии, что и определяет тему дальнейшего разговора.

*ВЫЗОВ 2*

Преподаватель называет тему следующего блока «Тавтологии – законы логики высказываний»

Задание 3. Заполните первый столбец таблицы ЗХУ, отвечая на вопрос «Что мы знаем по данной теме?», исходя из жизненного опыта.

Задание 4. Заполните второй столбец таблицы ЗХУ «Что мы хотим узнать?», записав в него хотя бы три (можно и больше) вопросов по теме занятия, на которые Вы бы хотели получить ответы.

**Таблица 5**

| **З – что мы знаем** | **Х – что мы хотим узнать** | **У – что мы узнали и что нам осталось узнать** |
|---|---|---|
| | | |

При выполнении заданий 3 и 4 студенты работают в парах, однако у каждого должна быть своя заполненная таблица. Допустим, могут отличаться вопросы во втором столбце. После обсуждения в паре каждый студент определяет свои личные познавательные цели.

*ОСМЫСЛЕНИЕ 2*

Задание 5. Изучите сообщение по теме лекции (раздаточный материал 2). Заполните третий столбец таблицы ЗХУ «Что мы узнали?», записывая ответы напротив сформулированных во втором столбце таблицы вопросов.

*РЕФЛЕКСИЯ 2*

Задание 6. Обсудите в группе заполнение таблиц. Остались ли вопросы без ответа?

Задание 7. Продолжите заполнение третьего столбца таблицы ЗХУ « и что нам осталось узнать?», записав вопросы, которые вызвали интерес и требуют на Ваш взгляд более детального рассмотрения, а также новые идеи.

Задание 8. Напишите небольшое (пятиминутное) эссе по теме «Как я понимаю выражение "Все тавтологии равносильны между собой"?»

Студенты выборочно зачитывают свои работы.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Докажите признак равносильности и следствие из него (из определения равносильных формул).

Найдите в дополнительных источниках или в беседе с экспертами (ими могут быть преподаватели) ответы, на возникшие вопросы, записанные в таблице. После завершения работы с таблицей, обменяйтесь таблицами в парах для взаимооценки. Оценка должна быть обязательно аргументирована.

Раздаточные материалы к занятию 2

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1*

### ***Формулы. Примеры. Истинностные значения формул. Классификация формул***

С помощью рассмотренных логических операций из простейших высказываний можно строить высказывания более сложные. Например, "Если $A$ и $B$, то $C$". Это высказывание символически записывается $(A \wedge B) \to C$. Его логическое значение может быть определено, исходя из логических значений исходных высказываний $A$, $B$, $C$ и той схемы, по которой из исходных высказываний построено сложное высказывание. Очевидно, схема конструирования $(X \wedge Y) \to Z$ может быть применена к различным конкретным высказываниям, а не только к высказываниям $A$, $B$ и $C$. Например "Если Сократ – человек и снег– белый, то 7 < 4". Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, то есть переменные, пробегающие множество высказываний называют пропозициональными переменными. (В нашем случае это $X$, $Y$, $Z$). Теперь сформулируем точное определение формулы алгебры высказываний.

Определение 1. Формулой алгебры высказываний называется выражение, полученное с помощью правил:

1. Каждая пропозициональная переменная (элементарное высказывание) есть формула.
2. Если $A$ и $B$ – формулы, то $\overline{A}, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$ также являются формулами.
3. Никаких других формул, кроме оговоренных в пунктах 1 и 2, нет.

Ясно, что процесс построения все более сложных формул может продолжаться безгранично.

Примеры.

1. $\overline{A}\wedge\overline{B},(X\wedge Y)\to Z,(X\to Z)\wedge(Y\to Z),(P\vee R)\to(Q\leftrightarrow R)$ – формулы.

2. $(XY)\to Z, P\wedge Q\vee R,(X\to)\wedge Z$ – не формулы.

Если в формулу $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ вместо пропозициональных переменных $X_1,X_2,\ldots X_n$ подставить конкретные высказывания соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание $F(A_1,A_2,\ldots,A_n)$. Оно называется конкретизацией формулы $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ на наборе высказываний $A_1,A_2,\ldots A_n$. Истинная конкретизация называется моделью формулы.

Пример. $A_1\wedge A_2$: $A_1=$«Пушкин – поэт», $A_2=$«Пушкин – писатель» есть истинная конкретизация (модель) формулы $X_1\wedge X_2$.

Так как в алгебре высказываний рассматривается только логическое значение высказываний, то можно ввести следующее упрощение. Каждое ложное высказывание можно рассматривать как элемент 0, а каждое истинное – как элемент 1 двухэлементного множества $\{0,1\}$. Соответственно вместо $A$ нужно писать 0 или 1, если $A$ ложно или истинно.

Пусть формула $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ при подстановке в нее вместо пропозициональных переменных высказываний $A_1,A_2,\ldots A_n$ со значениями $A_1=\alpha_1$, $A_2=\alpha_2,\ldots A_n=\alpha_n$ принимает значение $\alpha$. В этом случае будем писать $X_1=\alpha_1$, $X_2=\alpha_2,\ldots X_n=\alpha_n$ и $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\alpha$, где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$, $\alpha\in\{0,1\}$.

Для нахождения значения $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ нужно подставить в формулу $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ вместо $X_1,X_2,\ldots,X_n$ значения $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ соответственно. Затем в полученном выражении последовательно проделать все действия с нулями и единицами по таблицам истинности операций. В результате получим 0 или 1.

Пример.

Вычислить значение $F(X_1,X_2,X_3)=\left(X_1\to\overline{X_2}\right)\wedge\left(X_2\leftrightarrow\left(X_1\vee\overline{X_3}\right)\right)$ на наборе 0,1,1.

$F(0,1,1)=(0\to\bar{1})\wedge(1\leftrightarrow(0\vee\bar{1}))=(0\to 0)\wedge(1\leftrightarrow(0\vee 0))=1\wedge(1\leftrightarrow 0)=1\wedge 0=0.$

Таким образом, для данной формулы $F$ можно найти логические значения всех высказываний, в которые формула превращается при подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных различных конкретных высказываний. При нахождении логических значений формулы удобна табличная форма записи (таблица истинности).

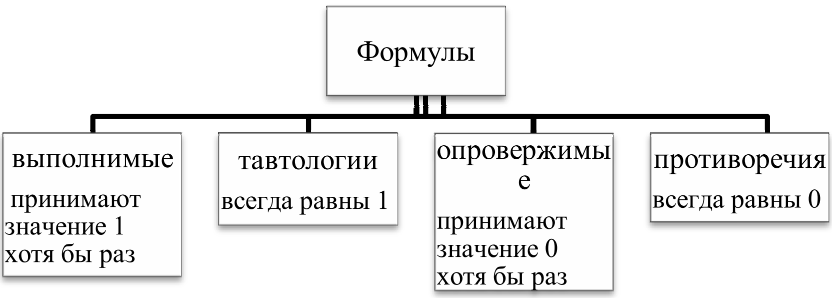
Пример.

Составить таблицу истинности для формулы $F = (X \to Y) \vee (Y \to X)$.

Составить таблицу истинности для формулы $F = (X \to Y) \vee (Y \to X)$.

| $X$ | $Y$ | $X \to Y$ | $Y \to X$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Классификацию формул алгебры высказываний можно пред-




ставить следующей схемой.

Определение 2. Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием. Используя логические символы, можно записать$\exists\ A_1,A_2,\ldots A_n|\ F(A_1,A_2,\ldots,A_n)=1$. Формула имеет хотя бы одну модель.

Аналогичную запись можно привести и для других классов формул.

Определение 3. Формула называется тавтологией или тождественно истинной, если всякая ее конкретизация является истинным высказыванием. То есть, $\forall\ A_1,A_2,\ldots A_n|\ F(A_1,A_2,\ldots,A_n)=1$. Все конкретизации являются моделями.

Определение 4. Формула $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ называется опровержимой, если существуют такие конкретные высказывания, которые превращают данную формулу в ложное высказывание. $\exists\ A_1,A_2,\ldots A_n|$ $F(A_1,A_2,\ldots,A_n)=0$.

Определение 5. Формула $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ называется противоречием или тождественно ложной, если любая ее конкретизация является ложным высказыванием. $\forall\ A_1,A_2,\ldots A_n|\ F(A_1,A_2,\ldots,A_n)=0$. Формула не имеет моделей.

### *Равносильность формул*

Отношение равносильности позволяет вместо конкретной формулы рассматривать любую (наиболее удобную для целей исследователя) из формул равносильных ей.

Определение 1. Формулы $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ и $H(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ алгебры высказываний называются равносильными, если при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных логические значения получающихся из формул $F$ и $H$ высказываний совпадают. Равносильность обозначают $F\cong H$. На языке логических символов определение запишется:

$$F\cong H \Leftrightarrow \forall\ A_1,A_2,\ldots A_n|\ F(A_1,A_2,\ldots,A_n)=H(A_1,A_2,\ldots,A_n).$$

Не следует думать, что в равносильные формулы непременно входят одни и те же переменные. Некоторые из $X_1,X_2,\ldots,X_n$ могут фактически отсутствовать в любой из формул.

Пример

Проверить равносильность формул $F=\overline{X}$ и $H=\overline{X}\wedge(Y\vee\overline{X})$.

| $\overline{X}$ | $Y$ | $Y\vee\overline{X}$ | $F$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 |

Верна следующая теорема.

Теорема 1. (*признак равносильности формул*). Две формулы $F$ и $H$ алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow H$ является тавтологией: $F \cong H \Leftrightarrow F \leftrightarrow H$ – тавтология.

Доказательство. Если $F \cong H$, то по определению равносильности $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = H(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $\forall\ A_1, A_2, \ldots A_n$. Тогда по определению операции эквивалентности заключаем $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) \leftrightarrow H(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 1$, $\forall\ A_1, A_2, \ldots A_n$. Последнее по определению тавтологии означает, что $F \leftrightarrow H$ – тавтология. В другую сторону теорема доказывается обратными рассуждениями. ■

Отметим, что $F \cong H$ не является формулой алгебры высказываний. Оно – утверждение о некотором взаимоотношении между формулами $F$ и $H$.

Следствие. Отношение равносильности между формулами алгебры высказываний:

a) рефлексивно: $F \cong F$;
b) симметрично: если $F_1 \cong F_2$, то $F_2 \cong F_1$;
c) транзитивно: если $F_1 \cong F_2$ и $F_2 \cong F_3$, то $F_1 \cong F_3$,

то есть отношение равносильности является отношением эквивалентности.

Доказательство. Докажем рефлективность. Так как $F = F$, то значения этих формул совпадают для любого набора переменных, а это и значит, что $F \cong F$.

Для доказательства симметричности предположим, что $F_1 \cong F_2$, то есть на основании признака равносильности формула$F_1 \leftrightarrow F_2$ – тавтология. Тогда по определению эквивалентности и формула $F_2 \leftrightarrow F_1$ – тавтология. А это значит, по признаку равносильности, что $F_2 \cong F_1$.

Наконец, если $F_1 \cong F_2$ и $F_2 \cong F_3$, то $F_1 \leftrightarrow F_2$ и $F_2 \leftrightarrow F_3$ – тавтологии. На основании определения эквивалентности заключаем, что для любых наборов переменных, входящих в формулы $F_1$ и $F_2$, $F_2$ и $F_3$ их логические значения совпадают. Но это значит, что $F_1 \leftrightarrow F_3$ – тавтология или $F_1 \cong F_3$.

Таким образом, отношение $\cong$ является отношением эквивалентности, что и требовалось доказать. ■

Как и всякое отношение эквивалентности, отношение $\cong$ определяет разбиение множества, на котором оно задано на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В данном случае множество всех формул алгебры высказываний распадается на попарно непересекающиеся классы, в каждом из которых находятся равносильные между собой формулы. Один класс, например, образуют тавтологии, другой – все противоречия, имеется и множество других классов.

Законы, записанные в определении булевой алгебры, являются равносильностями в алгебре высказываний. То есть, их можно записать, используя знак равносильности.

1. $\overline{\overline{P}} \cong P$;

2. $P \wedge Q \cong Q \wedge P$ (*коммутативность конъюнкции*);

3. $P \vee Q \cong Q \vee P$ (*коммутативность дизъюнкции*);

4. $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$ (*ассоциативность конъюнкции*);

5. $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$ (*ассоциативность дизъюнкции*);

6. $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (*дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции*);

7. $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (*дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции*);

$$\left.\begin{array}{l} 8.\ \overline{P \wedge Q} \cong \overline{P} \vee \overline{Q} \\ 9.\ \overline{P \vee Q} \cong \overline{P} \wedge \overline{Q} \end{array}\right\} (\textit{законы де Моргана});$$

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ P \wedge (P \vee Q) \cong P \\ 11.\ P \vee (P \wedge Q) \cong P \end{array}\right\} (\textit{законы поглощения});$$

$$\left.\begin{array}{l} 12.\ P \wedge \overline{P} \cong 0 \\ 13.\ P \vee \overline{P} \cong 1 \end{array}\right\} (\textit{законы уничтожения});$$

14. $P \wedge P \cong P$ (*идемпотентность конъюнкции*);

15. $P \vee P \cong P$ (*идемпотентность дизъюнкции*);

Кроме того, имеют место следующие равносильности:

$16. P \to Q \cong \overline{P} \vee Q \cong \overline{\left(P \wedge \overline{Q}\right)}$

$17. P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P) \cong (P \wedge Q) \vee \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right).$

Эти 17 равносильностей будем называть основными.

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2*

***Тавтологии – законы логики высказываний***

Тавтологии играют важную роль в логике. Они представляют собой схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний. Поскольку между тавтологиями имеет место отношение логического следования, они широко используются в процессе логического вывода. То есть, некоторые из тавтологий представляют правильные способы умозаключения (это такие способы, которые от истинных посылок всегда приводят к истинным выводам). В частности любая тавтология $F \to G$ соответствует некоторой общей схеме логического умозаключения. Кроме того тавтологии используются как средство формализации различных логических законов. В различных логических исчислениях одни из тавтологий рассматриваются в качестве аксиом, а другие – в качестве теорем, получаемых из аксиом по соответствующим правилам вывода.

Напомним определение тавтологии.

Определение 1. Формула алгебры высказываний называется тавтологией или тождественно истинной, если всякая ее конкретизация является истинным высказыванием. То есть $\forall A_1, A_2, \ldots A_n$ $F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 1$.

Можно ли рассматривать тавтологии как логические законы? Для ответа на этот вопрос надо разобраться, что же понимать под логическим законом.

Определение 2. Логический закон есть универсальная взаимосвязь между понятиями, суждениями, умозаключениями и другими абстрактными объектами, выраженная общезначимой формулой (тавтологией).

Понятие логического закона восходит к древнегреческому понятию о логосе (от греч. logos – слово, смысл, понимание) как первооснове, делающей мир осмысленным и доступным рациональному мышлению. Логическое истолкование понятия логического закона было осуществлено Аристотелем, открывшим закон тождества (″всякое понятие тождественно самому себе″), закон отрицания противоречия (″никакое высказывание не может быть истинным и вместе с тем ложным″), закон исключенного третьего (″любое высказывание таково, что истинно либо оно само, либо его отрицание″). Эти законы традиционно считаются лежащими в основе всей логики.

Таким образом, тавтологии являются средством более точного (по сравнению с выражениями естественного языка) символического выражения логических законов. Сами же логические законы существуют независимо от любых логических теорий, любого естественного языка и практической деятельности человека в целом, так как представляют собой универсальные взаимосвязи самой объективной действительности.

Логические законы, а, следовательно, и тавтологии тесно связаны друг с другом и могут быть условно разделены на более и на менее общие (специальные) логические законы.

***Основные правила получения тавтологий.***

Опишем два правила, которые позволяют получать новые тавтологии из уже имеющихся.

Теорема 1. (*правило заключения или modus ponens*). Если формулы $F$ и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула $H$ также тавтология.

Доказательство.

Пусть $F(X_1,X_2,\ldots X_n)$ – тавтология и $F(X_1,X_2,\ldots X_n) \to H(X_1,X_2,\ldots X_n)$ – также тавтология. Предположим, что $H(X_1,X_2,\ldots X_n)$ не является тавтологией. Это означает, что существуют конкретные высказывания $A_1,A_2,\ldots A_n$, что $H(A_1,A_2,\ldots A_n)=0$. Поскольку $F(X_1,X_2,\ldots X_n)$ – тавтология, то $F(A_1,A_2,\ldots A_n)=1$.

Вычислим значение $F(A_1,A_2,\ldots A_n) \to H(A_1,A_2,\ldots A_n)=1 \to 0=0$. Получили противоречие с тем, что $F \to H$ – тавтология. Следовательно, наше предположение неверно, и $H$ – тавтология.■

Теорема 2. (*правило подстановки*). Если формула $F$, содержащая пропозициональную переменную $X$, является тавтологией, то подстановка в формулу $F$ вместо переменной $X$ любой формулы $H$ снова приводит к тавтологии.

Доказательство. Так как $F(X,Y,\dots)$ – тавтология, то она истинна при подстановке вместо $X,Y,\dots$ любых конкретных высказываний. Значит, вместо $X$ может быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы $H(Z_1,Z_2,\dots Z_k)$ на некотором наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тавтологией будет формула $F(H(Z_1,Z_2,\dots Z_k),Y,\dots)$. ■

Пример. Если в тавтологию $X\to(Y\to X)$ вместо переменной $X$ подставить формулу $(X_1 \wedge \overline{X_2})$, то придем к тавтологии $(X_1 \wedge \overline{X_2}) \to (Y \to (X_1 \wedge \overline{X_2}))$.

Правило подстановки позволяет рассматривать каждую тавтологию, не как отдельно взятую формулу, а как схему образования тавтологий. В свою очередь каждая из пропозициональных переменных может рассматриваться как произвольная формула алгебры высказываний.

Из основных тавтологий и теоремы о равносильности утверждений $F_1,F_2,\dots,F_m \mapsto H$ и $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m) \to H$ – тавтология, вытекают и другие **правила получения тавтологий**. Их удобно записывать в виде дроби. Если формулы, стоящие в числителе – тавтологии, то и формула в знаменателе также является тавтологией. То есть формула, записанная в знаменателе, является следствием всех формул, записанных в числителе данного правила.

Правило 1 (modus ponens): $\dfrac{F, F \to G}{G}$.

Правило 2 (modus tollens): $\dfrac{F \to G, \overline{G}}{\overline{F}}$.

Правило 3 (введения конъюнкции): $\dfrac{F, G}{F \wedge G}$.

Правило 4 (удаление конъюнкции): $\dfrac{F \wedge G}{G}$ и $\dfrac{F \wedge G}{F}$.

Правило 5 (введение дизъюнкции): $\dfrac{F}{F \vee G}$ и $\dfrac{G}{F \vee G}$.

Правило 6 (контрапозиции): $\dfrac{F \to G}{\overline{G} \to \overline{F}}$.

Правило 7 (цепного заключения): $\dfrac{F \to G, G \to H}{F \to H}$.

Правило 8 (перестановки посылок): $\dfrac{F \to (G \to H)}{G \to (F \to H)}$.

Правило 9 (объединения и разъединения посылок): $\dfrac{F \to (G \to H)}{(F \wedge G) \to H}$ и $\dfrac{(F \wedge G) \to H}{F \to (G \to H)}$.

**Основные тавтологии.**

1) $P \vee \overline{P}$ *закон исключенного третьего*;

2) $\overline{\left(P \wedge \overline{P}\right)}$ *закон отрицания противоречия*;

3) $\overline{\overline{P}} \leftrightarrow P$ *закон двойного отрицания*;

4) $P \to P$ *закон тождества*;

5) $(P \to Q) \leftrightarrow (\overline{Q} \to \overline{P})$ *закон контрапозиции*;

6) $\left((P \to Q) \wedge (Q \to R)\right) \to (P \to R)$ *закон силлогизма (правило "цепного заключения")*;

7) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \left(\overline{P} \leftrightarrow \overline{Q}\right)$ *закон противоположности*;

8) $P \to (Q \to P)$ *правило добавления анецедента ("истина из чего угодно")*;

9) $\overline{P} \to (P \to Q)$ *правило "из ложного что угодно"*;

10) $\left(P \wedge (P \to Q)\right) \to Q$ *правило модус поненс*;

11) $\left((P \to Q) \wedge \overline{Q}\right) \to \overline{P}$ *правило модус толленс*;

12) $\left(P \to (Q \to R)\right) \leftrightarrow \left(Q \to (P \to R)\right)$ *правило перестановки посылок*;

13) $\left(P \to (Q \to R)\right) \leftrightarrow \left((P \wedge Q) \to R\right)$ *правило объединения (и разъединения) посылок*;

14) $\left((P \to R) \wedge (Q \to R)\right) \leftrightarrow \left((P \vee Q) \to R\right)$ *правило разбора случаев*;

15) $(P \wedge Q) \to P,\ P \to (P \vee Q)$ *законы упрощения*;

16) $\left[\left(\overline{P} \to Q\right) \wedge \left(\overline{P} \to \overline{Q}\right)\right] \to P; \left[\overline{P} \to \left(Q \wedge \overline{Q}\right)\right] \to P$ *правило приведения к абсурду*.

### *Занятия 3-4. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Закон двойственности. Совершенные нормальные формы*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЙ

В результате освоения содержания занятий обучающийся должен знать:

- понятие нормальной формы для формул алгебры высказываний: понятия дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), конъюнктивной нормальной формы (КНФ), совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) и совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ);
- закон двойственности;
- теоремы о приведении формул алгебры высказываний к нормальным формам;

уметь:

- приводить формулу алгебры высказываний к ДНФ и КНФ, СДНФ и СКНФ с помощью равносильных преобразований формул;

владеть:

- техникой равносильных преобразований логических формул к нормальным формам.

***Основные приемы и методы занятия***: стратегия ведения «Бортового журнала».

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ*

Преподаватель объявляет тему занятия «Нормальные формы для формул алгебры высказываний». Эта тема рассчитана на две лекции. Каждому студенту раздаются листы для ведения «Бортового журнала».

Учащиеся вносят в журнал свои данные (фамилию, имя) а также дату проведения и тему занятия. Затем студентам даются ключевые понятия, которые они заносят в журнал:

- нормальная форма;
- дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ);

- конъюнктивная нормальная форма (КНФ);
- совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ);
- совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ);
- закон двойственности.

Задание 1. Установите возможные связи между ключевыми понятиями. Составьте хотя бы три предложения (можно и больше), в которых фигурируют несколько ключевых понятий, запишите их в «Бортовом журнале». Например: «Дизъюнктивную и конъюнктивную нормальную формы связывает закон двойственности».

Некоторые студенты по желанию озвучивают получившиеся предложения.

**«БОРТОВОЙ ЖУРНАЛ»**

**ИМЯ** .............................. **ТЕМА** ....................................
**ДАТА** .............................. **ВРЕМЯ РАБОТЫ** ....................

**КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ СООБЩЕНИЯ** ..........................................

**РИСУНОК (СХЕМА)**

***СВЯЗИ, КОТОРЫЕ Я МОГУ УСТАНОВИТЬ:***
..........................................................................................

Задание 2. 🚹 Составьте три вопроса к лектору по теме занятия и запишите их внизу листа. Что бы Вы хотели узнать из лекции?

Вопросы тоже можно зачитать по желанию студентов.

Задание 3. 👪 Из вопросов сформулированных членами группы выберите три самых интересных вопроса.

Затем представители группы озвучивают свои вопросы, и они фиксируются преподавателем на доске.

Задание 4. 🚹 На обратной стороне листа запишите уже пять вопросов, которые считаете самыми интересными для себя. Причем эти вопросы не обязательно включают первоначально сформулированные. Они выбираются из:

– своих вопросов;
– вопросов, обсуждаемых в группе;
– вопросов, вынесенных на доску.

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Преподаватель читает лекцию (раздаточный материал), в которой пытается осветить все зафиксированные на доске вопросы студентов.

Задание 5. 🚹 При прослушивании лекции найдите ответы на выбранные вопросы. Запишите ответы в журнал. Также по ходу лекции записывайте на свободном листе журнала наиболее важные на Ваш взгляд положения.

*РЕФЛЕКСИЯ*

Задание 6. 👪 Обсудите информацию по вопросам. Каждый может дописать или вычеркнуть что-то на основе обсуждения.

Обсуждение в аудитории: получилось ли отразить в лекции все вопросы, вынесенные на доску, остались ли у студентов вопросы без ответа?

Возможно, лектор дает пояснение по вопросам, ответы на которые студенты не получили.

Задание 7. 🚹 Изобразите в выделенном поле рисунок или схему, в которой задействованы все ключевые понятия.

Задание 8. 👪 Зарисуйте общую схему по ключевым понятиям лекции и представьте её аудитории.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Завершите заполнение «Бортового журнала». Обдумайте и ответьте письменно на все поставленные Вами вопросы. По завершении этой работы дайте развёрнутую самооценку.

Продолжайте заполнение рубрик портфолио.

Раздаточные материалы к занятиям 3-4

### *Нормальные формы формул. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ). Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)*

В классе формул равносильных данной существуют формулы, содержащие только операции конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (этот факт следует из равносильностей 16 и 17). Рассмотрение такого вида формул и составляет задачу данного параграфа.

Определение 1. Элементарной конъюнкцией К от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Примеры элементарных конъюнкций:

$$X \wedge X,\ X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge X_3,\ X_2 \wedge \overline{X_1} \wedge X_3 \wedge \overline{X_2} \wedge X_5,\ X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_1} \wedge X_3 \wedge X_1$$

Определение 2. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций, то есть выражение вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$, где все $K_i$, $i=1,2,\ldots,p$ являются элементарными конъюнкциями (не обязательно различными).

Теорема 1. Каждую формулу алгебры высказываний можно привести к виду ДНФ.

Доказательство. В формуле можно:

1) избавиться от импликаций и эквиваленостей, применяя равносильности 16, 17;
2) с помощью законов де Моргана избавиться от больших отрицаний;
3) воспользоваться законом дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции (6).

После этих преобразований формула будет приведена к виду ДНФ.

Пример. Привести формулу $(X \wedge Y \wedge Z) \to Z$ к виду ДНФ.

$$(X \wedge Y \wedge Z) \to Z \cong \overline{(X \wedge Y \wedge Z)} \vee Z \cong \overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee Z \text{ –ДНФ.}$$

Определение 3. Элементарной дизъюнкцией $D$ от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Определение 4. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций, то есть выражение вида $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_q$ где все $D_i$, $i=1,2,\ldots,q$ являются элементарными дизъюнкциями (не обязательно различными).

Теорема 2. Любая формула алгебры высказываний может быть приведена к виду КНФ.

Доказательство. Пусть дана формула $F$ и ее нужно привести к виду КНФ. Запишем отрицание этой формулы $G=\overline{F}$. Формулу $G$ возможно привести к виду ДНФ по теореме 1: $G=K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$ где все $K_i$ – элементарные конъюнкции. Формулу $\overline{G}$ можно преобразовать следующим образом.

$\overline{G} = \overline{K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p} \stackrel{9}{=} \overline{K_1} \wedge \overline{K_2} \wedge \ldots \wedge \overline{K_p} \stackrel{10}{=} D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots D_p$, где все $D_i$ – элементарные дизъюнкции. С другой стороны, так как $G=\overline{F}$, получаем $\overline{G} = \overline{\overline{F}} \stackrel{1}{=} F$. Следовательно, $F=D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_P$ – КНФ.■

К любому виду ДНФ можно

- приписать дизъюнкцию с переменной, уже встречающейся в формуле, от этого логическое значение формулы не изменится, в виду равносильности $X \vee X \cong X$;
- рассмотреть дизъюнкцию с 1, которую затем представить в виде $1 \cong X \vee \overline{X}$.

Возможно придумать и другие способы получения новых ДНФ. Аналогичные преобразования выполняется и для КНФ. Поэтому у данной формулы $F$ существует неограниченно много как дизъюнктивных, так и конъюнктивных нормальных форм. Одни из них более громоздкие, а другие – более простые.

***Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)***

Среди множества дизъюнктивных нормальных форм, которыми обладает данная формула алгебры высказываний, существует уникальная форма: она единственна для данной формулы. Это так называемая совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Определение 1. Полной элементарной конъюнкцией (ПЭК) от переменных $X_1,X_2,\ldots,X_n$ называется конъюнкция вида $K=X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_n'$, где $X_i' = \left[\begin{array}{l} X_i \\ \overline{X_i} \end{array}\right.$.

Определение 2. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) от переменных $X_1,X_2,\ldots,X_n$ называется дизъюнкция нескольких попарно различных ПЭК от $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

Пример. СДНФ от $X_1,X_2,X_3, X_4$:

$$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (\overline{X_1} \wedge X_2 \wedge \overline{X_3} \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge \overline{X_2} \wedge \overline{X_3} \wedge X_4).$$

Теорема 1. Каждая формула алгебры высказываний, отличная от противоречия, может быть приведена к СДНФ.

Доказательство. Всякая формула $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ по теореме 1 предыдущего параграфа может быть приведена к виду ДНФ: $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)=K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$, где все $K_i$ – элементарные конъюнкции.

Пусть $K_l$ не является ПЭК. Значит

a) хотя бы одна из переменных $X_k$ или $\overline{X_k}$ входит в $K_l$ два и более раз $K_l=X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_k' \wedge X_k' \wedge \ldots \wedge X_n'$, но $X_k' \wedge X_k' = X_k'$, произведя эту замену, получим $K_l'=X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_k' \wedge \ldots \wedge X_n'$ – ПЭК.

b) в элементарную конъюнкцию $K_l$ входят $X_k$ и $\overline{X_k}$ одновременно $K_l=X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_k \wedge \overline{X_k} \wedge \ldots \wedge X_n'$. Так как $X_k \wedge \overline{X_k} = 0$, то $K_l=X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge 0 \wedge \ldots \wedge X_n' = 0$ и ее можно исключить в силу свойства $X\wedge 0=X$.

c) в $K_l$ отсутствует какая-либо из переменных $X_i$. Пусть, например, отсутствует $X_1$, то есть: $K_l=X_2' \wedge \ldots \wedge X_n'$. Проведем следующие преобразования:

$$K_l=X_2' \wedge \ldots \wedge X_n' = X_2' \wedge \ldots \wedge X_n' \wedge 1 = X_2' \wedge \ldots \wedge X_n' \wedge (X_1 \vee \overline{X_1}) = (X_1 \wedge X_2' \wedge \ldots X_n') \vee$$
$$\vee (\overline{X_1} \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_n') = K_l' \vee K_l''$$, где $K_l', K_l''$ – ПЭК.

С помощью указанных преобразований приведем все элементарные конъюнкции в формуле $F$ к виду ПЭК. Если $K_i=K_j$, то одну из них можно исключить в виду идемпотентности конъюнкции ( $K \wedge K \cong K$ ). После всех таких преобразований формула $F$ будет представлена в виде дизъюнкции попарно различных ПЭК. А это и значит, что $F$ приведена к СДНФ. А так как $F$ произвольная формула алгебры высказываний, то утверждение теоремы доказано.■

Пример

Привести к СДНФ формулу $F = (X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge (X \wedge Y \wedge Z \to X)$.

Решение.

$$F = (X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge (X \wedge Y \wedge Z \to X) = (X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X \wedge Y \wedge Z} \vee X) =$$
$$=(X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee X) = (X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge (1 \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) = (X \wedge \overline{Y} \vee Z) \wedge 1 \overset{ДНФ}{=}$$
$$= X \wedge \overline{Y} \vee Z = X \wedge \overline{Y} \wedge 1 \vee Z \wedge 1 = X \wedge \overline{Y} \wedge (Z \vee \overline{Z}) \vee Z \wedge (X \vee \overline{X}) = X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge$$
$$\wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee Z \wedge X \vee Z \wedge \overline{X} = X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Z \wedge (Y \vee \overline{Y}) \vee \overline{X} \wedge Z \wedge$$
$$\wedge (Y \vee \overline{Y}) = \underline{X \wedge \overline{Y} \wedge Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \wedge Z \vee \underline{X \wedge \overline{Y} \wedge Z} \vee \overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge$$
$$\wedge \overline{Y} \wedge Z = X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z$$

– СДНФ.

Для того, чтобы доказать единственность СДНФ предварительно рассмотрим некоторые понятия.

Определение 3. Строку или упорядоченный набор из 0 и 1 длины $n$ будем называть кортежем длины $n$.

Каждой ПЭК от $n$ переменных $K(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ сопоставим кортеж длины $n$ по следующему правилу: $X_1' \wedge X_2' \wedge \ldots \wedge X_n' \xrightarrow{\varphi}$ $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, где $\xi_i = \left[\begin{array}{l} 1,\ при\ X_i' = X_i \\ 0,\ при\ X_i' = \overline{X_i} \end{array}\right.$. Очевидно, что разным ПЭК соответствуют разные кортежи, а по кортежу можно восстановить ПЭК. Таким образом, соответствие $\varphi$ между ПЭК и кортежем является биекцией.

Пример Дана ПЭК $K = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \overline{X_4}$. Ей соответствует кортеж $\alpha$=(1,1,1,0). Вычислить $K(\alpha)$.

$K(\alpha) = 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge \overline{0} = 1$.

Пусть $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ – это кортеж соответствующий полной элементарной конъюнкции $K$, то есть $\varphi(K) = \alpha$. Вычислим значение

$K(\alpha)$ – это значение формулы $K$ при подстановке вместо $X_i$ элемента $\xi_i$ кортежа $\alpha$. Если $\xi_k$=1, то в $K$ входит $X_k$, если $\xi_k$=0 то в $K$ входит $\overline{X_k}$. Учитывая, что $\bar{0}=1$ получим конъюнкцию единиц, то есть $K(\alpha)$=1.

Если кортеж $\alpha'=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots\gamma_n)$ не соответствует $K$, то хотя бы одно $\gamma_k\neq\xi_k$. Если $\xi_k$=1 (в $K$ входит $X_k$), то $\gamma_k$=0, получим $K(\alpha')$= $\gamma_1\wedge\ldots\wedge 0\wedge\ldots\wedge\gamma_n=0$. Если $\xi_k$=0 (в $K$ входит $\overline{X_k}$), то $\gamma_k$=1, получим $K(\alpha')=\gamma_1\wedge\ldots\wedge\bar{1}\wedge\ldots\wedge\gamma_n=0$.

Теорема 2. Если формула $F$ от $n$ переменных представима в СДНФ, то такое представление единственно (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов).

Доказательство. Пусть $F=A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_k$ и $F=B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_m$, где $A_i$, $B_j$ – ПЭК. Докажем, что все $A_i\in\{B_1,B_2\ldots,B_m\}$. Составим кортеж $\alpha_1$, соответствующий $A_1$. Найдем

$F(\alpha_1)$=

$A_1(\alpha_1)\vee A_2(\alpha_1)\vee\ldots\vee A_k(\alpha_1)=1\vee A_2(\alpha_1)\vee\ldots\vee A_k(\alpha_1)=1$. Тогда

$F(\alpha_1)=B_1(\alpha_1)\vee B_2(\alpha_1)\vee\ldots\vee B_k(\alpha_1)=1$, поэтому среди ПЭК есть $B_s(\alpha_1)$=1. Значит, кортеж $\alpha_1$ соответствует $B_s$. Так как $\varphi$ – биекция, то $B_s=A_1$.

Далее можно рассмотреть кортежи $\alpha_2,\ldots\alpha_k$ соответствующие $A_2,\ldots A_k$. Получим $A_i\in\{B_1,B_2\ldots,B_m\}$ $\forall i=1,\ldots k$. Но аналогичные рассуждения справедливы и для $B_j$. Следовательно, $B_j\in\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ $\forall j=1,\ldots m$. Значит, представления $F=A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_k$ и $F=B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_m$ формулы $F$ совпадают с точностью до перестановки дизъюнктивных членов. ■

### *Принцип двойственности. СКНФ*

Определение 1. Если в формуле $F$ алгебры высказываний, содержащей операции $\vee$, $\wedge$ и отрицание заменить $\vee$ на $\wedge$, а $\wedge$ на $\vee$, то получится формула $F^*$, двойственная данной формуле.

Замечание. Из определения видно, что $(F^*)^*=F$.

Пример. Для формулы $F=(X\vee\bar{Y})\wedge(\bar{X}\vee Y)$ составить двойственную.

$F^* = (X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y)$.

Теорема 1. Пусть $F^*(X_1,X_2,\dots,X_n)$ – формула алгебры высказываний двойственная формуле $F(X_1,X_2,\dots,X_n)$.

Тогда $F^*(X_1,X_2,\dots,X_n) \cong \overline{\left(F\,\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n}\right)}$.

Доказательство.

Можно преобразовать левую часть искомой равносильности по законам де Моргана. При этом

1) к каждой переменной добавится по отрицанию
2) дизъюнкция заменится на конъюнкцию, а конъюнкция на дизъюнкцию.

Замена, указанная в пункте 2), соответствует определению двойственной формулы, поэтому верно $\overline{F(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})} \cong F^*(\overline{\overline{X_1}},\overline{\overline{X_2}},\dots,\overline{\overline{X_n}})$. Далее по равносильности 1 можно избавиться от двойных отрицаний и получится правая часть доказываемой равносильности $F^*(X_1,X_2,\dots,X_n)$.■

Следствие (*принцип двойственности*). Если формулы равносильны, то равносильны и им двойственные формулы: $F_1 \cong F_2 \Rightarrow F_1^* \cong F_2^*$.

Доказательство.

Пусть даны равносильные формулы $F_1$ и $F_2$. Можно записать формулу $F_1^*$, двойственную $F_1$, и преобразовать ее по предыдущей теореме. Также, если $F_1 \cong F_2$, то и $\overline{F_1} \cong \overline{F_2}$. Из сказанного выше вытекает, что $F_1^*(X_1,X_2,\dots,X_n) \cong \overline{F_1(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})} \cong \overline{F_2(\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n})} \cong F_2^*(X_1,X_2,\dots,X_n)$. ■

Определение 2. Полной элементарной дизъюнкцией (ПЭД) от переменных $X_1,X_2,\dots,X_n$ называется дизъюнкция вида $D = X_1' \vee X_2' \vee \dots \vee X_n'$, где $X_i' = \left[\begin{array}{l} X_i \\ \overline{X_i} \end{array}\right.$.

Определение 3. Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) от переменных $X_1,X_2,\dots,X_n$ называется конъюнкция нескольких попарно различных ПЭД от $X_1,X_2,\dots,X_n$.

<u>Теорема 2</u>. Для любой формулы алгебры высказываний, отличной от тавтологии, существует равносильная ей СКНФ, притом единственная.

<u>Доказательство</u>. Пусть дана формула $F$, напишем для нее двойственную формулу $F^*$. На основании теоремы 1 предыдущего пункта $F^*$ можно преобразовать к виду СДНФ: $F^* \cong A$, где $A$ имеет вид СДНФ. Тогда $(F^*)^* \cong A^*$ и по замечанию, $(F^*)^* = F$, значит $F \cong A^*$. Так как $A$ имеет вид СДНФ, то $A^*$, по определению двойственной формулы, имеет вид СКНФ. Значит, $F$ приводима к СКНФ.

По теореме 2 того же пункта представление в СДНФ единственно, следовательно, представление в виде СКНФ также единственно.■

<u>Пример.</u> Привести $F = X \wedge \overline{Y} \vee Z$ к виду СКНФ.

Решение. Запишем

$$F^* = (X \vee \overline{Y}) \wedge Z \cong X \wedge Z \overset{\text{ДНФ}}{\vee} \overline{Y} \wedge Z \cong X \wedge Z \wedge (Y \vee \overline{Y}) \vee \overline{Y} \wedge Z \wedge (X \vee \overline{X}) \cong X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge$$

$$\wedge \overline{Y} \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \cong \underbrace{X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z}^{\text{СДНФ для } F^*}$$

$$(F^*)^* \cong F \cong \overbrace{(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)}^{\text{СКНФ для } F}$$

## *Занятие 5. Булевы функции. Полные системы булевых функций*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определение булевой функции и полной системы булевых функций;
- результаты о числе булевых функций от $n$ переменных и представлении истинностных функций формулами;
- результаты о применении теории булевых функций к релейно-контактным схемам;

уметь:

- доказывать свойства булевых функций;

владеть:

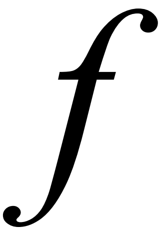
- техникой приведения формул алгебры высказываний к СДНФ и СКНФ с помощью таблиц истинности.

***Основные приемы и методы занятия:*** мозговой штурм, ассоциации, приём «ложно-истинно», продвинутая лекция, концептуальная таблица, приём «кластер-загадка», разноуровневые вопросы.

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ 1*

Задание 1. Анализируя раздаточный материал, сформулируйте тему занятия.



(1815-1864)

Задание 2. Для каждого утверждения в таблице определите истинно оно или ложно.

**Таблица 6**

| № | **утверждение** | истинно | ложно |
|---|---|---|---|
| 1 | Булева функция $f$ от $n$ переменных определена на множестве $\{1,0\}$. | | |
| 2 | Булева функция $f$ от $n$ переменных принимает значения на множестве $\{1,0\}$. | | |
| 3 | Число различных булевых функций от $n$ аргументов меньше, чем $2^{2^n}$. | | |
| 4 | Штрих Шеффера – это булева функция. | | |
| 5 | Любую булеву функцию $f$ можно записать как формулу алгебры высказываний. | | |
| 6 | Существует алгоритм нахождения СДНФ для формулы по ее таблице истинности. | | |

Преподаватель фиксирует мнение групп на доске в таблице (пример заполнения таблицы приведён ниже), проходит обсуждение: какие утверждения считают истинными все группы, есть ли утверждения, которые все считают ложными.

**Таблица 7**

| № | I группа | II группа | III группа | IV группа | V группа |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + | + |
| 2 | + | – | + | – | + |
| 3 | + | + | – | – | – |
| 4 | – | – | – | – | – |
| 5 | + | + | + | + | + |
| 6 | + | + | + | + | + |

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1*

Преподаватель читает первую часть лекции, которая состоит из нескольких смысловых блоков. Перед каждым блоком преподаватель формулирует вопросы, готовящие студентов к восприятию материала. По ходу лекции студенты также выполняют задания, участвуют в обсуждении возникающих вопросов. Ниже приведены задания ко всей первой части в порядке их предъявления студентам. Текст лекции приведён по пособию автора [6] стр.31-35 и помещён в кавычках.

«Ранее было отмечено, что каждую из операций над высказываниями можно рассматривать как некоторое действие над символами 1 и 0, то есть как некоторую функцию, заданную на двухэлементном множестве {1,0} и принимающую значения в том же множестве. Символом 1 обозначается любой истинное высказывание, символом 0 – любое ложное.

Примеры. 1. Отрицание – функция одного аргумента $f(X)$, которая принимает следующие значения: $f(0)=1$, $f(1)=0$.

2. Конъюнкция – функция двух аргументов $G(X,Y)$, она принимает следующие значения: $G(0,0)=0$, $G(1,0)=0$, $G(0,1)=0$, $G(1,1)=1$.

Далее говорилось, что каждая формула алгебры высказываний $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ от $n$ пропозициональных переменных определяет, по существу, некоторую функцию от $n$ аргументов, сопоставляющую любому кортежу длины $n$, составленному из элементов двухэлементного множества {0,1}, единственный элемент того же множества. Следовательно, значение функции определяется структурой формулы $F$ и определениями операций $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и отрицания, которые понимаются как определения действий над символами 1 и 0.

В связи с этим, естественно рассматривать функции, заданные на двухэлементном множестве {1,0} безотносительно к формулам алгебры высказываний, то есть как автономный объект.

Определение 1. Функция $f$ от $n$ переменных называется булевой, если она определена на множестве {1,0} и принимает значения из этого же множества. Булева функция обозначается $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

Примеры. 1. $y=x^2$ – булева функция; 2. $y=x_1-x_2$ – не булева функция.

Нетрудно перечислить все булевы функции от одного аргумента:

| Аргумент | Булевы функции | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $f_0(X)$ | $f_1(X)$ | $f_2(X)$ | $f_3(X)$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$f_0(X)=0$ – тождественно ложная функция,

$f_1(X)=X$ – тождественная функция,

$f_2(X)=X'$ – отрицание,

$f_3(X)=1$ – тождественная истинная функция.»

**Первая остановка**

Задание 3. Составьте таблицу значений булевых функций от двух аргументов и определите число этих функций.

**Таблица 8**

| $X$ | $Y$ | Булевы функции от двух аргументов | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
| 0 | 0 | | | |
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 0 | | | |
| 1 | 1 | | | |
| Символ | | | | |

Задание 4. Проверьте: все ли функции различны и все ли наборы значений вы учли. Внесите коррективы, если они требуются.

Задание 5. В строке таблицы «символ» укажите обозначение уже известных вам функций (например, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ и т.д.). Предложите название и обозначение для оставшихся функций.

Обсуждение в аудитории выполнения задания 5 по вопросам:

Сколько различных функций от двух переменных вы нашли?

Какие неизвестные функции вы построили?

Какие названия для этих функций вы можете предложить? И почему?

По результатам обсуждения заполняется соответствующая таблица на доске. Студенты также вносят исправления в таблицу.

«Многие из этих функций имеют специальные названия и обозначения в теории булевых функций.

$\bullet$ – конъюнкция;

$|$ – штрих Шеффера, $X|Y=(X\bullet Y)'$;

$\downarrow$ – стрелка Пирса, $X\downarrow Y=(X\vee Y)'$;

$\leftarrow$ – антиимпликация, $X\leftarrow Y=Y\rightarrow X$;

$+$ – сложение по модулю 2 (сумма Жегалкина), $X+Y=(X\leftrightarrow Y)'$;

С помощью суперпозиций этих простых функций можно строить более сложные булевы функции от трех, четырех и более аргументов.

Для операций •, ∨ и отрицания будут справедливы законы булевой алгебры (это легко проверить с помощью таблицы истинности). Кроме того, выполняются равенства:

a) $X \to Y = X' \vee Y$;
b) $X \leftrightarrow Y = (X \to Y) \bullet (Y \to X)$;
c) $X' = X \mid X$;
d) $X \mid Y = X' \vee Y'$;
e) $X' = X \downarrow X$;
f) $X \downarrow Y = X' \bullet Y'$.

Их справедливость легко проверить с помощью таблиц.

Выясним вопрос о числе булевых функций от $n$ аргументов».

**Вторая остановка.**

В ходе выполнения заданий вами были найдены все булевы функции от двух переменных. Также была построена таблица для функций одной переменной.

Обсуждение по вопросам.

Сколько было функций от одной переменной? А от двух?

Предположите: сколько будет существовать булевых функций от $n$ переменных?

Как можно найти число этих функций?

«Теорема 9.1. Число различных булевых функций от $n$ аргументов равно точно $2^{2^n}$.

Доказательство. Чтобы задать булеву функцию $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ нужно перечислить все кортежи $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ из нулей и единиц значений, которые могут принимать ее аргументы $X_1,X_2,\ldots,X_n$, и для каждого такого набора указать значение функции $f$, которое она принимает на этом наборе.

Выясним, сколько существует кортежей $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)$. На $n$ мест нужно разместить элементы 0 и 1, при этом они могут повторяться, и важен порядок их вхождения в кортеж. Это число равно $\overline{A_2^n} = 2^n$.

Таким образом, для функции $f$ нужно указать ее значение для каждого из $2^n$ кортежей. Сколько же существует таких значений?

Ровно столько, сколько имеется различных наборов длины $l=2^n$, составленных из нулей и единиц. Но, как только что показано, число таких наборов равно $2^l$, а так как $l=2^n$, то получаем $2^l=2^{2^n}$ .■»

**Третья остановка**

Задание 6. Запишите в столбик ответы на вопрос: «Какие связи можно установить между булевыми функциями и формулами алгебры высказываний?»

Обсуждение задания 6 проводится сначала в парах, а затем несколько пар делятся своими результатами с аудиторией. Ответы студентов преподаватель фиксирует на доске.

Во время чтения следующего фрагмента лекции студенты выполняют задание в парах.

Задание 7. Отметить «+» те ответы, которые находят подтверждение в материалах лекции и «–» ответы, противоречащие либо не связанные с воспринимаемым материалом.

«Теорема 9.2 (*о представлении истинностных функций формулами*). Любую истинностную булеву функцию ($f\neq0$) можно записать как формулу алгебры высказываний.

Доказательство.

Пусть дана булева функция $f(X_1,X_2,\ldots X_n)$.

Можно составить таблицу ее значений

| $X_1$ | $X_2$ | . | . | . | $X_n$ | $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | . | . | . | 0 | $\alpha_1$ |
| 0 | 0 | . | . | . | 1 | $\alpha_2$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| 1 | 1 | . | . | . | 1 | $\alpha_k$ |

В таблице $\alpha_i$ – это 0 или 1, а число строк $k=2^n$.

Выпишем те кортежи, при которых $f$ истинна (принимает значение 1). Пусть, например, $\alpha_1=1$, тогда выпишем соответствующий кортеж (0,0,…,0) и так далее. Для каждого выписанного кортежа составим соответствующую ПЭК. Из полученных ПЭК составим формулу $F$ в виде СДНФ.

Нужно показать, что $F$ – искомая формула, то есть, что ее значения действительно будут совпадать со значениями $f$ на одинаковых наборах переменных.

Возьмем произвольный кортеж $\alpha$, для которого $f(\alpha)=1$. Значит по этому кортежу была составлена полная элементарная конъюнкция $A_k$ такая, что $A_k(\alpha)=1$. Так как $A_k$ входит в $F$, то
$F(\alpha) = A_1(\alpha) \vee A_2(\alpha) \vee\ldots\vee A_k(\alpha) \vee\ldots\vee A_m(\alpha) = A_1(\alpha) \vee A_2(\alpha) \vee\ldots\vee 1\vee$ $\vee\ldots\vee A_m(\alpha) = 1$.

Возьмем произвольный кортеж $\beta$, для которого $f(\beta)=0$. Это значит, что кортеж $\beta$ не был выписан ранее и в представлении формулы $F$ нет ПЭК, соответствующей $\beta$. Следовательно, $F(\beta)=0$.

Таким образом, $f$ и $F$ принимают одинаковые значения при одинаковых значениях переменных, входящих в них. Следовательно, $f \cong F$. ■

Пример.

Найти формулу, равносильную булевой функции $f(x,y)=1–xy$.

Решение. Сначала нужно построить таблицу истинности. Затем выписать кортежи, при которых $f=1$ и соответствующие им ПЭК:

………ПЭК

(0,0) – $\overline{X} \wedge \overline{Y}$

(0,1) – $\overline{X} \wedge Y$

(1,0) – $X \wedge \overline{Y}$ .

Тогда $F=\overline{X} \wedge \overline{Y} \vee \overline{X} \wedge Y \vee X \vee \overline{Y}$, $f(X,Y)\cong F(X,Y)$.

Приведенная выше теорема дает возможность записывать СДНФ для формул алгебры высказываний.

Алгоритм для нахождения СДНФ для данной формулы $F$:

1) составить таблицу истинности формулы $F$;
2) выписать кортежи, при которых формула $F$ истинна (=1);
3) составить ПЭК, соответствующие выписанным кортежам (если в кортеже 0, то ставится отрицание);
4) СДНФ формулы $F$ представляет собой дизъюнкцию полученных конъюнкций.

Алгоритм для нахождения СКНФ можно составить по закону двойственности».

Несколько пар студентов (по желанию) представляют свою работу по заданию 7.

Проводится обсуждение в аудитории выполнения задания 8 и внесение необходимых корректировок.

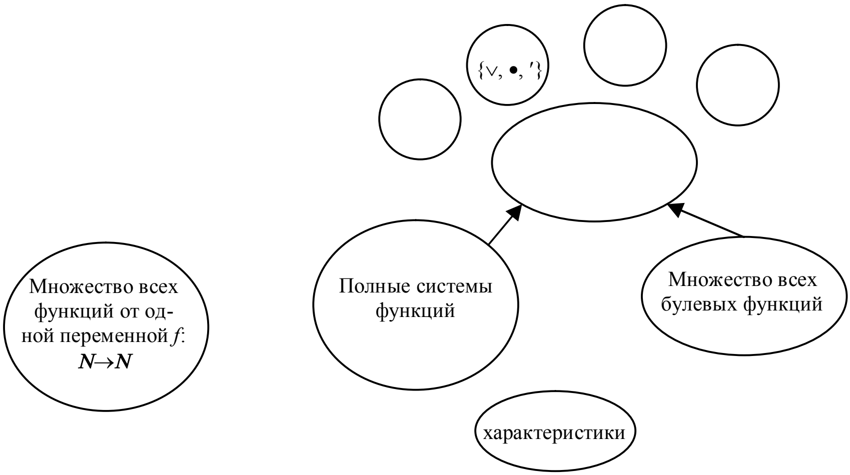
*РЕФЛЕКСИЯ 1*

Задание 8. 👪 Внесите исправления в таблицу с утверждениями.

Происходит обсуждение материала и подведение итогов первой части лекции.

*ВЫЗОВ 2*

Задание 9. 👪 В кластере (раздаточный материал) определите недостающие понятия и связи.




*ОСМЫСЛЕНИЕ 2*

Преподаватель читает вторую часть лекции (раздаточный материал) [6, стр.35-37].

*РЕФЛЕКСИЯ 2*

Задание 10. 👪 Обсудите и внесите исправления в кластер.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Сформулируйте алгоритм нахождения СКНФ для формулы по ее таблице истинности аналогично алгоритму нахождения СДНФ. Используйте принцип двойственности.

Используя различные источники информации, подберите материал по теме «Применение теории булевых функций к релейно-контактным схемам (РКС)». Ответьте на вопросы:

- Что такое РКС?

- Что такое функция проводимости и условия работы схемы?
- Какие задачи считаются основными в теории РКС? Приведите примеры.
- Считаете ли Вы данную теорию актуальной и востребованной?

Раздаточные материалы к занятию 5

## *Полные системы булевых функций*

Определение 1. Пусть задана некоторая совокупность функций $\boldsymbol{\Phi}$, и выделена подсовокупность $\boldsymbol{\Phi_1}=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$. $\boldsymbol{\Phi_1}\subset\boldsymbol{\Phi}$. Назовем $\boldsymbol{\Phi_1}$ полной системой функций в $\boldsymbol{\Phi}$, если любая функция из $\boldsymbol{\Phi}$ может быть представлена суперпозицией функций из $\boldsymbol{\Phi_1}$.

Пример. Пусть заданы функции $f_1=x+2$, $f_2=x^2$, $f_3=x^2+2$, $f_4=(x+2)^2$. Тогда система $\{f_1,f_2\}$ является полной системой функций в системе $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$. Действительно, $f_3=f_1(f_2)$, $f_4=f_2(f_1)$.

Теорема 1. Для совокупности всех функций от одной переменной, определенных на множестве $\mathbb{N}$ и принимающих значения на этом же множестве не существует полной конечной системы функций.

Доказательство. Пусть такая совокупность существует: $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$. Перечислим все функции, которые можно получить как суперпозиции функций записанной системы:

$f_1,f_2,\ldots,f_n$, $f_1(f_2),f_1(f_3),\ldots,f_1(f_n)$, $f_2(f_1),\ldots,f_2(f_n),\ldots f_n(f_1),\ldots,f_n(f_{n-1}),f_1(F_2(F_3)),\ldots$. Занумеруем эти функции, то есть каждой функции присвоим номер ($f_1(f_2)=f_{n+1}$, $f_1(f_3)=f_{n+2},\ldots$). Получилось счетное множество функций, которые являются суперпозициями данных функций.

Рассмотрим функцию $g(x)=f_x(x)+1$, где $x\in\mathbb{N}$.

Тогда $g(1)=f_1(1)+1$, $g(2)=f_2(2)+1$. То есть $g(x)$ определена на множестве $\mathbb{N}$ и принимает натуральные значения. Так как по предположению $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ – полная система функций, то $g(x)$ является суперпозицией этой системы. То есть ей был присвоен какой-то номер $g(x)=f_s(x)$. Найдем $g(s)=f_s(s)$, но по определению $g(s)=f_s(s)+1$. Пришли к противоречию. Следовательно, Для совокупности всех функций от одной переменной, определенных на множестве $\mathbb{N}$, не существует полной конечной системы функций ■

Интересен вопрос существования полной системы функций во множестве всех булевых функций. Для доказательства соответствующей теоремы понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма (*о разложении функции по переменной*). Для произвольной булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ справедливы формулы разложения функции по переменной $x_1$:

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1\bullet f(1,x_2,\ldots,x_n))\vee(x_1'\bullet f(0,x_2,\ldots,x_n))$ (1),

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1\vee f(0,x_2,\ldots,x_n))\bullet(x_1'\vee f(1,x_2,\ldots,x_n))$ (2).

Доказательство. Нужно доказать, что функции, стоящие в обеих частях равенства, принимают одни и те же значения при одинаковых значениях аргументов. Рассмотрим сначала кортежи следующего вида $(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Вычислим значения функций, стоящих в правой и левой частях равенства (1), на этом кортеже:

$(0\bullet f(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))\vee(0'\bullet f(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))=0\vee(1\bullet f(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))=f(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Теперь рассмотрим всевозможные кортежи вида $(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Аналогично вычисляем

$(1\bullet f(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))\vee(1'\bullet f(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))=f(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\vee(0\bullet f(0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n))=f(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Значит, равенство (1) справедливо. Аналогично доказывается равенство (2) (самостоятельно).■

Теорема 2. Во множестве всех булевых функций существует конечная полная система функций.

Доказательство.

Совокупность $\{\vee, \bullet, '\}$ – образует полную систему. То есть любую булеву функцию $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ можно представить в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Доказательство будем вести методом математической индукции по числу аргументов функции $f$. Для одной переменной существует четыре функции: $f_0(X)=0=X\bullet X'$, $f_1(X)=X$, $f_2(X)=X'$, $f_3(X)=1=X\vee X'$. Поэтому утверждение теоремы справедливо для $n=1$.

Предположим, что теорема верна для всех функций от $k$ аргументов. Докажем ее для функций от $(k+1)$ аргумента. Пусть $f(X_1,X_2,\ldots,X_k,X_{k+1})$ – произвольная булева функция от $(k+1)$ аргумента. На основании леммы запишем разложение данной функции по последней переменной:

$f(X_1,X_2,\ldots,X_k,X_{k+1})=(X_{k+1}\bullet f(X_1,X_2,\ldots,X_k,1))\vee(X'_{k+1}\bullet f(X_1,X_2,\ldots,X_k,0))$ (3).

Функции $f(X_1,X_2,\ldots,X_k,1)$ и $f(X_1,X_2,\ldots,X_k,0)$ уже являются функциями от $k$ переменных, значит для них справедливо предположение индукции. Принимая это во внимание, видим, что правая часть равенства (3) представляет собой суперпозицию лишь трех функций – конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Таким образом, по индукции – теорема верна.■

Следствие 1. $\{\bullet, '\}$ – полная система булевых функций.

Доказательство. В силу полноты системы функций $\{\vee, \bullet, '\}$ каждая булева функция является суперпозицией конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Если удастся выразить $\vee$ через $\bullet$ и $'$, то тем самым будет доказано, что всякую функцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание. Это возможно в силу равенства $X\vee Y=(X'\bullet Y')'$, которое следует из закона де Моргана $(X\vee Y)'=X'\bullet Y'$.■

Следствие 2. $\{\vee, '\}$ – полная система булевых функций.

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно аналогично предыдущему следствию. ■

Следствие 3. $\{\downarrow\}$ – полная система булевых функций.

Доказательство провести самостоятельно (воспользоваться следствием 1, а также рассмотренными равенствами *e*) и *f*)). ■

## *Занятие 6. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- строение математических теорем;
- виды математических теорем;

уметь:

- распознавать структуру математических теорем;
- формулировать обратные, противоположные и обратные к противоположным утверждения для данной теоремы;
- применять средства алгебры высказываний для анализа доказательства математических предложений.

***Основные приемы и методы занятия:*** ассоциации, методика мозгового штурма, интерактивная лекция, работа с графическими организаторами (таблицами).

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ*

Задание 1. Анализируя раздаточный материал (таблица 9), определите предмет и тему занятия.

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Лекция (текст лекции приведен в раздаточном материале) проходит в формате общения «преподаватель-студент», «студент-студент» и «студент-информация». В ходе лекции студенты также выполняют задания, участвуют вместе с преподавателем в обсуждении возникающих вопросов.

Задание 2. (вариативное) Запишите предложенную теорему в виде формулы алгебры высказываний. 1) Сформулируйте как можно больше необходимых условий для данного. 2) Сформулируйте как можно больше достаточных условий для данного. Внесите данные в таблицу.

**Таблица 9**

Теорема: Если в четырёхугольнике все стороны равны между собой, то его диагонали перпендикулярны.

| Достаточные для $B$ | Необходимые для $A$ |
|---|---|
| $A$: В четырёхугольнике все стороны равны между собой.<br>$A_1$:<br>$A_2$:<br>$A_3$:<br>… | $B$: В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны.<br>$B_1$:<br>$B_2$:<br>$B_3$:<br>… |

Обсуждение выполнения задания 2 с резюме на доске в таблице.

Задание 3. Используя результаты предыдущего задания, сформулируйте утверждения обратные полученным: $A \to B$, $A \to B_1$, $A \to B_2$. Ответьте на следующие вопросы.

1. Какую структуру они имеют?
2. Будут ли они являться теоремами (то есть истинными утверждениями)? Если нет, то приведите контрпримеры.
3. Можно ли получить обратные теоремы, рассматривая конъюнкции утверждений второго столбца?

Проходит обсуждение выполнения задания 3, исправление возможных ошибок.

Задание 4. Сформулируйте противоположные утверждения для $A \to B$, $A \to B_1$, $A \to B_2$. Будут ли они истинными? Будет ли теоремой утверждение, обратное к противоположному? Подумайте над обоснование ваших ответов.

*РЕФЛЕКСИЯ*

Обсуждение по нижеследующим вопросам.

- Будет ли обратная теорема всегда верна? А противоположная?
- Будет ли верна теорема обратная к противоположной?
- Зачем, по Вашему мнению, нужно искать и доказывать обратные теоремы?
- Как избежать ошибок при формулировке обратных и противоположных теорем?

- Считаете ли вы, что удобнее доказывать теорему, обратную к противоположной, а не прямую?

Задание 5. Выполните концептуальную таблицу по теме занятия. Предложите хотя бы три категории для сравнения.

Пример заполнения таблицы приведён ниже.

**Таблица 10**

| Название | Формула | Равносильна | Пример |
|---|---|---|---|
| Прямая | $A \to B$ | обратной к противоположной | Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны. |
| Обратная | $B \to A$ | противоположной | Если углы при основании треугольника равны, то он равнобедренный. |
| Противоположная | $\overline{A} \to \overline{B}$ | обратной | Если треугольник неравнобедренный, то углы при его основании не равны. |
| Обратная к противоположной | $\overline{B} \to \overline{A}$ | прямой | Если углы при основании треугольника неравны, то он неравнобедренный. |

Проходит презентация и обсуждение таблиц, заполненных группами.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Приведите примеры доказательства математических теорем: а) методом от противного; б) методом приведения к абсурду; в) методом цепного заключения. Продолжайте заполнение рубрик портфолио.

Раздаточные материалы к занятию 6

## *Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике*

Большинство математических теорем имеют структуру, выражаемую формулой $X \to Y$.

Определение 1. Утверждение $X$ называется условием теоремы, а утверждение $Y$ – заключением теоремы. Также $X$ называется достаточным условием для $Y$, а $Y$ – необходимым условием для $X$.

Пример. 1. "Если в четырехугольнике все стороны равны между собой ($A_1$), то его диагонали перпендикулярны ($B_1$)".

2. "Если один из углов треугольника прямой ($A_2$), то квадрат длины одной стороны этого треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон ($B_2$)". Однако условие $A_2$ можно представить $A_2=A'_2 \vee A_2'' \vee A_2'''$, где $A'_2=$"$\alpha=90°$", $A_2''=$"$\beta=90°$", $A_2'''=$"$\gamma=90°$". Аналогично, заключение $B_2=B'_2 \vee B_2'' \vee B_2'''$, где $B'_2=$"$a^2=b^2+c^2$", $B_2''=$"$b^2=a^2+c^2$", $B_2'''=$"$c^2=a^2+b^2$".

Одно и то же утверждение может иметь несколько необходимых условий. Например, необходимыми условиями равенства всех сторон четырехугольника, кроме указанного (утверждение $B_1$), будут деление его диагоналей в точке пересечения пополам ($B_1'$), деление диагоналями соответствующих углов пополам ($B_1''$) и так далее. Аналогично одно и то же утверждение может иметь несколько достаточных условий.

После того как доказана теорема $X \to Y$, возникает вопрос, будет ли найденное необходимое условие достаточным или достаточное – необходимым? Будет ли верно утверждение $Y \to X$? Например, условие $B_1$ не будет являться достаточным для $A_1$,так как можно привести пример четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, у которого не все стороны равны.

Очень часто в математике приходится отыскивать достаточные условия для того или иного свойства. Для этого сначала отыскивают разнообразные необходимые условия данного свойства (то есть, свойства, непосредственно вытекающие из данного). Так, в примере с четырехугольником, свойства $B_1$ и $B_1'$ необходимы для $A_1$. Если ни одно из необходимых условий в отдельности не является достаточным, то пытаются проверять на достаточность всевозможные конъюнкции этих условий. В данном случае справедливо утверждение $(B_1 \wedge B_1') \to A_1$. Значит $(B_1 \wedge B_1')$ является достаточным условием для $A_1$.

<u>Определение 2</u>. Теорема из $Y \to X$ называется <u>обратной для теоремы</u> $X \to Y$. В свою очередь теорема $X \to Y$ называется <u>прямой</u>.

Обратная теорема не всегда верна. Поэтому она требует специальной проверки. Это обусловлено тем, что формулы $X \to Y$ и $Y \to X$ не равносильны, в чем можно убедиться с помощью таблиц истинности данных формул.

Пример. Для теорем $A_1 \to B_1$ и $A_1 \to B_1'$ обратные теоремы не будут верны. А для теоремы $A_1 \to B_1''$ справедлива обратная теорема $B_1'' \to A_1$.

Структура теоремы $A_1 \to B_1$ достаточно проста. Рассмотрим теорему более сложной структуры.

Пример. "В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны". Чтобы четко выделить условие и заключение данной теоремы переформулируем ее.

"Если два треугольника равны ($A$), то из равенства двух углов этих треугольников ($B$) следует равенство их противолежащих сторон ($C$)".

Символически теорема запишется так: $A \to (B \to C)$. На основании тавтологий 12 и 13 можно провести следующие равносильные преобразования:
$A \to (B \to C)\ (1) \cong B \to (A \to C)\ (2) \cong (A \wedge B) \to C\ (3)$. Значит, теорема может быть сформулирована в виде (2):"Если два угла двух треугольников равны ($B$), то из равенства этих треугольников ($A$) следует равенство их сторон, противолежащих этим углам ($C$)". Третий вид этой теоремы (3): "Если треугольники равны ($A$) и в них два угла равны ($B$), то и противолежащие этим углам стороны будут равны ($C$)". Таким образом, условие этой теоремы состоит из утверждений $A$ и $B$ и представляет собой их конъюнкцию. Заключением является утверждение $C$.

Зададимся целью сформулировать теоремы обратные данной. При этом условие и заключение теоремы меняются местами. Можно получить следующие обратные теоремы:

1) $(B \to C) \to A$: "Если из равенства двух углов треугольника следует равенство их противоположных сторон, то такие треугольники равны";
2) $(A \to C) \to B$: "Если две стороны в равных треугольников лежат против равных углов, то эти стороны равны";
3) $C \to (A \wedge B)$: "Если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника, то треугольники равны и углы, противолежащие этим сторонам равны";

Еще два обратных утверждения можно получить из видов (1) и (3) перестановкой местами одного из двух условий прямой теоремы и ее заключения.

4) $A \to (C \to B)$: "Если треугольники равны, то из равенства двух их сторон следует равенство противолежащих углов";

5) $B \to (C \to A)$: " Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то из равенства противолежащих этим углам сторон вытекает равенство самих треугольников".

Верны только теоремы 2) и 4).

Определение 3. Теорема, имеющая структуру $\overline{X} \to \overline{Y}$, называется противоположной для теоремы $X \to Y$.

Противоположная теорема также может быть верной и неверной. Это следует из того, что формулы $X \to Y$ и $\overline{X} \to \overline{Y}$ неравносильны. То есть она нуждается в доказательстве или опровержении.

Пример. 1. Сформулируем противоположную теорему для $A_1 \to B_1$: "Если в четырехугольнике все стороны равны между собой ($A_1$), то его диагонали перпендикулярны ($B_1$)". По определению эта теорема будет иметь структуру $\overline{A_1} \to \overline{B_1}$ : "Если в четырехугольнике все стороны не равны, то его диагонали не перпендикулярны". Видно, что она не верна.

2. "Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и само число делится на 3". Противоположная теорема: "Если сумма цифр натурального числа не делится на 3, то и само число не делится на 3" верна.

При составлении противоположных теорем к теоремам, условия и заключения которых представляют собой конъюнкции или дизъюнкции нескольких высказываний, нужно пользоваться законами де Моргана.

Существует еще один вид теорем.

Определение 4. Теорема, обратная к противоположной для данной теоремы $X \to Y$ имеет вид $\overline{Y} \to \overline{X}$.

Эта теорема будет истинна тогда и только тогда, когда истинная исходная теорема $X \to Y$. Это следует из закона контрапозиции.

Таким образом, вместо доказательства данной теоремы можно доказывать обратную к противоположной. Этот метод доказательства теорем называется доказательством от противного и часто используется в математике.

Также распространен метод приведения к абсурду, который основывается на следующей тавтологии $\left[\overline{X} \to \left(Y \wedge \overline{Y}\right)\right] \to X$. Этот метод состоит в следующем. Допустим, нужно доказать некоторое утверждение $X$. Предполагаем, что справедливо его отрицание $\overline{X}$. Затем выводим отсюда некоторое утверждение $Y$ и его отрицание $\overline{Y}$. Заключаем, что справедливо $X$.

Нередко также используется правило цепного заключения или силлогизма.

*Принцип полной дизъюнкции.*

Докажем теорему, позволяющую сделать вывод о справедливости обратных теорем, если посылки и следствия прямых теорем удовлетворяют некоторым условиям. Эта теорема имеет широкое применение.

Теорема 1. (*принцип полной дизъюнкции*). Пусть справедливы все следующие прямые теоремы ($m \geq 2$):

$A_1 \to B_1, A_2 \to B_2, ..., A_m \to B_m$ – причем из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_m$ по меньшей мере одна истинна, а следствия $B_1, B_2, .., B_m$ попарно исключают друг друга (то есть никакие два различных следствия не могут быть истинны одновременно). Тогда справедливы все обратные теоремы: $B_1 \to A_1, B_2 \to A_2, ..., B_m \to A_m$.

Доказательство. Покажем сначала истинность первой обратной теоремы $B_1 \to A_1$.

Если $B_1=0$, то $0 \to A_1 = 1$. Предположим, что $B_1=1$. Покажем, что тогда все высказывания $A_2, A_3, \ldots, A_m$ – ложны (метод от противного). Пусть, например, $A_2=1$. Так как справедлива прямая теорема $A_2 \to B_2$, то $1 \to B_2 = 1 \Rightarrow B_2=1$. Получилось, что два различных следствия $B_1$ и $B_2$ прямых теорем истинны, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $A_2 = A_3 = ... = A_m = 0$. Но, по условию, по меньшей мере одна из посылок $A_1, A_2, \ldots, A_m$ истинна. Значит, $A_1=1$.Отсюда $B_1 \to A_1 = 1$.

Аналогично можно установить истинность всех обратных теорем $B_1 \to A_1, B_2 \to A_2, ..., B_m \to A_m$. ■

## *Занятие 7. Понятие формальной аксиоматической теории. Аксиомы, правила вывода, теоремы исчисления высказываний*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- компоненты (аксиомы и правила вывода) исчисления высказываний;
- основные понятия исчисления высказываний: вывод формулы, гипотезы, последовательность вывода, дерево вывода, теорема в исчислении высказываний;

уметь:

- строить простейшие выводы в исчислении высказываний.

***Основные приемы и методы занятия:*** стратегии ЗХУ, «тонкие» и «толстые» вопросы, кластер.

*Необходимые пояснения.*

Данная лекция является вводной ко второй главе «Исчисление высказываний», что и определяет целесообразность использования стратегии ЗХУ на лекции. Данные заполненной таблицы ЗХУ будут в дальнейшем использоваться студентами на лекционных и практических занятиях, подготовке к экзамену. Студенты могут вносить дополнения в таблицу.

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ*

Сообщение преподавателя:

«Сегодня мы поговорим об аксиоматических теориях и рассмотрим аксиоматическое построение теории высказываний. Также остановимся на понятиях «аксиома», «правило вывода», «доказательство» (или вывод формулы), «теорема», рассмотрим примеры доказательств».

Каждому студенту раздается незаполненная таблица

**Таблица 11**

<table>
<tr><td>«З» Знаем<br>1.<br>2.<br>3.<br>4.</td><td>«Х» Хотим узнать<br>1.<br>2.<br>3.<br>4.</td><td>«У» Узнали</td></tr>
<tr><td colspan="3">Категории информации:<br>А.<br>Б.<br>В.<br>Г.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Источники информации:<br>*<br>*<br>*<br>*</td></tr>
</table>

Хотя каждый студент будет вести записи в таблице индивидуально, однако планируется обсуждение всех заданий в группах и фронтально.

Задание 1. Используя предыдущие конспекты и школьные знания, заполните первый столбец таблицы ЗХУ. Ответьте на вопрос «Что Вы знаете (или считаете, что знаете) по теме лекции?» Затем разнесите имеющуюся информацию по категориям, заполните графу «Категории информации».

Например, могут быть выделены категории «Примеры», «Определения», «Иллюстрации», «Рассуждения».

Задание 2. Заполните столбец «Хотим узнать», записав 3-5 вопросов по теме лекции. Среди них два вопроса «тонких» (подразумевающих краткий ответ) и один «толстый» (требующий развёрнутого ответа, проведения рассуждения).

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Преподаватель читает лекцию (см. раздаточный материал [6, стр. 50-53]). Студенты слушают, сосредоточиваясь на своих вопросах (список во второй колонке).

Задание 3. При прослушивании лекции заполняйте графу «Узнали», отвечая на вопросы из второго столбца «Хотим узнать». Свои «приобретения» записывайте ключевыми словами, делая более подробные записи в тетради. Можно также корректировать записи в столбце «З». В графе «Источник информации» указать: лекция.

*РЕФЛЕКСИЯ*

Обсуждение в аудитории:

Что из того, что мы хотели узнать, мы узнали, а что – нет?

Студенты выборочно рассказывают о результатах своей работы.

Задание 4. Запишите в графу «Узнали» под имеющимися записями, возникшие вопросы, связанные с темой лекции, но, тем не менее, не отраженные в ней.

Проходит обсуждение в аудитории этих вопросов. На некоторые из них преподаватель отвечает, некоторые выносит на последующие лекции, также студентам могут предлагаться задания для самостоятельных исследований (по наиболее емким вопросам). Кроме того, происходит сопоставление содержания лекции с первым столбцов «З», куда студенты заносили свои первоначальные представления о предмете.

Задание 5. Выполните кластер по теме занятия.

Студенты представляют свои кластеры. Формулируются выводы и итоги занятия.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Завершите заполнение таблицы ЗХУ, используя другие источники информации: беседу с экспертом, дополнительную литературу, Internet. Внесите наименование этих источников в таблицу. Индивидуальные задания вкладываются в портфолио. Таблицы сдать преподавателю для последующего формирования совместной оценки данной работы или выделения направлений доработки.

Подготовьте справочный материал для практического занятия «Построение выводов в формальном исчислении высказываний». Оформление материала должно быть функционально.

Раздаточные материалы к занятию 7

## ***Понятие формальной аксиоматической теории. Аксиомы, правила вывода***

Определение 1. Формальная аксиоматическая теория ***T*** считается определенной, если выполняются следующие условия:

1) Задан алфавит теории ***T***, представляющий собой некоторое счетное подмножество символов. Конечные

последовательности символов алфавита теории ***T*** называются словами;

2) Имеется подмножество слов теории ***T***, называемых формулами;

3) Выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами;

4) Имеется конечное множество $R_1,\dots R_n$ отношений между формулами называемых правилами вывода.

Будем рассматривать аксиоматический подход к алгебре высказываний.

1) Пусть задан алфавит:

$A$, $B$, $C$, $A_1\dots$, – пропозициональные переменные; $\to$, $\bar{\ }$ – логические операции; ",", "(",… – вспомогательные символы.

2) Формулы образуются следующим образом:

a) пропозициональная переменная есть формула;

b) если $F_1$ и $F_2$ – формулы, то $F_1 \to F_2, \overline{F_1}$ также являются формулами;

c) других формул нет.

3) Среди формул выделим следующие аксиомы:

1. (A1) $X \to (Y \to X)$,
2. (A2) $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
3. (A3) $(\overline{X} \to \overline{Y}) \to ((\overline{X} \to Y) \to X)$,

где $X$, $Y$, $Z$ – произвольные формулы. Таким образом (A1), (A2), (A3) представляют собой схемы аксиом.

4) Единственным правилом вывода будет служить правило заключения или modus ponens (MP): из формул $X$ и $X \to Y$ непосредственно следует формула $Y$.

Поскольку в аксиомах не участвуют операции $\wedge$, $\vee$ и $\leftrightarrow$, то нужно их определить:

$$A \wedge B = \overline{A \to \overline{B}};\quad A \vee B = \overline{A} \to B;\quad A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = \overline{(A \to B) \to \overline{(B \to A)}}.$$

Определение 2. Доказательством или выводом формулы $F$ из множества формул $\mathbf{\Gamma}$ называется такая конечная последовательность формул $B_1,B_2,\ldots B_s$, каждая из которых является либо аксиомой, либо формулой из **Г**, либо получена правилом МР. Кроме того, $B_s$ совпадает с $F$.

Обозначение $\mathbf{\Gamma} \blacktriangleright F$ означает "формула $F$ выводима из **Г**".

Элементы множества **Г** называются гипотезами или посылками вывода.

Если же имеется вывод $F$ из пустого множества гипотез, то говорят, что $F$ выводима из аксиом, или что $F$ доказуема, а последовательность $B_1,B_2,\ldots B_s$ называется доказательством этой формулы. Тогда саму формулу $F$ называют теоремой. Это обозначается следующим образом: $\blacktriangleright F$.

Совокупность аксиом, правил вывода и всех теорем, выводимых из аксиом, представляет собой аксиоматическую теорию высказываний или формализированное исчисление высказываний.

Рассмотрим примеры построения выводов формул из гипотез и доказательства теорем.

Примеры. 1. Доказать теорему $\blacktriangleright F \to F$. Для доказательства нужно построить вывод этой формулы из аксиом.

1) $(F\to((F\to F)\to F))\to((F\to(F\to F))\to(F\to F)), (A2), X=F, Y=F\to F, Z=F$

2) $F\to((F\to F)\to F), (A1)$

3) $(F\to(F\to F))\to(F\to F), MP\,2,1$

4) $F\to(F\to F), (A1), X=Y=F$

5) $F\to F, MP\,4,3$

2. $A\to B,\ B\to C \blacktriangleright A\to C$ (правило силлогизма)

1) $A \to B$ *данная формула* (*д.ф.*)

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), (A2)$

3) $B \to C$ *д.ф.*

4) $(B \to C) \to (A \to (B \to C)), (A1), X = B \to C, Y = A$

5) $A \to (B \to C)$, $MP$ 4,3

6) $(A \to B) \to (A \to C)$, $MP$ 5,2

7) $A \to C$, $MP$ 1,6

То есть при построении вывода нужно выбрать аксиому, записать заключение какой-то ее импликации в виде искомой формулы, а затем попытаться получить посылку импликации. Тогда с помощью правила modus ponens возможно получить искомую формулу.

Выше были рассмотрены примеры, так называемого линейного вывода. Последовательность вывода традиционно записывается в виде столбца пронумерованных формул с пояснениями справа. Эта запись довольно компактна, логика вывода прослеживается из пояснений.

Выводы также можно представлять в виде дерева.

Дерево вывода – это графический объект, который строится из формул с использованием горизонтальной черты. Дадим индуктивное определение дерева формул высоты $h$:

1. Всякая формула есть дерево (так называемое элементарное дерево).
2. Если $D_1,D_2,\dots D_\mathrm{n}$ – деревья формул с высотами $h_1,h_2,\dots h_n$ соответственно, а $F$ – некоторая формула, то $\dfrac{D_1,D_2,\dots D_n}{F}$ – дерево формул высоты $h=\max(h_1,h_2,\dots h_n)+1$
3. Графический объект является деревом тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью пунктов 1 и 2.

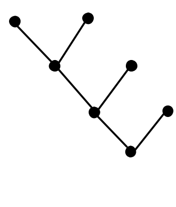
Листьями дерева формул будем называть формулы, имеющие вхождение в это дерево формул, непосредственно над которыми отсутствуют вхождения каких-либо формул. Корнем дерева будем называть формулу, имеющую самое нижнее вхождение в это дерево (ниже которой не записаны формулы).

Рассмотрим пример построения вывода правила силлогизма в виде дерева.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to C \quad (B\to C)\to(A\to(B\to C))}{A\to(B\to C) \qquad (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))}}{(A\to B)\to(A\to C) \qquad\qquad A\to B}}{A\to C}$$

Дерево вывода задает частичный порядок на множестве формул, входящих в это дерево. Очевидно, деревья вывода можно изображать с помощью графов. Для этого следует заменить формулы точками (вершинами графа), а связи между ними – соединительными линиями (ребрами графа).

Граф-дерево, соответствующий построенному выводу:



***Занятие 8. Теорема дедукции в исчислении высказываний***

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- формулировку теоремы дедукции и обратной к ней;
- доказательство теоремы дедукции;

уметь:

- применять теорему дедукции и обратную к ней теорему при построении выводов;

владеть:

- дедуктивным аппаратом исчисления высказываний.

***Основные приемы и методы занятия:*** продвинутая лекция, использование графических организаторов.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Занятие можно условно разделить на две части (блока), в первой из которых доказывается теорема дедукции, а во второй рассматривается применение данной теоремы к построению выводов формул, выражающих законы логики.

*ВЫЗОВ 1*

Как мы убедились на прошлом занятии, выводы даже очевидных законов могут быть достаточно сложными.

Задание 1. Ответьте письменно на вопросы.

1. Возможно ли сделать вывод короче?
2. Какое средство может упростить построение выводов? (можно указать несколько пунктов)

Задание 2. Поделитесь своими идеями в группе, составьте общий список возможных решений.

Преподаватель фиксирует на доске мнения групп.

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1*

Задание 3. При чтении первой части лекции (раздаточный материал 1) отметьте знаком «+» те решения, которые согласуются с содержанием лекции и знаком «–» те, которые противоречат услышанному.

Чтение первой части лекции (доказательство теоремы дедукции и обратной ей теоремы; доказательство нескольких теорем исчисления высказываний). Студенты пишут конспект.

*РЕФЛЕКСИЯ 1*

Обсуждение пометок и подведение итогов первой части. Возврат к вопросам заданий 1 и 3.

*ВЫЗОВ 2*

Задание 4. (вариативное) Дополните пояснениями последовательность вывода и постройте дерево вывода.

Группы I и III Дерево вывода

1) $\overline{B}\to\overline{A}$

2) $A$

3) $(\overline{B}\to\overline{A})\to((\overline{B}\to A)\to B)$

4) $(\overline{B}\to A)\to B$

5) $A\to(\overline{B}\to A)$

6) $A\to B$

7) $B$

Группы II и IV Дерево вывода

1) $\overline{A}$

2) $A$

3) $A\to(\overline{B}\to A)$

4) $\overline{A}\to(\overline{B}\to\overline{A})$

5) $\overline{B}\to A$

6) $\overline{B}\to\overline{A}$

7) $(\overline{B}\to\overline{A})\to((\overline{B}\to A)\to B)$

8) $(\overline{B}\to A)\to B$

9) $B$

*ОСМЫСЛЕНИЕ 2*

Чтение второй части лекции (раздаточный материал 2) в пособии [6, стр. 54-56]. Во время чтения студенты заполняют таблицу.

Задание 5. Заполните таблицу, внося в нее доказательства теорем.

**Таблица 12**

| Теорема | Доказательство | Дерево вывода |
|---|---|---|
| | | |

Затем происходит обсуждение задания 5 в группах и выработка единой позиции.

*РЕФЛЕКСИЯ 2*

Представление и обсуждение работ групп по заданиям 4 и 5. Внесение исправлений, если это необходимо.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Напишите эссе «В чем плюсы и минусы применения теоремы дедукции?»

Подготовьте материал для практических занятий в формате таблицы по теме «Производные правила вывода». Обдумайте: категории таблицы, обеспечение её функциональности как справочного материала.

Раздаточные материалы к занятию 8

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1*

***Теорема дедукции***

Впервые теорема дедукции была сформулирована в 30-е годы XX века А. Тарским и независимо от него Дж. Эрбраном. Значение этой теоремы состоит не только в том, что она позволяет упрощать получение вывода формул, но и в том, что она позволяет понять различие между отношением дедуктивной выводимости, отношением импликации и отношением логического следования.

Теорема 1 (*теорема дедукции*). Если $A_1,A_2,\ldots A_{n-1},A_n \blacktriangleright C$, то $A_1,A_2,\ldots A_{n-1} \blacktriangleright A_n\to C$.

Доказательство. Так как $A_1,A_2,\ldots A_{n-1},A_n \blacktriangleright C$, то записана последовательность формул $B_1,B_2,\ldots B_m$ (*), где $B_m=C$, и каждая из них либо аксиома, либо $A_i$, либо получена с помощью МР. Требуется построить новый вывод из гипотез $A_1,A_2,\ldots A_{n-1}$, последней формулой которого являлась бы $A_n\to C = A_n\to B_m$. Новый вывод будем строить блоками:

| 1)……… | 2)………. | ……. | *i*)…….. | …….. | ……… | m)…….. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ………. | ……… | …….. | …….. | ……. | ………. | ………. |
| $A_n\to B_1$ | $A_n\to B_2$ | | $A_n\to B_i$ | | | $A_n\to B_m$. |

Фактически при построении будет доказано, что $A_1,A_2,\ldots A_{n-1} \blacktriangleright A_n\to B_i$ методом математической индукции по $i$.

1). Построим первый блок. Для формулы $B_1$ существует три возможности:

a) $B_1$ – аксиома. Тогда вывод строится так:

$$
\begin{aligned}
&1)\ B_1,\\
&2)\ B_1\to(A_n\to B_1),(A1)\\
&3)\ A_n\to B_1,\ MP1,2
\end{aligned}
$$

b) $B_1$ – одна из данных формул. Вывод строится аналогично.

c) $B_1$ – формула $A_n$. Вывод $A_n\to A_n$ имеется. (Пример 1 предыдущего занятия).

$i$). Пусть для $i$-того блока и построена цепочка формул, последняя из которых $A_n\to B_i$.

$i$+1). Требуется построить $i$+1-ый блок, который должен заканчиваться формулой $A_n\to B_{i+1}$. Так как формула $B_{i+1}$ присутствовала в выводе (*) то, у нее могли быть пояснения: a) аксиома, b) данная формула, c) вывод из МР. Для случаев a) и b) рассуждения проводятся аналогично с базой индукции.

Для случая c) $B_{i+1}$ получена по правилу МР из двух предыдущих формул $B_j$ и $B_k$ последовательности (*). Значит, $B_j=(B_k\to B_{i+1})$, где $1 \le k \le i+1$, $1 \le j \le i+1$ (1). Ввиду неравенств (1) формулы $A_n\to B_k$ ($\alpha$), $A_n\to B_j = A_n\to(B_k\to B_{i+1})$ ($\beta$) по предположению индукции находятся в конце уже построенных блоков, значит имеются выводы этих формул из гипотез $A_1,A_2,\ldots A_{n-1}$. Построим $i$+1 блок:

1) $(A_n \to (B_k \to B_{i+1})) \to ((A_n \to B_k) \to (A_n \to B_{i+1}), (A2)$

2) $(A_n \to B_k) \to (A_n \to B_{i+1})$ $MP\ \beta,1$

3) $A_n \to B_{i+1}$ $MP\ \alpha,2$

Значит, по методу математической индукции, можно построить все блоки вывода до $m$-того. ■

Верна и обратная теорема.

<u>Теорема 2</u> (*обратная к теореме о дедукции*).

Если $A_1,A_2,\ldots A_{n-1} \blacktriangleright A_n \to C$, то $A_1,A_2,\ldots A_{n-1},A_n \blacktriangleright C$.

<u>Доказательство</u>. Если $A_1,A_2,\ldots A_{n-1} \blacktriangleright A_n \to C$, то существует соответствующий вывод: $B_1,\ldots B_{s-1},A_n \to C$ из $s$ шагов. Дополним этот вывод:

$s$+1) $A_n$ – данная формула.

$s$+2) $C$ – MP $s$+1, $s$. Получили вывод $A_1,A_2,\ldots A_{n-1},A_n \blacktriangleright C$. ■

<u>Следствие.</u> $A_1,A_2,\ldots A_{n-1},A_n \blacktriangleright C$ тогда и только тогда, когда $\blacktriangleright A_1 \to (A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to (A_n \to C))\ldots)$. (доказать самостоятельно). ■

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2*

## *Применение теоремы дедукции.*
## *Теоремы исчисления высказываний*

С помощью теоремы дедукции можно доказать ряд теорем исчисления высказываний. Докажем вспомогательную лемму.

<u>Лемма.</u> Для любых формул $A$, $B$, $C$ справедливы следующие выводимости:

а) $A \to B, B \to C \blacktriangleright A \to C$;

б) $A \to (B \to C), B \blacktriangleright A \to C$.

<u>Доказательство.</u> а) Покажем сначала, что $A \to B, B \to C, A \blacktriangleright C$. Построим соответствующий вывод (1).

1) $A \to B$ *данная*

2) $B \to C$ *данная*

3) $A$ *данная*

4) $B$ $MP$ 3,1

5) $C$ $MP$ 4,2 (1)

На основании теоремы дедукции заключаем, что $A \to B, B \to C \blacktriangleright A \to C$.

б) доказать самостоятельно. ■

Теорема 1. Для любых формул $A$ и $B$ следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления высказываний:

*а*) $\overline{\overline{A}} \to A$;

*б*) $A \to \overline{\overline{A}}$;

*в*) $\overline{A} \to (A \to B)$;

*г*) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$;

*д*) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$;

*е*) $A \to (\overline{B} \to \overline{(A \to B)})$;

*ж*) $(A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$.

Доказательство.

*а*)

1) $(\overline{A} \to \overline{\overline{A}}) \to ((\overline{A} \to \overline{A}) \to A), (A3)$

2) $\overline{A} \to \overline{A}, \textit{пример} 1$

3) $(\overline{A} \to \overline{\overline{A}}) \to A, \textit{лемма б}), 1,2$

4) $\overline{\overline{A}} \to (\overline{A} \to \overline{\overline{A}}), (A1)$

5) $\overline{\overline{A}} \to A, \textit{лемма а}), 4,3.$

*б*)

1) $(\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}) \to ((\overline{\overline{\overline{A}}} \to A) \to \overline{\overline{A}}, (A3)$

2) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}, \textit{пункт а})$

3) $(\overline{\overline{\overline{A}}} \to A) \to \overline{\overline{A}}, MP\ 2,1$

4) $A \to (\overline{\overline{\overline{A}}} \to A), (A1)$

5) $A \to \overline{\overline{A}}, \textit{лемма а}), 4,3$

*в*) Покажем $\overline{A}, A \blacktriangleright B$:

1) $\overline{A}$
2) $A$
3) $A \to (\overline{B} \to A)$
4) $\overline{A} \to (\overline{B} \to \overline{A})$
5) $\overline{B} \to A$
6) $\overline{B} \to \overline{A}$
7) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$
8) $(\overline{B} \to A) \to B$
9) $B$

*г*) Покажем $\overline{B} \to \overline{A}, A \blacktriangleright B$:

1) $\overline{B} \to \overline{A}$
2) $A$
3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$
4) $(\overline{B} \to A) \to B$
5) $A \to (\overline{B} \to A)$
6) $A \to B$
7) $B$

Предлагается самостоятельно продумать пояснения пунктов в) и г) доказательства. К доказанным формулам в) и г) применим теорему дедукции два раза, получим требуемый результат.

д) Получим сначала $A \to B \blacktriangleright \overline{B} \to \overline{A}$:

1) $A \to B$

2) $\overline{\overline{A}} \to A$

3) $\overline{\overline{A}} \to B$, *лемма а*),2,1

4) $B \to \overline{\overline{B}}$

5) $\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}$, *лемма а*)3,4

6) $(\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}) \to (\overline{B} \to \overline{A})$, *пункт г*)

7) $\overline{B} \to \overline{A}$ *MP* 5,6

Остальные результаты предлагается получить самостоятельно. ■

Таким образом, теорема о дедукции, вскрыв важное свойство выводимости, оказалась мощным средством, облегчающим процесс построения тех или иных выводов. Следующим шагом на этом пути служит выявление дальнейших закономерностей процесса выведения одних формул из других. Такие закономерности или вторичные правила вывода получили названия производных правил вывода.

### *Занятие 9-11. Полнота исчисления высказываний в широком смысле. Непротиворечивость и полнота в узком смысле. Независимость аксиом*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЙ

В результате освоения содержания занятий обучающийся должен знать:

- свойства аксиоматической теории: полнота, непротиворечивость, разрешимость, независимость системы аксиом формальной теории на примере исчисления высказываний;
- схемы доказательства основных свойств.

***Основные приемы и методы занятия:*** прием «истинно-ложно», продвинутая лекция, кластер

ХОД ЗАНЯТИЙ

*Необходимые пояснения.*

Данные три занятия объединены общей целью и схемой представления фактического материала. А именно: на них рассматриваются определения свойств аксиоматических теорий и доказательства соответствующих теорем для исчисления высказываний.

*ВЫЗОВ*

Задание 1. Для каждого утверждения в таблице определите истинно оно или ложно.

**Таблица 13**

| № | **утверждение** | да/нет |
|---|---|---|
| 1 | В исчислении высказываний можно доказать или опровергнуть (то есть доказать обратное) любое утверждение. | |
| 2 | Аксиому $A3$ можно доказать (вывести) из аксиом $A1$ и $A2$. | |
| 3 | Для любой формулы можно узнать: будет ли она теоремой исчисления высказываний или нет. | |
| 4 | Если из системы $A1$, $A2$, $A3$ удалить любую аксиому, то запас теорем уменьшится. | |
| 5 | Если добавить к системе $A1$, $A2$, $A3$ некоторое утверждение недоказуемое в исчислении высказываний, то это приведет к противоречию. | |
| 6 | Исчисление высказываний содержит противоречие. | |

Точки зрения групп фиксируется преподавателем на доске в таблице и проходит краткое обсуждение полученного прогноза.

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Чтение лекции (см. раздаточный материал) с остановками, чтобы ответить на возникающие у студентов вопросы, выслушать существующие мнения.

*РЕФЛЕКСИЯ*

Внесение группами исправлений в таблицу с утверждениями.

Задание 2. Выполните кластер «Свойства исчисления высказываний».

Представление работ групп и подведение итогов проведенных занятий.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Продолжайте заполнять рубрики портфолио. Напишите эссе по теме «Какое свойство аксиоматической теории самое важное?».

Раздаточные материалы к занятиям 9-11

### *Полнота исчисления высказываний в широком смысле*

Если предыдущие параграфы этой главы посвящены развитию и исследованию аксиоматической теории высказываний, то здесь представлен взгляд на эту теорию как бы со стороны. Установим ряд важных свойств исчисления высказываний: полноту, разрешимость и непротиворечивость.

Определение 1. Формальная теория $\boldsymbol{T_1}$ соответствующая содержательной теории $\boldsymbol{T}$ называется полной (в широком смысле), если любая тавтология в $\boldsymbol{T}$ выводима в $\boldsymbol{T_1}$ и наоборот.

В данной главе $\boldsymbol{T_1}$ – исчисление высказываний, $\boldsymbol{T}$ – алгебра высказываний.

Теорема 1. Все теоремы исчисления высказываний являются тавтологиями в алгебре высказываний.

Доказательство. Пусть $\blacktriangleright C$. Тогда существует последовательность $A_1, A_2, \ldots A_k$ – вывод формулы $C$ из аксиом. Проще всего доказать, что $C$ – тавтология методом математической индукции по параметру $k$ – длине вывода формулы.

База индукции. Пусть $k$=1. Тогда вывод состоит из одной формулы $A_1$=$C$, которая на основании определения вывода может быть только аксиомой. Аксиомы (А1), (А2), (А3) являются тавтологиями. В частности (А1) – тавтология 8.

(А2)

$$(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)) = (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \to (\overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{X} \vee$$
$$\vee Z) = (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee ((X \wedge \overline{Y}) \vee \overline{X} \vee Z) = (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) = ((Y \vee$$
$$\vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X})) \vee \overline{Y} \vee Z = ((1 \vee \overline{X}) \wedge (\overline{Z} \vee \overline{X} \vee \overline{Y})) \vee Z = (\overline{Z} \vee \overline{X} \vee \overline{Y}) \vee Z =$$
$$= 1 \vee \overline{X} \vee \overline{Y} = 1$$

(А3)

$$(\overline{X} \to \overline{Y}) \to ((\overline{X} \to Y) \to X) = \overline{(X \vee \overline{Y})} \vee ((\overline{X \vee Y}) \vee X) = (\overline{X} \wedge Y) \vee$$
$$\vee ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee X) = (\overline{X} \wedge (Y \vee \overline{Y})) \vee X = \overline{X} \vee X = 1$$

Пусть теперь $k \le n$. Предположим, что все формулы, имеющие вывод длиной не более чем $n$, являются тавтологиями.

Наконец, нужно взять $k=n+1$. Покажем, что всякая формула, имеющая вывод длиной $(n+1)$ также является тавтологией. Пусть $C$ – формула и $A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}=C$ – ее вывод. Тогда $A_1, A_2, \ldots A_n$ – тавтологии по предположению индукции. Формула $A_{n+1}$ по определению вывода может быть: 1) аксиомой (тогда она является тавтологией), 2) получена правилом MP из двух предыдущих членов данной последовательности $A_i$ и $A_j$ $(1 \le i,\ j \le n+1)$. Во втором случае $A_j = A_i \to A_{n+1}$, а так как $A_i$ и $A_j$ – тавтологии, то по правилу MP, как доказано ранее, имеем $A_{n+1}=C$ – тавтология. ■

Для доказательства второй части теоремы о полноте (то есть теоремы обратной к только что доказанной) понадобится лемма. Для удобства формулировки нужно ввести несколько определений.

Пусть $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – кортеж длины $n$. По определению кортежа $\xi_i = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$, $i=1,2,\ldots,n$. Число таких кортежей равно $2^n$ по теореме 9.1.

<u>Определение 2</u>. Для формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ <u>$\alpha$-двойником</u> называется сама эта формула, если $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)=1$, и называется формула $\overline{F(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$, если $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)=0$.

Обозначается $F^{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

$$F^{\alpha}(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\begin{cases}F(X_1,X_2,\ldots,X_n),\ \textit{если}\ F(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=1,\\ \overline{F(X_1,X_2,\ldots,X_n)},\ \textit{если}\ F(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=0.\end{cases}$$

Пример. Найти α-двойники для формул

$F=(X_1\to\overline{X_2})\vee(X_3\wedge(\overline{X_1}\leftrightarrow X_4))$,

$G=(X_1\vee\overline{X_3})\leftrightarrow(X_2\wedge(\overline{X_3}\to\overline{X_4}))$, если $\alpha$=(0,1,1,0).

Решение. Находим $F(\alpha)=1$, $G(\alpha)=0$. Тогда, по определению $\alpha$-двойника, имеем $F^{\alpha}=F$, $G^{\alpha}=\overline{G}$ .

Лемма (*о выводимости*). Для всякой формулы $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ и всякого кортежа $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\xi_i=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ , $(i=1,2,\ldots,n)$ справедлива выводимость:

$$X_1^{\xi_1},X_2^{\xi_2},\ldots,X_n^{\xi_n}\rhd F^{\alpha}(X_1,X_2,\ldots,X_n),\ \textit{где}\ X_i^{\xi_i}=\begin{cases}X_i,\ \textit{если}\ \xi_i=1,\\ \overline{X_i},\ \textit{если}\ \xi_i=0.\end{cases}$$

Теперь можно сформулировать вторую часть теоремы о полноте формализованного исчисления высказываний.

Теорема 2. Всякая тавтология алгебры высказываний доказуема в формализованном исчислении высказываний.

Символически: $F$ – тавтология $\Rightarrow\ \blacktriangleright F$.

Доказательство. Пусть формула $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ является тавтологией алгебры высказываний. Тогда, на основании леммы о выводимости имеем:

$X_1^{\xi_1},X_2^{\xi_2},\ldots,X_n^{\xi_n}\rhd F^{\alpha}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ для любого набора $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ из единиц и нулей. Так как $F$ – тавтология (при любой подстановке превращается в истинное высказывание), то для любого набора $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ $\alpha$-двойником формулы $F$ будет являться сама формула $F$: $F^{\alpha}=F$, $\forall\alpha$. Тогда $X_1^{\xi_1},X_2^{\xi_2},\ldots,X_n^{\xi_n}\rhd F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

Если взять $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1},1)$, то $X_n^{\xi_n}=X_n^1=X_n$ и данная выводимость преобразуется: $X_1^{\xi_1},X_2^{\xi_2},\ldots,X_{n-1}^{\xi_{n-1}},X_n\rhd F\,(6)$, а для

$\alpha = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1},0)$ (в этом случае $X_n^{\xi_n} = X_n^0 = \overline{X_n}$) имеем: $X_1^{\xi_1}, X_2^{\xi_2},\ldots, X_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \overline{X_n} \triangleright F(7)$. Из выводимостей (6) и (7) по правилу удаления дизъюнкции (по Клини) получаем $X_1^{\xi_1}, X_2^{\xi_2},\ldots, X_{n-1}^{\xi_{n-1}}, X_n \vee \overline{X_n} \triangleright F(8)$. Формула $X_n \vee \overline{X_n} = \overline{X_n} \to \overline{X_n}$ выводима из аксиом (пример 1), поэтому ее можно исключить из числа посылок выводимости (8). Тогда $X_1^{\xi_1}, X_2^{\xi_2},\ldots, X_{n-1}^{\xi_{n-1}} \triangleright F(8)$.

Далее в качестве $\alpha$ нужно брать кортежи видов $(\xi_1,\xi_2,\ldots,1,\xi_n)$ и $(\xi_1,\xi_2,\ldots,0,\xi_n)$, для которых получим

$$X_1^{\xi_1}, X_2^{\xi_2},\ldots, X_{n-2}^{\xi_{n-2}}, X_{n-1} \vee \overline{X_{n-1}} \triangleright F \quad , \quad X_1^{\xi_1}, X_2^{\xi_2},\ldots, X_{n-2}^{\xi_{n-2}} \triangleright F \quad .$$

Проделав эту процедуру $n$ раз, придем к заключению, что формула $F$ выводима из пустого множества гипотез, то есть $F$ – теорема в исчислении высказываний, что и требовалось доказать. ■

Теорема 3 (*о полноте исчисления высказываний в широком смысле*). Исчисление высказываний полно в широком смысле.

Доказательство следует из теорем 1 и 2. ■

### ***Адекватность, непротиворечивость и разрешимость исчисления высказываний***

В этом параграфе будет продолжено рассмотрение свойств исчисления высказываний как аксиоматической теории. Следующая теорема является обобщением теоремы 3 о полноте и вытекает из нее.

Теорема 1 (*адекватности*). Формула $G$ выводима в исчислении высказываний из конечного множества гипотез **Г** тогда и только тогда, когда она является логическим следствием всех формул из этого множества.

Символически: $F_1, F_2,\ldots, F_m \triangleright G \Leftrightarrow F_1, F_2,\ldots, F_m \mapsto G$.

Доказательство. Пусть $F_1, F_2,\ldots, F_m \triangleright G$. Тогда, по следствию из теоремы дедукции, данное утверждение эквивалентно, тому, что

$\triangleright F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))\ldots)$. Отсюда по теореме полноты получаем:

$F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))\ldots) - \textit{тавтология}$. Применим к данной тавтологии правило объединения посылок $m$-1 раз, получим тавтологию $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G$. Тогда по признаку логического следования для $m$ посылок получаем $F_1, F_2, \ldots, F_m \mapsto G$, что и требовалось доказать. ■

Определение 1. Формальная теория называется противоречивой, если в ней имеется одновременно два вывода: $\triangleright A$ и $\overline{A}$.

Определение 2. Формальная теория, не являющаяся противоречивой, называется непротиворечивой.

Теорема 2 (*о непротиворечивости исчисления высказываний*). Исчисление высказываний непротиворечиво.

Доказательство. Предположим, что исчисление высказываний противоречиво, то есть в нем имеется одновременно два вывода $\triangleright A$ и $\overline{A}$. Тогда по теореме о полноте получается, что $A$ и $\overline{A}$ – тавтологии. Получилось противоречие с определением тавтологии. Значит, справедливо утверждение теоремы. ■

Определение 3. Аксиоматическая теория называется разрешимой, если существует алгоритм, позволяющий для любого утверждения, сформулированного в терминах теории, ответить на вопрос, является ли это утверждение теоремой данной теории.

Теорема 3 (*о разрешимости исчисления высказываний*). Исчисление высказываний есть разрешимая аксиоматическая теория.

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно указать алгоритм, позволяющий для любой формулы исчисления высказываний ответить на вопрос, можно или нельзя вывести ее из аксиом. Такой алгоритм есть. На основании теоремы о полноте исчисления высказываний, доказуемость формулы эквивалентна тождественной истинности данной формулы в алгебре высказываний. Для проверки последнего свойства нужно составить таблицу истинности данной формулы. Если в последнем столбце этой таблицы стоят одни единицы, значит это тавтология, и, следовательно, и теорема исчисления высказываний. Если в таблице истинности встретился хотя бы один ноль, то формула – не тавтология и не теорема. ■

***Независимость системы аксиом исчисления высказываний***

Основа любой аксиоматической теории – это система аксиом.

Если приступить к анализу этой основы теории, то сразу возникает ряд вопросов. Почему в качестве аксиом выбраны именно эти формулы? Можно ли взять другие формулы в качестве аксиом? (Действительно, для аксиоматической теории высказываний имеется и ряд других аксиоматик). Можно ли сократить число аксиом до одной или двух? Можно ли из данной системы аксиом безболезненно исключить одну или две формулы?

Ответу на последний вопрос посвящается данный параграф.

Определение 1. Аксиома $A$ из системы аксиом $\Sigma$ называется независимой от остальных аксиом этой системы, если ее нельзя вывести (доказать) из множества остальных аксиом $\Sigma\backslash\{A\}$ системы $\Sigma$. Система аксиом $\Sigma$ называется независимой, если каждая ее аксиома не зависит от остальных.

Из этого определения следует, что для доказательства независимости любой аксиомы нужно построить модель, в которой выполнялись бы все аксиомы, кроме той, независимость которой доказывается.

Определение 2. Моделью системы аксиом $\Sigma\backslash\{A\}$ называется совокупность конкретных предметов и отношений между ними, обладающая свойствами, сформулированными в аксиомах системы $\Sigma\backslash\{A\}$, и не обладающая свойством $A$.

Наличие такой модели доказывает независимость аксиомы $A$ от аксиом $\Sigma\backslash\{A\}$. В самом деле, если бы $A$ можно было вывести из $\Sigma\backslash\{A\}$, то во всякой модели, в которой бы выполнялись все аксиомы из $\Sigma\backslash\{A\}$, непременно выполнялась бы и $A$.

Докажем, что система (A1), (A2), (A3) исчисления высказываний независима при помощи построения соответствующих моделей.

*Независимость (A1).*

Построим модель в которой выполняются (A2) и (A3), но не выполняется (A1).

Лемма 1. Аксиома (A1) не зависит от остальных аксиом (A2) и (A3) исчисления высказываний.

Доказательство. Рассмотрим трехэлементное множество $M=\{0, 1, 2\}$ и введем на нем две операции – отрицание и импликацию. Причем эти операции осуществляются по правилам, определяемым следующими таблицами:

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

| $A$ | $B$ | $A \to B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 |

Если теперь всем переменным, входящим в формулу исчисления высказываний, придать некоторые значения из $M$, то и сама формула примет значение из $M$. Формулу, всегда принимающую значение 0 ($A \equiv 0$), назовем хорошей. В остальных случаях формулу назовем плохой.

1) Всякая формула, получающаяся по схеме аксиом (А2) является хорошей. Чтобы это доказать, надо составить таблицу истинности значений формулы (А2) в ней будет $3^n$ строк, где $n$ – количество переменных в формуле. В данном случае – 27 строк. Таблицу истинности предлагается составить самостоятельно.

2) Всякая формула, получающаяся по схеме аксиом (А3) также является хорошей. Составим таблицу истинности (А3).

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A} \to \overline{B}$ | $\overline{A} \to B$ | $(\overline{A} \to B) \to A$ | А3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |

3) Покажем, что правило MP сохраняет свойство "быть хорошей". Иначе говоря, если формулы $F$ и $F \to H$ хорошие, то и формула $H$ также хорошая. В самом деле, из таблицы операции $\to$ видно, что формулы $F$ и $F \to H$ принимают одновременно значение 0 только в первой строке. Но в этой строке формула $H$ также равна 0.

На основании трех доказанных утверждений можно сделать вывод, что всякая формула, выводимая из аксиом (А2) и (А3) с помощью правила МР, является хорошей.

Таким образом, чтобы убедиться, что формула (А1) не выводима из (А2) и (А3) с помощью правила МР, нужно установить, что она плохая. Покажем это. Пусть $A=1$, $B=2$. $A\to(B\to A)=1\to(2\to1)=1\to0=2\neq0$. ■

*Независимость аксиомы (А2).*

Лемма 2. Аксиома (А2) не зависит от остальных аксиом (А1) и (А3) исчисления высказываний.

Доказательство. Снова рассмотрим трехэлементное множество М={0, 1, 2}, но операции отрицание и $\to$ на нем зададим по-другому, с помощью следующих таблиц.

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

| $A$ | $B$ | $A\to B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 |

Предлагается самостоятельно проверить, что (А1) и (А3) – хорошие. Нетрудно также видеть, что правило вывода МР сохраняет свойство формулы "быть хорошей". Следовательно, всякая формула, полученная из аксиом (А1) и (А3) с помощью правила МР – хорошая.

Теперь убедимся, что (А2) – плохая формула. Возьмем $A=0$, $B=0$, $C=1$. Тогда получится

$$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)) = (0\to(0\to1)\to((0\to0)\to(0\to1)) =$$
$$= (0\to2)\to(0\to2) = 1\to1 = 2 \neq 0.$$

Значит (А2) не выводима из (А1) и (А3) с помощью МР. ■

*Независимость аксиомы (А3).*

Лемма 3. Аксиома (А3) не зависит от остальных аксиом (А1) и (А2) исчисления высказываний.

Доказательство. В этом доказательстве применяется другая модель. Пусть $F$ – произвольная формула исчисления высказываний. Обозначим через $h(F)$ формулу, полученную из $F$ стиранием всех вхождений знака отрицания в формуле $F$. Для всякой формулылы $F$, построенной по схемам аксиом (A1), (A2) формула $h(F)$ есть тавтология алгебры высказываний, так как (A1) и (A2) не содержат отрицаний и являются тавтологиями. Правило MP обладает свойством: если $h(F\to G)$ и $h(F)$ – тавтологии, то и $h(G)$ – тавтология, так как $h(F\to G) = h(F)\to h(G)$. Следовательно, для всякой формулы $F$, выводимой из аксиом (A1) и (A2), формула $h(F)$ – тавтология.

Убедимся, что формула (A3) не выводима из (A1) и (A2) с помощью правила MP. Для этого нужно проверить, что какая-либо конкретная формула $F$, построенная по схеме (A3), имеет в качестве $h(F)$ формулу, не являющуюся тавтологией.

Действительно, формула $F = (\overline{X} \to \overline{X}) \to ((\overline{X} \to X) \to X)$ имеет $h(F) = (X \to X) \to ((X \to X) \to X)$. Тогда эта формула не является тавтологией, так как $h(0)=0$. И, формула (A3) не выводима из (A2) и (A1). ■

<u>Теорема 1</u> Система аксиом (A1), (A2), (A3) исчисления высказываний независима.

<u>Доказательство</u> вытекает из доказанных лемм. ■

***Полнота исчисления высказываний в узком смысле***

<u>Определение 1.</u> Аксиоматическая теория называется <u>абсолютно полной</u>, если для любого утверждения $A$, сформулированного в терминах этой теории, ровно одно из утверждений $A$ и $\overline{A}$ является ее теоремой. Иначе говоря, средств аксиоматической теории достаточно для того, чтобы доказать или опровергнуть любое утверждение, сформулированное в терминах данной теории.

<u>Определение 2.</u> Аксиоматическая теория называется <u>полной в узком смысле</u> (или <u>в смысле Поста</u>), если добавление к ее аксиомам любого недоказуемого в ней утверждения с сохранением всех правил вывода приводит к противоречивой теории.

Нетрудно видеть, что всякая абсолютно полная теория будет полной и в узком смысле.

Выясним, будет ли исчисление высказываний абсолютно полным и полным в узком смысле.

<u>Теорема 1.</u> Исчисление высказываний не является абсолютно полным.

<u>Доказательство</u>. Пусть исчисление высказываний абсолютно полно. Тогда для любой формулы $F$ этой теории либо сама форму-

ла $F$, либо $\overline{F}$ является теоремой. По теореме полноты в широком смысле получаем: либо $F$, либо $\overline{F}$ – тавтология. Но есть такие формулы, для которых ни $F$, ни $\overline{F}$ не являются тавтологиями (привести такой пример предлагается самостоятельно). Итак, исчисление высказываний не является абсолютно полным. ■

Иначе обстоит дело с полнотой в узком смысле.

Теорема 2. Исчисление высказываний полно в узком смысле.

Доказательство. Пусть $F$ – некоторая формула исчисления высказываний, не являющаяся его теоремой. Докажем, что если присоединить $F$ в качестве схемы (A4) к схемам аксиом (A1) – (A3) исчисления высказываний, то получаемая на основе (A1) – (A4) аксиоматическая теория ***T*** будет противоречивой.

Поскольку $F$ не теорема, то она (по теореме полноты в широком смысле) не будет тавтологией. Значит, в ее таблице истинности найдется хотя бы одна строка, в которой значение формулы равно 0. Зафиксируем какую-либо такую строку. По схеме (A4)=$F$ построим формулу следующим образом:

1) все переменные, входящие в $F$ и принимающие значение 1 в фиксированной строке, заменим формулой $P \vee \overline{P}$,
2) все переменные из $F$ принимающие значение 0 в фиксированной строке, заменим формулой $P \wedge \overline{P}$.

В результате получится формула $G(P)$, зависящая только от пропозициональной переменной $P$. Эта формула получена по схеме (A4), а значит, является теоремой теории ***T***. С другой стороны, нетрудно видеть, что при любых значениях $P$ формула $G(P)\equiv 0$. Значит, $\overline{G(P)} \equiv 1$. По теореме полноты исчисления высказываний в широком смысле получаем, что $\overline{G(P)}$ выводима из аксиом (A1) – (A3). Но тогда эта формула выводима и из (A1) – (A4). Итак, обе формулы $G(P)$, $\overline{G(P)}$ являются теоремами теории ***T***, построенной на основе аксиом (A1) – (A4).

Значит, данная теория противоречива. ■

### *Занятие 12. Предикаты. Кванторы. Область истинности и ложности*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- определение предиката и его характеристики;
- определения областей истинности и ложности предиката;
- определения логических операций над предикатами, включая кванторные операции;

уметь:

- находить область истинности (ложности) конкретного предиката;
- распознавать тождественно истинные формулы языка логики предикатов;
- применять средства языка логики предикатов для записи и анализа предложений (в том числе математических).

***Основные приемы и методы занятия:*** прием разноуровневые вопросы.

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ 1*

Студенты получают листы с заданием.

Задание 1. Проанализируйте полученные материалы. Как бы вы обозначили тему занятия?

*Необходимые пояснения.*

В материалах представлены разноуровневые вопросы к понятиям «предикат», «область истинности предиката» с местами для ответов.

*«Предикат»*

1. Что такое предикат?
2. Какие бывают предикаты (по числу переменных, по принимаемым значениям истинности)?
3. Каковы характеристики понятия «предикат»?
4. Приведите свой пример предиката, останавливаясь на характеристиках.

5. Считаете ли Вы, что высказывание – частный случай предиката? Почему?

*«Область истинности предиката»*

1. Что такое область истинности предиката?
2. Как соотносятся понятия «область истинности» и «область ложности»?
3. Изобразите на листе формата А3 область истинности предиката:

   $P(x)$ = «$x$ – лев», $M$ – множество животных.

   $P(x)$ = «$x$ – простое число», $M$ – множество натуральных чисел.

   $P(x)$ = «$x$ посетил занятие по математической логике 10.12.13», $M$ – множество студентов 21 группы.
4. (Вариативное задание) Могла ли при каких-то обстоятельствах измениться область истинности предиката из задания 3?
5. Считаете ли Вы, что удобно определять тождественно истинные, тождественно ложные, выполнимые и опровержимые предикаты через их область истинности?

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1*

Задание 2. 🚹 Прочтите текст учебного пособия (раздаточный материал 1)и ответьте на вопросы, записывая ответы в тетрадь.

*РЕФЛЕКСИЯ 1*

Задание 3. 👪 Обсудите в группах прочитанное и впишите в места для ответов на листах раздаточного материала мнение группы по данным вопросам.

Затем происходит фронтальное обсуждение понятий «предикат» и «область истинности предиката», группы представляют результат своей работы по заданиям. Студенты аргументировано объясняют свою точку зрения.

*ВЫЗОВ 2*

Вопросы для фронтального обсуждения.

1. Ранее были изучены операции, которые можно проводить над высказываниями. А какие операции, по Вашему мнению, можно проводить над предикатами?
2. Будет ли этих операций больше? Или меньше? Почему?

3. Нужно ли вводить какие-либо новые операции? Почему?

*ОСМЫСЛЕНИЕ 2*

Чтение определений логических операций раздаточный материал 2 [6, стр. 74-79].

*РЕФЛЕКСИЯ 2*

Задание 4. Исходя из определений логических операций над предикатами, сформулируйте утверждения (теоремы) об областях истинности: отрицания предиката, конъюнкции ($\wedge$), дизъюнкции ($\vee$), импликации ($\rightarrow$) и эквивалентности ($\leftrightarrow$) двух предикатов.

Происходит обсуждение выполнения задания 4. При подведении итогов обязателен возврат к вопросам стадии вызова.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Самостоятельно докажите или найдите доказательство сформулированных в задании 4 теорем. Продолжайте заполнение основных рубрик портфолио.

Раздаточные материалы к занятию 12

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1*

***Предикаты. Классификация предикатов. Области истинности и ложности предикатов***

Средства, предоставляемые логикой высказываний, оказываются недостаточными для анализа многих математических рассуждений. Например, средствами логики высказываний нельзя установить правильность такого рассуждения: "Всякое целое число является рациональным числом; 25 – целое число, следовательно, 25 – рациональное число". Это объясняется тем, что в логике высказываний простые высказывания рассматриваются как нерасчленяемые. Они не подвергаются анализу структуры в смысле связей объектов и их свойств. Поэтому возникает необходимость построения такой логической системы, средствами которой можно исследовать строение элементарных высказываний. Такой логической системой и является логика предикатов, содержащая как часть логику высказываний.

<u>Определение 1.</u> Одноместным предикатом $P(x)$, определенным на множестве $M$, называется предложение, содержащее переменную $x$ и превращающееся в высказывание при подстановке вместо нее конкретного объекта из множества $M$.

Пример. "Река $x$ впадает в озеро Байкал" – одноместный предикат, определенный на множестве всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной $x$ название "Баргузин", получим высказывание "Река Баргузин впадает в озеро Байкал" – это высказывание истинно. Если возьмем $x$="Днепр", то данный предикат превратиться в ложное высказывание.

Определение 2. $n$-местным предикатом, определенным на множествах $M_1, M_2, \ldots M_n$, называется предложение, содержащее $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, \ldots M_n$ соответственно. Предикат обозначается $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$. Переменные $x_1, x_2,\ldots x_n$ называются предметными, а элементы множеств $M_1, M_2, \ldots M_n$, которые эти переменные пробегают – предметами.

Определение 3.Предметные переменные и предметы вместе взятые называются термами.

При $n = 1$ предикат задает свойство, $n = 2$ – бинарное отношение, $n = 3$–тернарное отношение и так далее.

По числу входящих переменных различают предикаты одноместные, двухместные и так далее. Высказывания будем считать 0-местными предикатами.

Примеры. 1. "$x$ – простое число", $M = \boldsymbol{N}$, одноместный предикат, заданный на множестве натуральных чисел.

2. "$x^2+y^2\leq 9$" является двухместным предикатом, заданным на множестве $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$.

Отметим, что следует различать предикаты, выражающие одно и то условие, но заданные на разных множествах.

3. $P(x)$ = "$2x–3=0$", заданный на множестве $\boldsymbol{Z}$, следует отличать от предиката $P'$="$2x–3=0$", заданного на множестве $\boldsymbol{Q}$. Первый предикат не принимает истинное значение ни при каких $x$, а второй принимает значение 1 при $x=\frac{3}{2}$. Таким образом, при задании предиката следует обязательно указывать множества, на которых он определен.

Всякий предикат $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ определяет функцию от $n$ аргументов, заданную на множествах $M_1$, $M_2$, $\ldots M_n$ и принимающую значение на двухэлементном множестве $\{0,1\}$.

*Классификация предикатов.*

Определение 4. Предикат $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, заданный на множествах $M_1$, $M_2$, $\ldots M_n$:

*a)* тождественно истинным или тавтологией, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots x_n$ любых конкретных предметов $a_1,a_2,\ldots a_n$ из множеств $M_1,M_2,\ldots M_n$ соответственно, он превращается в истинное высказывание $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$;

*b)* тождественно ложным или противоречием, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots x_n$ любых конкретных предметов из множеств $M_1$, $M_2$, $\ldots M_n$ соответственно, он превращается в ложное высказывание;

*c)* выполнимым (опровержимым), если существует по крайней мере один набор предметов $a_1,a_2,\ldots a_n$, при подстановке которого вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, он превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$.

4. Предикат "Город $x$ расположен на берегу Волги" является примером выполнимого ($x$="Саратов"), а также примером опровержимого предиката.

5. Одноместный предикат "$\sin^2x+\cos^2x=1$", определенный на множестве $\boldsymbol{R}$, – тождественно истинный.

6. Двухместный предикат "$x^2+y^2<0$", заданный на $\boldsymbol{R}$, – тождественно ложный предикат.

Определение 5. Областью истинности предиката $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, заданного на множествах $M_1$, $M_2$, $\ldots M_n$, называется совокупность всех упорядоченных кортежей длины $n$ $(a_1,a_2,\ldots a_n)$, в которых $a_1\in M_1$, $a_2\in M_2,\ldots$ $a_n\in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$ при подстановке $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots x_n=a_n$.

Область истинности обозначается $P^+$. То есть $P^+=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)| P(a_1,a_2,\ldots a_n)=1\}$.

Областью ложности предиката $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется совокупность таких кортежей $(a_1,a_2,\ldots a_n)$, что $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$ – ложное высказывание.

Область ложности обозначается $P^-$. Символически: $P^-=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\ P(a_1,a_2,\ldots a_n)=0\}$.

Из определений областей истинности и ложности следует, что $P^+\subseteq M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$, $P^-\subseteq M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$.

Очевидно $P^+\cup P^-= M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$. $P^-$ является дополнением к $P^+$.

Пример 7. $P(x,y)$="$x$ есть родственник $y$". Тогда $P^+$ – бинарное отношение родства между людьми.

8. $S(x,y)$="$x^2+y^2=9$". $S^+$ – окружность с центром в начале координат радиуса 3.

В терминах области истинности можно выразить понятия, связанные с классификацией предикатов. Используем символическую запись:

*a)* $P(x_1,x_2,\ldots x_n)\equiv 1 \Leftrightarrow P^+= M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$;

*b)* $P(x_1,x_2,\ldots x_n)\equiv 0 \Leftrightarrow P^+= \varnothing$;

*c)* $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ выполнимо $\Leftrightarrow P^+\neq\varnothing$;

*d)* $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ опровержимо $\Leftrightarrow P^+\neq M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$.

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2*

### ***Логические операции над предикатами аналогичные операциям над высказываниями***

Предикаты, как и высказывания, принимают значения "истина" или "ложь", поэтому над ними можно производить логические операции аналогичные операциям логики высказываний.

Определение 1. Отрицанием $n$-местного предиката $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется новый $n$-местный предикат $\overline{P}$, определенный на тех же множествах, что и предикат $P$, который обращается в истинное высказывание при тех и только тех значениях предметных переменных $x_1,x_2,\ldots x_n$, при которых исходный предикат превращается в ложное высказывание.

Теорема 1. Для $n$-местного предиката $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенного на множествах $M_1$, $M_2$, $\ldots M_n$, область истинности его отрицания $\overline{P}$ совпадает с областью ложности данного предиката.

Доказательство. Рассмотрим область истинности для $\overline{P}$:

$\left(\overline{P}\right)^{+}=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|\,\overline{P}(a_1,a_2,...,a_n)=1$ $\}=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|P(a_1,a_2,\ldots a_n)=0\}=P^{-}$, где переходы в равенстве осуществляются на основании определений области истинности, отрицания высказывания и области ложности. ■

Пример 1.Пусть дан предикат $P$(x)="$x$>5", тогда $\overline{P(x)}$="$x \le 5$".

Теорема 2. Отрицание предиката будет тавтологией тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

Доказательство. Из определения тавтологии в терминах области истинности имеем: $\left(\overline{P}\right)^{+}=M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$. Далее, по предыдущей теореме из $\left(\overline{P}\right)^{+}=P^{-}$, вытекает, что $P^{-}=M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$. По определению области истинности $P^{+}=\overline{P^{-}}=\overline{M_1\times M_2\times\ldots\times M_n}=\varnothing$ (в этом равенстве черта означает дополнение). А это значит, что $P\equiv 0$. ■

Определение 2. Конъюнкцией предикатов $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $Q(y_1,y_2,\ldots y_m)$ называется новый $(n+m)$-местный предикат, обозначаемый $R=P\wedge Q$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания. Причем, если исходные предикаты $P$ и $Q$ определены соответственно на множествах $M_1,M_2,\ldots,M_n$ и $N_1,N_2,\ldots,N_m$, то их конъюнкция будет определена на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, $N_1$, $N_2,\ldots$, $N_m$.

Пример 2. Пусть предикаты $P(x)$="$x\ge 3$", $Q(x)$="$x\le 3$" определены на $\boldsymbol{R}$. Тогда $P(x)\wedge Q(x)$="$(x\ge 3)\wedge(x\le 3)$"="$x=3$", также определена на $\boldsymbol{R}$.

Теорема 3. Для $n$-местных предикатов $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $Q(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенных на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, область истинности конъюнкции $P(x_1,x_2,\ldots x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots x_n)$ совпадает с пересечением областей истинности исходных предикатов: $(P\wedge Q)^{+}=P^{+}\cap Q^{+}$.

Доказательство. Согласно определению конъюнкции, области истинности и пересечения множеств имеем:

$(P\wedge Q)^{+}=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|P(a_1,a_2,\ldots a_n)\wedge Q(a_1,a_2,\ldots a_n)=1\}=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|P(a_1,$ $a_2,\ldots a_n)=1,$ $Q(a_1,a_2,\ldots a_n)=1\}=\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|P(a_1,a_2,\ldots a_n)=1\}\bigcap$ $\{(a_1,a_2,\ldots a_n)|Q(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\ldots \mathrm{a}_n)=1\}= P^{+}\bigcap Q^{+}$. ■

Определение 3. Дизъюнкцией предикатов $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $Q(y_1,y_2,\ldots y_m)$ называется новых $(n+m)$-местный предикат, обозначаемый $R=P\vee Q$, который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается, по меньшей мере, один из исходных предикатов. Причем, если исходные предикаты $P$ и $Q$ определены соответственно на множествах $M_1,M_2,\ldots,M_n$ и $N_1,N_2,\ldots,N_m$, то их дизъюнкция будет определена на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, $N_1$, $N_2,\ldots$, $N_m$.

Для области истинности дизъюнкции можно доказать теорему аналогичную теореме 24.3.

Теорема 4. Для $n$-местных предикатов $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $Q(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенных на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, область истинности дизъюнкции $P(x_1,x_2,\ldots x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots x_n)$ совпадает с объединением областей истинности исходных предикатов: $(P\wedge Q)^{+}=P^{+}\bigcup Q^{+}$.

Доказательство читателю предлагается провести самостоятельно.

Аналогично можно дать определения операциям импликации и эквивалентности и сформулировать утверждения об их областях истинности.

### ***Равносильность предикатов. Кванторные операции***

Как указывалось ранее, логика предикатов является естественным расширением логики высказываний. Поэтому естественно в логике предикатов также рассматривать отношение равносильности между предикатами и предикатными формулами.

Определение 1. Два $n$-местных предиката $P$ и $Q$, заданных на одних и тех же множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$ называются равносильными, если кортеж $(a_1,a_2,\ldots a_n)$, где $a_1\in M_1$, $a_2\in M_2,\ldots$ $a_n\in M_n$ превращает предикат $P$ в истинное высказывание $P(a_1,a_2,\ldots a_n)=1$ в том и только том случае, когда он превращает в истинное высказывание $Q(a_1,a_2,\ldots a_n)=1$ второй предикат. Равносильность обозначается $P\Leftrightarrow Q$.

На языке областей истинности это определение можно сформулировать как $P^{+}=Q^{+}$.

Легко видеть, что отношение равносильности предикатов является отношением эквивалентности. Поэтому совокупность всех $n$-местных предикатов, определенных на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов. В одном классе находятся все тождественно ложные предикаты, в другом все тождественно истинные и так далее. Переход от предиката $P_1$ к равносильному ему предикату $P_2$ называется равносильным преобразованием. Это понятие оказывается очень важным для школьной математики. Например, решение уравнений и неравенств есть поиск множества истинности.

Пример 1. Решить уравнение $4x$-2=-3$x$-9 – значит найти множество истинности соответствующего предиката. Преобразовывая его равносильным образом: можно получить $x$=–1. То есть, {–1} – множество истинности данного предиката.

Равносильные предикаты не различаются в логике предикатов.

Пример 2. Записать отрицание предиката $P(x)$="$|x|>2$", заданного на множестве $\boldsymbol{R}$. В качестве ответа может быть записан любой из следующих (равносильных между собой) предикатов: "$|x|\leq 2$", "$(x\geq -2)\wedge(x\leq 2)$", "$x\in[-2, 2]$".

Определение 2. Предикат $Q(x_1,x_2,\ldots x_n)$, заданный на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, называется следствием предиката $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, заданного на тех же множествах, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных, на которых в истинное высказывание превращается предикат $P$. Это обозначается $P\Rightarrow Q$.

В терминах областей истинности можно сказать, что $Q$ является следствием $P$, тогда и только тогда, когда $\mathrm{P}^{+}\subseteq Q^{+}$ (область истинности предиката $P$ включено в область истинности предиката $Q$).

Пример 3. $Q(n)$="$n$ делится на 3", $P(n)$="$n$ делится на 6", определены на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Тогда $P\Rightarrow Q$.

Язык областей истинности позволяет установить связь между понятиями следования и равносильности предикатов: два предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого.

Теорема 1. Пусть $P(x_1,x_2,\dots x_n)$ и $Q(x_1,x_2,\dots x_n)$ – два $n$-местных предиката, определенных на одних и тех же множествах, такие, что $P(x_1,x_2,\dots x_n)\Rightarrow Q(x_1,x_2,\dots x_n)$. Тогда:

1) если $P(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 1$, то и $Q(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 1$;
2) если $P(x_1,x_2,\dots x_n)$ выполнимый, то и $Q(x_1,x_2,\dots x_n)$ выполнимый;
3) если $Q(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 0$, то и $P(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 0$;
4) если $Q(x_1,x_2,\dots x_n)$ опровержимый, то и $P(x_1,x_2,\dots x_n)$ опровержимый.

Доказательство. Так как $P\Rightarrow Q$, то $P^+\subseteq Q^+$ (1).

1) Если $P(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 1$, значит $P^+= M_1\times M_2\times\dots\times M_n$. Подставляя это значение в равенство (1), получаем $M_1\times M_2\times\dots\times M_n\subseteq Q^+$. Но $Q^+\subseteq M_1\times M_2\times\dots\times M_n$ (по определению области истинности), значит $Q^+= M_1\times M_2\times\dots\times M_n$. Следовательно, $Q(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 1$; тождественно истинный предикат.
2) Если $P$ – выполнимый предикат, то $P^+\neq\varnothing=A$. Подставляя в (1), получаем $A\subseteq Q^+$. Значит, $Q^+\neq\varnothing$, и $Q$ – выполнимый предикат.
3) Если $Q(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 0$, то $Q^+=\varnothing$. Из равенства (1)можно получить: $(P^+\subseteq\varnothing)\Rightarrow(P^+=\varnothing)$. Тогда $P(x_1,x_2,\dots x_n)\equiv 0$.
4) Предлагается доказать самостоятельно. ■

В предыдущем параграфе были определены операции над предикатами аналогичные операциям над высказываниями. Природа предикатов позволяет ввести над ними специальные операции, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями – кванторные операции.

Рассмотрим предикат $F(x)$="$x$ живет в Лондоне, следовательно, $x$ живет в Англии". Очевидно, что это тождественно истинный предикат $F(x)\equiv 1$. Это значит, что истинны все высказывания $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$,…, иными словами будет истинна конъюнкция $F(a)\wedge F(b)\wedge F(c)\wedge\dots$ Если множества, на которых определен предикат, содержат достаточно много элементов (а они могут быть и бесконечны), то получится очень громоздкая запись. Поэтому договорились писать просто $\forall x\, F(x)$.

Определение 3. Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве $M$, сопоставляется высказывание $\forall x\,(P(x))$, которое истинно в том и только том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае. Читается: "для любого значения $x$ выполняется, что $P(x)$ – истинное высказывание" Символически:

$$\forall x\,(P(x)) = \begin{cases} 1, P(x)\equiv 1, \\ 0, P(x) - \text{\textit{опровержимый}}. \end{cases}$$

Символ $\forall$ происходит от первой буквы английского слова "All" – все. Символ $\forall x$ называется квантором общности по переменной $x$. В выражении $\forall x\,(P(x))$ переменная $x$ является связанной.

Пример 4. Рассмотрим предикат $P(x)$="$1\leq x$", заданный на множестве натуральных чисел. Тогда $\forall x\,(P(x))$ – истинное высказывание, так как $P(x)\equiv 1$.

Определение 4. Операцией связывания квантором общности по переменной $x_1$ называется правило, по которому каждому $n$-местному ($n\geq 2$) предикату $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$, сопоставляется новый ($n$-1)-местный предикат, обозначаемый $\forall x_1(P(x_1,x_2,\ldots x_n))$, который для любых предметов $a_2\in M_2,\ldots,a_n\in M_n$ превращается в высказывание, истинное в том и только том случае, когда одноместный предикат $P(x_1,a_2,\ldots a_n)$, определенный на множестве $M_1$, тождественно истинен, и ложное в противном случае. Символически:

$$\forall x_1(P(x_1,a_2,\ldots a_n)) = \begin{cases} 1, P(x_1,a_2,\ldots a_n)\equiv 1, \\ 0, P(x_1,a_2,\ldots a_n) - \text{\textit{опровержимый}} \end{cases}.$$

В выражении $\forall x_1(P(x_1,x_2,\ldots x_n))$ переменная $x_1$ – связанная, а переменные $x_2,\ldots,x_n$ – свободные.

Пример 5. Рассмотрим $P(x,y)$="$y\leq x$", определенный на $\boldsymbol{N}$. Применим к нему операцию связывания квантором общности по $x$, получим $Q(y)=\forall x\,(y\leq x)$ – одноместный предикат от $y$. Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при $y=1$), так и в ложное (при подстановке вместо $y$ любого другого натурального числа).

К $(n-1)$-местному предикату $\forall x_1(P(x_1,x_2,\ldots x_n))$ можно снова применить операцию связывания квантором общности по одной из свободных переменных $x_2,\ldots x_n$, в результате получится уже $(n$-$2)$-местный предикат и так далее.

Пример 6. Если к одноместному предикату, получившемуся в примере 2 применить квантор общности по переменной $y$, то получим 0-местный предикат или высказывание $\forall y\forall x\,(y\leq x)$. Это высказывание будет ложным, так как предикат $\forall x(y\leq x)$ опровержим.

Вторая из кванторных операций – это связывание квантором существования.

Рассмотрим предикат $F(x)$="$x$ живет в Лондоне". Он иногда является истинным (например, "Мэр Лондона живет в Лондоне"), а это значит, что истинно, по крайней мере, одно из высказываний $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$,… Иными словами, будет истинна дизъюнкция $F(a)$ $\vee$ $F(b)$ $\vee$ $F(c)$ $\vee$…Эту запись упрощают следующим образом $\exists x\, F(x)$.

Символ $\exists$ произошел от первой буквы английского слова "Exist" – существовать. Поэтому $\exists x$ – квантор существования по переменной $x$.

Определение 5. Операцией связывания квантором существования по переменной $x_1$ называется правило, по которому каждому $n$-местному $(n\geq 2)$ предикату $P(x_1,x_2,\ldots x_n)$, определенному на множествах $M_1$, $M_2,\ldots,M_n$, сопоставляется новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $\exists x_1(P(x_1,x_2,\ldots x_n))$, который для любых предметов $a_2\in M_2,\ldots\ a_n\in M_n$ превращается в высказывание, ложное в том и только том случае, когда одноместный предикат $P(x_1,a_2,\ldots a_n)$, определенный на множестве $M_1$, тождественно ложен, и истинное в противном случае. Символически:

$$\exists x_1(P(x_1,a_2,\ldots a_n))=\begin{cases}0, & P(x_1,a_2,\ldots a_n)\equiv 0,\\ 1, & P(x_1,a_2,\ldots a_n)-\textit{выполнимый}\end{cases}.$$

Пример 7. Применим к предикату $P(x,y)$="$y\leq x$", определенному на множестве $\boldsymbol{R}$, квантор существования по переменной $x$. Получим одноместный предикат $Q(y)=\exists x(y\leq x)$, зависящий от переменной $y$. При этом $Q(y)\equiv 1$, так как $P(x,a)$ – выполнимый.

5. Пусть "$x^2+y^2<0$"$\equiv 0$. Тогда применение к нему квантора существования по любой переменной даст одноместный тождественно ложный предикат.

В одном и том же высказывании различные переменные могут быть связаны различными способами.

Пример 8. Возьмем предикат $P(x,y)$="$x$ есть мать $y$" и рассмотрим следующие высказывания, получающиеся путем связывания различными кванторами по переменным $x$ и $y$:

$(*)\ \forall x\forall y P(x,y)$ – *любой человек является матерью каждого человека*;
$(**)\ \exists x\forall y P(x,y)$ – *существует мать всех людей*;
$(***)\ \forall y\forall x P(x,y)$ – *любой человек имеет матерью каждого человека*;
$(****)\ \forall y\exists x P(x,y)$ – *у каждого человека существует мать*.

Порядок вхождения одноименных кванторов не имеет значения: выражения (*) и (***) равносильны и могут быть записаны $\forall x,y\ P(x,y)$ – любые два человека являются матерью и ребенком. Формулы (**), (****) различаются порядком вхождения кванторов $\forall$ и $\exists$, и имеют разные истинностные значения.

### ***Занятие 14. Проблема разрешимости в логике предикатов***

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- формы проблемы разрешимости в логике предикатов;
- результаты о разрешимости в логике предикатов.

***Основные приемы и методы занятия:*** стратегия «Зигзаг».

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ*

Вопросы для обсуждения.

1. Сталкивались ли Вы раньше с проблемой разрешимости?
2. При изучении какого материала это произошло?
3. Каким образом решался вопрос разрешимости ранее?

Студенты делятся на группы (домашние) по 4 человека в каждой (по возможности). Внутри группы студенты получают номера «1», «2», «3», «4».

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Задание 1. 🚹 Прочтите текст «Проблема разрешимости в логике предикатов» (раздаточный материал по пособию [6, стр. 85-86]) и зафиксируйте в рабочей тетради схематические обозначения устройств, пример построения устройств для доказательства теоремы разрешимости.

*РЕФЛЕКСИЯ*

Задание 2. 🚹 (вариативное в соответствии с полученным номером):

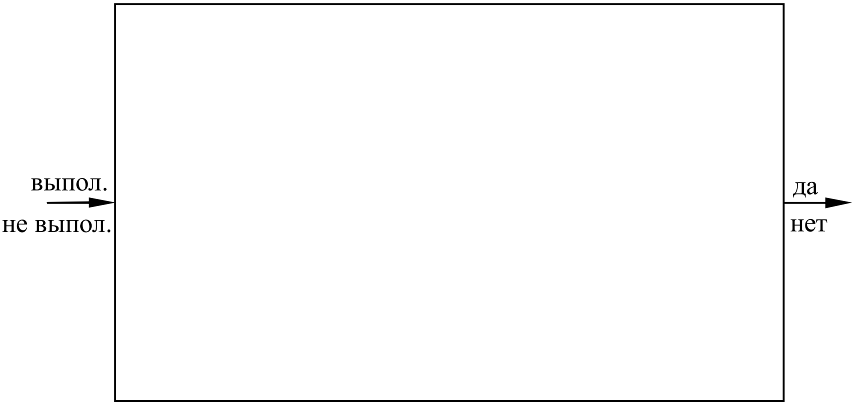
1. Пусть решена проблема $C$. Сконструируйте устройство для решения проблемы $A$.
2. Пусть решена проблема $C$. Сконструируйте устройство для решения проблемы $B$.
3. Пусть решена проблема $B$. Сконструируйте устройство для решения проблемы $C$.
4. Пусть решена проблема $B$. Сконструируйте устройство для решения проблемы $A$.

Схемы устройств изображаются в рабочей тетради карандашом.

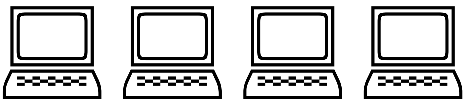
Студенты, получившие одинаковые номера, пересаживаются для работы в экспертных группах.

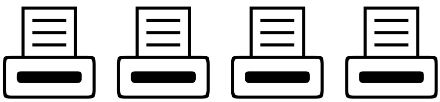
Задание 3. (экспертная группа) Обсудите решение проблемы, выработайте единую позицию. Сконструируйте устройство из предложенных элементов (эти элементы вырезаются, а затем фиксируются на листе с изображением устройства).

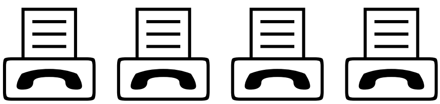
Устройство для решения проблемы *A*




Элементы устройства.


– данное устройство,


– «отрицание»,


– «перевертыш ответа».

В рабочей тетради студенты экспертной группы изображают уже правильный, по их мнению, вариант, вносят исправления, если это необходимо.

Студенты возвращаются в домашнюю группу, происходит обмен полученными результатами и их обсуждение в домашней группе.

Задание 3. (домашняя группа) Объясните своей группе как найдено решение поставленной задачи, ответьте на вопросы друг друга. Если решение, найденное экспертной группой, вызывает сомнения, то домашняя группа должна обсудить и выработать своё решение. Зафиксируйте результаты в рабочих тетрадях.

Презентация работы всех групп на доске. Каждая группа объясняет одно устройство по договорённости.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Аргументировано ответьте на вопрос: «Насколько удачным является решение проблемы при помощи построения соответствующего устройства?» Используя различные источники информации, найдите дополнительный материал по проблеме разрешимости для частных видов формул логики предикатов. Заполняйте рубрики портфолио.

Раздаточные материалы к занятию 14

### ***Проблема разрешимости в логике предикатов***

Как уже говорилось, в алгебре высказываний существует алгоритм, позволяющий для любой формулы ответить на вопросы: будет ли она выполнима, опровержима, тождественно истинна, тождественно ложна.

Общего алгоритма, отвечающего на такие вопросы для логики предикатов, не существует. Тем не менее, для некоторых частых видов формул данная проблема допускает решение.

Теорема 1. Если формула выполнима на конечном множестве, то существует алгоритм, обнаруживающий это.

Доказательство. Пусть дана некоторая формула $A$, определенная на множестве $M=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$. Заменим в этой формуле все предикатные переменные на конкретные предикаты. Свяжем все свободные переменные в формуле квантором $\exists$. При этом новая формула будет одновременно с первой выполнима или не выполнима (по определению операции связывания квантором $\exists$).

Преобразуем формулу, используя равносильности:

$\forall x P(x) \cong P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, (*)

$\exists x P(x) \cong P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$. (**)

Формула получится значительно длиннее, но в ней не будет кванторов и предикатов, то есть она будет являться формулой логики высказываний. А для формул алгебры высказываний можно составить таблицу истинности и выяснить ее выполнимость. ■

<u>Пример.</u> Пусть задана формула $F = \forall x P(x, y) \to \exists z Q(z)$, определенная на множестве $M=\{a,b\}$. Тогда по теореме 27.1 можно записать формулу $F'$, в которой все переменные будут связаны:

$$F' \cong \exists y\,(\forall x\, P(x,y) \to \exists z\, Q(z)) \cong \exists y\,(\exists x\, \overline{P(x,y)} \vee \exists z\, Q(z)) \cong (\exists x\, \overline{P(x,a)} \vee$$
$$\vee \exists z\, Q(z)) \vee (\exists x\, \overline{P(x,b)} \vee \exists z\, Q(z)) \cong (\overline{P(a,a)} \vee \overline{P(b,a)} \vee \exists z\, Q(z)) \vee$$
$$\vee (\overline{P(a,b)} \vee \overline{P(b,b)} \vee \exists z\, Q(z)) \cong \overline{P(a,a)} \vee \overline{P(b,a)} \vee Q(a) \vee Q(b) \vee \overline{P(a,b)}$$
$$\vee \overline{P(b,b)} \vee Q(a) \vee Q(b) \cong \overline{P(a,a)} \vee \overline{P(a,b)} \vee \vee \overline{P(b,a)} \vee \overline{P(b,b)} \vee Q(a) \vee$$
$$\vee Q(b) \cong \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee E \vee G.$$

Последнее выражение является формулой алгебры высказываний, которую можно классифицировать. Формула $F'$ – выполнимая, следовательно, и $F$ – выполнимая.

Рассмотрим еще два особых класса формул, для которых решена проблема разрешения общезначимости. Это $\exists$-формулы и $\forall$-формулы. В этих случаях она сводится к тождественной истинности формул на конечных множествах.

<u>Определение 1</u>. Под <u>$\forall$-формулой</u> понимают формулу $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ F(P_1, P_2, \ldots P_k)$, а под <u>$\exists$-формулой</u> понимают $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n\ F(P_1, P_2, \ldots P_k)$, где $P_i = P_i(x_1, \ldots x_n)$.

<u>Теорема 2.</u> $\forall$-формула общезначима тогда и только тогда, когда она тождественно истинна на $n$-элементном множестве.

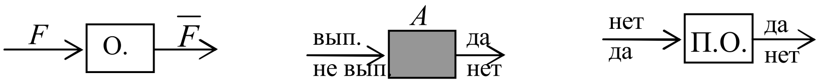
<u>Теорема 3.</u> $\exists$-формула общезначима тогда и только тогда, когда она тождественно истинна на одноэлементном множестве.

Проблема разрешимости в логике предикатов проявляется в трех формах: в возможности определить по данной формуле является ли она 1) выполнимой, 2) тождественно истинной, 3) тождественно ложной.

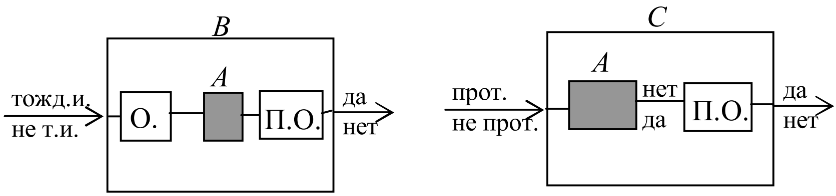
Теорема 4. Все три формы проблемы разрешимости эквивалентны.

Доказательство. Обозначим эти три проблемы *A*, *B*, и *C* соответственно.

1. Пусть решена проблема *A*. То есть для любой формулы существует устройство, определяющее выполнима она или нет. Найдем устройства, решающие проблемы *B* и *C*. Введем следующие обо- значения:




устройство О. – отрицание формулы (выдает на выходе отрицание тестируемой формулы *F*); устройство П.О. – перевертыш ответа (меняет слово ″да″ на слово ″нет″и наоборот).




2. Пусть решена проблема *C*. Сконструируем устройства для решения проблем *A* и *B* самостоятельно.

3. Пусть решена проблема *B*. Читателю предлагается самостоятельно сконструировать устройства для решения проблем *A* и *C*. После чего теорема будет доказана. ■

### *Занятие 15. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений*

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- четыре вида категорических суждений;
- фигуры аристотелевских силлогизмов;
- правила построения верных силлогизмов;

уметь:

- делать выводы на основании логического квадрата;
- применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений.

***Основные приемы и методы занятия:*** стратегия «Зигзаг», работа с графическими организаторами (таблицами, диаграммами).

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ 1*

Сообщение преподавателя:

«Многие математические утверждения и даже теоремы имеют вид "Все …", "Никакие (-ой, -ая) …","Некоторые (-ый, -ая) …", "Некоторые (-ый, -ая) …не…". Какие математические утверждения и теоремы указанных видов вы можете вспомнить?»

Ответы студентов фиксируются на доске, так как они могут быть полезны в дальнейшей работе.

Вопрос: «Как связаны эти утверждения с логикой предикатов?»

Ожидаемый ответ: они могут быть записаны с использованием кванторной символики.

Сообщение преподавателя:

«Сегодня мы с вами разберемся в тонкостях использования языка логики предикатов для записи и доказательства математических утверждений».

Студенты делятся на группы (домашние) по 4 человека в каждой. Внутри группы студенты получают номера «1», «2», «3», «4».

*ОСМЫСЛЕНИЕ 1*

Студенты получают тексты, и. в соответствии со своим номером, они должны вычленить из текста информацию : «1» – про общеутвердительные суждения, «2» – про общеотрицательные суждения, «3» – про частноутвердительные суждения и «4» – про ча-частноотрицательные суждения. То есть, хотя текст один и тот же,в каждой группе студенты рассматривают четыре разных аспекта (раздаточный материал 1).

Задание 1. (вариативное) Прочтите информацию о видах категорических суждений и выделите категории информации важные для понимания материала.

*РЕФЛЕКСИЯ 1*

Задание 2. (домашняя группа) Обсудите и выделите категории информации в группе.

Происходит обсуждение в аудитории и выбор наиболее важных категорий для концептуальной таблицы по суждениям.

На доске изображается таблица. Пример такой таблицы приведён ниже.

**Таблица 14**

| Категория информации | I группа | II группа | III группа | IV группа |
|---|---|---|---|---|
| | Общеутвердительное | Общеотрицательное | Частно-утвердительное | Частно-отрицательное |
| Обозначение | | | | |
| На языке логики предикатов | | | | |
| Удачный пример | | | | |
| Символ | | | | |

Задание 3. (вариативное) Составьте по одному примеру категорического суждения в соответствии со своим номером. Этот пример не должен совпадать с примерами, приведёнными в тексте.

Затем студенты, имеющие одинаковые номера, пересаживаются для работы в экспертных группах, получится четыре группы. Каждая экспертная группа занимается изучением одного вида категорических суждений и обдумывает методы объяснения материала в домашней группе, готовится к вопросам по заполнению таблицы.

Студенты возвращаются в домашние группы.

Задание 4. (домашняя группа) Объясните материал своей группе, ответьте на вопросы друг друга по заполнению таблицы. Примеры суждений выбирайте из:

- описанных в раздаточных материалах;
- составленных членами группы;
- обдуманных в экспертной группе;
- только что предложенных.

Заполните таблицу в рабочих тетрадях.

Происходит презентация работы групп по выбранным категориям. Представитель группы заполняет выбранную строку таблицы, объясняя точку зрения группы.

*ВЫЗОВ 2*

Сообщение преподавателя:

«Про любые два понятия можно составить категорические суждения всех четырех видов. Если рассмотреть общеутвердительное суждение «Всякий квадрат является ромбом», то, как будут выглядеть общеотрицательное, частноутвердительное и частноотрицательное суждения?»

Ожидаемые ответы: «Никакой квадрат не является ромбом», «Некоторые квадраты являются ромбами», «Некоторые квадраты не являются ромбами».

«Истинность или ложность этих утверждений просто установить, так как это позволяют достоверные геометрические знания.

Если же обратиться к неизведанным областям, то дело обстоит сложнее.

Допустим, на 100% известно, что утверждение «Всякий инопланетянин имеет уши» истинно. Тогда, можно ли сделать вывод об истинности или ложности других трех видов категорических суждений?»

Ожидаемые ответы: «Некоторые инопланетяне имеют уши» будет истинно. «Никакой инопланетянин не имеет ушей» ложно. «Некоторые инопланетяне не имеют ушей» также ложно.

«Эти выводы получилось сделать, не исходя из знаний об инопланетянах, а исходя из структуры суждений.

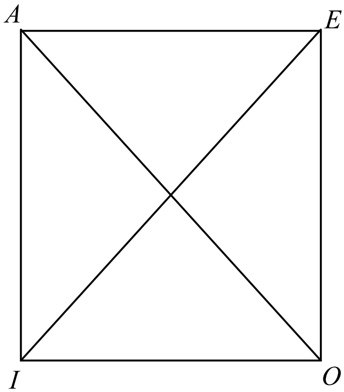
Какие же существуют связи между категорическими суждениями?»

*ОСМЫСЛЕНИЕ 2*

Задание 5. Прочтите сообщение об отношениях между категорическими суждениями (раздаточный материал 2).

*РЕФЛЕКСИЯ 2*

Задание 6. На основании прочитанного закончите диаграмму «Логический квадрат», дополняя ее соответствующими подписями и полезными, на ваш взгляд, обозначениями.




Проходит представление и обсуждение работ групп. Каждая группа раскрывает один вид связи, приводит примеры выводов.

*ВЫЗОВ 3*

Сообщение преподавателя:

«Рассмотрим следующие схемы рассуждений:

Все люди смертны.
Сократ – человек.
_______________
Следовательно, Сократ смертен.

Все вороны черные.
Этот предмет – не черный.
_______________
Следовательно, этот предмет не ворона»

Происходит обсуждение вопросов:

1. В чем особенности этих схем?
2. Могут ли они использоваться для доказательства математических утверждений?
3. Можно ли ставить в схему произвольные суждения?

*ОСМЫСЛЕНИЕ 3*

Задание 7. Прочтите сообщение о силлогизмах (раздаточный материал 3). Ответьте на вопрос: все ли из приведенных силлогизмов будут верны? Если не все верны, то подумайте: чем объясняется ошибка.

*РЕФЛЕКСИЯ 3*

Задание 8. (вариативное) Выполните задания по определению фигуры силлогизма и составлению силлогизмов, представленных на раздаточном материале.

I ГРУППА

1. Определите фигуру силлогизмов:

1). Знания – сила.
Школьник обладает знаниями.
Школьник обладает силой.
2) Некоторые львы не имеют гривы.
Все львы – млекопитающие.
Некоторые млекопитающие не имеют гривы.

2. Определите фигуры и закончите силлогизмы:
1) Ни один школьник не убивал Цезаря
Убийца Цезаря – плохой человек.

2) Президент США – политик.
Некоторые президенты США были убиты.

3) Все воры сидят в тюрьме.
Крыса Лариса сидит в тюрьме.

3. Составьте силлогизм по первой фигуре и проиллюстрируйте его.

## II ГРУППА

1. Определите фигуры силлогизмов:
1). Знания – сила.
Школьник обладает знаниями.
Школьник обладает силой.
2) Мальчик получил в школе «тройку».
Тройка –это упряжка лошадей.
Мальчик получил в школе упряжку лошадей.

2. Определите фигуры и закончите силлогизмы:
1) Профессора не учатся в школе.
Некоторые ученики школы интересуются математикой.

2) Ни один школьник не убивал Цезаря
Убийца Цезаря – плохой человек.

3) Все судьи – юристы.
Ни один юрист не беден.

3. Составьте силлогизм по второй фигуре и проиллюстрируйте его.

## III ГРУППА

1. Определите фигуры силлогизмов:

1). Александр Македонский – великий полководец.
Александр Македонский – ездил на белом коне.
Все великие полководцы ездили на белых конях.

2) Некоторые львы не имеют гривы.
Все львы – млекопитающие.
Некоторые млекопитающие не имеют гривы.

2. Определите фигуры и закончите силлогизмы:

1) Профессора не учатся в школе.
Некоторые ученики школы интересуются математикой.

2) Ни одна супер-модель не стара.
Некоторые актрисы стары.

3) Игрушки существуют.
Динозавры на Земле сейчас не существуют.

3. Составьте силлогизм по третьей фигуре и проиллюстрируйте его.

## IV ГРУППА

1. Определите фигуры силлогизмов:

1). Знания – сила.
Школьник обладает знаниями.
Школьник обладает силой.

2) Все рыбы дышат жабрами.
Ни один кит не дышит жабрами.
Ни один кит не является рыбой.

2. Определите фигуры и закончите силлогизмы.

1) Ни одна супер-модель не стара.
Некоторые актрисы стары.

2) Все судьи – юристы.
Ни один юрист не беден.

3) Все воры сидят в тюрьме.

Крыса Лариса сидит в тюрьме.

3. Составьте силлогизм по четвертой фигуре и проиллюстрируйте его.

Группы представляют результаты своей работы, рассказывают: с какими сложностями они столкнулись и как их преодолели.

Происходит коллективное обсуждение проделанной работы. При обсуждении возвращаются к вопросам из задания 4.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Составьте силлогизм (по любой фигуре) с математическим содержанием и проиллюстрируйте его. Продолжайте заполнение рубрик портфолио.

Раздаточные материалы к занятию 15

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1*

Остановимся на формах теорем четырех видов, выделенных еще в аристотелевской логике и названных категорическими суждениями. Многие математические теоремы имеют именно такой вид. Категорические суждения имеют вид:

*A*: "Все *S* суть *P*" – общеутвердительное суждении;

*E*: "Никакое *S* ни есть *P*" – общеотрицательное суждение;

*I*: "Некоторые *S* суть *P*" – частноутвердительное суждение;

*O*: "Некоторые *S* не суть *P*" – частноотрицательное суждение.

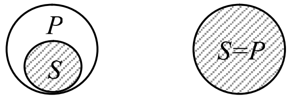
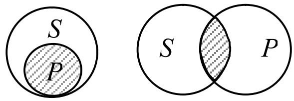
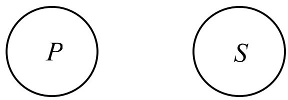
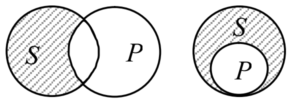
Здесь слово «суть» означает наличие заданного свойства у объекта, а слова «не суть», «ни есть» – отсутствие свойства. В зависимости от этого суждения разделяются на утвердительные и отрицательные.

Также в суждениях отражаются свойства целого класса, некоторой части или даже отдельного предмета. По этому признаку суждения разделяются на общие и частные.

«*A*» – первая гласная буква лат. слова «*Affirmo*», что в переводе на русский язык означает «утверждаю»; «*E*» – первая гласная буква лат. слова «*Nego*», что значит «отрицаю»; «*I*» – вторая гласная буква слова «*Affirmo*»; «*O*» – вторая гласная буква лат. слова «*Nego*».

Примеры.

«Все металлы электропроводны», «Некоторые простые числа четны», «Все змеи – пресмыкающиеся», «Ни один лев не есть травоядное животное», «Некоторые функции – периодические», "Некоторые треугольники неравнобедренные", «Некоторые кенгуру являются млекопитающими», «Все квадраты являются равносторонними прямоугольниками», «Некоторые грибы не являются съедобными».

| Вид суждения и его обозначение | Диаграммы Эйлера Венна |
|---|---|
| *A* – ощеутвердительное |   |
| *I* – частноутвердительное |   |
| *E* – общеотрицательное |   |
| *O* – частноотрицательное |   |

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 2*

В виде соответствующей диаграммы могут быть представлены образующие *логический квадрат* отношения между *общеутвердительными*, *общеотрицательными*, *частноутвердительными* и *частноотрицательными* высказываниями, а также основные *функционально-истинностные* отношения, изучаемые в логике высказываний.

*Контрарные.* Высказывания *A* и *E* могут быть одновременно ложными, но не могут быть одновременно истинными. Поэтому из истинности одного из них можно сделать заключение о ложности другого. (Из истинности высказывания «Все металлы электропроводны» следует ложность высказывания «Ни один металл не является электропроводным»)

*Контрадикторные.* Пары высказываний *A*, *O* и *E*, *I* не могут быть одновременно истинными или одновременно ложными. Поэтому, когда одно из них является истинным, то другое является ложным и наоборот. (Например, «Все жидкости упруги» истинно, тогда высказывание «Некоторые жидкости не являются упругими» ложно. Или все металлы являются твердыми» ложно, то «Некоторые металлы не являются твердыми» истинно).

*Субконтрарные*. Высказывания *O*, *I* могут быть одновременно истинными, но не могут быть одновременно ложными. При ложности одного из них, другое является истинным. (Из ложности высказывания «Некоторые прямоугольники не являются параллелограммами» следует истинность «Некоторые прямоугольники являются параллелограммами»).

*Подчиненные.* В парах высказываний *A*, *I* и *E*, *O* высказывание *I* подчинено *A*, а *O* подчинено *E*. Из истинности *A* вытекает истинность *I*, а из истинности *E* вытекает истинность *O*. («Все кенгуру являются млекопитающими» $\Rightarrow$ «Некоторые кенгуру являются млекопитающими»).

*РАЗДАТОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 3*

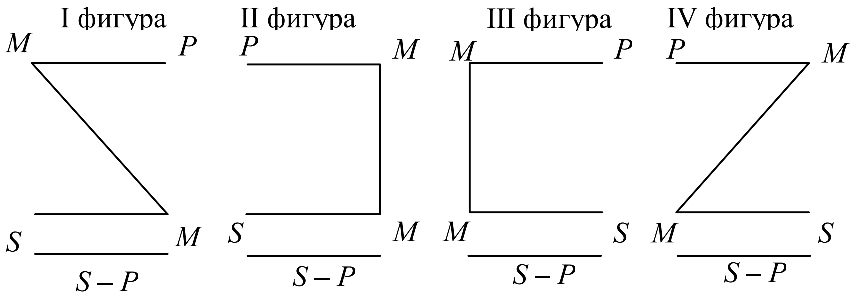
Наиболее часто употребляемые приемы логических рассуждений были впервые охарактеризованы еще аристотелевской логикой и получили название <u>аристотелевских силлогизмов.</u> Эти силлогизмы представляют собой схемы логического вывода, состоящие из трех суждений одного из четырех рассмотренных видов *A*, *E*, *I*, *O*: два первых суждения – <u>посылки,</u> третье – <u>заключение</u>. Из категорических суждений *A*, *E*, *I*, *O* можно сконструировать 256 схем умозаключений, однако, Аристотель установил, что имеется лишь 19 правильных силлогизмов, остальные неверны.

Рассмотрим рассуждения:

1. Все тигры полосатые.
   <u>Все зебры полосатые.</u>
   Все зебры – тигры.
2. Все учебные комнаты нуждаются в проветривании.
   <u>Гараж не является учебной комнатой</u>.
   Гараж не нуждается в проветривании.

Существуют четыре фигуры силлогизма (в зависимости от расположения среднего термина в посылках).

Здесь принята терминология: *P* – больший термин, *S* – меньший термин, *M* – средний термин.




<u>Правила построения верных силлогизмов по фигурам</u>:

I фигура: Первая посылка – общая, вторая – утвердительная.

II фигура: Первая посылка общая; одна из посылок, а также заключение отрицательные.

III фигура: Вторая посылка должна быть утвердительной, а заключение – частное.

IV фигура: Общеутвердительных заключений не дает.

<u>Следует помнить:</u>

- что из двух отрицательных или двух частных посылок нельзя сделать никакого заключения;
- если одна из посылок частная, то и заключение должно быть частным;
- если одна из посылок отрицательная, то и заключение должно быть отрицательным.

Приведем некоторые примеры силлогизмов и их обоснования на основе логики предикатов.

"Всякое *M* есть *P*",
<u>"Всякое *S* есть *M*"</u>
"Всякое *S* есть *P*".

Нужно показать, что третья формула является логическим следствием первых двух, то есть показать, что она превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке, при которой истинны первые две формулы. Если истинны обе посылки, значит, истинна и их конъюнкция.

$$\forall x\,(M(x)\to P(x))\wedge\forall x\,(S(x)\to M(x))\cong\forall x\,[(M(x)\to P(x))\wedge(S(x)\to M(x)]$$

Для любого $a$ истинно высказывание $(S(a)\to M(a))\wedge(M(a)\to P(a))$. Тогда, по закону силлогизма алгебры высказываний, также для любого $a$ будет истинно высказывание $S(a)\to P(a)$. Предикат $S(x)\to P(x)$ тождественно истинен, значит, $\forall x(S(x)\to P(x))=1$.

Читателю предлагается самостоятельно обосновать силлогизм:

"Никакое $P$ не есть $M$",

"Некоторое $S$ есть $M$"

"Некоторое $S$ не есть $P$".

Рассмотрим еще один широко распространенный способ рассуждений. "Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен". Оно основано на схеме

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\,(H(x)\to P(x))\\ H(a)\end{array}}{P(a)}$$

Третья формула является следствием первых двух.

Доказательство: Пусть первые две формулы превращаются в истинные высказывания при подстановке конкретных предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

$$\begin{cases}\forall x(A(x)\to B(x))=1\\ A(a)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(x)\to B(x)\equiv 1\\ A(a)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(a)\to B(a)=1\\ A(a)=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(a)=1\Rightarrow P(a)=1.$$

■

### ***Занятие 18. Теоремы Гёделя о неполноте. Метаматематика. Логические парадоксы***

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ

В результате освоения содержания занятия обучающийся должен знать:

- значение парадоксов в логике и математике;
- результаты о непротиворечивости, полученные К. Гёделем;
- определение метаматематики и метаязыка;

уметь:

- объяснять суть парадокса;
- разграничивать понятия математики и метаматематики;

***Основные приемы и методы занятия:*** прием ключевые слова (стадия вызова), стратегия дискуссия "Оставьте за мной последнее слово", написание синквейна, вопросы в таксономии Блума.

ХОД ЗАНЯТИЯ

*ВЫЗОВ*

Сообщение преподавателя.

«Сейчас вы прочитаете текст «Парадоксы». Как вы думаете, что будет отражено в этом тексте?»

Задание 1. Составьте рассказ по ключевым словам: парадокс, логические, семантические, период античности, Ахиллес и черепаха, быстроногий, хочет поймать, невозможно, парадокс брадобрея, объявление, не бреется сам, парадокс лжеца, Эпименид, о. Крит, все критяне лжецы, метаязык, парадокс Бери, наименьшее натуральное, 33 слога, парадокс Геллинга, прилагательные, обладают свойством, геронтологические, отвечают на вопросы. Отразите основные моменты вашего сообщения в виде рисунка.

Презентация рассказов (по два человека от группы).

*ОСМЫСЛЕНИЕ*

Задание 2. Во время чтения текста «Парадоксы» (раздаточный материал) найдите три отрывка (цитаты), которые Вы считаете наиболее интересными. Выпишите их на карточки. С обратной стороны карточки с утверждением запишите свой комментарий (можно записать свои соображения, размышления, ассоциации, продолжить мысль или выразить несогласие).

*РЕФЛЕКСИЯ*

Проходит дискуссия «Оставьте за мной последнее слово»

1. Первый учащийся читает свою первую цитату, но не комментирует ее.
2. Учащиеся, у которых выписана эта цитата, читают свои комментарии к ней.
3. Происходит общее обсуждение данной цитаты.
4. В заключении цитату комментирует учащийся, который ее озвучил и «передает эстафету» (формально или же какой-либо символ, предмет).

Работа продолжается, пока не будут прокомментированы все выписанные цитаты.

Задание 3. Написать синквейн к слову «парадокс».

Синквейн имеет уровневую структуру (состоит из 5 строк)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Тема разговора | | *существительное* | |
| Характеристики (какой?) | *прилагательное* | | *прилагательное* |
| Характеризует деятельность (что делает?) | *глагол* | *глагол* | *глагол* |
| Основная законченная мысль | | *предложение из четырёх слов* | |
| Вывод | | *существительное* | |

Студенты, по желанию, представляют свои синквейны.

*ПОРТФОЛИО (внеаудиторная работа)*

Напишите реферат «Метаматематика –….» (название вариативно, выражает личную позицию). Обязательно нужно осветить вопросы:

- Каковы задачи, предмет и методы метаматематики?
- Что такое метаязык?
- Проиллюстрируйте метаязык своим примером.
- Почему программа Д. Гильберта потерпела поражение?
- В чем значение теорем Гёделя для математики и метаматематики?

- Насколько важно, по-вашему, изучение метаматематики?

Завершите заполнение всех рубрик и подготовьте портфолио к защите.

Раздаточные материалы к занятию 18

## ***Парадоксы***

Слово "парадокс" произошло от греческого слова paradoxos, что значит неожиданный, странный. Оно имеет много значений.

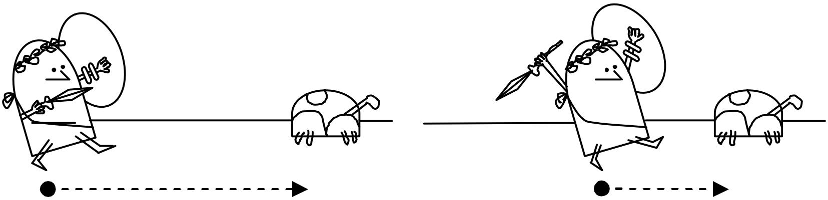
Определение 1. Парадокс – это логическое противоречие, неразрешимое с точки зрения здравого смысла или общепринятых научных представлений; Интуитивно убедительное рассуждение, приводящее к противоречию. Парадокс не может не вызвать чувства удивления.

Парадоксы подразделяются на четыре основных *типа*:

1) утверждения, которые кажутся ложными, но в действительности истинны;
2) утверждения, которые кажутся истинными, но в действительности ложны;
3) рассуждения, которые кажутся безупречными, но приводят к логическому противоречию (парадоксы этого типа принято называть логическими ошибками);
4) утверждения, истинность или ложность которых недоказуемы.

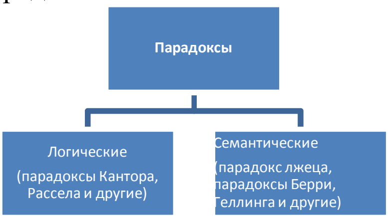
Первые парадоксы были обнаружены еще в период античности. Наиболее широко известны *парадокс лжеца* и *апории* Зенона Элейского: "Стрела", "Ахиллес и черепаха", "Дихотомия" и другие.

Например, парадокс "Ахиллес и черепаха" заключается в следующем. Быстроногий Ахиллес хочет поймать черепаху, которая находится от него на расстоянии 1 км. К тому времени, когда Ахиллес добегает до того места, где первоначально находилась черепаха, та успевает уползти вперед на 10 м. За то время, которое требуется Ахиллесу, чтобы пробежать эти 10 м, черепаха снова успевает уползти на какое-то расстояние и так далее. То есть, чтобы догнать черепаху Ахиллес должен за конечное время побывать в каждом из бесконечной последовательности пунктов пребывания черепахи, что невозможно.



В математике парадоксы не пустая забава. Иногда они проводят к весьма глубоким открытиям. Так древнегреческие математики долго ломали голову над тем, почему длину диагонали единичного квадрата невозможно измерить точно линейкой со сколь угодно мелкими делениями. Этот парадокс привел к расширению понятия числа и созданию теории иррациональных чисел. Однако парадоксы не привлекали особого внимания математиков вплоть до конца XIX – начала XX века, когда были обнаружены теоретико-множественные парадоксы. Их уже нельзя было опровергнуть простой ссылкой на факты действительности или же отнести к разряду ненаучных конструкций. К числу таких парадоксов, прежде всего, относятся парадокс Кантора и парадокс Рассела, приведшие в конечном итоге к кризису исследований в области обоснований математики и классической логики.

В 1926 году английский логик Ф. Рамсей предложил первую классификацию парадоксов.




1. Парадокс Кантора был обнаружен в теории множеств в 1899 году Г. Кантором. Он является следствием теоремы Кантора о мощности множества всех подмножеств множества $X$: $\overline{\overline{(M(X))}} = 2^{\overline{\overline{X}}}$, где $\overline{\overline{(M(X))}}$ – мощность множества всех под-

множеств $X$, а $\overline{\overline{X}}$ – мощность множества $X$. В результате применения этой теорему к *универсальному множеству* $U$ (то есть множеству, содержащему все множества), получится противоречие. С одной стороны $U$, очевидно имеет наибольшую мощность, а с другой стороны $\overline{\overline{(M(U))}} > \overline{\overline{U}}$.

2. Парадокс Рассела или парадокс брадобрея. Некий владелец парикмахерской повесил на двери заведения следующее объявление: "Брею тех и только тех жителей города, кто не бреется сам". Кто бреет брадобрея?

Некоторые математические конструкции приводят к множествам, которые включают себя в качестве одного из своих членов. Например, множество $S$ содержит те и только те объекты, которые не находятся в определенном отношении $R$ к себе; принадлежит ли $S$ самому себе? Одно из возможных решений парадоксов Рассела и Кантора: запретить рассматривать такие множества.

3. Парадокс лжеца. По преданию Эпименид утверждал, что все критяне лжецы. Верно ли это утверждение, если учесть, что сам Эпименид родом с острова Крит?

Другой вариант этого парадокса. Утверждение: "Это утверждение ложно". Истинно ли оно?

Крокодил выхватил младенца из рук матери и задал ей такой вопрос: "Съем ли я твоего младенца? Если ты ответишь правильно, я верну тебе его целым и невредимым". Мать ответила: "О горе мне! Ты съешь моего мальчика". Что делать крокодилу? Несчастный крокодил настолько растерялся, что упустил мальчишку. Мать подхватила чадо и была такова.

Разрешить такого типа парадоксы позволяет введение *метаязыков*. Утверждения об окружающем мире делаются на предметном языке ("яблоки синие"). Утверждения об истинностных значениях делают на метаязыке. Метаязык включат в себя весь объектный язык, но не исчерпывается им. "Снег белый" – утверждение предметного языка, "Утверждение "Снег белый" истинно" – утверждение из метаязыка. Можно ли говорить об истинности и ложности утверждений из метаязыка?

Можно, но только говоря на более высоком метаязыке (уже третьей ступени). Эта лестница простирается вверх как угодно далеко.

Предметный язык позволяет формулировать теоремы о геометрических объектах. Доказательства теорем написаны на метаязыке первого уровня. Книги по теории доказательств написаны на метаязыке второго уровня. К счастью, выше этого уровня математикам редко приходится подниматься.

4. <u>Парадокс Бери</u> (1906). Рассмотрим выражение "наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше, чем тридцать три слога". Это выражение определяет некоторое натуральное число $n$. Согласно своему определению $n$ таково, что его нельзя назвать посредством меньше, чем тридцать три слога. Вместе с тем, очевидно, что приведенное выше выражение определяет $n$ с помощью меньше, чем тридцать три слога (выражение содержит 31 слог).

5. <u>Парадокс Геллинга</u> (1908) говорит о том, что некоторые прилагательные обладают тем же свойством, которое они обозначают (например, прилагательное "многосложное" само является многосложным). Подавляющее большинство прилагательных этим свойством не обладают. Назовем прилагательные второго типа геронтологическими. В отношении прилагательного "геронтологический" возникает противоречие: это прилагательное является геронтологическим, если, и только если оно не является геронтологическим.

6. <u>Парадокс неожиданности</u> стал известен в 40-х годах *XX* века. Один профессор пообещал своим студентам устроить в один из дней на следующей неделе "неожиданный экзамен". Профессор, всегда державший свое слово, уверял, что студенты не смогут заранее определить, на какой день назначена проверка и узнают о предстоящем испытании только в день экзамена. Рассуждения студентов: "Если пройдет 6 дней, а экзамена не будет, то мы будем знать, когда состоится экзамен. Поэтому экзамен не может быть назначен на последний день. Можно его исключить. Тогда экзамен должен приходиться на оставшиеся 6 дней. Если экзамен не состоится в первые 5 дней, то мы точно

будем знать, что он состоится в шестой день, значит, его тоже можно исключить. Далее по этому же принципу студенты исключили каждый из остальных дней недели и пришли к выво-выводу, что экзамена вообще не будет. Однако профессор, не нарушая своего обещания о полной неожиданности проверки, провел экзамен в среду. Где ошибка в рассуждениях?

Более простой вариант этого парадокса неожиданности. Имеется закрытая коробка. Причем известно, что, открыв эту коробку, можно неожиданно обнаружить яйцо. Есть ли в коробке яйцо?

Эти парадоксы происходят от разного понимания людьми слова ″неожиданно″. Логики сходятся на том, что в рассуждениях студентов есть ошибка на первом шаге.

*Значение парадоксов*

Таким образом, парадоксы указывают на ограниченность тех или иных привычных представлений о соответствующих областях исследования, на необходимость уточнения или кардинального пересмотра этих представлений.

Парадоксы являются свидетельством несамодостаточности человеческой интуиции, которая без опоры на строгий логический анализ дает сбой, ведет к «неразрешимым» противоречиям.

Гигантские успехи современной логики и теории множеств – прямой результат усилий, приложенных к разрешению классических парадоксов. Парадоксы устанавливают пределы применимости наших логических идей.

Парадоксы не только ставят вопросы, но и отвечают на них.

## *ЗАКЛЮЧЕНИЕ*

Данное пособие предназначено для обучения студентов математической логике в соответствии с ФГОС по направлению 050100.62 Педагогическое образование профили Математика и Физика, Математика и Информатика.

Можно утверждать, что предложенный вариант организации обучения способствует реализации требований ФГОС третьего поколения так как:

- более 80 % занятий курса «Математическая логика» разработаны в технологии развития критического мышления в активных и интерактивных формах;
- значительно увеличена доля самостоятельной работы студентов:
  - при изучении курса велась работа над учебным портфолио;
  - аудиторная, индивидуальная, парная и групповая работа по освоению нового материала велась по заданиям для самостоятельного выполнения;
- использовались формы аутентичной оценки: портфолио и анкетирование студентов;
- для компетентностного подхода характерен перенос акцента с управления, контроля и оценки, осуществляемых преподавателем, на самоуправление, самоконтроль и самооценку учебной деятельности обучаемого, что также характерно для ТРКМЧП; преподаватель должен, прежде всего, создавать условия и атмосферу для самостоятельной деятельности студентов, его доминирующая роль уступает место позиции равноправного участника образовательного процесса;
- обучение проводилось в технологии развития критического мышления, что способствовало знакомству будущих учителей с образовательной технологией, которая:
  - имеет богатый арсенал приёмов и стратегий,
  - позволяет организовывать занятия в активных и интерактивных формах,
  - характеризуется особой позицией преподавателя, описанной выше,
  - обуславливает именно аутентичную оценку освоения ООП.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. Грудзинская Е.Ю., Марико В.В. Активные методы обучения в высшей школе. – Н.Новгород: Нижегород. госун-т, 2007. – 182 с.
2. Загашев И.О., Заир-Бек С.И. Технология развития критического мышления: перспективы для высшего образования. – СПб.: Изд-во «Скифия», 2002. – 283 с.
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – 2-е изд., стер. – М: Изд. Центр «Академия», 2008. – 448 с.
4. Низовская И.А. Словарь программы «Развитие критического мышления через чтение и письмо». – Бишкек: ОФЦИР, 2003. – 148 с.
5. Сангалова М.Е. Курс лекций по математической логике. – Арзамас: АГПИ, 2006. – 98 с.
6. Сангалова М.Е. Курс лекций по математической логике. – 2-е изд., перераб. – Арзамас: АГПИ, 2012. – 108 с.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 Педагогическое образование (квалификация (степень) бакалавр). Утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 17 января 2011 г. № 46. [электронный ресурс] URL: http://www.edu.ru/db/mo/Data/d_11/prm46-1.pdf (дата обращения 5.12.2013).

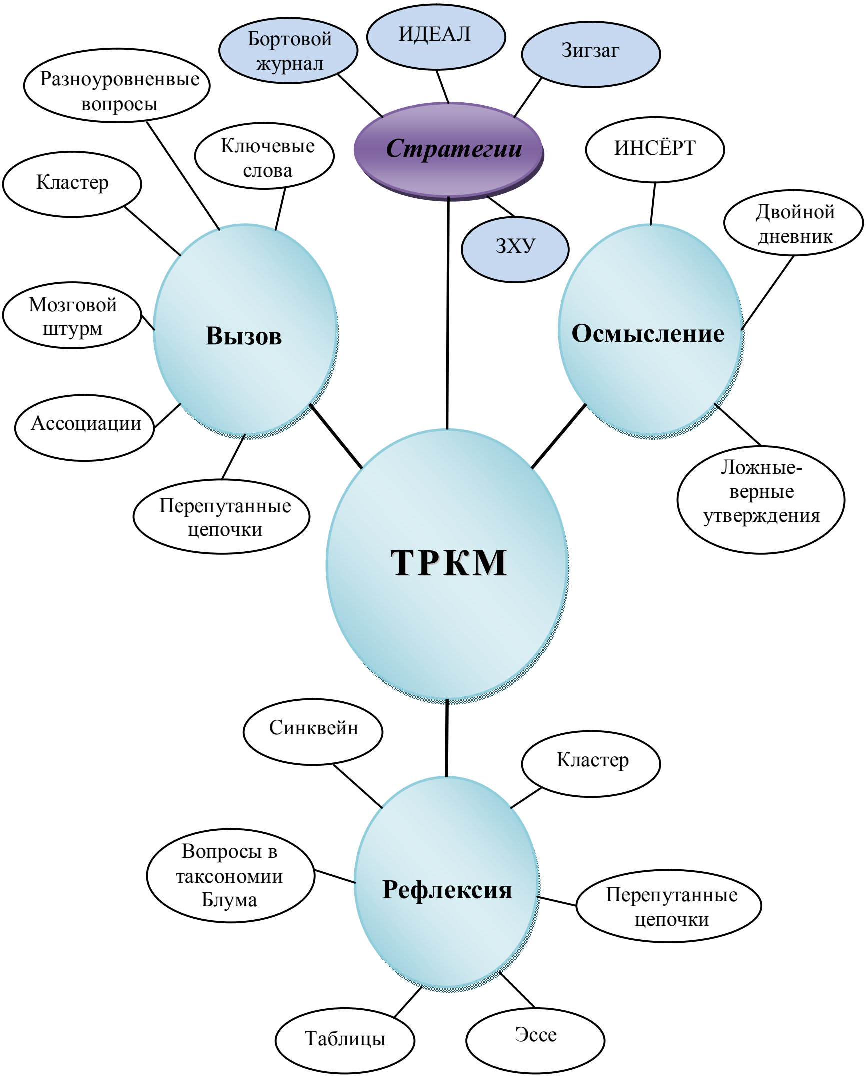

### *Авторские публикации*


1. Сангалова М.Е. Об одном гуманитарно-ориентированном способе организации занятий по математической логике// Гуманитарные традиции математического образования в России: сб. статей участников Всероссийской науч. конф. с международ. участием. – Арзамас: АГПИ, 2012. – С. 341-346.
2. Сангалова М.Е. Стратегия обучения в малых группах «Зигзаг» на занятиях по математике// Новые тенденции развития современного образования в России: Сб. материалов X Всероссийской науч.-практ. конф. – М.: Изд-во СГА, 2013 (в печати).

3. Сангалова М.Е. Стратегия «Зигзаг» в обучении студентов математической логике// Новые педагогические технологии: содержание, управление, методика: Тезисы конф. 26-28 марта 2013 г. – Н.Новгород: Нижегород. госун-т, 2013. – С. 154-155.
4. Сангалова М.Е. Активные методы в преподавании математической логики// Материалы международной научно-методической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания». – Курган-Тюбе, 2013. – С. 372-375.
5. Сангалова М.Е. Приём «Разноуровневые вопросы» в организации самостоятельной работы студентов по математической логике// Физико-математическое образование в школе и вузе: проблемы и перспективы: Сб. статей по материалам Всероссийской науч.-практ. конф. преподавателей, аспирантов, магистрантов и учителей. – Н.Новгород: Нижегород. гос. пед. ун-т им. К. Минина, 2013. – С. 110-113.
6. Сангалова М.Е. Активные методы обучения математической логике// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород: Нижегород. госун-т, 2013. – № 5 (2). – С.198-203.
7. Сангалова М.Е. Технология портфолио как средство активизации учебной деятельности студентов// В мире научных открытий. – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2013. – № 11.7(47) – С. 242–247.

*Приложение 1.*

***Инвентаризация приёмов***



*Приложение 2.*

### *Учебный портфолио. Возможные рубрики*

В списке возможных рубрик подчёркнуты обязательные.

«Мой портрет» – краткая информация о себе, своих интересах, достижениях, иная информация, которую хочется сообщить, может содержать фото.

«Теоретический монолог»: основные теоретические положения по теме портфолио, авторство не принадлежит студенту.

«Что бы это значило?»: понятийно-терминологический словарь.

«Размышления о занятии»: что Вы узнали на занятии полезного и интересного Вам, что Вы собираетесь в дальнейшем использовать; самоанализ своей работы на занятии.

«Вопросы, оставшиеся без ответа».

«Рабочие материалы»: все работы, выполненные студентом по теме.

«Задание на лекции»: если на лекциях давались небольшие письменные работы, то они могут составить отдельную рубрику портфолио.

«Вредные советы».

«Статистические данные».

«Стимулы к учебе: из личного опыта/ примеры из жизни».

«Мои открытия»: дополнительные материалы по заинтересовавшим темам.

«Творчество товарищей».

«Неотправленные письма».

«Где и когда я могу использовать…».

«Банк идей».

«Что будет, если…».

«Диверсант»: аргументы и контраргументы на заданную тему.

«Стимулы успеха»: что в ходе работы помогало моему прогрессу.

«Девиз темы», «Эмблема темы», «Реклама темы»…

«Курьезы, анекдоты, «ляпы» по теме».

«Темы для исследования».

«Параллельные миры»: внутри- и межпредметные связи и т.д.…

*Приложение 3.*

**_Критерии оценки портфолио_**

Для итоговой оценки учебного портфолио можно рекомендовать следующую четырехуровневую систему [1].

*Самый высокий уровень учебного портфолио.* Учебные портфолио данного уровня характеризуются всесторонностью в представлении основных рубрик. Содержание портфолио свидетельствует о том, что было приложено много усилий, об очевидном прогрессе студента в плане развития его мышления, умения решать задачи, прикладных и коммуникативных умений, а также о наличии высокого уровня самооценки и творческого отношения к предмету. В содержании и оформлении учебного портфолио данного уровня ярко проявляются оригинальность и изобретательность. Описаны цель и предназначение портфолио, присутствуют выводы.

*Высокий уровень.* Портфолио данного уровня демонстрирует солидные знания и умения студента, но, в отличие от предыдущего уровня, в учебном портфолио могут отсутствовать некоторые элементы из разных рубрик, а также может быть недостаточно выражена оригинальность в содержании, отсутствовать творческий элемент в оформлении портфолио, цели или выводы по портфолио.

*Средний уровень.* В учебном портфолио данного уровня основной акцент сделан на ведении обязательных рубрик, по которым можно судить об уровне сформированности программных знаний и умений. Отсутствуют свидетельства, демонстрирующие уровень развития творческого мышления, прикладных умений, способности к содержательной коммуникации на языке предмета (как устном, так и письменном).

*Слабый уровень.* Неинформационное портфолио, по которому трудно сформировать общее представление о способностях учащегося. Как правило, в учебном портфолио данного уровня представлены отрывочные задания из разных рубрик, отдельные листы с не полностью выполненными задачами и упражнениями, образцы попыток выполнения графических работ и т.д. По такому портфолио практически невозможно определить прогресс в обучении и уровень сформированности качеств, отражающих основные цели курса и критерии оценки.