МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**
**Национальный исследовательский университет**

# КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02. 04. 02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01. 04. 02 «Прикладная математика и информатика»
09. 04. 03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.16
ББК В22.1(Я73)
З-15

З-15 КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОГРАННИКОВ: Автор: Шевченко В. Н.. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015.- 78 с.

Рецензент: д. т. н., профессор Турлапов В. Е.

В учебно-методическом пособии рассматриваются вопросы, связанные с комбинаторными характеристиками множеств решений систем линейных неравенств. Рассматривается теорема Миньковского-Фракаша-Вейля, алгоритм Фурье-Моцкина, f-векторы полиэдральных комплексов, теорема Кляйншмидта-Смиланского о разбиваемых комплексах, развертки политопов, циклические политопы, правило Гейла, оптимальные триангуляции.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В. М. Сморкалова**

УДК 519.16
ББК В22.1(Я73)

## Оглавление

# 1. Введение

Пусть $\mathbb{F}$ — упорядоченное поле, промежуточное между полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, т. е. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathbb{F}_+$ множество неотрицательных элементов поля $\mathbb{F}$, т. е. $\mathbb{F}_+ = \{x \in \mathbb{F} \mid x \geqslant 0\}$. Рассмотрим $d$-мерное арифметическое пространство $\mathbb{F}^d$.

**Определение 1.1.** *Пусть $y_1, \ldots, y_s$ — векторы из $\mathbb{F}^d$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — элементы поля $\mathbb{F}$. Тогда линейной комбинацией векторов $y_1, \ldots, y_s$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ называется сумма $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i y_i$.*

*Если $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i y_i$ называется аффинной комбинацией.*

*Если же $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, s$, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i y_i$ называется выпуклой комбинацией.*

**Определение 1.2.** *Векторы $y_1, \ldots, y_s$ из $\mathbb{F}^d$ называются аффинно независимыми (аффинно зависимыми), если точки $\binom{1}{y_1}, \ldots, \binom{1}{y_s}$ линейно независимы (линейно зависимы).*

**Определение 1.3.** *Множество всех линейных (аффинных, выпуклых) комбинаций векторов $y_1, \ldots, y_s$ называется их линейной (аффинной, выпуклой) оболочкой. Конической оболочкой векторов $a_1, \ldots, a_s$ называется множество их неотрицательных линейных комбинаций*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \geqslant 0 \right\}.$$

Обозначим через $\mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathrm{Aff}(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathrm{Conv}(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathrm{Cone}(y_1, \ldots, y_s)$ соответственно линейную, аффинную, выпуклую и коническую оболочки системы векторов $y_1, \ldots, y_s$.

**Определение 1.4.** *Множество $M \subseteq \mathbb{F}^d$ называется выпуклым, если любая выпуклая комбинация двух точек из $M$ также принадлежит $M$.*

**Определение 1.5.** *Множество $C \subseteq \mathbb{F}^d$ называется конусом, если для любых $x, y \in C$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}_+$ верно, что $x + y \in C$ и $\alpha x \in C$.*

**Определение 1.6.** *Суммой конусов $C^1$ и $C^2$ называется множество*

$$C^1 + C^2 = \left\{x + y \mid x \in C^1, y \in C^2\right\}.$$

Нетрудно проверить, что верны следующие утверждения.

**Утверждение 1.1.** *Конус есть выпуклое множество.*

**Утверждение 1.2.** *Пересечение конусов есть конус. Сумма конусов есть конус.*

**Утверждение 1.3.** *Если $L$ подпространство в $\mathbb{F}^d$, то $L$ — конус.*

Пусть $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$, а $B \in \mathbb{F}^{d\times n}$. В дальнейшем под $a_i$ будем понимать $i$-ю строчку матрицы $A$, а под $b_j$ — $j$-й столбец матрицы $B$.

Введем следующие обозначения:

$$B^{\angle} = \left\{Bx \mid x \in \mathbb{F}^n_+\right\} \quad \text{и} \quad A^* = \left\{y \in \mathbb{F}^d \mid Ay \geqslant 0\right\}.$$

**Утверждение 1.4.** *Множества $B^{\angle}$ и $A^*$ являются конусами.*

**Определение 1.7.** *Конус $C$ называется конечноопределенным, если существует такая матрица $A$, что $C = A^*$.*

**Определение 1.8.** *Конус $C$ называется конечнопорожденным, если существует такая матрица $B$, что $C = B^{\angle}$. При этом множество столбцов матрицы $B$ называется порождающим множеством конуса $C$.*

**Определение 1.9.** *Порождающее множество $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ конуса $C$ называется остовом, если никакое собственное подмножество $P$ не порождает $C$. Остов конуса $C$ с наименьшим числом векторов называется минимальным остовом.*

Рассмотрим конус $C$ в пространстве $\mathbb{F}^d$. Обозначим через $L_1(C)$ наибольшее (по включению) подпространство, содержащееся в $C$, и через $L_2(C)$ обозначим наименьшее из подпространств в $\mathbb{F}^d$, содержащих $C$. Если $L_1 = \{0\}$, то конус $C$ называется *острым* (*pointed cone*). Если $L_2 = \mathbb{F}^d$, то конус $C$ называется *телесным.*

Нетрудно видеть, что верно

**Утверждение 1.5.** *Если $C = \operatorname{Cone}(b_1, \ldots, b_n)$, то $L_2 = \operatorname{Lin}(b_1, \ldots, b_n)$, $\dim L_2 = \operatorname{rank} B$. Если $C = A^*$, то $L_1 = \{y \mid Ay = 0\}$, $\dim L_1 = d - \operatorname{rank} A$.*

Введем следующие обозначения:

$$I^0_A(x) = \{i \mid a_i x = 0\}.$$

Пусть $I \subseteq \{1, \ldots m\}$, $J \subseteq \{1, \ldots n\}$. Матрицу, образованную из строк матрицы $A$ с номерами из множества I будем обозначать как $A(I)$, а подматрицу матрицы $B$, образованную столбцами с номерами из множества $J$ будем обозначать $B(J)$.

Пусть $r_A^0(x) = \operatorname{rank} A(I_A^0(x)) \leqslant r$, где $r = \operatorname{rank} A$. При дальнейшем использовании, мы будем опускать индексы у $r$ и $I$, если они будут очевидны из контекста, в противном случае мы будем их явно указывать.

# 2. Теорема Минковского–Фаркаша–Вейля

Оказывается, что два способа представления конуса в виде конечнопорожденного и конечноопределенного эквивалентны. Т. е. для любого конуса $C = A^*$ существует такая матрица $B$, что $C = B^{\angle}$ и наоборот.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится

**Лемма 2.1.** *Если $x^0 \in A^*$ и $r(x^0) \leqslant r - 2$, где $r = \operatorname{rank}(A)$, то существуют векторы $x^1, x^2 \in A^*$ такие, что $x^0 = x^1 + x^2$, $r(x^1) \geqslant r(x^0) + 1$, $r(x^2) \geqslant r(x^0) + 1$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $L_1(A^*)$ — максимальное подпространство $A^*$ (в дальнейшем, для простоты, аргумент $A^*$ писать не будем), пространство $V$ решений системы, $A(I(x^0))x = 0$ и пространство $W$, являющегося суммой пространства $V$ и пространства, натянутого на $x^0$. Заметим, что $\dim L_1 = d - r$. Тогда $\dim W > \dim V = d - r(x^0) \geqslant d - r + 2$. Следовательно, найдется вектор $y$ такой, что $y \in W$, но $y \notin V$. Положим

$$\alpha_1 = \max_{i \notin I(x^0)} \frac{a_i y}{a_i x^0}, \quad \alpha_2 = \min_{i \notin I(x^0)} \frac{a_i y}{a_i x^0}.$$

Пусть максимум достигается при $i = i'$, а минимум — при $i = i''$. Покажем, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Действительно, если $\alpha_1 = \alpha_2$, то при $i \notin I(x^0)$ получим $a_i y = \alpha_1 a_i x^0$ или $a_i(y - \alpha_1 x^0) = 0$. Последнее означает, что $y - \alpha_1 x^0 \in V$, откуда $y \in L$, что противоречит выбору $y$.

Покажем, что за искомые векторы можно взять

$$x^1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 x^0 - y), \quad x^2 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(y - \alpha_2 x^0).$$

Действительно, равенство $x^0 = x^1 + x^2$ очевидно. Далее, при $i \in I(x^0)$ имеем

$$a_i x^1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} a_i x^0 - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} a_i y = 0,$$

если же $i \notin I(x^0)$, то $\alpha_1 a_i x_0 \geqslant a_i y$ в силу выбора $\alpha_1$, следовательно, $a_i x^1 \geqslant 0$, т. е. $x^1 \in A^*$. Покажем теперь, что $r(x^1) \geqslant r(x^0) + 1$. Для этого достаточно убедиться, что кроме равенств $a_i x^1 = 0$, где $i \in I(x^0)$, выполняется равенство $a_{i'} x^1 = 0$ и что вектор $a_{i'}$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов с номерами из $I(x^0)$. Действительно,

$$a_{i'} x^1 = \frac{\alpha_1 a_{i'} x^0 - a_{i'} y}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left( \frac{a_{i'} y}{a_{i'} x^0} a_{i'} x^0 - a_{i'} y \right) = 0.$$

Кроме того, если бы $a_{i'}$ был линейной комбинацией векторов с номерами из $I(x^0)$, то было бы верно $a_{i'}x^0 = 0$. Но это не так, поскольку $i' \notin I(x^0)$. Аналогично доказывается включение $x^2 \in A^*$ и неравенство $r(x^2) \geqslant r(x^0) + 1$. Лемма доказана. □

Также нам понадобятся лемма Фаркаша и следующая теорема.

**Теорема 2.1.**

1) *Любой конечноопределенный конус $C$ имеет минимальный остов.*

2) *Векторы минимального остова единственны с точностью до положительного множителя и слагаемого, принадлежащего подпространству $L_1(C)$.*

**Доказательство.** Пусть $C = A^*$, где $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$, $\operatorname{rank} A = r$ и $B = (b_0, \dots, b_s)$ — матрица, построенная при доказательстве теоремы Минковского–Фаркаша–Вейля. Исключив заранее тривиальный случай $C = \{0\}$, заметим, что $C = B^{\angle}$ и $b_1, \dots, b_{d-r}$ — базис наибольшего подпространства $L^1$, содержащегося в $C$.

Пусть $Q = \{q_1, \dots, q_l\}$ — порождающее $C$ множество и $t \in C$, тогда найдутся такие $\alpha_i \geqslant 0$ $i = 1, \dots, l$, что $t = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i q_i$. Пусть $I = \{\nu \mid \alpha_\nu > 0\}$. Очевидно, что если $t \neq 0$, то $I \neq \emptyset$ и

$$t = \sum_{\nu\in I} \alpha_\nu q_\nu \tag{2.1}$$

Если $a_j t = 0$, где $a_j$ — $j$-я строка $A$, то $a_j q_\nu = 0$ (для всякого $\nu \in I$), следовательно, $I(t) \subseteq I(q_\nu)$ $(\nu \in I)$, где $I(x) = \{i \mid a_i x = 0\}$.

В частности, если $t \in L^1$, то для всякого $\nu \in I$, $q_\nu \in L^1$. Отсюда следует доказательство утверждения 2 для векторов остова, принадлежащих $L^1$, а также то, что $Q$ должно содержать такое подмножество $Q_1$, что $Q_1^{\angle} = L^1$. Заметим, что $\dim Q_1 \geqslant d - r + 1$. Пусть теперь $t \notin L^1$, т. е. существует такое $j' \in \{1, \dots, m\}$, что $a_{j'} t > 0$. Из леммы (2.1) следует тогда, что существует такое $\mu \in I$, что $a_{j'} q_\mu > 0$. В частности, если $r(t) = r - 1$, то $r(q_\mu) = r - 1$ и, следовательно, $I(t) = I(q_\mu)$. Отсюда следует доказательство утверждения 2 для векторов остова, не принадлежащих $L^1$, и то, что $Q$ содержит не менее $s - d + r$ таких векторов, т. е. $\dim Q \geqslant s + 1$. Теорема доказана. □

**Определение 2.1.** *Неравенство $ax \geqslant 0$ назовем неравенством-следствием системы $Ax \geqslant 0$, если любое решение этой системы удовлетворяет неравенству $ax \geqslant 0$.*

**Лемма 2.2.** ***(Фаркаша)*** *Пусть $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$. Рассмотрим систему неравенств $Ax \geqslant 0$. Тогда неравенство $ax \geqslant 0$ является неравенством-следствием этой системы тогда и* *только тогда, когда вектор $a$ является неотрицательной линейной комбинацией строк матрицы $A$, т.е. $a \in A_\angle = \{yA \mid y \geqslant 0\}$.*

**Доказательство.** Достаточность. Обозначим $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — строки матрицы $A$. Пусть $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i a_i$, где $\rho_i \geqslant 0$ и пусть $Ax \geqslant 0$, а значит $a_i x \geqslant 0$, для любого $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$. Тогда $ax = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i a_i x \geqslant 0$, т.к. каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно.

Докажем необходимость. Сначала покажем, что вектор $a$ является линейной комбинацией строчек матрицы $A$. Предположим, что это не так. Пусть $\operatorname{rank} A = r$ и $A(I)$ — строчечная база матрицы $A$. Заметим, что $r < d$ в силу предположения (иначе вектор $a$ является линейной комбинацией строчек матрицы $A$). Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_I x = 0 \\ ax = -1 \end{cases}$$

Эта система совместна по теореме Кронекера–Капелли (ранг матрицы ее равен $r+1$ по предположению). Пусть $x^0$ — некоторое ее решение. Тогда $Ax^0 = 0$, т.е. $x^0 \in A^*$, но $ax^0 < 0$. Получили противоречие с тем, что $ax \geqslant 0$ является неравенством-следствием. Таким образом, мы доказали, что найдется $\lambda \in \mathbb{F}^m$, что $a = \lambda A$. Среди всех таких возможных векторов $\lambda$ выберем тот, в котором количество отрицательных компонент минимально. Положим $I_- = \{i \mid \lambda_i < 0\}$. Теперь докажем, что для выбранного $\lambda$ множество $I_-$ пустое, т.е. выбранный вектор содержит только неотрицательные компоненты. Не уменьшая общности можно считать, что $I_- = \{1, \ldots, s\}$. Предположим, что $s \geqslant 1$. Доказательство будем вести индукцией по $m$. Для $m = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для системы, содержащей $m - 1$ неравенство. Положим

$$b = \lambda_1 a_1 + \sum_{i=s+1}^{m} \lambda_i a_i \tag{2.2}$$

Тогда

$$b = a - \sum_{i=2}^{s} \lambda_i a_i \tag{2.3}$$

Из (2.2) следует, что $bx \geqslant 0$ неравенство-следствие следующей системы

$$\begin{cases} -a_1 x \geqslant 0 \\ a_i x \geqslant 0, i = \in \{2, \ldots, m\} \end{cases} \tag{2.4}$$

Из (2.3) следует, что $bx \geqslant 0$ неравенство-следствие следующей системы

$$\begin{cases} ax \geqslant 0 \\ a_i x \geqslant 0, i =\in \{2, \dots, s\} \end{cases}$$

Учитывая также, что $ax \geqslant 0$ — неравенство-следствие системы $Ax \geqslant 0$, получим что $bx \geqslant 0$ — следствие системы

$$\begin{cases} a_1 x \geqslant 0 \\ a_i x \geqslant 0, i =\in \{2, \dots, m\} \end{cases} \tag{2.5}$$

Сранивая (2.4) и (2.5), убеждаемся, что $bx \geqslant 0$ — неравенство-следствие системы $m-1$ уравнений: $a_i x \geqslant 0, i = 2, \dots, m$. По предположению индукции имеем $b = \sum\limits_{i=2}^{m} \mu_i a_i$, $\mu_i \in \mathbb{F}_+$. Подставляя это разложение в равенство $a = b + \sum\limits_{i=2}^{s} \lambda_i a_i$, получаем

$$a = \sum_{i=2}^{s} (\mu_i + \lambda_i) a_i + \sum_{i=s+1}^{m} \mu_i a_i$$

В этом разложении вектора $a$ не более $s-1$ отрицательных компонент, что противоречит выбору $\lambda$. Лемма доказана. $\square$

Посмотрим, что означает доказанная лемма на языке конусов. Рассмотрим конечноопределенный конус $A^* = \{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax \geqslant 0\}$. Тогда $(A^*)^* = \{y \in \mathbb{F}^d \mid (y, x) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in A^*\}$. То есть, другими словами, данное множество состоит из всех таких векторов $y$, что неравенстно $(y, x) \geqslant 0$ является неравенством-следствием системы $Ax \geqslant 0$. Таким образом, верно

**Следствие 2.1.** *Если $A \in \mathbb{F}^{m \times d}$, то $(A^*)^* = A^{\angle}$.*

**Теорема 2.2.** ***(Минковский–Фаркаш–Вейль)**. Конус $C$ конечнопорожден тогда и только тогда, когда он конечноопределен.*

**Доказательство.** Докажем сначала достаточность. Пусть $C = A^*$ — конечноопределенный конус. Докажем, что для любой матрицы $A \in \mathbb{F}^{m \times d}$ найдется такая матрица $B \in \mathbb{F}^{d \times n}$, что $A^* = B^{\angle}$. Тем самым мы докажем, что любой конечноопределенный конус является конечнопорожденным.

Пусть $b_1, b_2 \dots, b_{d-r}$ — базис максимального подпространства $L_1(A^*)$. Добавив к этому базису вектор $b_0 = -\sum\limits_{i=1}^{d-r} b_i$, получим матрицу

$$B_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{d-r}).$$

Теперь, если $r = 0$, то искомая матрица $B = B_0$ построена. Если же $r \geqslant 1$, то рассмотрим все максимальные подсистемы $A(I_1), \dots, A(I_t)$ ранга $r-1$ в системе строк матрицы $A$. (В данном случае максимальность подсистемы означает, что при добавлении любой другой строки из $A$ получим подсистему ранга $r$.) Для всех $\nu \in \{1, \dots, t\}$ находим такой вектор $q_\nu$, что $q_\nu \notin L_A^1$ и $a_i q_\nu = 0$ для всех $i \in I_\nu$ и $a_i q_\nu \neq 0$ для всех $i \notin I_\nu$. Для найденного вектора возможны альтернативы:

1) Существуют такие $i', i'' \notin I_\nu$, что $a_{i'} q_\nu < 0$, $a_{i''} q_\nu > 0$. В этом случае переходим к следующему $\nu$.

2) Для всех $i \notin I_\nu$ выполнено $a_i q_\nu > 0$. В этом случае $q_\nu$ заносим очередным столбцом в $B$.

3) Для всех $i \notin I_\nu$ выполнено $a_i q_\nu < 0$. В этом случае $-q_\nu$ заносим очередным столбцом в $B$.

В результате мы построим матрицу $B = (B_0 \mid B_1)$, где матрица $B_1$ содержит не более $t$ столбцов. Из построения следует, что все столбцы матрицы $B$ принадлежат $A^*$, следовательно, $B^\angle \subseteq A^*$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in A^*$. Возможны следующие варианты.

1) Если $r(x) = r$, то $x \in L_A^1$, значит,

$$x = \sum_{j=1}^{d-r} \alpha_j b_j.$$

Если все $\alpha_j \geqslant 0$, то $x \in B^\angle$. Если же найдется $\alpha_j \leqslant 0$, то положим

$$\alpha_0 = -\min_{\{j \mid \alpha_j \leqslant 0\}} \alpha_j.$$

Тогда

$$x = \alpha_0 b_0 + \sum_{j=1}^{n-r} (\alpha_j + \alpha_0) b_j \in B^\angle.$$

2) Если $r(x) = r - 1$, то множество $I_A^0(x)$ совпадает с некоторым множеством $I_\nu$. Для такого множества мы находили вектор $q_\nu$, не принадлежащий $L_A^1$. Положим $L = q_\nu + L_A^1$, тогда $\dim L = d - r + 1$. Вектор $x \in L$, т.е. $x = \alpha q_\nu + y$, где $y \in L_A^1$.

Возьмем $i \notin I_A^0(x)$, тогда $a_i x = \alpha a_i q_\nu > 0$, откуда $\alpha \neq 0$. Если $\alpha > 0$, то $a_i q_\nu > 0$ для всех $i \notin I_A^0(x) = I_\nu$ и $q_\nu$ должен был попасть в $B$. Если $\alpha < 0$, то $a_i q_\nu < 0$ для всех $i \notin I_A^0(x) = I_\nu$ и $-q_\nu$ должен был попасть в $B$. Но так как $y \in B^\angle$, то $x \in B^\angle$.

3) Если $r(x) = r - k$, где $k \geqslant 2$, то проводим индукцию по $k$. Для $k = 1$ всё уже доказано в пункте 2. Пусть доказано для всех $l \leqslant k - 1$. Докажем для $k$. Для этого воспользуемся доказанной леммой. Согласно ей $x = x^1 + x^2$, $r(x^1) \geqslant r(x) + 1$, $r(x^2) \geqslant r(x) + 1$. Для векторов $x^1, x^2$ верно предположение индукции, т. е. $x^1 \in B^\angle$ и $x^2 \in B^\angle$, следовательно, $x = x^1 + x^2 \in B^\angle$.

Тем самым мы доказали, что $A^* = B^\angle$. Достаточность доказана.

Теперь мы готовы доказать необходимость и это утверждение позволяет закончить доказательство теоремы Минковского–Фаркаша–Вейля. Мы доказали, что для любой матрицы $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$ найдется такая матрица $B \in \mathbb{F}^{d\times n}$, что $A^* = B^\angle$. Теперь осталось доказать, что конечнопорожденный конус является конечноопределенным. Это следует из серии равенств: $A^\angle = (A^*)^* = (B^\angle)^* = B^*$. Теорема Минковского–Фаркаша–Вейля полностью доказана. $\square$

Формулируя доказанную лемму применительно к столбцам матрицы $A$, получим

**Следствие 2.2.** *Пусть $u, b \in \mathbb{F}^m$. Неравенсвто $ub \geqslant 0$ является неравенством-следствием системы $uA \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда вектор $b$ является неотрицательной линейной комбинацией столбцов матрицы $A$, т.е. $b \in A^\angle = \{Ay \mid y \geqslant 0\}$.*

Лемма Фаркаша даёт критерий совместности следующей системы

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Если эта система совместна, то $b \in A^\angle$. По следствию (2.2) для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенсвто $ub \geqslant 0$ являлось неравенством-следствием системы $uA \geqslant 0$, или

$$\forall u \mid uA \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad ub \geqslant 0$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

которая сводится к предыдущей системе (2.6) введением новых переменных:

$$\begin{cases} Ax + y = b \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Если эта система совместна, то $b \in (A|E)^{\angle}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенсвто $ub \geqslant 0$ являлось неравенством-следствием системы $u(A|E) \geqslant 0$, т.е.

$$\forall u \mid u(A|E) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad ub \geqslant 0.$$

Или, по другому записывая тоже условие,

$$\forall u \mid uA \geqslant 0,\ u \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad ub \geqslant 0$$

Наконец, рассмотрим систему

$$Ax \leqslant b \tag{2.8}$$

которая сводится к (2.7) заменой: $x = x' - x''$

$$\begin{cases} A(x' - x'') \leqslant b \\ x' \geqslant 0 \\ x'' \geqslant 0 \end{cases}$$

Если эта система совместна, то $b \in (A| - A|E)^{\angle}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы неравенсвто $ub \geqslant 0$ являлось неравенством-следствием системы $u(A| - A|E) \geqslant 0$, т.е.

$$\forall u \mid u(A| - A|E) \geqslant 0, \quad \Longrightarrow \quad ub \geqslant 0.$$

Или, более просто,

$$\forall u \mid uA = 0,\ u \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad ub \geqslant 0$$

## 3. Пример построения остова конуса

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij}) = \alpha_j^i$, где $i = 0, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, d$, а числа $\alpha_i$ удовлетворяют условию $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_d$. Найдем остов конуса $A_* = \{u \mid uA \geqslant 0\}$. Рассмотрим многочлен $u(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_m t^m$. Тогда вектор $u = (u_0, \ldots, u_m)$ принадлежит $A_*$ тогда и только тогда, когда $u(\alpha_j) \geqslant 0$ для любого $j = 1, \ldots, d$. Согласно алгоритму Минковского для построения остова конуса нужно найти базис пространства $L = \{u \mid uA = 0\}$. В нашем случае $L = \{0\}$. Дальше нам нужно найти все максимальные подсистемы $A_J = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\}$ ранга $m$ в матрице $A$ и найти вектор $u_J$, ортогональный системе $A_J$. Другими словами, компоненты вектора $u_J$ образуют коэффициенты многочлена $u_J(t)$, имеющего корни $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_m}$, т. е. $u_J(t) = u_m(t - \alpha_{j_1}) \ldots (t - \alpha_{j_m})$. Очевидно, что любая подсистема из $m$ векторов является максимальной (так как образует матрицу Вандермонда). Таким образом, надо рассмотреть все подмножества $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$ множества $\{1, \ldots, d\}$ и соответствующие им многочлены $u_J(t)$. Таких подмножеств $C_d^m$. Если для всех остальных $\alpha_j$ значения $u_J(\alpha_j)$ имеют одинаковые знаки, то либо вектор $u_J$, либо $-u_J$ входит в остов конуса.

Для конкретности возьмем $m = 3$, $d = 7$, $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 2, \alpha_7 = 3$. Тогда $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ -27 & -8 & -1 & 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$. Наша матрица имеет 35 максимальных подсистем $J$. В таблицах, приведенных ниже, приведены такие подсистемы $J$ . Единица на $j$-м месте означает, что $j \in J$, ноль на $j$-м месте — соответственно $j \notin J$.

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_j$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 16 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_j$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 18 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 19 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 20 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 22 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 23 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 24 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 26 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 27 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 28 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 30 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 31 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 32 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 33 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 34 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Нетрудно заметить, что в остов входят векторы $u_J$, соответствующие подсистеме $J$, для которой в строке между любыми двумя нулями находится четное число единиц. Таких строк всего десять: 1, 6, 10, 13, 15, 5, 19, 28, 33, 35. Перечислим соответствующие им подмножества $J$ и векторы $u_J$. Заметим, что для первых пяти подмножеств $u_J \in A_*$, а для остальных $-u_J \in A_*$.

$J_1 = \{1,2,3\}$, $u_{J_1}(t) = (t+3)(t+2)(t+1) = 6 + 11t + 6t^2 + t^3$, $u_{J_1} = (6,11,6,1) \in A_*$.

$J_2 = \{1,3,4\}$, $u_{J_2}(t) = (t+3)(t+1)t = 3t + 4t^2 + t^3$, $u_{J_2} = (0,3,4,1) \in A_*$.

$J_3 = \{1,4,5\}$, $u_{J_3}(t) = (t+3)t(t-1) = -3t + 2t^2 + t^3$, $u_{J_3} = (0,-3,2,1) \in A_*$.

$J_4 = \{1,5,6\}$, $u_{J_4}(t) = (t+3)(t-1)(t-2) = 6 - 7t + t^3$, $u_{J_4} = (6,-7,0,1) \in A_*$.

$J_5 = \{1,6,7\}$, $u_{J_5}(t) = (t+3)(t-2)(t-3) = 18 - 9t - 2t^2 + t^3$, $u_{J_5} = (18,-9,-2,1) \in A_*$.

$J_6 = \{1,2,7\}$, $u_{J_6}(t) = (t+3)(t+2)(t-3) = -18 - 9t + 2t^2 + t^3$, $-u_{J_6} = (18,9,-2,-1) \in A_*$.

$J_7 = \{2,3,7\}$, $u_{J_7}(t) = (t+2)(t+1)(t-3) = -6 - 7t + t^3$, $-u_{J_7} = (6,7,0,-1) \in A_*$.

$J_8 = \{3, 4, 7\}$, $u_{J_8}(t) = (t+1)t(t-3) = -3t - 2t^2 + t^3$, $-u_{J_8} = (0, 3, 2, -1) \in A_*$.

$J_9 = \{4, 5, 7\}$, $u_{J_9}(t) = t(t-1)(t-3) = 3t - 4t^2 + t^3$, $-u_{J_9} = (0, -3, 4, -1) \in A_*$.

$J_{10} = \{5, 6, 7\}$, $u_{J_{10}}(t) = (t-1)(t-2)(t-3) = -6 + 11t - 6t^2 + t^3$, $-u_{J_{10}} = (6, -11, 6, -1) \in A_*$.

# 4. Полиэдры, политопы, грани

**Определение 4.1.** *Множество* $P = \{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax \leqslant a_0\}$ *назовем полиэдром.*

**Определение 4.2.** *Множество* $P = \operatorname{Conv}(a_1, \ldots, a_t)$ *назовем политопом.*

Поставим задачу параметрического описания полиэдра $P$, т.е. представления его в виде $P = \operatorname{Conv}(b_1, \ldots, b_s) + (b_{s+1}, \ldots, b_n)^{\angle}$. Для этого поместим $P$ в $(d+1)$-мерное пространство. А именно, рассмотрим конечноопределенный конус $C = \left\{\binom{x_0}{x} \in \mathbb{F}^{d+1} \mid x_0 \geqslant 0, a_0 x_0 - Ax \geqslant 0\right\}$. Тогда полиэдр $P$ совпадает с пересечением конуса $C$ и гиперплоскости $\pi = \{x \in \mathbb{F}^{d+1} \mid x_0 = 1\}$, т.е. $P = C \cap \pi$. Так как конус $C$ конечноопределенный, то существует матрица $B \in \mathbb{F}^{(d+1)\times n}$,столбцы которой образуют остов конуса $C$, т.е. $B = \begin{pmatrix} b_{01} & \ldots & b_{0j} & \ldots & b_{0n} \\ b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_n \end{pmatrix}$, $C = B^{\angle}$. Так как каждый столбец матрицы $B$ принадлежит $C$, то $b_{0j} \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Не уменьшая общности, можно считать, что $b_{0j} = 1$ для $j = 1, \ldots, s$, а $b_{0j} = 0$ для $j = s+1, \ldots, n$ (этого можно добиться с помощью нормировки и переобозначения переменных). Тогда верна

**Теорема 4.1.***(о параметрическом представлении полиэдра)*

$$P = \operatorname{Conv}(b_1, \ldots, b_s) + (b_{s+1}, \ldots, b_n)^{\angle} = \left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \mid \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n\right\}$$

**Доказательство.** Докажем, что правая часть содержится в левой. Действительно, если $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0$, то $\binom{1}{x} \in C$ и, следовательно, $x$ удовлетворяет системе $Ax \leqslant a_0$, т. е. $x \in P$. Обратно, пусть $x \in P$, тогда $\binom{1}{x} \in C$, значит, $\binom{1}{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \binom{b_{0j}}{b_j}$, откуда вытекает $\sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n$. Теорема доказана. □

**Следствие 4.1.** *Любой политоп является полиэдром.*

**Замечание.** Из теоремы следует, что любой полиэдр представляет собой сумму выпуклой оболочки каких-то точек и конечнопорожденного конуса $Q^{\angle} = (b_{s+1}, \ldots, b_n)^{\angle}$, который называется *конусом рецессивных направлений.* Итак, любой полиэдр $P$ можно представить в параметрическом виде $P = P^{\triangle} + Q^{\angle}$, где $P^{\triangle}$ — политоп, а $Q^{\angle}$ — конус рецессивных направлений.

**Утверждение 4.1.** *Если $P = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax \leqslant a_0\right\} = P^{\triangle} + Q^{\angle}$, то конус рецессивных направлений $Q^{\angle}$ определяется однородной системой линейных неравенств $Ax \leqslant 0$.*

**Доказательство.** Рассмотрим конус $C = \left\{\binom{x_0}{x} \in \mathbb{F}^{d+1} \mid x_0 \geqslant 0, a_0x_0 - Ax \geqslant 0\right\}$ и его остов $\binom{1}{b_1}, \ldots, \binom{1}{b_s}$, $\binom{0}{b_{s+1}}, \ldots, \binom{0}{b_n}$. Тогда $Ab_j \leqslant 0$ для $j = s+1, \ldots, n$. Следовательно, если $q = \sum\limits_{j=s+1}^{n} \lambda_j b_j \in Q^{\angle}$, то $Aq = \sum\limits_{j=s+1}^{n} \lambda_j Ab_j \leqslant 0$. Обратно, пусть $Aq \leqslant 0$. Тогда $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \in C$. Следовательно, $q \in Q^{\angle}$. Утверждение доказано. □

Так как $Q^{\angle} = \{x \mid Ax \leqslant 0\}$, то очевидно, что максимальным (по включению) подпространством в $Q^{\angle}$ является $L = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax = 0\right\}$. Действительно, если $L$ подпространство в $Q^{\angle}$, то $L = \left\{x \in Q^{\angle} \mid -x \in Q^{\angle}\right\} = \{x \mid Ax \leqslant 0,\ Ax \geqslant 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$. Размерность подпространства $L$ равна $\dim L = d - \operatorname{rank} A$. Отсюда вытекает

**Утверждение 4.2.** *Конус $Q^{\angle}$ является острым тогда и только тогда когда $\operatorname{rank} A = d$.*

**Утверждение 4.3.** *Пусть $P = P^{\triangle} + Q^{\angle}$ — полиэдр. Если $x_0 \in P, q \in Q^{\angle}$ и $\lambda \geqslant 0$, то $x_0 + \lambda q \in P$.*

**Доказательство.** Пусть полиэдр $P$ задается системой неравенств $Ax \leqslant a_0$. Тогда $A(x_0 + \lambda q) = Ax_0 + \lambda Aq \leqslant a_0 + 0 = a_0$. Утверждение доказано. □

Таким образом, если полиэдр содержит ненулевой конус рецессивных направлений, то он неограничен, т. е. верна

**Теорема 4.2.** *(Минковский–Штейниц–Вейль) Полиэдр является политопом тогда и только тогда, когда он ограничен.*

**Определение 4.3.** *Точка $p$ полиэдра $P$ называется крайней, если она не является выпуклой комбинацией никаких двух отличных от неё различных точек полиэдра $P$.*

**Утверждение 4.4.** *Пусть $P = P^{\triangle} + Q^{\angle}$ — полиэдр, содержащий крайние точки. Тогда $Q^{\angle}$ — острый конус.*

**Доказательство.** Пусть $p$ — крайняя точка полиэдра $P$. Предположим, что $Q^{\angle}$ не является острым конусом, тогда он содержит ненулевое подпространство $L(P)$. Следовательно, найдется ненулевой вектор $x \in L(P)$. Тогда $p' = p + x \in P, p'' = p - x \in P$. Откуда следует, что $p = (p' + p'')/2$, что противоречит тому, что $p$ крайняя точка. Утверждение доказано. □

**Утверждение 4.5.** *Если $p$ — крайняя точка полиэдра $P = P^{\triangle} + Q^{\angle}$ и $Q^{\angle}$ — острый конус, то $p \in P^{\triangle}$.*

**Доказательство.** Так как $p \in P$, то $p = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0$. Предположим, что $p \notin P^{\triangle}$. Тогда множество $I = \{i \in \{s+1, \ldots, n\} \mid \lambda_i > 0\}$ не пусто. Обозначив через $p' = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i b_i \in P^{\triangle}$, запишем $p = \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}(p' + 2\sum\limits_{i \in I} \lambda_i b_i)$. Заметим, что $q = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i b_i \neq 0$, так как в противном случае $Aq = 0$ и $Q^{\angle}$ содержит ненулевое подпространство, что противоречит условию. Таким образом, $p$ является выпуклой комбинацией двух отличных от неё различных точек из $P$. Утверждение доказано. $\square$

**Теорема 4.3.** *Для того чтобы полиэдр $P = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax \leqslant a_0\right\}$ содержал крайние точки необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} A = d$.

Рассмотрим полиэдр $P = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid Ax \leqslant b\right\}$. Возможна ситуация, когда какое-то неравенство $a_i x \leqslant b_i$ обращается в равенство для всех $x \in P$. В этом случае матрица $A$ разбивается на две подматрицы $A_1$, $A_2$, а вектор $b$ на два подвектора $c_1$, $c_2$. Другими словами, $P = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid A_1 x = c_1, A_2 x \leqslant c_2\right\}$. Причем система $A_2 x \leqslant c_2$ не содержит неравенств, обращающихся в равенства на всех точках полиэдра $P$. Введем понятие размерности полиэдра.

**Определение 4.4.** *Размерностью полиэдра $P$ называется максимальное число аффинно независимых его точек.*

**Замечание.** Из определения следует, что размерность полиэдра $P$ совпадает с размерностью минимального линейного многообразия, содержащего $P$.

Тогда $\dim P = d - \operatorname{rank} A_1$, откуда $\dim P = d$ тогда и только тогда когда $\operatorname{rank} A_1 = 0$.

Теперь рассмотрим задачу максимизации линейной функции на множестве точек полиэдра, т. е. задачу $\max\limits_{x \in P} ax$, где $a \neq 0$. Если $aQ \leqslant 0$, то максимум достигается. Пусть $\max\ ax = \alpha$. Гиперплоскость $\pi = \{x \in \mathbb{F}^d \mid ax = \alpha\}$ называется *опорной гиперплоскостью* для $P$.

**Определение 4.5.** *Подмножество $F$ полиэдра $P$ называется гранью полиэдра, если найдется опорная гиперплоскость $\pi$ такая, что $F = P \cap \pi$. В этом случае говорят, что грань $F$ определяется гиперплоскостью $\pi$.*

Так как $P = \operatorname{Conv}(p_1, \ldots, p_s) + (q_1, \ldots, q_t)^{\angle}$, то возникает естественный вопрос: как выразить грань $F$ через векторы $p_i, q_j$, т. е. получить явное представление для грани $F$? На этот вопрос дает ответ следующее утверждение.

**Утверждение 4.6.** *Грань $F$ определяется опорной гиперплоскостью $\pi = \{x \in \mathbb{F}^d \mid$*

$ax = \alpha\}$ *тогда и только тогда когда* $F = \mathrm{Conv}(p_i, i \in I_\pi) + \mathrm{Cone}(q_j, j \in J_\pi)$, *где* $I_\pi = \{i \mid ap_i = \alpha\}$, $J_\pi = \{j \mid aq_j = 0\}$.

**Доказательство.** Пусть $F$ определяется опорной гиперплоскостью $\pi = \{x \in \mathbb{F}^d \mid ax = \alpha\}$ и $x \in F$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i p_i + \sum\limits_{j=1}^{t} \mu_j q_j, \alpha = ax = \sum\limits_{i \in I_\pi} \lambda_i ap_i + \sum\limits_{i \notin I_\pi} \lambda_i ap_i + \sum\limits_{j \in J_\pi} \mu_j aq_j + \sum\limits_{j \notin J_\pi} \mu_j aq_j = \alpha(1 - \sum\limits_{i \notin I_\pi} \lambda_i) + \sum\limits_{i \notin I_\pi} \lambda_i ap_i + \sum\limits_{j \notin J_\pi} \mu_j aq_j = \alpha + \sum\limits_{i \notin I_\pi} \lambda_i (ap_i - \alpha) + \sum\limits_{j \notin J_\pi} \mu_j aq_j$. Откуда $\sum\limits_{i \notin I_\pi} \lambda_i (ap_i - \alpha) + \sum\limits_{j \notin J_\pi} \mu_j aq_j = 0$. Но в силу того, что $ap_i < \alpha$ для $i \notin I_\pi$ и $aq_j < 0$ для $j \notin J_\pi$, имеем $\lambda_i = 0,\ i \notin I_\pi$ и $\mu_j = 0,\ j \notin J_\pi$. Следовательно, $x = \sum\limits_{i \in I_\pi} \lambda_i p_i + \sum\limits_{j \in J_\pi} \mu_j q_j$.

Обратно, если $x = \sum\limits_{i \in I_\pi} \lambda_i p_i + \sum\limits_{j \in J_\pi} \mu_j q_j$, $\sum\limits_{i \in I_\pi} \lambda_i = 1$, то $ax = \sum\limits_{i \in I_\pi} \lambda_i ap_i + \sum\limits_{j \in J_\pi} \mu_j aq_j = \alpha$. Другими словами, $x \in P \cap \pi$. Утверждение доказано. $\square$

**Замечание.** Заметим, что не любое подмножество крайних точек и рецессивных направлений полиэдра порождают его грань. Простейшим примером служит выпуклый четырехугольник. Две противоположные вершины его никакую грань не порождают.

Рассмотрим полиэдр $P = \{x \mid a_i x \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, m\}$. Будем считать, что система неравенств не содержит неравенств-следствий. Тогда имеет место

**Утверждение 4.7.** *Множество*

$$F(I) = \{x \in P \mid a_i x = b_i, \forall i \in I\}, \tag{4.1}$$

*где* $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, *является гранью* $P$.

**Доказательство.** Действительно, рассмотрим линейный функционал $ax$, где $a = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i a_i, \lambda_i > 0$. Тогда $\max\limits_{x \in P} ax = \max\limits_{x \in P} \sum\limits_{i \in I} \lambda_i a_i x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i b_i = \alpha$, причем, очевидно, что максимум достигается только на точках из $F(I)$ и ни на каких других точках из $P$. Таким образом, множество $F(I)$ является гранью и $\pi = \{x \in \mathbb{F}^d \mid ax = \alpha\}$ ее опорная гиперплоскость. $\square$

Это утверждение можно использовать в качестве эквивалентного определения грани полиэдра.

**Утверждение 4.8.** *Любую грань полиэдра* $P$ *можно представить в виде (4.1).*

Положим $I_F = \{i \mid a_i x = b_i,\ \forall x \in F\}$. Т. е. $I_F$ — это номера тех неравенств, определяющих полиэдр, которые обращаются в равенства для всех точек грани $F$. Тогда $F = F(I)$. Через $A_I$ обозначим подматрицу матрицы $A$, строки которой имеют номера из множества $I_F$.

Из предыдущего утверждения вытекает, что любой полиэдр имеет конечное число граней (не более $2^m$), хотя различных опорных гиперплоскостей бесконечно (некоторые определяют одну и ту же грань).

**Утверждение 4.9.** *Грань $F$ полиэдра $P$ также является полиэдром, причем* $\dim F = d - \operatorname{rank} A_I$.

**Утверждение 4.10.** *Если $F_1$ и $F_2$ грани полиэдра $P$, то $F_1 \cap F_2$ также является гранью.*

**Доказательство.** Грани $F_1$ и $F_2$ определяются опорными гиперплоскостями $\pi_1 = \{x \in \mathbb{F}^d \mid a_1 x = \alpha_1\}$ и $\pi_2 = \{x \in \mathbb{F}^d \mid a_2 x = \alpha_2\}$ соответственно. Тогда гиперплоскость $\pi = \{x \in \mathbb{F}^d \mid (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2\}$, где $\lambda_1, \lambda_2$ произвольные положительные числа, определяет $F_1 \cap F_2$. Для каждой из граней $F_1$ и $F_2$ мы знаем множества $I_{\pi_1} = \{i \mid a_1 p_i = \alpha_1\}$, $J_{\pi_1} = \{j \mid a_1 q_j = 0\}$, $I_{\pi_2} = \{i \mid a_2 p_i = \alpha_2\}$, $J_{\pi_2} = \{j \mid a_2 q_j = 0\}$. Тогда $F_1 \cap F_2 = \operatorname{Conv}(p_i, i \in I_{\pi_1} \cap I_{\pi_2}) + (q_j, j \in J_{\pi_1} \cap J_{\pi_2})^{\angle}$. Утверждение доказано. $\square$

Множество граней полиэдра $P$ образует частично упорядоченное множество по включению и является структурой (решёткой) с операциями объединение и пересечение.

**Определение 4.6.** *Решётка (структура) может быть также определена как универсальная алгебра с двумя бинарными операциями (они обозначаются $+$ и $\cdot$), удовлетворяющая следующим тождествам:*

**Идемпотентность** $a + a = a; \quad a \cdot a = a$

**Коммутативность** $a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a$

**Ассоциативность** $(a + b) + c = a + (b + c); \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

**Поглощение** $a(a + b) = a; \quad a + (a \cdot b) = a$

Например, множество всех подмножеств некоторого множества является структурой относительно операций пересечения и объединения множеств.

Рассматриваемое множество $\Gamma(P)$ всех граней полиэдра $P$ может быть частично упорядочено относительно операции включения.

**Определение 4.7.** *Две структуры $S$ и $S'$ называются изоморфными, если существует такая биекция $\varphi : S \to S'$, что для любых $a, b \in S$ таких, что $a \subseteq b$, имеет место $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$.*

**Определение 4.8.** *Две структуры $S$ и $S'$ называются антиизоморфными, если существует такая биекция $\varphi : S \to S'$, что для любых $a, b \in S$ таких, что $a \subseteq b$, имеет место $\varphi(a) \supseteq \varphi(b)$.*

**Определение 4.9.** *Полиэдры $P$ и $P'$ будем называть комбинаторно эквивалентными, если их граневые структуры $S(P)$ и $S(P')$ изоморфны.*

**Определение 4.10.** *Полиэдры $P$ и $P'$ будем называть двойственными, если их граневые структуры $S(P)$ и $S(P')$ антиизоморфны.*

Заметим, что любое невырожденное аффинное преобразование сохраняет комбинаторную эквивалентность.

Обозначим через $\Gamma_i(P)$ — множество $i$-мерных граней полиэдра $d$-мерного полиэдра $P$, где $i = -1, \ldots, d$. Заметим, что $\Gamma_{-1}(P) = \{\varnothing\}$ и $\Gamma_d(P) = \{P\}$. Тогда грани нулевой размерности будем называть вершинами, одномерные грани — ребрами, грани размерности $d-1$ фасетами (от англ. face — грань), $(d-2)$-мерные грани — гребнями.

**Определение 4.11.** *$f$-вектором $d$-мерного полиэдра $P$ называется вектор $f(P) = (f_0(P), \ldots, f_{d-1}(P))$, где $f_i(P) = |\Gamma_i(P)|,\ i = 0, \ldots, d-1$.*

По $f$-вектору можно построить полином $f(\lambda, P) = f_{-1}(P) + \lambda f_0(P) + \ldots + \lambda^d f_{d-1}(P) + \lambda^{d+1} f_d(P) = \sum\limits_{i=-1}^{d} f_i(P)\lambda^{i+1}$, где $f_{-1}(P) = 1,\ f_d(P) = 1$. *Приведенной эйлеровой характеристикой* полиэдра $P$ называется число $\chi(P) = f(-1, P) = \sum\limits_{i=-1}^{d} (-1)^{i+1} f_i(P)$. Нетрудно проверить, что для симплекса $\chi(P) = 0$.

Пусть $P$ — $d$-мерный политоп, т. е. $P = \mathrm{Conv}(a_1, \ldots, a_t)$ и $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_t \end{pmatrix} = d+1$. Возьмем точку $v \notin \mathrm{Aff}(a_1, \ldots, a_t)$. Будем обозначать кратко $\mathrm{Aff}(P) = \mathrm{Aff}(a_1, \ldots, a_t)$.

**Определение 4.12.** *Пирамидой с апексом $v \notin Aff(P)$ и основанием $P$ называется* $\mathrm{pyr}_v\, P = \mathrm{Conv}(P, v)$.

$\mathrm{pyr}_v\, P$ является $(d+1)$-мерным политопом. Выясним, как найти $f$-вектор пирамиды $P' = \mathrm{pyr}_v\, P$, зная $f$-вектор политопа $P$. Пусть $F \in \Gamma_k(P')$. Если $v \in F$, то $F = \mathrm{pyr}_v\, F_1$, где $F_1$ — $(k-1)$-мерная грань $P$. Если же $v \notin F$, то $F \in \Gamma_k(P)$. Отсюда следует, что $f_k(P') = f_{k-1}(P) + f_k(P)$, $k = 0, \ldots, d$. Следовательно, $f(\lambda, P') = (1+\lambda) f(\lambda, P)$.

Пусть точки $x', x'' \notin \mathrm{Aff}(P)$ удовлетворяют условию $|int[x', x''] \cap int P| = 1$, где $int[x', x''] = \{x \mid x = \lambda x' + (1-\lambda)x'', 0 < \lambda < 1\}$, т. е. внутренность отрезка, соединяющего точки $x', x''$, пересекается с внутренностью $P$ в единственной точке.

**Определение 4.13.** *Бипирамидой с апексами $x', x''$ и основанием $P$ называется* $\operatorname{bipyr}_{x',x''} P = \operatorname{Conv}(P, x', x'')$.

Пусть $F \in \Gamma_k(\operatorname{bipyr}_{x',x''} P)$. Грань $F$ не может содержать обе точки $x', x''$. Если $x' \in F$, то $F = \operatorname{Conv}(x', F')$, где $F' \in \Gamma_{k-1}(P)$. Если же $x', x'' \notin F$, то $F \in \Gamma_k(P)$. Отсюда следует, что $f_k(P') = 2f_{k-1}(P) + f_k(P)$, $k = 0, \ldots, d-1$.

**Определение 4.14.** *Назовем политоп симплициальным, если все его фасеты являются симплексами.*

**Определение 4.15.** *Назовем $d$-мерный политоп простым, если в каждой его вершине пересекаются ровно $d$ фасет.*

Пусть $P_1$ — $k$-мерный политоп, $P_2$ — $l$-мерный политоп. Определим произведение этих политопов: $P_1 \times P_2 = \operatorname{Conv}\left\{(v_i, w_j) \in \mathbb{F}^{k+l} | v_i \in \Gamma_0(P_1),\ w_j \in \Gamma_0(P_2)\right\}$. Если $P_1 = P$, а $P_2$ — одномерный политоп (отрезок), то их произведение называется *призмой*. Например, $d$-мерный куб $B_d$ можно представить в виде $B_d = P \times P \times \ldots \times P$, где $P$ — отрезок.

Рассмотрим подмножество $M \subseteq \mathbb{F}^d$.

**Определение 4.16.** *Множество $M^\diamond = \left\{y \in \mathbb{F}^d \mid (y, x) \leqslant 1\ \forall x \in M\right\}$ называется полярой к $M$.*

Если $M_1 \subseteq M_2$, то $M_2^\diamond \subseteq M_1^\diamond$, откуда $(M_1^\diamond)^\diamond \subseteq (M_2^\diamond)^\diamond$.

**Утверждение 4.11.** *Поляра $M^\diamond$ является выпуклым множеством.*

Имеет место

**Утверждение 4.12.** *Если $P$ — политоп, то $P^\diamond$ — полиэдр.*

**Доказательство.** Пусть $P = \operatorname{Conv}(a_1, \ldots, a_n)$, тогда $P^\diamond = \left\{y \in \mathbb{F}^d \mid \forall x \in P\ (y, x) \leqslant 1\right\} = \left\{y \mid (y, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i) \leqslant 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\}$. Докажем, что $P^\diamond = \{y \mid (y, a_i) \leqslant 1 \forall i = 1, \ldots, n\}$. Домножив каждое неравенство $(y, a_i) \leqslant 1$ на $\lambda_i \geqslant 0$ и сложив, получим $(y, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i a_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Обратно, положив $\lambda_k = 1, \lambda_i = 0, i \neq k$, получим $(y, a_k) \leqslant 1$ для любого $k = 1, \ldots, n$. Утверждение доказано. $\square$

Заметим, что преобразованием сдвига всегда можно добиться выполнения условия $0 \in intP$. Комбинаторная эквивалентность от этого не меняется.

**Следствие 4.2.** *Если $P$ — политоп и $0 \in intP$, то*

*1) $P^\diamond$ — двойственный к $P$ политоп*

*2) $(P^\diamond)^\diamond = P$*

Если $0 \in intP$, то можно считать, что политоп порождается следующей системой неравенств $Ax \leqslant \mathbf{1}$. Тогда строки матрицы $A$ образуют поляру $P^\diamond$.

**Утверждение 4.13.** *Политоп, двойственный к симплициальному, является простым.*

**Теорема 4.4.** *Пусть* $a \in A^\angle = (a_1, \ldots, a_n)^\angle = B^* = \{x \in \mathbb{F}^d \mid b_i x \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, t\}$. *Предполагаем, что множество* $I = \{i \mid b_i a = 0\} \neq \{1, \ldots, t\}$. *Тогда*

1) $A^\angle = \bigcup\limits_{i \notin I} (a, A(J_i))^\angle$, *где* $J_i = \{j | b_i a_j = 0\}$.

2) $(a, A(J_i))^\angle \cap (a, A(J_k))^\angle = (a, A(J_i \cap J_k))^\angle$.

**Доказательство.** Сначала докажем первую часть. Очевидно, что $(a, A(J_i))^\angle \subseteq A^\angle$. Откуда $\cup_{i \notin I}(a, A(J_i))^\angle \subseteq A^\angle$. Обратно, пусть $x \in A^\angle$. Обозначим $\lambda = \min\limits_{i \notin I} \frac{b_i x}{b_i a} = \frac{b_k x}{b_k a} \geqslant 0$. Рассмотрим вектор $y = x - \lambda a$. Заметим, что $b_i y = b_i x \geqslant 0$ для всех $i \in I$, а для остальных $i \notin I$ верно неравенство $b_i y \geqslant 0$ в силу выбора $\lambda$. Таким образом, $y \in A^\angle = B^*$. Следовательно, вектор $y$ можно представить в виде $y = \sum\limits_{j \in J_+} \mu_j a_j$, где $J_+ = \{j \mid \mu_j \geqslant 0\}$, $b_k y = \sum\limits_{j \in J_+} \mu_j b_k a_j = 0$ по определению $\lambda$. Откуда следует, что $b_k a_j = 0$ для всех $j \in J_+$. Следовательно, $J_+ \subseteq J_k$. Таким образом, вектор $x$ раскладывается следующим образом $x = y + \lambda a$, $x \in (a, A(J_k))^\angle$. Первую часть доказали.

Перейдем ко второй части. Пусть $x = y + \lambda a = y' + \mu a$, где $y \in A(J_k)^\angle$, $y' \in A(J_i)^\angle$, $\lambda, \mu > 0$. Докажем, что $\lambda = \mu$. Для этого воспользуемся равенством $y = y' + (\mu - \lambda)a$. Так как $b_i y = b_i y' + (\mu - \lambda) b_i a \geqslant 0$, а $b_i y' = 0,\ b_i a \geqslant 0$, то $\mu - \lambda \geqslant 0$. С другой стороны, $0 = b_k y = b_k y' + (\mu - \lambda) b_k a$, а $b_k y' \geqslant 0,\ b_k a \geqslant 0$. Откуда следует, что $\mu - \lambda \leqslant 0$. Итак, $\mu = \lambda$. Следовательно, $y = y' \in A(J_i \cap J_k)^\angle$. Теорема доказана. □

**Определение 4.17.** *Система полиэдров* $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_t\}$ *называется полиэдральным комплексом, если выполнены два условия:*

1) *если* $P \in \mathcal{C}$,*то* $\Gamma(P) \subseteq \mathcal{C}$

2) *если* $P_i \in \mathcal{C}, P_j \in \mathcal{C}$, *то* $P_i \cap P_j$ *является общей гранью этих полиэдров, т. е.* $P_i \cap P_j \in \Gamma(P_i) \cap \Gamma(P_j)$.

*Размерностью полиэдрального комплекса называется максимальная размерность, входящих в него полиэдров, т. е.* $\dim \mathcal{C} = \max\limits_{\tau=1,\ldots,t} \dim P_\tau$.

Полиэдральный комплекс является частично упорядоченным множеством (отношением частичного порядка является отношение включения). Таким образом, для каждой пары граней $F_1$ и $F_2$ из $\mathcal{C}$ существуют минимальная грань $F_{min} \in \mathcal{C}$ такая, что $F_1 \subseteq F_{min}, F_2 \subseteq F_{min}$, и максимальная грань $F_{max} \subseteq \mathcal{C}$ такая, что $F_{max} \subseteq F_1, F_{max} \subseteq F_2$. Если все максимальные грани в $\mathcal{C}$ имеют одинаковую размерность, то комплекс $\mathcal{C}$ называется *однородным.*

Пусть полиэдр $P$ представлен в виде объединения некоторых полиэдров: $P = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} P_\tau$. Такое объединение называется *полиэдральным разбиением.* Рассмотрим объединение всех граней полиэдров $P_1, \ldots, P_t$. Пусть оно является полиэдральным комплексом: $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma(P_\tau)$. Если все полиэдры $P_\tau$ $d$-мерны при $\tau = 1, \ldots, t$ и являются симплексами, то такое полиэдральное разбиение называется *триангуляцией* полиэдра $P$. Вершины симплексов $P_\tau$ называются *узлами триангуляции.*

Рассмотрим $d$-мерный политоп $P = \mathrm{Conv}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{x \in \mathbb{F}^d \mid b_i x + \beta_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, t\right\}$. Будем считать, что в системе неравенств, порождающих политоп, нет неравенств-следствий. Тогда множество $F_i = P \cap \{x \mid b_i x + \beta_i = 0\}$, $i = 1, \ldots, t$ является фасетой политопа $P$. Пусть $v \in P$. Требуется построить такую триангуляцию политопа, чтобы точка $v$ была ее узлом. Рассмотрим следующее полиэдральное разбиение

$$P = \bigcup_{i \in I} pyr_v F_i, \tag{4.2}$$

где $I$ — множество номеров фасет, не содержащих $v$, т. е. $I = \{i \mid v \notin F_i\}$. Если $P$ — симплициальный политоп (в частности, если $P$ — произвольный двумерный политоп), то искомая триангуляция построена. В противном случае нужно аналогичным образом построить разбиение для фасет и для всех граней меньших размерностей. Если $v \in \Gamma_0(P)$, то получим триангуляцию без новых вершин. Алгоритм триангуляции, основанный на идее (4.2), называется *первым алгоритмом триангуляции.*

# 5. Алгоритм Фурье–Моцкина

В доказательстве теоремы *Минковского–Фаркаша–Вейля* был предложен алгоритм Минковского для построения остова конуса. Недостатком этого алгоритма является то, что он использует сразу все неравенства, порождающие конус. Он не предназначен для ситуации, когда к имеющейся системе добавляется еще одно неравенство. Для такого случая удобнее использовать алгоритм *Фурье–Моцкина*, который будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим конечноопределенный конус $C = \{x \in \mathbb{F}^d \mid b_i x \geqslant 0, i = 1, \ldots, s\} = B^*$. Будем считать, что число неравенств не меньше размерности пространства, т. е. $s \geqslant d$, и первые $d$ неравенств имеют невырожденную матрицу. Алгоритм предполагает построение остова конуса последовательным добавлением очередного неравенства к предыдущей системе. Обозначим через $B_k$ матрицу, соответствующую первым $k$ неравенствам, т. е. строчками этой матрицы являются $b_1, \ldots, b_k$. Так как матрица $B_d$ невырождена, то $B_d^* = (B_d^{-1})^\angle$. Это начальный шаг алгоритма. Далее, пусть найден остов конуса $B_m^* = A^\angle = (a_1, \ldots, a_t)^\angle$ и появилось еще одно неравенство $b_{m+1}x \geqslant 0$. Обозначим $C' = B_{m+1}^* = B_m^* \cap \{x \mid b_{m+1}x \geqslant 0\}$. Тогда возможны следующие варианты

1) $b_{m+1}a_j \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, t$. В этом случае $B_{m+1}^* = B_m^*$, т. к. $b_{m+1}x \geqslant 0$ является неравенством-следствием.

2) Построим множества $J_- = \{j \mid b_{m+1}a_j < 0\} \neq \emptyset$, $J_0 = \{j \mid b_{m+1}a_j = 0\}$, $J_+ = \{j \mid b_{m+1}a_j > 0\}$. Обозначим через $B(I)$ матрицу, образованную строками матрицы $B$ с номерами из множества $I \subset 1, \ldots, s$. Для каждого $j \in J_-$ определим множество $I_j = \{i \mid b_i a_j = 0\}$. Множества $I_l$ и $I_k$ называются *соседними*, если $\operatorname{rank} B(I_k \cap I_l) = d - 2$. Далее находим все такие пары $(k, l)$, где $k \in J_-,\ l \in J_+$, чтобы множества $I_l$ и $I_k$ были соседними, и строим вектор $a_{t+1} = \alpha a_k + \beta a_l \in B_m^*$, $\alpha = b_{m+1}a_l > 0,\ \beta = -b_{m+1}a_k > 0$. Тогда $b_{m+1}a_{t+1} = 0$. Следовательно, $a_{t+1} \in B_{m+1}^*$. Вектор $a_k$ удаляем из матрицы $A$, а вектор $a_{t+1}$ заносим очередным столбцом матрицы $A$.

Перейдем к обоснованию алгоритма Фурье–Моцкина. В процессе работы алгоритма мы строили векторы, принадлежащие остову конуса. Докажем, что в результате такого построения мы ничего не пропустили. Пусть $a$ — вектор из остова конуса $C'$. Тогда найдутся $d-1$ линейно независимых векторов, ортогональных $a$. Положим $I = \{i \mid b_i a = 0\}$, тогда $\operatorname{rank} B(I) = d-1$. Возможны два случая.

1) $m+1 \notin I$ — это означает, что $b_{m+1}a > 0$, следовательно, $a$ принадлежит остову предыдущего конуса $C$. Так как векторы остова определяются единственным образом с точностью до положительной константы, то $a = \lambda a_k$ для некоторого $\lambda > 0$, где $k \in J_+$.

2) $m+1 \in I$, значит, $a \in J_0$, $b_{m+1}a = 0$. Рассмотрим множество $I' = I \backslash \{m+1\}$.

Если $\operatorname{rank} B(I') = d-1$, то $b_{m+1}a = 0$. Если $\operatorname{rank} B(I') = d-2$, то $b_{m+1}a = 0$. Найдется такое $j$, что $b_{m+1}a_j \neq 0$. Для всех $i = 1, \dots, m$ $b_i a \geqslant 0$, т. е. $a \in C$. Для всех $i \in I'$ $b_i a = 0$ и найдется $l$ такое, что $b_l a \neq 0$. Следовательно, найдутся $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$, причем $i \in J_-, j \in J_+$ или наоборот.

С помощью небольшого видоизменения алгоритм Фурье–Моцкина можно использовать для триангуляций.

**Теорема 5.1.** *Пусть* $a \notin A^\angle = B^*$, *т. е.* $I_- = \{i \mid b_i a < 0\} \neq \emptyset$, $J_i = \{j \mid b_i a_j = 0\}$. $A = (a_1, \dots, a_n)$. *Тогда*

*1)* $(a, A)^\angle = A^\angle \bigcup \bigcup\limits_{i \in I_-} (a, A(J_i))^\angle$

*2)* $A^\angle \cap (a, A(J_i))^\angle = (A(J_i))^\angle$

*3)* $(a, A(J_i))^\angle \cap (a, A(J_k))^\angle = (a, A(J_i \cap J_k))^\angle$, *где* $i, k \in I_-$.

**Доказательство.** (1) То, что правая часть содержится в левой, очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x \in (a, A)^\angle$, тогда $x = \lambda_0 a + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = \lambda_0 a + y,\ y \in A^\angle$. Если $\lambda_0 = 0$, то все доказано. В противном случае, если $\lambda_0 > 0$, то положим $\alpha = \max\limits_{i \in I_-} \frac{b_i x}{b_i a} = \frac{b_k x}{b_k a}$, $b_k a < 0$. Если $\alpha \leqslant 0$, то $b_i x \geqslant 0$ для всех $i \in I_-$, но если $i \notin I_-$, то $b_i x = \lambda_0 b_i a + b_i y \geqslant 0$, так как $b_i a \geqslant 0, b_i y \geqslant 0$. Итак, $b_i x \geqslant 0$ для всех $i$, если $\alpha \leqslant 0$. Следовательно, $x \in A^\angle$. Теперь рассмотрим случай $\alpha > 0$. Рассмотрим вектор $z = x - \alpha a = (\lambda_0 - \alpha)a + y$. Тогда в силу выбора $\alpha$ верно $b_i z = b_i x - \alpha b_i a \geqslant 0$ при всех $i \in I_-$. Из соотношений $b_k x = \alpha b_k a = \lambda_0 b_k a + b_k y \geq \lambda_0 b_k a$ и того, что $\lambda_0 \leq 0$, следует, что $\alpha \leq \lambda_0$. Тогда получим, что для $i \notin I_-$ также $b_i z \geq 0$. Отсюда $z \in A^\angle$, $z = \sum\limits_{j \in J_+} \mu_j a_j$, где $J_+ = \{j \mid \mu_j > 0\}$.

Тогда $0 = b_k z = \sum\limits_{j \in J_+} \mu_j b_k a_j$. Но так как $b_k a_j \geqslant 0, \mu_j > 0$, то $b_k a_j = 0$ для всех $j \in J_+$. Следовательно, $J_+ \subseteq J_k$. Таким образом, $z \in A(J_k)^\angle$. То есть $x = z + \alpha a \in (a, A(J_k))^\angle$.

(2) Пусть $x \in (A(J_i))^\angle$. Так как $(A(J_i))^\angle \subseteq A^\angle, (A(J_i))^\angle \subseteq (a, A(J_i))^\angle$, то $x$ принадлежит левой части (2). Докажем обратное включение. Рассмотрим $x \in A^\angle \cap (a, A(J_i))^\angle$. Тогда $x$ можно представить в виде $x = \sum\limits_{j \in J_i} \mu_j a_j + \sum\limits_{j \notin J_i} \mu_j a_j, \mu_j \geq 0$. С другой стороны, $x = \lambda a + \sum\limits_{l \in J_i} \nu_j a_j, \lambda, \nu_j \geq 0$. Приравняв выражения для $x$ и домножив обе части равенства на $b_i$, получим $\sum\limits_{j \notin J_i} \mu_j b_i a_j = \lambda b_i a$. Так как $b_i a < 0, b_i a_j > 0, \lambda \geq 0, \mu_j \geq 0$, для выполнения равенства необходимо, чтобы $\mu_j = 0, j \notin J_i$. Таким образом, $x \in (A(J_i))^\angle$.

(3)То, что правая часть содержится в левой, очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $x = y + \lambda a = y' + \mu a$, где $y \in A(J_k)^\angle, y' \in A(J_i)^\angle$. Покажем, что $\lambda = \mu$. Умножив тождество $y = y' + (\mu - \lambda) a$ на $b_i$, получим $b_i y = b_i y' + (\mu - \lambda) b_i a = (\mu - \lambda) b_i a \geq 0$. Так как $b_i a < 0$, то $\mu - \lambda \leq 0$. Аналогично, умножая $y' = y + (\lambda - \mu) a$ на $b_k$ и учитывая $b_k a < 0$, получим $\lambda - \mu \leq 0$. Т. е. $\mu = \lambda$. Тем самым доказали, что $x \in (a, A(J_i \cap J_k))^\angle$. □

Рассмотрим полиэдр $P$.

**Определение 5.1.** *Точка $x \in P$ называется видимой из точки $a$, если $[x, a] \cap P = \{x\}$.*

**Определение 5.2.** *Грань $F \in \Gamma(P)$ называется видимой из точки $a$, если любая точка $x \in F$ видима из $a$.*

Можно привести эквивалентное определение видимости грани из точки.

**Определение 5.3.** *Грань $F \in \Gamma(P)$ называется видимой из точки $a$, если существует точка $x \in intF$, видимая из $a$. Здесь и далее $intF$ — множество внутренних точек грани $F$.*

**Определение 5.4.** *Матрица $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^{d \times n}$ называется точечной конфигурацией, если она удовлетворяет следующим свойствам*

*1)* $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} = d + 1$

*2) столбцы матрицы $A$ различны.*

Рассмотрим политоп $P = \operatorname{Conv} A = \operatorname{Conv}(a_1, \dots, a_n) = \{x \mid b_i x + \beta_i \geqslant 0,\ i \in \{1, \dots, m\}\}$. Тогда множество $P_i = P \cap \{b_i x + \beta_i = 0\}$ является фасетой. Границей политопа $P$ называется объединение всех его фасет: $\partial P = \cup_{i=1}^m P_i$. Возьмем точку $a \notin P$.

Построим множество $I_- = \{i \mid b_i a + \beta_i < 0\}$. Заметим, что множество $I_-$ образуют номера тех фасет, которые видны из точки $a$. Тогда получаем следствие из *Теоремы 5.1*.

**Следствие 5.1.** *Если* $a \notin P$, *то* $P' = \mathrm{Conv}(a, A) = P \bigcup\limits_{i \in I_-} pyr_a P_i$, *где* $I_- = \{i \mid b_i a + \beta_i < 0\}$.

Рассмотрим триангуляцию $T = T(A) = \{S_1, \ldots, S_t\}$ политопа $P$, где $S_\tau$ — $d$ мерный симплекс, т. е. $S_\tau = \mathrm{Conv}(A(J_\tau))$, $A(J_\tau)$ — набор из $d+1$ столбцов матрицы $A$. Триангуляцию $T(A)$ называют также триангуляцией точечной конфигурации $A$. Так как $T$ триангуляция, то $\mathcal{C} = \Gamma(T(A)) = \cup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ сииплициальный комплекс. Триангуляция политопа индуцирует триангуляцию всех его граней.

Рассмотрим следующую задачу. Дана триангуляция $T(A)$. Появилась еще одна точка $a$. Требуется построить триангуляцию $T(A')$, где $A' = (a, A)$.

Если $a \in P$, то ничего не меняем. Если $a \notin P$, то воспользуемся *Следствием 5.1*. Рассмотрим $\{pyr_a Pi \mid i \in I_-\}$. Пусть $T(Pi) = \{S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_k}\}$ — триангуляция фасеты $P_i$, индуцированная триангуляцией $T(A)$. Тогда $T(pyr_a P_i) = \{S'_{i_1} \cup \{n+1\}, \ldots, S'_{i_k} \cup \{n+1\}\}$, где $a_{n+1} = a$, и $T(A') = T(A) \cup \bigcup\limits_{i \in I_-} T(pyr_a P_i)$.

Заметим, что для любой точки $x \in P$ существует единственная грань $F \in \Gamma(T(A))$ такая, что $x \in intF$. Пусть $F_\mu \in \Gamma_{d-1}(T)$, т. е. $F_\mu$ — $(d-1)$-мерный симплекс. Тогда существует такое $\tau$, что $F_\mu \in \Gamma_{d-1}(S_\tau)$. Так как $S_\tau$ является $d$-мерным симплексом, то $S_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, v_1, \ldots, v_d)$, где $v_i$ является некоторым столбцом матрицы $A$, $i = 1, \ldots, d$. Посчитаем $\sigma(F_\mu)$ — число различных симплексов, содержащих грань $F_\mu$. Пусть $F_\mu = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_d)$ — грань симплексов $S_\tau, S_\alpha$. Значит, симплекс $S_\alpha$ содержит точки $v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_d$ и еще какую-то вершину, отличную от $v_i$. Таким образом, $\sigma(F_\mu) \in \{1, 2\}$. Если $\sigma(F_\mu) = 1$, то $F_\mu$ — внешняя грань триангуляции, т. е. $F_\mu \in \partial P$. Иначе, если $\sigma(F_\mu) = 2$, то $F_\mu$ — внутренняя грань триангуляции. Образуем множества номеров внешних и внутренних граней триангуляции: $M_1 = \{\mu \mid \sigma(F_\mu) = 1\}$, $M_2 = \{\mu \mid \sigma(F_\mu) = 2\}$. Обозначим $\partial\mathcal{C} = \cup_{\mu \in M_1} \Gamma(F_\mu)$, а также $int\mathcal{C} = \cup_{\mu \in M_2} \Gamma(F_\mu)$. Очевидно, что $\partial\mathcal{C}$ является симплициальным комплексом (подкомплексом комплекса $\mathcal{C}$), который мы назовем *граничным комплексом*. Множество $int\mathcal{C}$ является подмножеством $\mathcal{C}$, но не подкомплексом.

Если мы рассмотрим точку $a \notin P$, то граничный комплекс $\partial\mathcal{C}$ можно представить в виде объединения: $\partial\mathcal{C} = \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0$. В этом объединении $\mathcal{C}_-$ — множество тех фасет (внешних граней), которые видны из точки $a$, т. е. $\mathcal{C}_- = \cup_{\mu \in M_1^-} F_\mu$ ($M_1^-$ — множество номеров видимых граней), $\mathcal{C}_- = \cup_{\mu \in M_1^-} F_\mu$, $\mathcal{C}_+, \mathcal{C}_0$ — невидимые из $a$ грани. Уточним, что в $\mathcal{C}_0$ входят те невидимые грани, которые лежат в одной гиперплоскости с точкой $a$ и некоторой фасетой политопа $P$. Так как $a \notin P$ и $P$ — выпуклое множество, то существует гиперплоскость $\pi = \{x \mid bx + \beta = 0\}$, строго разделяющая $a$ и $P$. Рассмотрим пирамидальную надстройку над $P : Pyr_a \mathcal{C}_- = \cup_{\mu \in M_1^-} pyr_a F_\mu$. Спроектируем $\mathcal{C}_-$ на гиперплоскость $\pi$, т. е. определим отображение $\varphi$ для всех точек $x \in \mathcal{C}_-$ следующим образом: $\varphi(x) = \pi \cap [a, x]$. Множество $\mathcal{C}_-$ вообще говоря не является выпуклым, хотя его образ $\varphi(\mathcal{C}_-)$, является $(d-1)$-мерным политопом. Если исходный политоп $P$ (или хотя бы его граница $\partial P$) был триангулирован, то эта триангуляция индуцирует триангуляцию политопа $\varphi(\mathcal{C}_-)$, причем $\varphi(\mathcal{C}_-) \cong \mathcal{C}_-$ (т.е. $\varphi(\mathcal{C}_-)$ биективный образ $\mathcal{C}_-$).

## 6. $f$-полиномы полиэдральных комплексов. Связь между ними в разных базисах

**Определение 6.1.** *$f$-полиномом $d$-мерного полиэдрального комплекса $\mathcal{C}$ назовем полином $f(\lambda, \mathcal{C}) = \sum\limits_{\nu=0}^{d+1} f_{\nu-1}(\mathcal{C})\lambda^\nu$, где $f_\nu$ — количество $\nu$-мерных граней комплекса $\mathcal{C}$.*

В пространстве многочленов $\mathbb{F}_{d+1}[\lambda]$ степени не выше $d+1$ рассмотрим два базиса:

$$1, \lambda, \ldots, \lambda^\nu, \ldots, \lambda^{d+1} \tag{6.1}$$

$$(1+\lambda)^{d+1}, \lambda(1+\lambda)^d, \ldots, \lambda^\nu(1+\lambda)^{d+1-\nu}, \ldots, \lambda^{d+1}. \tag{6.2}$$

В определении $f$-полином записан в базисе (6.1). Запишем его во втором базисе

$$f(\lambda, \mathcal{C}) = \sum_{\mu=0}^{d+1} \gamma_\mu(\mathcal{C})\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu} \tag{6.3}$$

Матрица перехода от базиса (6.1) к базису (6.2) имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ d+1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{d+1}{i} & \binom{d}{i-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{d+1}{d+1} & \binom{d}{d} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Таким образом, $f_{\nu-1} = \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \binom{d+1-\mu}{\nu-\mu}\gamma_\mu$. Выразим коэффициенты $\gamma_\mu$ через $f_\nu$. Для этого произведем следующие преобразования $f(\lambda, \mathcal{C}) = (1+\lambda)^{d+1}\sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu(\frac{\lambda}{1+\lambda})^\mu$. Сделав замену, $\lambda' = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, получим $f(\lambda, \mathcal{C}) = f(\frac{\lambda'}{1-\lambda'}, \mathcal{C}) = \frac{1}{(1-\lambda')^{d+1}}\sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu\lambda'^\mu$. Откуда $\gamma(\lambda') = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu\lambda'^\mu = (1-\lambda')^{d+1}f(\frac{\lambda'}{1-\lambda'}) = (1-\lambda')^{d+1}\sum\limits_{\nu=0}^{d+1}f_{\nu-1}(\frac{\lambda'}{1-\lambda'})^\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{d+1}f_{\nu-1}\lambda'^\nu(1-\lambda')^{d+1-\nu}$. Далее, раскладывая по биному, получим

$$\gamma_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^{\mu-\nu}\binom{d+1-\nu}{\mu-\nu}f_{\nu-1} \tag{6.5}$$

Рассмотрим $f$-вектор и соответствующий ему многочлен для тетраэдра $f(\lambda, \mathcal{C}_1) = 1 + 4\lambda + 6\lambda^2 + 4\lambda^3 + \lambda^4 = (1+\lambda)^4$.

Пусть $P$ — триангулированный политоп с соответствующим симплициальным комплексом $\mathcal{C}$. Добавляем точку $a \notin P$ и триангулируем полученный политоп $P' = \mathrm{Conv}(a, P)$. Тогда для комплекса $\mathcal{C}'$ верно $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup Pyr_a\mathcal{C}_-$. Как связаны $f$-полиномы комплексов $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}$? Легко заметить, что $f(\lambda, \mathcal{C}') = f(\lambda, \mathcal{C}) + \lambda f(\lambda, \mathcal{C}_-)$.

Пример. Рассмотрим в качестве $P$ тетраэдр. Считаем, что из точки $a$ видима только одна фасета, т. е. $\mathcal{C}_-$ — треугольник. Тогда $f(\lambda, \mathcal{C}') = (1+\lambda)^4 + \lambda(1+\lambda)^3 = 1 + 5\lambda + 9\lambda^2 + 7\lambda^3 + 2\lambda^4$.

# 7. Разбиваемые комплексы. Теорема Кляйншмидта–Смиланского

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{C} = \cup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$.

**Определение 7.1.** *Симплициальный комплекс называется разбиваемым, если его можно представить в виде*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\tau=1}^{t} [G_\tau, S_\tau], \tag{7.1}$$

*где* $[G_\tau, S_\tau] = \{F \in \Gamma(S_\tau) \mid G_\tau \subseteq F \subseteq S_\tau\}$ *и (7.1) является дизъюнктным объединением (т. е. объединением попарно непересекающихся множеств).*

Несложно найти число $f_{k\tau}(\mathcal{C})$ $k$-мерных граней $d$-мерного симплекса $S_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, v_1, \ldots, v_d)$, содержащих $\mu$-мерную грань $G_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_\mu)$. Ясно, что оно равно числу $\binom{d-\mu}{k-\mu} = \binom{d-\mu}{d-k}$ способов выбора $k - \mu$ вершин из $d - \mu$ вершин симплекса $S_\tau$, не принадлежащих $G_\tau$.

**Теорема 7.1.** ***(Kleinschmidt, Smilanski, 1991)*** *Пусть $A$ — точечная конфигурация ($A \in \mathbb{F}^{d\times n}$), $T(A) = \{S_1, \ldots, S_t\}$ — ее триангуляция. Тогда симплициальный комплекс $\mathcal{C} = \cup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ разбиваем.*

**Доказательство.** По определению разбиваемого комплекса для него выполнено (7.1). Поэтому для доказательства достаточно найти соответствующую систему граней $G_\tau, \tau \in \{1, \ldots t\}$. Рассмотрим точку $a$ политопа $P = \mathrm{Conv}\, A$, находящуюся в общем положении, т. е. не принадлежащую аффинной оболочке ни одной из граней политопа $P$. Тогда, очевидно, что $a$ принадлежит единственному симплексу из $T(A)$. Не уменьшая общности будем считать, что это симплекс $S_1 = \mathrm{Conv}(a_1, \ldots, a_{d+1})$, т. е. $a \in S_1$. Тогда положим $G_1 = \emptyset$. Рассмотрим остальные симплексы триангуляции. Пусть $S_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_d)$. Обозначим через $F_i = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_d)$ $i$-ю фасету симплекса $S_\tau$, $i = 0, \ldots, d$. Так как $\mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ v_0 & \ldots & v_d \end{pmatrix} = d + 1$, то существует единственное разложение

$$a = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i v_i \tag{7.2}$$

такое, что $\sum\limits_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$. Так как $a$ в общем положении, то все коэффициенты $\lambda_i$ ненулевые. Не уменьшая общности, считаем, что $\lambda_i < 0$ для $i = 0, \ldots, r$, а для $i = r+1, \ldots, d$ $\lambda_i > 0$. В разложении (7.2) среди $\lambda_i$ найдутся как положительные, так и отрицательные. Действительно, так как $\sum\limits_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$, то существует $\lambda_i > 0$. Существование отрицательного $\lambda_i$ следует из того, что в противном случае $a$ была бы общей точкой симплексов $S_1$ и $S_\tau$, что противоречит ее общности положения. Пусть фасета $F_i$ определяется уравнением

$$b_i x + \beta_i = 0, \tag{7.3}$$

т. е. $F_i = \{x \in S_\tau \mid b_i x + \beta_i = 0\}$. Этому уравнению удовлетворяют все вершины симплекса $S_\tau$ за исключением $v_i$. Положим $c_{ij} = b_i v_j + \beta_i$. Тогда $c_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Для определенности пусть $c_{ii} > 0$. Рассмотрим точку $x \in intF_\nu$, $\nu = 0, \ldots, r$. Тогда $x$ представляется в виде $x = \sum\limits_{k \neq i} \alpha_k v_k$, $\sum\limits_{k \neq i} \alpha_k = 1$, $\alpha_k > 0$. Для $\nu = 0, \ldots, r$ имеем $b_\nu a + \beta_\nu = \sum\limits_{i=0}^{d} (b_\nu v_i + \beta_\nu)\lambda_i = \lambda_\nu c_{\nu\nu} < 0, b_\nu x + \beta_\nu = \sum\limits_{k \neq i} (b_\nu v_k + \beta_\nu)\alpha_k = \alpha_\nu c_{\nu\nu} > 0$. Таким образом, точки $x$ и $a$ лежат по разные стороны от гиперплоскости (7.3), только если $\nu = 0, \ldots, r$.

В качестве $G_\tau$ возьмем $G_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_r) = \bigcap\limits_{r+1}^{d} F_i$. Фасеты $F_{r+1}, \ldots, F_d$ являются невидимыми из точки $a$. Отсюда следует, что $G_\tau$ — минимальная (по включению) из невидимых граней.

Рассмотрим $x \in P$ и отрезок $[x, a]$. Определим $x_\mu = (1-\mu)x + \mu a, 0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Так как $a$ находится в общем положении, то найдется такое $\mu > 0$, что отрезок $[x, x_\mu]$ принадлежит единственному симплексу $S_\tau$.

Покажем, что при сделанном выборе $G_\tau, \tau = 1, \ldots, t$ будет верно (7.1). Пусть $F'$ произвольная грань. Тогда $F' \in \bigcup_{\tau=1}^{t} \{F \mid G_\tau \subseteq F \subseteq S_\tau\}$, так как любая грань принадлежит какому-то (быть может, не одному) симплексу триангуляции. Берем произвольный $x \in intF'$ и находим максимальное $\mu$ такое, что $[x, x_\mu]$ принадлежит единственному симплексу $S_\tau$. Если $x \neq x_\mu$, то $x$ невидима из $a$. Соответственно, грань $F'$, содержащая $x$, невидима из $a$. В силу того, что $G_\tau$ минимальная из невидимых граней, получаем $G_\tau \subseteq F'$. Если $x = x_\mu$, то, $x_\mu = \sum\limits_{k \in I} \alpha_k v_k$, где $\sum\limits_{k \in I} \alpha_k = 1, \alpha_k \geqslant 0,\ F' = \mathrm{Conv}(\{v_k : k \in I\})$. Покажем, что и в этом случае $G_\tau \subseteq F'$. Для этого достаточно показать, что $\{0, \ldots, r\} \subseteq I$. Предположим, что найдется такое $i \leqslant r$, что $i \notin I$. Тогда $0 \leqslant b_i x_\mu + \beta_i = \sum\limits_{k \in I} (b_i v_k + \beta_i)\alpha_k = \alpha_i c_{ii} < 0$, так как $\alpha_i < 0$. Получили противоречие. Таким образом, любая точка $P$ принадлежит единственному множеству из правой части (7.1). Теорема доказана. $\square$

Напомним определение граничного комплекса, котрое давалось в конце главы 5: пусть $M_1$ — множество номеров внешних и $M_2$ — множество номеров внутренних граней триангуляции. Обозначим $\partial\mathcal{C} = \cup_{\mu\in M_1}\Gamma(F_\mu)$, а также $int\mathcal{C} = \cup_{\mu\in M_2}\Gamma(F_\mu)$. $\partial\mathcal{C}$ является симплициальным комплексом (подкомплексом комплекса $\mathcal{C}$), который мы назовем *граничным комплексом.*

Рассмотрим граничный комплекс $\partial\mathcal{C}$. Тогда $int\mathcal{C} = \mathcal{C}\backslash\partial\mathcal{C}$. Хотя $int\mathcal{C}$ не является комплексом, но для него верно

**Следствие 7.1.** $int\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t}\{F \mid \overline{G_\tau} \subseteq F \subseteq S_\tau\}$, *где объединение тоже дизъюнктное, а* $\overline{G_\tau} = \mathrm{Conv}(v_{r+1},\dots,v_d)$, *если* $G_\tau = \mathrm{Conv}(v_0,\dots,v_r)$.

**Доказательство.** Пусть $F \in int\mathcal{C}$ и $x \in intF$. Вводя обозначения, аналогичные используемым в доказательстве теоремы, запишем $x_\varepsilon = (1+\varepsilon)x - \varepsilon a$. Существует единственный $\tau$ такой, что $[x, x_\varepsilon] \subseteq S_\tau$. Далее $x = \sum\limits_{k\in I}\alpha_k v_k$, $\sum\limits_{k\in I}\alpha_k = 1, \alpha_k > 0$. Надо доказать, что $\overline{G_\tau} \subseteq F$. Для этого нужно показать, что $\{r+1,\dots,d\} \subseteq I$. Предположим, что найдется такое $k > r$, что $k \notin I$. Тогда $0 \leqslant b_k x_\varepsilon + \beta_k = -\varepsilon(b_k a + \beta_k) < 0$. Приходим к противоречию. $\square$

Заметим, что разбиение, построенное в доказательстве теоремы, зависит от выбора точки $a$ (из которой рассматриваются симплексы). Покажем, однако, что число $\gamma_\mu = |\{\tau \mid \dim(G_\tau) = \mu - 1\}|$ от этого не зависит. Действительно, из дизъюнктности объединения в правой части формулы (7.1) следует, что $f(\lambda,\mathcal{C}) = \sum\limits_{i=0}^{d+1} f_{i-1}\lambda^i = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu}$.

**Следствие 7.2.** $\gamma_\mu = |\{\tau \mid \ \dim(G_\tau) = \mu - 1\}|$

$f$-полином для $int\mathcal{C}$ запишем так $f(\lambda, int\mathcal{C}) = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu^{int}\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu}$. Тогда имеет место

**Следствие 7.3.** $\gamma_\mu^{int} = |\{\tau \ \mid \ \dim(G_\tau) = d + 1 - \mu\}|$

**Следствие 7.4.** $\gamma_\mu^{int} = \gamma_{d+1-\mu}$

Тогда $f$-полином для граничного комплекса запишется так $f(\lambda,\partial\mathcal{C}) = f(\lambda,\mathcal{C}) - f(\lambda, int\mathcal{C}) = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}(\gamma_\mu - \gamma_{d+1-\mu})\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu} = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}\gamma_\mu(\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu} - \lambda^{d+1-\mu}(1+\lambda)^\mu) = \sum\limits_{\mu=0}^{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}(\gamma_\mu - \gamma_{d+1-\mu})(\lambda^\mu(1+\lambda)^{d+1-\mu} - \lambda^{d+1-\mu}(1+\lambda)^\mu)$. Заметим, что $\gamma_0 = 1, \gamma_{d+1} = 0, \gamma_\mu \geqslant 0$. Так как $\gamma_{d+1} = 0$, то $f(\lambda,\mathcal{C})$ делится на $1+\lambda$, т. е. $f(-1,\mathcal{C}) = \sum\limits_{i=-1}^{d}(-1)^{i+1}f_i = 0$. Другими словами, приведенная эйлерова характеристика равна нулю. Аналогично $f(\lambda, int\mathcal{C})$ делится на $\lambda$, т. е. $f(0, int\mathcal{C}) = 0$ и $f(-1, \partial\mathcal{C}) = 0$. В $f(\lambda, \mathcal{C})$ заменив $\lambda$ на $-1-\lambda$, получим $f(-1-\lambda, \mathcal{C}) = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1} \gamma_\mu(-1-\lambda)^\mu(-\lambda)^{d+1-\mu} = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}(-1)^{d+1}\gamma_\mu\lambda^{d+1-\mu}(1+\lambda)^\mu = (-1)^{d+1}f(\lambda, int\mathcal{C})$. Таким образом, $f(-1-\lambda, \mathcal{C}) = (-1)^{d+1}f(\lambda, int\mathcal{C})$. Сделав аналогичную замену в $f(\lambda, \partial\mathcal{C})$, получим $f(-1-\lambda, \partial\mathcal{C}) = \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}(\gamma_\mu - \gamma_{d+1-\mu})(-1-\lambda)^\mu(-\lambda)^{d+1-\mu} = (-1)^d \sum\limits_{\mu=0}^{d+1}(\gamma_{d+1-\mu} - \gamma_\mu)(1+\lambda)^\mu\lambda^{d+1-\mu} = (-1)^d f(\lambda, \partial\mathcal{C})$. Получили уравнения *Дэна–Соммервилля (Dehn,Sommerville)*:

$$f(-1-\lambda, \partial\mathcal{C}) = (-1)^d f(\lambda, \partial\mathcal{C}) \tag{7.4}$$

**Определение 7.2.** *Многочлен $f(\lambda)$ назовем реализуемым, если существует $d$-мерная точечная конфигурация $A$ и ее триангуляция $T(A)$ такие, что $f(\lambda, T(A)) = f(\lambda)$, где $f(\lambda, T(A)) = f(\lambda, \Gamma(T(A)))$.*

**Определение 7.3.** *Назовем вектор $f = (f_0, \ldots, f_{d-1})$ и соответствующий ему многочлен $f(\lambda) = 1 + f_0\lambda + \ldots + f_{d-1}\lambda^d + \lambda^{d+1}$ $(d, n)$-реализуемым, если существует $d$-мерный симплициальный политоп $P$ с $n$ вершинами такой, что $f(\lambda, P) = f(\lambda)$. Назовем вектор $f = (f_0, \ldots, f_{d-1})$ $(d, n)$ $T$-реализуемым, если существует $d$-мерная точечная конфигурация $A$ и ее триангуляция $T(A)$ такие, что $f(\lambda, T(A)) = f(\lambda)$.*

Получим условия реализуемости для $d = 2$ и $d = 3$.

1) $d = 2$.

Рассмотрим на плоскости $n$ точек и их выпуклую оболочку $P = \mathrm{Conv}(v_1, \ldots, v_n)$. Пусть $P$ как-то триангулирован и $\mathcal{C}$ — симплициальный комплекс этой триангуляции. Тогда $f(\lambda, \mathcal{C}) = 1 + f_0\lambda + f_1\lambda^2 + f_2\lambda^3 = (1+\lambda)^3 + \gamma_1\lambda(1+\lambda)^2 + \gamma_2\lambda^2(1+\lambda)$, $f(\lambda, int\mathcal{C}) = \lambda^3 + \gamma_1\lambda^2(1+\lambda) + \gamma_2\lambda(1+\lambda)^2$, $f(\lambda, \partial\mathcal{C}) = (1+\lambda)^3 - \lambda^3 + (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda(1+\lambda)$. Откуда $n = 3 + \gamma_1$, $f_0(\partial\mathcal{C}) = 3 + \gamma_1 - \gamma_2$ — число узлов триангуляции, попавших на границу, а $\gamma_2$ — число внутренних точек. Так как $f_0(\partial\mathcal{C}) \geqslant 3$, то $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0$. Далее возьмем треугольник, поместим $\gamma_2$ различных точек внутрь его и $\gamma_1 - \gamma_2$ различных точек, не совпадающих с вершинами, поместим на границе. Ему соответствует $f(\lambda, \mathcal{C})$. Таким образом, многочлен $f(\lambda)$ реализуем тогда и только тогда, когда $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant 0$.

2) $d = 3$.

Рассмотрим в пространстве $n$ точек. Тогда $f(\lambda, \mathcal{C}) = (1+\lambda)^4 + \gamma_1\lambda(1+\lambda)^3 + \gamma_2\lambda^2(1+\lambda)^2 + \gamma_3\lambda^3(1+\lambda)$, $f(\lambda, int\mathcal{C}) = \lambda^4 + \gamma_1\lambda^3(1+\lambda) + \gamma_2\lambda^2(1+\lambda)^2 + \gamma_3\lambda(1+\lambda)^3$, $f(\lambda, \partial\mathcal{C}) =$

$(1+\lambda)^4 - \lambda^4 + (\gamma_1 - \gamma_3)\lambda(1 + 3\lambda + 2\lambda^2)$. Граничному комплексу соответствует вектор

$$f(\partial\mathcal{C}) = (f_0, f_1, f_2) = (4, 6, 4) + k(1, 3, 2), \tag{7.5}$$

где $k = \gamma_1 - \gamma_3$. При $k \geqslant 0$ (7.5) исчерпывет всевозможные $f$-векторы для трехмерных симплициальных политопов. Например, при $k = 2$ получаем октаэдр. Отсюда следует, что всевозможные простые политопы описываются векторами вида $f(P) = (4, 6, 4) + k(2, 3, 1)$.

# 8. $f$-векторы трехмерных политопов

**Теорема 8.1.** ***(Штейница)*** *Вектор $f(P)$ является вектором некоторого трехмерного политопа тогда и только тогда когда его можно представить в виде*

$$f(P) = (4,6,4) + k(1,3,2) + l(2,3,1) + m(1,2,1), \tag{8.1}$$

*где $k, l \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \{0,1,2\}$.*

**Доказательство.** Пусть $P = \{x \mid c_i x \leqslant \alpha_i,\ i = 1,\ldots,m\}$. Если $P$ симплициальный политоп, то $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, откуда линейное многообразие $f$-векторов трехмерных симплициальных политопов двумерно. В этом случае $f(P)$ представим в виде (8.1). Если $P$ несимплициальный, то рассмотрим какую-нибудь его несимплициальную фасету $F = \operatorname{Conv}(v_1,\ldots,v_n)$. Пусть фасете $F$ соответствует опорная гиперплоскость $\pi = \{x : cx = \alpha\}$. Положим $v = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$. Тогда для достаточно малого положительного $\varepsilon$ точка $a = v + \varepsilon c$ будет удовлетворять всем неравенствам за исключением $cx \leqslant \alpha$. Далее, заменив фасету $F$ пирамидой $\operatorname{pyr}_a F$, получим политоп $P' = P \cup \operatorname{pyr}_a F$. Такую процедуру назовем пирамидальной надстройкой. Так как $f(\lambda, P') = f(\lambda, P) + \lambda f(\lambda, F)$ и $f(-1, F) = 0$, то $f(-1, P') = f(-1, P)$, т. е. эйлерова характеристика от пирамидальной надстройки не меняется. После пирамидальной надстройки над каждой несимплициальной фасетой получим симплициальный политоп, а для него равенство $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ доказано. Следовательно, это равенство верно и для исходного политопа. Таким образом, для любого трехмерного политопа $f_0 - f_1 + f_2 = 2$. Отсюда следует, что существуют единственные $k$ и $l$ такие, что $f(P)$ имеет вид $f(P) = (4,6,4) + k(1,3,2) + l(2,3,1)$. Но отсюда еще не следует, что $k, l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим базис $(1,3,2),\ (1,2,1)$. Тогда $f_0(P) = 4 + k + m \geqslant 4,\ f_2(P) = 4 + 2k + m \geqslant 4$, так как политоп трехмерный. Отсюда вытекает, что $k, m \in \mathbb{Z}$. Аналогично для базиса $(2,3,1),\ (1,2,1)$. Введем обозначение $a \equiv b(c)$, что верно тогда и только тогда когда $a$ можем представить в виде $a = b + c * x$, где $x \in Z$. Видим, что $f_1(P) \equiv m(3)$.

Если построен политоп, реализующий $f(P)$, то перевернув его (то есть рассмотрев вектор, компоненты которого равны компонентам вектора $f(P)$, записанным в обратном порядке), получим $f$-вектор двойственного политопа $f(P^\diamond)$, т. е. он тоже реализуется. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая $f_0(P) \leqslant f_2(P)$. Рассмотрим

$n$-пирамиду $\Pi_n$. Для нее $f(\Pi_n) = (n+1, 2n, n+1)$, откуда $k = 0,\ l = 0,\ m = n-3$. Введем обозначение $a = res_b c$, что верно тогда и только тогда когда $c$ можем представить в виде $c = b * x + a$, где $x \in Z,\ a \in \{0, \dots, b-1\}$. Но так как $m \in \{0, 1, 2\}$, то нужно положить $m' = res_3 m$ и найти соответствующие $k$ и $l$ ($k = l$). Рассмотрим $n$-бипирамиду $B_n$. Для нее $f(B_n) = (n+2, 3n, 2n)$, откуда $k = n-2,\ l = 0,\ m = 0$. Покажем, что если $f_0(P) \leqslant f_2(P)$, то существуют единственные $k, m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что (8.1) верна при $l = 0$. Целочисленность $k$ и $m$ ясна.

Докажем единственность. Положим $m_0 = res_3(-f_1(P))$. Тогда $f_0'(P) = f_0(P) - m_0 = 4 + k + 2l \geqslant 4,\ f_2'(P) = f_2(P) - m_0 = 4 + 2k + l \geqslant 4$. Здесь $k$ и $l$ целые неотрицательные, причем $k \geqslant l$. Отсюда нетрудно видеть, используя соотношение $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, что $f(P)$ можно представить в виде $f(P) = (4,6,4) + (k-l)(1,3,2) + 3l(1,2,1) + m_0$. Надо доказать, что $f(P) = (4,6,4) + k(1,3,2) + m(1,2,1)$ реализуется с $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Возьмем $k$ граней пирамиды $\Pi_n$ и над каждой из них произведем пирамидальную надстройку. Каждая из $k$ пирамидальных надстроек добавляет к вектору $f$ вектор (1,3,2). Действительно, число точек изменяется на 1, число ребер на 3, число граней на 2. В результате к вектору $f$ получаем добавку $k(1,3,2)$. Возьмем $l$ вершин основания пирамиды и отрежем каждую из них плоскостью. Каждая такая операция из $l$ добавляет к вектору $f$ вектор $(2,3,1)$. Действительно, число точек изменяется на 2, число ребер на 3, число граней на 1. В результате к вектору $f$ получим добавку $l(2,3,1)$. Действительно реализуем. Теорема доказана. $\square$

# 9. Развертка политопа

**Определение 9.1.** *Последовательность фасет $F_1, F_2, \dots, F_m$ называется полуразверткой политопа $P$, если на нем введен такой линейный порядок $\prec$, что выполнены следующие условия:*

*1)*

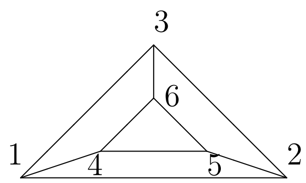
$$F_1 \prec F_2 \prec \dots \prec F_m \tag{9.1}$$

*Причем для любого $i = 1, \dots, m-1$ множество*

$$(+) F_{i+1} \cap (\bigcup_{j=1}^{i} F_j),$$

*является множеством фасет грани $F_{i+1}$.*

*2) если дополнительно потребовать чтобы множество $(+)$ при $i = 1, \dots, m-2$ было гомеоморфно $(d-2)$-мерному шару, то последовательность фасет назовем разверткой политопа $P$.*




Разберем пример. Укажем развертку трехмерной призмы. Будем задавать различную нумерацию граней и проверять свойства. Обозначим $A = \{1, \dots, 6\}$, через $F(B)$ обозначим фасету, соответствующую набору вершин $B \subseteq A$. Если задать порядок $F(4,6,5), F(1,3,2), \dots$, то для такой последовательности фасет не выполнилось бы условие 1. Зададим порядок $F(1,3,6,4), F(3,2,5,6), F(1,2,5,4), F(4,5,6), F(1,3,2)$ , тогда, нетрудно видеть, условие 1 будет соблюдено, но условие 2 не выполнится. Зададим порядок $F(4,5,6), F(1,3,6,4), F(2,3,6,5), F(1,2,5,4), F(1,2,3)$, нетрудно видеть, что это развертка.

**Теорема 9.1.** ***(Brugesser H., Mani P., 1971)*** *Для любого политопа $P$ существует развертка.*

**Доказательство.** Рассмотрим $d$-мерный политоп $P = \{x \in \mathbb{F}^d \mid b_i x \leqslant 1, i =\in \{1, \dots, m\}\}$. Считаем, что здесь нет неравенств-следствий. Очевидно, что $0 \in intP$. Пусть

$F_i = P \cap \{x \mid b_i x = 1\} = \{x \in P \mid b_i x = 1\},\ i = 1, \ldots, m$. Заметим, что $F_i$ является фасетой политопа $P$ при $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим вектор $y$ в общем положении, т. е. $b_i y \neq 0$ при $i = 1, \ldots, m$ и $b_i y \neq b_k y\ \forall i \neq k$. Тогда $\operatorname{Aff} F_i \cap \{\lambda y\} = \lambda_i y$. Откуда $\lambda_i = \frac{1}{b_i y}$. Не уменьшая общности, считаем, что $\lambda_i$ упорядочены $\lambda_{m'+1} < \ldots < \lambda_m < 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{m'}$. Такое упорядочение индуцирует линейный порядок фасет. Полагаем $F_1 \prec F_2 \prec \ldots \prec F_m$. Тем самым получили полуразвертку.

Докажем, что $1 < m' < m$. Действительно, $P$ — ограниченное множество, значит, не все $b_i y$ имеют одинаковый знак. Покажем, что точка $z \in intF_i$ не видна из точки $\lambda_i y$. Рассмотрим отрезок $[z, \lambda_i y] = \{(1-\alpha)z + \alpha\lambda_i y\}$. Тогда $P \cap [z, \lambda_i y] = [z, z']$, причем $z' \in \partial F_i$. Значит, существует такое $\mu$, что $z' \in G_\mu$, где $G_\mu$ — фасета грани $F_i$. Докажем единственность такого $\mu$. Действительно, $z' = (1-\alpha)z + \alpha\lambda_i y,\ 0 < \alpha < 1$. Если бы $z' \in G_\mu,\ z' \in G_\nu,\ \mu \neq \nu$, то $z' = (1-\alpha')z + \alpha'\lambda_i y,\ z' = (1-\alpha'')z + \alpha''\lambda_i y$. Откуда $(\alpha'' - \alpha')z = (\alpha'' - \alpha')\lambda_i y$, что противоречит общности положения $y$. Таким образом, $z'$ принадлежит единственной фасете $G_\mu$ грани $F_i$. Следовательно, для любого $\mu$ найдется такое $k \neq i$, что $\{x \in F_i \mid b_k x = 1\} = \{x \in P \mid b_k x = 1, b_i x = 1\}$. Теперь надо показать, что $k < i$. Если $z' \in F_i,\ z' \in F_k$, то $b_k z' = b_k z(1-\alpha) + \alpha b_k \lambda_i y = b_k z(1-\alpha) + \alpha\frac{\lambda_i}{\lambda_k} = 1$. Если $z \in P$, то $b_k z \leqslant 1$ (даже $b_k z < 1$, так как $z \in intF_i$). Таким образом, $1 = b_k z' < 1 - \alpha + \alpha\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$, следовательно, $\alpha < \alpha\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$, значит, $\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$. Если $i < m'$, то $0 < \lambda_k < \lambda_i$, если же $i > m'$, то $\lambda_i < \lambda_k < 0$. Осталось доказать, что $F_{i+1} \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{i} F_j)$ гомеоморфно $(d-2)$-мерному симплексу.

Рассмотрим $d$-мерную точечную конфигурацию $A \in \mathbb{F}^{d \times n}$. Определим политоп $P_n = P = \operatorname{Conv}(A) = \{x \in \mathbb{F}^d \mid b_i x \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, m\}$. Рассмотрим симплекс $S_1 = \operatorname{Conv}(A_{d+1})$, вершинами которого являются первые $d+1$ столбцов матрицы $A$. Пусть $T(A) = \{S_1, \ldots, S_t\}$ — триангуляция $P$ и $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ — ее симплициальный комплекс. Обозначим $\Gamma_i(\mathcal{C}) = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma_i(S_\tau)$ множество $i$-мерных граней комплекса $\mathcal{C}$. Пусть мы хотим добавить к триангуляции новую точку $a_{n+1}$, не принадлежащую политопу $P$. Тогда положим $I_- = \{i \mid b_i a_{n+1} > 1\},\ I_+ = \{i \mid b_i a_{n+1} < 1\}$. Не уменьшая общности считанм, что $I_- = \{1, \ldots, s\}$. Тогда $F_1, \ldots, F_s$ — видимые из $a_{n+1}$ фасеты, $S_{t+\sigma} = \operatorname{pyr}_{a_{n+1}} F_\sigma$. Новая триангуляция имеет вид $T(A_{n+1}) = T(A_n) \cup \{S_{t+1}, \ldots, S_{t+s}\}$, где $A_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$, и ей соответствует комплекс $\mathcal{C}'$. Обозначим $\mathcal{C}_- = \bigcup\limits_{\sigma=1}^{s} \Gamma(F_\sigma)$.

Если $f(\lambda,\mathcal{C})=\sum\limits_{i=0}^{d+1}\gamma_i\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}$, то $f(\lambda,\mathcal{C}')=\sum\limits_{i=0}^{d+1}\gamma_i'\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}=f(\lambda,\mathcal{C})+\lambda f(\lambda,\mathcal{C}_-)$, $\mathcal{C}'=\mathcal{C}\cup\mathrm{pyr}_{a_{n+1}}\mathcal{C}_-$, где $f(\lambda,\mathcal{C}_-)=\sum\limits_{i=0}^{d}\gamma_i^-\lambda^i(1+\lambda)^{d-i}$. Тогда, ввиду того что $f(\lambda,\mathcal{C}')=f(\lambda,C)+\lambda f(\lambda,\mathcal{C}_-)$, получаем $\gamma_i'=\gamma_i+\gamma_{i-1}^-$.

Обозначим $int\mathcal{C}_+=\mathcal{C}_+\backslash\partial\mathcal{C}_+$, тогда $f(\lambda,int\mathcal{C}_+)=\sum\limits_{i=0}^{d}\gamma_{d-i}^+\lambda^i(1+\lambda)^{d-i}$. Пусть $f(\lambda,\partial\mathcal{C}_+)=\sum\limits_{i=0}^{d}\beta_i\lambda^i(1+\lambda)^{d-i}$. Тогда $\beta_i=\gamma_i^-+\gamma_{d-i}^+,\ \beta_i=\beta_{d-i}$.

Ввиду того что $f(\lambda,intC)=\sum\limits_{i=0}^{d+1}\gamma_i\lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i$ получаем $f(\lambda,\partial\mathcal{C})=\sum\limits_{i=0}^{d+1}(\gamma_i-\gamma_{d+1-i})\lambda_i(1+\lambda)^{d+1-i}=\sum\limits_{i=0}^{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor}(\gamma_i-\gamma_{d+1-i})(\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}-\lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i)$. Положим $\alpha_{2i}=\gamma_i-\gamma_{d+1-i},\ \varphi_{d-1,2i-1}=\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}-\lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i$.

В результате $f(\lambda,\mathcal{C})=\sum\limits_{i=0}^{d}\alpha_i\varphi_{d,i}$, где $\alpha_{2i-1}=\gamma_{d+1-i}-\gamma_{d+2-i}$, $\alpha_{2i}=\gamma_i-\gamma_{d+1-i}$.

Нетрудно проверить подстановкой, что при $k<\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$, имеем $\gamma_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_{2i-1}+\alpha_{2k}$, при $k\geqslant\lfloor\frac{d}{2}\rfloor$, получаем $\gamma_{d+1-k}=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_{2i-1}$.

Докажем, что $\gamma_{d+1-i}\geqslant\gamma_{d+2-i}$, т. е. $\alpha_{2i-1}\geqslant 0$. Индукция по размерности. $\gamma_{d+1-i}+\gamma_{d-i}^-=\gamma_{d+1-i}'\geqslant\gamma_{d+2-i}'=\gamma_{d+2-i}+\gamma_{d+1-i}^-$, так как $\gamma_{d+1-i}\geqslant\gamma_{d+2-i}$, $\gamma_{d-i}'\geqslant\gamma_{d+1-i}'$. Докажем, что $\gamma_i\geqslant\gamma_{d+1-i}$, т. е. $\alpha_{2i}\geqslant 0$. Нетрудно видеть, что $\gamma_i'-\gamma_{d+1-i}'=\gamma_i+\gamma_{i-1}^--\gamma_{d+1-i}-\gamma_{d-i}^-$. По предположению индукции $\gamma_i-\gamma_{d+1-i}\geqslant 0$.

$\alpha_{2i}'=\alpha_{2i}+\alpha_{2i-2}^--\alpha_{2i-1}^-$, $\alpha_{2i}=\beta_i-\beta_{i-1}$. Откуда $\alpha_{2i}'=\gamma_i'+\gamma_{d-i}^+-\gamma_{i-1}^--\gamma_{d+1-i}^++\gamma_{i-1}^--\gamma_{d-1-i}^-$. $\alpha_{2i}^-=\gamma_i^--\gamma_{d-i}^-$.

Покажем, что $\alpha_{2i}\leqslant\binom{n+i-d-2}{i}$. Действительно, $\alpha_{2i}'=\alpha_{2i}+\alpha_{2i-2}^--\alpha_{2i-1}^-\leqslant\alpha_{2i}+\alpha_{2i-2}^-$. Применив индукцию и свойства биномиальных коэффициентов, получим требуемое. $\square$

# 10. Максимизация выпуклых функций на политопе

Пусть $M$ — политоп в $\mathbb{F}^d$, а $x^1, x^2, \ldots, x^v$ — вершины политопа $M$. Рассмотрим функцию $f(x), x \in \mathbb{F}^d$.

**Определение 10.1.** *Функция $f(x)$ называется выпуклой на $M$, если для всех $x, y \in M$ и для любого $\alpha$ такого, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, имеет место неравенство*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

.

Из этого определения следует, что
$f(\sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j x^j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_j f(x^j)$, если $\alpha_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1$ и $x^j$ являются точками из $M$.

$$\max_{x \in M} f(x) = \max_{\substack{\alpha_j \geqslant 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{v} \alpha_j = 1}} f(\sum_{=1}^{v} \alpha_j x^j),$$

но

$$f(\sum_{j=1}^{v} \alpha_j x^j) \leqslant \sum_{j=1}^{v} \alpha_j f(x^j) \leqslant f(x^k) \sum_{j=1}^{v} \alpha_j = f(x^k)$$

Таким образом, максимум выпуклой функции, заданной на политопе, достигается в одной из вершин этого политопа и задача отыскания максимума из непрерывной становится дискретной: достаточно перебрать все вершины политопа и выбрать ту, на которой достигается магсимум. Обратной стороной медали является то, что теоремы математического анализа, на которых обычно основываются алгоритмы поиска экстремума, перестают работать (так как оптимум будет находиться в крайней точке, где существование производной, например, не гарантировано).

Для поиска максимума выпуклой функции единственным методом остается перебор значений в вершинах. Следовательно, для оценки трудоемкости нужно знать сколько может быть этих вершин. Возникают 2 двойственные друг другу задачи:

1) По количеству фасет политопа оценить количество его вершин.

2) По количеству вершин политопа оценить количество фасет.

Рассмотрим вторую задачу.

Пусть заданы $d$ (размерность пространства) и $n$ (число вершин политопа).

Обозначим через $f_k(P)$ число $k$-мерных граней политопа $P$, через $P(d,n)$ — все $d$-мерные политопы с $n$ вершинами, а также $\max\limits_{P\in P(d,n)} f_k(P) = \varphi_k(d,n)$.

Пусть $S(d,n)$ — класс симплициальных политопов: $S(d,n) \subseteq P(d,n)$. Для политопа $P \in S(d,n)$ $k$-мерная грань характеризуется набором из $(k+1)$ вершины.

Известно, что в классе симплициальных политопов всегда найдется такой политоп $P$, что

$$\max_{P\in P(d,n)} f_k(P) = \max_{P\in S(d,n)} f_k(P) = \varphi_k(d,n).$$

Отсюда немедленно следует, что $\varphi_k(d,n) \leqslant \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$, а число фасет не превосходит $\begin{pmatrix} n \\ d \end{pmatrix}$ (что предствляет собой величину порядка $n^d$). МакМюлленом (McMullen, 1970) было доказано, что можно понизить эту оценку до величины порядка $n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$. Был найден класс политопов, для которых $f_k(P) = \varphi_k(d,n)$ для всех $k = 1,\ldots,d$. Этот класс (класс циклических политопов) был известен раньше (Каратеодори, кон. XIX - нач. XX вв., Гейл, 1960-е гг.).

# 11. Циклические политопы

В основу построения циклических политопов положена кривая Веронезе (Дж. Веронезе — итальянский геометр, 1854-1917), или моментная кривая. Параметрическое представление точки моментной кривой в $d$-мерном пространстве следующее:

$x(t) = (t, t^2, t^3, \ldots, t^d)$, где $t$ — действительная (или рациональная — можно выбирать в зависимости от рассматриваемой задачи) величина.

Циклический политоп задается как

$$C_d(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{Conv}(x(t_1), \ldots, x(t_n)) = \mathrm{Conv}\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1^2 \\ \ldots \\ t_1^d \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} t_n \\ t_n^2 \\ \ldots \\ t_n^d \end{pmatrix}\right),$$

где $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Обозначим через $C(d, n)$ — класс $d$-мерных циклических политопов с $n$ вершинами.

**Утверждение 11.1.** *$\varphi_k(d, n)$ достигается на $C(d, n)$.*

Гипотеза о справедливости этого утверждения была выдвинута Моцкиным в 1950-х гг. Он доказал ее для случаев $n = d+2, d+3$. Гейлом было получено выражение для числа граней в циклическом многограннике. МакМюллен доказал, что оценка неулучшаема.

Покажем сначала, что $C(d, n) \subseteq S(d, n)$ (т.е. никакая $(d+1)$ вершина не лежат в одной гиперплоскости). Выберем какие-нибудь $(d+1)$ вершину, соответствующие величинам $t_{j_0}, t_{j_1}, \ldots, t_{j_d}$, причем номера $j_0, j_1, \ldots, j_d$ таковы, что $t_{j_0} < t_{j_1} < \ldots < t_{j_d}$. Эти точки не лежат на одной плоскости, поскольку они аффинно независимы: $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_{j_0} & t_{j_1} & \ldots & t_{j_d} \\ t_{j_0}^2 & t_{j_1}^2 & \ldots & t_{j_d}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{j_0}^d & t_{j_1}^d & \ldots & t_{j_d}^d \end{pmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вандермонда, а параметры $t_{j_i}, i = 0, \ldots, d$, строго упорядочены по возрастанию.

Следовательно, $C(d, n) \subseteq S(d, n)$.

Докажем, что для любого $t_j$ точка $x(t_j)$ является вершиной циклического политопа. Для этого построим линейный функционал, на котором достигается строгий максимум (или минимум) в точке $x(t_j)$.

Определим вспомогательные функции: $f_j(t) = (t - t_j)^2 = t_j^2 - 2t_jt + t^2$.

$F_j(x) = -2t_jx_1 + x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_d$

$F_j(x(t_j)) = -2t_jt_j + t_j^2 = -t_j^2$

$F_j(x(t_l)) = -2t_jt_l + t_l^2 = f_j(t_l) - t_j^2 > -t_j^2$, т.к. $f_j(t) > 0$ для любого $t$.

Таким образом, $F_j(x(t_l)) > F_j(x(t_j))$ и мы построили линейные функ ционалы $F_j(x)$, которые достигают строгого минимума на $x(t_j)$.

По аналогии с $f_j(t)$ определим еще один набор вспомогательных функций:

$$f_L(t) = \prod_{j\in L}(t - t_j)^2 = f_0 + f_1t + \ldots + f_{2k}t^{2k},$$

$$L = \{j_1, j_2, \ldots, j_k : j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}.$$

$$F_L(x) = f_1x_1 + \ldots + f_{2k}x_{2k} + 0x_{2k+1} + \ldots + 0x_d, 2k \leqslant d.$$

Пусть $j \in L$. Тогда $F_L(x(t_j)) = f_L(t_j) - f_0 = -f_0$.

Пусть $j \notin L$. Тогда $F_L(x(t_j)) > -f_0$, т.к. $f_L(t_j)) > 0$.

Следовательно, $F_L(x)$ обращается в минимум в точках из множества $L$ для любого $k$ такого, что $2k \leqslant d$.

Мы получили возможность при $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ сосчитать количество $(k-1)$-мерных граней циклического политопа: $\varphi_{k-1}(C_d(t_1, \ldots, t_n)) = \binom{n}{k}$. Действительно, имеется именно столько вариантов образовать множество $L$, а построение линейных функционалов $F_L(x)$ доказывает, что каждое такое мн ожество определяет $(k-1)$-мерную грань.

В симплициальном политопе количество $(k-1)$-мерных граней не может превышать $\binom{n}{k}$, следовательно, доказано, что циклический политоп дает $\max\limits_{P\in C(d,n)} f_k(P)$ при $2k \leqslant d$.

Пусть $k = 2$. Рассмотрим многогранник, у которого любая пара вершин образует ребро. При $d = 3$ единственный такой многогранник — тетраэдр (заметим, что здесь не выполнено соотношение $2k \leqslant d$). При $d = 4$ таких многогранников уже можно указать много: любой циклический политоп дает требуемый результат (здесь уже выполнено неравенство $2k \leqslant d$).

Выше мы показали, что циклический политоп является $k$-смежностным, т.е. что любые $k$ точек образуют грань. Таким образом, к настоящему моменту нам известна половина коэффициентов $f$-вектора циклического политопа. Воспользовавшись соотношениями Дэна–Соммервиля можно вычислить оставшуюся половину.

В общем виде $f$-вектор циклического политопа $C$ записывается так: $f(\lambda, C) = 1 + f_0(C)\lambda + \ldots + f_{d-1}(C)\lambda^d + \lambda^{d+1}$. Тогда для граничного комплекса $\partial C$ имеем:

$$\begin{aligned} f(\lambda, \partial C) &= 1 + f_0(C)\lambda + \ldots + f_{d-1}(C)\lambda^d = \\ &= \sum_{i=0}^{\lceil d/2 \rceil} \alpha_{2i}(\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i} - \lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i). \end{aligned} \tag{11.1}$$

**Теорема 11.1.** *Если $P \in C(d,n)$, то в соотношении (11.1) $\alpha_{2i} = \binom{n+i-d-2}{i}$.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что при $2k \leqslant d$ мы получим $f_k = \binom{n}{k}$, $f_k$ — коэффициент при $\lambda^{k-1}$ — число граней размерности $(k-1)$.

При $k \leqslant \frac{d}{2}$ имеем $f(\lambda, \partial C) = \sum\limits_{i=0}^{\lceil d/2 \rceil} \alpha_{2i}\lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}$.

Приведем несколько вспомогательных комбинаторных сведений:

$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{b!}, b \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{Z}$

$\binom{-a}{b} = (-1)^b\binom{a+b-1}{b}$

$\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

Используя эти выражения, получаем (для коэффициента при $\lambda^k$):

$$\begin{aligned} f_{k-1}(P) &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i} \binom{d+1-i}{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1-d-2}{i}\binom{d+1-i}{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{d+1-n}{i} (-1)^{k-i} \binom{k-d-2}{k-i} = \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{d+1-n}{i}\binom{k-d-2}{k-i} = \\ &= (-1)^k \binom{k-n-1}{k} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

□

Приведём примеры циклических политопов и вычислим для них $f$-векторы. Рассмотрим случай $d = 4$. Напишем полином $f(\lambda, \partial P)$.

Согласно (11.1) имеем

$$f(\lambda, \partial P) = \sum_{i=0}^{[d/2]} \binom{n+i-d-2}{i} (\lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i} - \lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i) \tag{11.2}$$

Для нашего случая,

$$\begin{aligned} f(\lambda, \partial P) &= (1+\lambda)^5 - \lambda^5 + (n-5)(\lambda(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)) + \\ &+ \binom{n-4}{2}(\lambda^2(1+\lambda)^3 - \lambda^3(1+\lambda)^2) \\ &= 1 + 5\lambda + 10\lambda^2 + 10\lambda^3 + 5\lambda^4 + (n-5)(\lambda + 4\lambda^2 + 6\lambda^3 + 3\lambda^4) + \\ &+ \frac{(n-4)(n-5)}{2}(\lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4) \\ &= 1 + n\lambda + \binom{n}{2}\lambda^2 + n(n-3)\lambda^3 + \frac{n(n-3)}{2}\lambda^4 \end{aligned}$$

Таким образом, $f$-вектор циклического политопа для случая $d = 4$ имеет вид:

$$f = \left(n, \binom{2}{2}, n(n-3), \frac{n(n-3)}{2}\right)$$

Пусть теперь $d = 5$. Аналогично предыдущему случаю запишем,

$$\begin{aligned} f(\lambda, \partial P) &= (1+\lambda)^6 - \lambda^6 + (n-6)(\lambda(1+\lambda)^5 - \lambda^5(1+\lambda)) + \\ &+ \binom{n-5}{2}(\lambda^2(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)^2) \\ &= 1 + 6\lambda + 15\lambda^2 + 20\lambda^3 + 15\lambda^4 + 6\lambda^5 + \\ &+ (n-6)(\lambda + 5\lambda^2 + 10\lambda^3 + 10\lambda^4 + 4\lambda^5) + \\ &+ \frac{(n-5)(n-6)}{2}(\lambda^2 + 4\lambda^3 + 5\lambda^4 + 2\lambda^5) \\ &= 1 + n\lambda + \binom{n}{2}\lambda^2 + 2(n^2 - 6n + 10)\lambda^3 + \\ & \frac{5}{2}(n^2 - 7n + 12)\lambda^4 + (n^2 - 7n + 12)\lambda^5 \end{aligned}$$

Таким образом, $f$-вектор циклического политопа для случая $d = 5$ имеет вид:

$$f = \left(n, \binom{n}{2}, 2(n^2 - 6n + 10), \frac{5}{2}(n^2 - 7n + 12), n^2 - 7n + 12\right)$$

В рассмотренных примерах оказалось, что при $i \geqslant 3$ все $f_i$ представляют собой квадратичные функции. Покажем, что в общем случае при $k \geqslant \lceil d/2 \rceil$ все $f_k$ будут представлять собой полиномы одной и той же степени от $n$. Положим $m = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ Согласно (11.2) зависимость $f_k$ от $n$ определяется только множителями $\binom{n+k-d-2}{k}$:

$$\binom{n+k-d-2}{k} = \frac{(n+k-d-2)(n+k-d-3)\dots(n-d-1)}{k!},$$

которые представляют собой полиномы степени не выше $m$ (только последний из участвующих в суммировании имеет степень $m$, а так как он будет умножен на п олином от $\lambda$, который содержит все степени от $m$ до $d$, то он войдет во все компоненты $f_k$).

Вернемся снова к случаю $d = 4$ и напишем матрицу инциденции вершин и фасет для случая $n = 7$.

| $t_j \backslash F_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Чтобы определить является ли некоторая четверка точек фасетой, достаточно про верить знаки полинома $(t-t_{j_1})(t-t_{j_2})(t-t_{j_3})(t-t_{j_3})$ на остальных вершинах циклического политопа $t_{j_i}, j \neq j_1, j_2, j_3, j_4$. Если эти знаки одинаковы, то рассматриваемая четверка является фасетой, в противном случае — нет. Иными словами, в любом столбце матрицы ин циденций между двумя нулями должно стоять четное число единиц.

Перейдем к случаю $d = 5$ и $n = 8$.

| $t_j \backslash F_i$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

| $t_j \backslash F_i$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ | $F_{16}$ | $F_{17}$ | $F_{18}$ | $F_{19}$ | $F_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Фасеты $F_1, \ldots, F_{14}$ соответствуют фасетам для случая $d = 4, n = 7$ (дописана 1 в качестве первой координаты). Остальные фасеты $F_{15}, \ldots, F_{20}$ предста вляют собой зеркальное отображение фасет $F_1, F_3, F_4, F_9, F_{10}, F_{12}$, т. е. тех фасет, первая координата которых равна 1, а послед няя 0.

# 12. Правило Гейла

Перейдем теперь к общему случаю. Выберем $d$ вершин циклического политопа $C_d(t_1, \ldots, t_n)$ путем выбора параметров $t_j$, а точнее, путем выбора $J = \{j_1, \ldots, j_d \mid j_1 < \ldots < j_d\}$. По выбранным таким образом вершинам строим гиперплоскость. Будет ли она образовывать фасету циклического многогранника? Ответ на этот вопрос дает правило Гейла.

**Теорема 12.1.***(Правило Гейла)*

*$J$ соответствует фасете тогда и только тогда, когда между двумя номерами $j', j'' \in J, j' \neq j''$ такими, что $j' - 1 \notin J$ и $j'' + 1 \notin J$ попадает четное число номеров из $J$.*

**Доказательство.**

Рассмотрим многочлены:

$$\overline{f_J(t)} = (t - t_{j_1})(t - t_{j_2}) \ldots (t - t_{j_d}) = \overline{f_0} + \overline{f_1}t + \ldots + \overline{f_d}t^d$$

и

$$h_J(t) = \overline{f_1}x_1 + \ldots + \overline{f_d}x_d$$

Рассмотрим гиперплоскость, задаваемую уравнением:

$$h_J(x) = -\overline{f_0} \tag{12.1}$$

По определению, (12.1) соответствует фасете тогда и только тогда, когда $sign\overline{f_J}(t)$ принимает одинаковое значение для всех $t_j, j \in J$, что и требовалось доказать. □

Пусть теперь $J = (j_1, \ldots, j_k)$. Пусть $F$ — набор точек, соответствующий множеству $J$, т.е. $F = \mathrm{Conv}\{t_j \mid j \in J\}$ (в дальнейшем для указания этой связи будем вместо $J$ иногда использовать обозначение $J_F$). Зададимся общим вопросом: когда $J$ определяет грань, т.е. когда $F$ является гранью политопа $C_d(t_1, \ldots, t_n)$?

Мы уже знаем, что $J$ всегда определяет грань для $k \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$. Правило Гейла дает ответ для $k = d$. Рассмотрим остальные случаи.

Назовём *связным* подмножество индексов $J_\alpha \subseteq J$, $J_\alpha = \{j_\alpha, j_\alpha + 1, \dots, j_\alpha + n_\alpha\}$, при $j_\alpha - 1 \notin J$, $j_\alpha + n_\alpha + 1 \notin J$, причём $j_\alpha \neq 1$ и $j_\alpha + n_\alpha \neq n$. Введём также два *концевых* множества: левое $K_1 = \{1, 2, \dots, i_1\}$, $K_1 \subseteq J$, $i_1 + 1 \notin J$ и правое $K_2 = \{i_2, i_2 + 1, \dots, n\}$, $K_2 \subseteq J$, $i_2 - 1 \notin J$.

Очевидно, что множество $J$ можно представить в виде дизъюнктного объединения этих множеств, а именно:

$$J = K_1 \cup K_2 \cup \bigcup_{\alpha=1}^{\beta} J_\alpha \tag{12.2}$$

где $\beta$ — число всех связных подмножеств.

Подсчитаем число связных множеств, содержащих нечетное число номеров. Будем называть такие множества нечётными, а связные множества содержащие чётное число элементов — чётными. Из правила Гейла следует, что при $k = d$ все связные множества содержат чётное число элементов, т.е. искомое значение равно нулю.

**Теорема 12.2.** *$F$ является гранью тогда и только тогда, когда число связных подмножеств $J_F$ с нечетным числом элементов не превосходит величины $d - k$.*

**Доказательство.** Необходимость.

Пусть $F \in \Gamma_{d-1}(C)$ (принадлежит множеству граней размерности $d - k$). Тогда найдется фасета $H \in \Gamma_{d-1}(C)$, у которой соответствующее множество $J_H$ образуется как объединение

$$J_H = J_F \bigcup \{j_{d-k+1}, \dots, j_d\} = \bigcup_{\alpha=1}^{\beta} J_{\alpha'}$$

Для фасеты это утверждение было доказано.

Если из какого-нибудь четного подмножества $J$ выбросить один индекс, то количество нечетных подмножеств может увеличиться не более, чем на 1. Соответственно, если выбрасывать $k$ индексов, то количество нечетных множеств возрастет не более, чем на $k$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество $J_F$ представляется в виде (12.2), причем количество нечетных связных множеств в объединении не превосходит $d - k$. Рассмотрим многочлен

$$\left( \prod_{\alpha \equiv 0 (mod\ 2)} \prod_{j \in J_\alpha} (t - t_j) \right) \prod_{j \in K_1} (t - t_j) \prod_{j \in K_2} (t - t_j) \left( \prod_{\alpha \equiv 1 (mod\ 2)} \prod_{j \in J_\alpha} (t - t_j)^2 \right)$$

Он имеет степень не больше $d$ (благодаря ограничению $d - k$). На вершинах из $F$ этот многочлен обращается в 0, на всех остальных он принимает положительные значения. По этому многочлену можно построить опорный функционал (пользуясь тем же приемом, что и раньше), существование которого доказывает, что $F$ является гранью. $\square$

# 13. $f$-векторы симплициальных политопов

Перейдем к вычислению коэффициентов многочлена

$$f(\lambda, C) = \sum_{\nu=0}^{[d/2]} \alpha_{2\nu} \lambda^\nu (1+\lambda)^{d+1-\nu} +$$
$$\sum_{\nu=0}^{[d/2]} \alpha_{2\nu+1} (\lambda^\nu (1+\lambda)^{d+2-\nu} - \lambda^{d+2-\nu}(1+\lambda)^\nu)$$

для симплициального политопа. Ранее мы уже вычислили коэффициенты $\alpha_{2\nu} = \begin{pmatrix} n+\nu-d-2 \\ \nu \end{pmatrix}$.

Сначала рассмотрим случай четного $d = 2m$. Подсчитаем сумму, содержащую коэффициенты $\alpha_{2\nu+1}$, а именно,

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_{2\nu+1} (\lambda^\nu (1+\lambda)^{2(m+1)-\nu} - \lambda^{2(m+1)}(1+\lambda)^\nu)$$

Запишем $f$-вектор симплициального политопа при $d = 4$. Нам уже известно, что для граничного политопа

$$\begin{aligned} f(\lambda, \partial C) &= 1 + n\lambda + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \lambda^2 + n(n-3)\lambda^3 + \frac{n(n-3)}{2}\lambda^4 = \\ &= (1+\lambda)^5 - \lambda^5 + (n-5)(\lambda(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)) + \\ &+ \frac{(n-4)(n-5)}{2}(\lambda^2(1+\lambda)^3 - \lambda^3(1+\lambda)^2) \end{aligned}$$

Вычислим оставшиеся коэффициенты:

$$\begin{aligned} f(\lambda, C) = (1+\lambda)^5 &+ \alpha_1(\lambda(1+\lambda)^5 - \lambda^5(1+\lambda)) + \\ &+ \alpha_3(\lambda^2(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)^2) + \\ &+ (n-5)\lambda(1+\lambda)^4 + \frac{(n-4)(n-5)}{2}\lambda^2(1+\lambda)^3 \end{aligned}$$

Так как, $f_0(C) = n$, то $\alpha_1 = 0$ (коэффициет при $\lambda$ равен $n$, а больше быть не может, так как это число вершин).

Мы знаем, что $f_1(\partial C) = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ и $f_i(C) \geqslant f_i(\partial C)$. В то же время, $f_i(C) \leqslant \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$. Следовательно, $\alpha_3 = 0$. Такое рассуждение проходит для любого четного $d$.

Рассмотрим случай $d = 5$.

$$
\begin{aligned}
f(\lambda, C) = (1+\lambda)^6 + \alpha_1(\lambda(1+\lambda)^6 - \lambda^6(1+\lambda)) + \\
+ \alpha_3(\lambda^2(1+\lambda)^5 - \lambda^5(1+\lambda)^2) + \\
+ \alpha_5(\lambda^3(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)^3) + \\
+ (n-6)\lambda(1+\lambda)^5 + \frac{(n-5)(n-6)}{2}\lambda^2(1+\lambda)^4
\end{aligned}
$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Но для $\alpha_5$ подобные аргументы не верны. Единственное ограничение $f_2(C) \leqslant \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$ или $4\begin{pmatrix} n-5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 10(n-6) + \alpha_5 \leqslant \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$.

Для случая нечетного $d$ единственным параметром $f$-вектора симплициального политопа является $\alpha_d \leqslant \begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix}$.

# 14. Задача об оптимальной триангуляции

Задача: Каким образом нужно расположить $n$ точек на плоскости ($d = 2$), чтобы число треугольников в триангуляции данной точечной конфигурации было максимальным?

Пусть $A$ — 2-мерная точечная конфигурация, а $T_A$ — ее триангуляция. Тогда

$$\begin{aligned} f(\lambda, T_A) &= (1+\lambda)^3 + \alpha_1(\lambda(1+\lambda)^3 - \lambda^3(1+\lambda)) + \alpha_2\lambda(1+\lambda)^2 = \\ &= 1 + \lambda(3 + \alpha_1 + \alpha_2) + \lambda^2(3 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ &+ \lambda^3(1 + 2\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

$3 + \alpha_1 + \alpha_2 = n$ — количество вершин (точек в конфигурации);

$3 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3n - \alpha_2 - 6$ — количество ребер;

$1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2n - \alpha_2 - 5$ — количество двумерных граней, т. е. треугольников (его и надо максимизировать).

Очевидно, что для максимизации количества и ребер, и граней нужно минимизировать значение коэффициента $\alpha_2$. Единственно ограничение на него: $\alpha_2 \geqslant 0$. Если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1 = n - 3$, при этом число ребер равно $2n - 5$ и число треугольных граней равно $n - 3$.

Алгоритм решения поставленной задачи: взять треугольник и внутрь него "набросать" $n - 3$ попарно различные точки.

Возможна другая постановка задачи: Имеется заданное расположение $n$ точек. Требуется построить триангуляцию с максимальным числом треугольников. В этом случае $\alpha_1 = 0$ (внутри границы точек нет). Нужно подсчитать сколько получится граней.

Рассмотрим случай $d = 3$ в предположении, что $\alpha_1 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\lambda, T_A) &= (1+\lambda)^4 + \alpha_1(\lambda(1+\lambda)^4 - \lambda^4(1+\lambda)) + \\ &+ \alpha_2\lambda(1+\lambda)^3 + \alpha_3(\lambda^2(1+\lambda)^3 - \lambda^3(1+\lambda)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda, \partial T_A) &= (1+\lambda)^4 - \lambda^4 + \alpha_2(\lambda(1+\lambda)^3 - \lambda^3(1+\lambda)) = \\ &= (1+\lambda)^4 - \lambda^4 + \alpha_2\lambda(1+\lambda)(1+2\lambda) \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$f_0(\partial T_A) = \alpha_2 + 4; f_1(\partial T_A) = 6 + 3\alpha_2; f_2(\partial T_A) = 4 + 2\alpha_2$$

Первая координата $f$-вектора совпадает с числом вершин, откуда следует

$$\alpha_2 = n - (d+1)$$

Это равенство всегда выполняется для симплициальных многогранников при условии $\alpha_1 = 0$.

Так как параметр $\alpha_2$ определился однозначно, то и триангуляция границы, по сути, определена однозначно. Для нашего случая ($d = 3$) получилось

$$f_1(\partial T_A) = 3n - 6; f_2(\partial T_A) = 2n - 4$$

В общем случае $\alpha_1 \geqslant 0$. Тогда $\alpha_2 \leqslant n - 4, \alpha_3 \leqslant \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$. В триангуляции участвует уже квадратичное число симплексов.

Пусть $d = 2m$. Тогда алгоритм построения оптимальной триангуляции (с максимальным числом симплексов) следующий: взять симплициальный политоп с числом вершин $n - d$, найти для него максимальное $\alpha_m$ и вложить получившуюся триангуляцию в симплекс.

Иными словами: берем циклический политоп и "завертываем"его в $d$-мерный симплекс.

Пусть $d = 2m + 1$. Оптимальную триангуляцию можно получить при максимальном значении коэффициента $\alpha_m$. Можно доказать, что любая триангуляция циклического политопа для свободного параметра $\alpha_m$ реализуема (значит, и для максимального значения тоже). Следовательно, алгоритм такой же, как и для случая четного $d$.

Для циклического политопа доказано, что число граней $i$-й размерности является $O(n^{i+1}), i \leqslant [d/2]$; при $i > [d/2]$ его величина связана с $\alpha_m$.

Ранее были получены выражения для величин $\alpha_i$. В частности было доказано, что

$$\alpha'_{2i} = \alpha_{2i} + \alpha^-_{2i-2} - \alpha^-_{2i-1}, \tag{14.1}$$

в этом выражении величины $\alpha^-_j$ соответствуют симплициальному комплексу $\acute{C}^-$, величины $\alpha'_j$ — симплициальному комплексу $\acute{C}'$, а величины $\alpha_j$ — симплициальному комплексу $\acute{C}$. Остановимся подробнее на связи между $\acute{C}$, $\acute{C}'$ и $\acute{C}^-$.

Пусть мы строим триангуляцию точечной конфигурации, пользуясь алгоритмом Фурье–Моцкина. Пусть также на данном шаге уже построена триангуляция точек $a_1, \dots, a_n$ и добавляется новая точка $a_{n+1}$. Уже построенная триангуляция — симплициальный комплекс $\acute{C}$, триангуляция, которую требуется построить (включая точку $a_{n+1}$) — симплециальный комплекс $\acute{C}'$.

При добавлении новой точки к уже построенной триангуляции возможны два варианта:

1) $a_{n+1}$ лежит в комплексе $\acute{C}$. В этом случае мы исключаем ее из рассмотрения и $\acute{C}' = \acute{C}$.

2) $a_{n+1}$ не лежит в комплексе $\acute{C}$. Тогда придется к уже построенному комплексу $\acute{C}$ добавить новые симплексы. Все грани $\acute{C}$ делятся на видимые и невидимые. Новые симплексы получаются путем построения пирамид с основанием на "старых"гранях (уже триангулированных) и дополнительной вершиной в точке $a_{n+1}$.

Между точкой $a_{n+1}$ и видимыми из нее гранями помещают экран — гиперплоскость, на которую проектируются старые видимые грани и новые добавленные. На этой гиперплоскости получается симплециальный комплекс $\acute{C}^-$; его размерность на 1 мельше размерностей $\acute{C}$ и $\acute{C}'$. При таком построении имеем

$$\acute{C}' = \acute{C} \bigcup pyr_{a_{n+1}} \acute{C}^-$$

Запишем $f$-векторы в виде:

$$f(\lambda, \acute{C}) = \sum_{i=0}^{d+1} \gamma_i \lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i}, \gamma_0 = 1, \gamma_{d+1} = 0$$
$$f(\lambda, \acute{C}') = \sum_{i=0}^{d+1} \gamma'_i \lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i}, \gamma'_0 = 1, \gamma'_{d+1} = 0$$

$\acute{C}'$ является подкомплексом граничного комплекса $\partial\acute{C}$. Обозначим через $\acute{C}^+$ множество невидимых из $a_{n+1}$ граней $\acute{C}$.

$$\partial\acute{C} = \acute{C}^- \bigcup \acute{C}^+ \backslash (\acute{C}^- \bigcap \acute{C}^+) = \acute{C}^- \bigcup int\acute{C}^+$$

Из этого выражения было получено, что $\alpha_i \geqslant 0$ и формула (14.1).

$$\alpha_{2i} = \gamma_i - \gamma_{d+1-i} \geqslant 0$$
$$\alpha_{2i+1} = \gamma_{d-i} - \gamma_{d-i+1} \geqslant 0$$

Мы получили, что $\alpha_{2i} = O(n^m)$. Из (14.1) следует, что и $\alpha_i$ при нечетных $i$ ограничены той же величиной:

$$\alpha^{-}_{2i-1} \leqslant \alpha_{2i} + \alpha'_{2i-2} \leqslant \left( \begin{array}{c} n+i-2-d \\ i \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} n+i-2-d \\ i-1 \end{array} \right) =$$

$$= \left( \begin{array}{c} n+i-1-d \\ i \end{array} \right)$$

## 15. Булевы функции триангуляций выпуклых многогранников

Здесь представлен краткий обзор результатов о граничных комплексах выпуклых многогранников и их триангуляций. Он был бы вполне традиционен для комбинаторной теории выпуклых многогранников, если бы не главная тема статьи – связь этой теории с булевыми функциями. Эта связь вводится в п. 1, где выпуклому многограннику $P$ ставится в соответствие булева функция $\varphi_P$, равная 0 на характеристических векторах граней $P$ и только на них. В п. 2 рассматриваются граничные комплексы $\partial P$ симплициальных многогранников, для них функции $\varphi_{\partial P}$ монотонны. В п. 3 рассматриваются симплициальные комплексы (для них соответствующие булевы функции тоже монотонны) триангуляций выпуклых многогранников. Этот раздел является расширенной версией доклада, прочитанного автором на 16-й международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» [11].

**1**. Пусть $P$ - множество решений (называемое далее *полиэдром*) системы линейных неравенств (в вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$)

$$\sum_{k=1}^{d} a_{ik}x_k \leq a_{i0}, i = 1, ..., m. \tag{1}$$

Под *размерностью* $P$ ($dimP$) понимают максимальное число аффинно независимых решений системы (1), если она совместна, и считают $dimP = -1$ в противном случае. Ограниченный полиэдр называют *выпуклым многогранником*. Будем называть его также *политопом* или r-*политопом*, если $dimP = r$. Рассмотрим такую линейную функцию $ax$, для которой достигается $\max_{x\in P} ax = \alpha$. Множество $P_a = \{x \in P/ax = \alpha\}$ называют *гранью* полиэдра $P$, в частности при $a = 0$ получим, что $P$ является (единственной) r-мерной гранью r-политопа $P$. Удобно также считать пустое множество (-1)-мерной гранью любого политопа $P$. Хорошо известно (см., например, [2, 4, 13, 18, 26]), что любой политоп $P$ можно задать как выпуклую оболочку своих вершин (т. е. 0-мерных граней) $P = conv(v_1, v_2, ..., v_n)$, где

$$conv(v_1, ..., v_n) = \{x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j / \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, ..., n\}, \tag{2}$$

а каждая его грань $P_a = conv(v_j, j \in J_a)$, где $J_a = \{j/av_j = \alpha\}$. В частности, положив $a_i = (a_{i1}, ..., a_{id})$, с $i-$м неравенством системы (1) свяжем грань $F_i = \{x \in P/\sum_i a_{ik}x_k = a_{i0}\}$. Обозначим через $\Gamma_k(P)$ множество $k$-мерных граней политопа $P$ и положим $\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^{r} \Gamma_k(P)$, $\partial P = \Gamma(P) \setminus \{P\}$, $f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), ..., f_r(P))$, где $f_k(P) = |\Gamma_k(P)|$ - число k-мерных граней политопа P,

$$f(\lambda, P) = \sum_{k=-1}^{r} f_k(P)\lambda^{k+1}$$

и $f(\lambda, \partial P) = f(\lambda, P) - \lambda^{r+1}$.

Известно также, что если $r = d$ и система (1) *неприводима*, т. е. не содержит неравенств-следствий, то $f_{d-1}(P) = m$, $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, ..., F_m\}$ и множество

$$\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^{r} \Gamma_k(P)$$

с естественным частичным упорядочиванием $F \subseteq G$ является решёткой (определение и свойства решётки см. в [1]), в частности $\inf(P_a, P_b) = P_a \bigcap P_b = P_{a+b}$. Она называется *граневой решёткой* политопа $P$, а множество $\partial P$ называется *граничным комплексом* политопа $P$.

Политоп $P$ называется r-*симплексом*, если $dimP = f_0(P) - 1 = r$ . Нетрудно видеть, что для него $\Gamma_k(P)$ составляет $(k+1)$-мерный слой $(r+1)$-мерного булева куба, $f_k(P) = \binom{r+1}{k+1}$, $f(\lambda, P) = (1+\lambda)^{r+1}$.

Рассмотрим $(n-1)$-симплекс $S = conv(v_1, v_2, ..., v_n)$. Для каждого $J$, $J \subseteq \{1, ..., n\}$, рассмотрим булеву функцию

$$v^J = \prod_{j \in J} v_j \prod_{j \notin J} \overline{v_j}, \tag{3}$$

считая теперь $v_1, v_2, ..., v_n$ булевыми переменными, что, впрочем, не будет приводить к недоразумениям, но позволит несколько упростить запись. Отсылая за сведениями по булевым функциям к [14] , заметим только, что, используя стандартные обозначения для отрицания и дизъюнкции, конъюнкцию мы записываем в виде произведения. Нетрудно видеть, что для любого $A$, $A \subseteq \{1, ..., n\}$ формула

$$\varphi_A(v_1, v_2, ..., v_n) = \bigvee_{J \notin A} v^J, \tag{4}$$

задаёт булеву функцию, *нуль* (т. е. двоичный набор, на котором $\varphi_A = 0$) которой соответствует подмножеству $J \in A$, а *единица* (определяемая аналогично) − подмножеству $J \notin A$.

Тогда для $\varphi_{\Gamma(P)}$ можно получить совершенную конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы :

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n) = \prod_{F \in \Gamma(P)} ((\bigvee_{v_j \notin F} v_j) \vee (\bigvee_{v_j \in F} \overline{v_j})), \tag{5}$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n) = \bigvee_{F \notin \Gamma(P)} \prod_{v_j \in F} v_j \prod_{v_j \notin F} \overline{v_j}. \tag{6}$$

Заменяя в (5) и (6) множество $\Gamma(P)$ на $\partial P$, получим аналогичные формулы для $\varphi_{\partial P}$, из которых следует, что

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, ..., v_n) \bigvee \prod_{j=1}^{n} v_j. \tag{7}$$

$$\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n) = (\bigvee_{j=1}^{n} \overline{v_j}) \varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n). \tag{8}$$

Пример 1. Если $P - (n-1)-$ симплекс, то $\varphi_{\Gamma(P)}(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$ − все переменные фиктивные − и $\varphi_{\partial P}(v_1, v_2, ..., v_n) = \prod_{i=1}^{n} v_i$

Пример 2. Если $d = 2$ и $P-$ квадрат, то следующая таблица задаёт булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$

Таблица 1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 0 0 0 | 1 1 0 1 0 0 | 1 1 1 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 1 0 0 | 1 0 1 0 1 0 | 1 1 0 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 0 1 0 | 0 1 1 0 0 1 | 1 0 1 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 0 0 1 | 0 0 0 1 1 1 | 0 1 1 1 | 1 |
| $\varphi_{\Gamma(P)}$ | 0 | 0 0 0 0 | 0 1 0 0 1 0 | 1 1 1 1 | 0 |
| $\varphi_{\partial P}$ | 0 | 0 0 0 0 | 0 1 0 0 1 0 | 1 1 1 1 | 1 |

Из (5) следует, что

$\varphi_{\Gamma(P)} = (\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(v_1 \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee v_2 \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee v_3 \bigvee \overline{v_4})\&$
$\&(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee v_4)(v_1 \bigvee v_2 \bigvee \overline{v_3} \bigvee \overline{v_4})(\overline{v_1} \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee \overline{v_4})(v_1 \bigvee \overline{v_2} \bigvee \overline{v_3} \bigvee v_4)(\overline{v_1} \bigvee \overline{v_2} \bigvee v_3 \bigvee v_4)\&$
$\&(v_1 \bigvee v_2 \bigvee v_3 \bigvee v_4) = v_1 v_3 \overline{v_4} \bigvee v_1 \overline{v_2} v_3 \bigvee \overline{v_1} v_2 v_4 \bigvee v_2 \overline{v_3} v_4$

Далее из (7) получаем

$\varphi_{\partial P} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_1v_2v_3v_4 = v_1v_3 \bigvee v_2v_4$.

Пример 3. Пусть $P = conv(v_1, v_2, ..., v_n)$ – $d$-политоп в $R^{d+1}$ и $v_0$ не принадлежит аффинной оболочке $\Gamma_0(P)$. *Пирамидой с основанием* $P$ и *апексом* $v_0$ называется [4,18,26] $(d + 1)$ - политоп $Q = conv(v_0, v_1, ..., v_n)$. Тогда $f(\lambda, Q) = (1 + \lambda)f(\lambda, P)$, $\varphi_{\partial Q} = \varphi_{\Gamma(P)} \bigvee v_0\varphi_{\partial P} = (v_0 \bigvee \overline{v_1} \bigvee ... \bigvee \overline{v_n})\varphi_{\partial P}$ и $\varphi_{\Gamma(Q)}(v_0, v_1, ..., v_n) = \varphi_{\Gamma(P)}(v_1, ..., v_n)$ ($v_0-$ фиктивная переменная),

В теории линейных неравенств [13, 26] известен алгоритм (назовём его алгоритмом Фурье-Моцкина), позволяющий переходить от описания политопа в виде (1) к виду (2) и обратно. В связи с оценкой трудоёмкости этого алгоритма возникает

Задача 1: при заданном $f_0(P) = n$ найти $\max f_k(P)$ – решенная П. МакМюлленом в 1970 г. [21].

Введённые нами булевы функции $\varphi_{\Gamma(P)}$ и $\varphi_{\partial P}$ позволяют по-новому взглянуть на Задачу 1 и ставить новые разнообразные вопросы, связанные прежде всего с их экономным представлением. При решении таких вопросов нельзя не воспользоваться необозримым множеством результатов, накопленных маткибернетикой о сложности булевых функций (см., например, [7]). Заметим, что при любой фиксированной размерности $d$ сложность каждой из функций (5) - (8) ограничена сверху некоторым полиномом от $n$.

Естественно возникает

Задача 2 (о реализации $f$-вектора): перечислить необходимые и достаточные условия, которыми должен обладать целочисленный вектор $f$ для того, чтобы он совпадал с $f(P)$ для некоторого $d$-политопа .

Со времён Штейница, решившего Задачу 2 при $d = 3$ в 1922 г. (см. например, [4]), прогресс невелик. В общем случае известно лишь необходимое условие Эйлера-Пуанкаре

$$f(-1, P) = \sum_{k=-1}^{d} f_k(P)(-1)^{k+1} = 0 \tag{9}$$

и доказанная в [17] (в более общем варианте) Г. Бругессером и П. Мани

Теорема 1. Граничный комплекс $\partial P$ имеет линейную развёртку.

Конструкция, лежащая в основе доказательства этих утверждений, имеет прозрачный геометрический смысл. Рассматривается прямая $v_\lambda = \lambda q$, где $0 \in intP$ ($intP = P \setminus \partial P$ – множество внутренних точек политопа $P$), $\lambda-$ вещественное число,$a_iq \neq 0$ при

$i = 1, ..., m$ и $\lambda_i = a_{i0}/a_i q$ - значение параметра $\lambda$, при котором прямая пересекает аффинную оболочку грани $F_i$. Ясно, что существует такое $q$, что $\lambda_i \neq \lambda_k$ при $i \neq k$. Тогда, переупорядочив $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, ..., F_m\}$ неравенствами

$$\frac{1}{\lambda_1} > ... > \frac{1}{\lambda_m}, \tag{10}$$

получим развёртку граневого комплекса $\partial P$, называемую *линейной*. Определение общего понятия *развертки* политопиального (и, в частности, симплициального) комплекса можно найти в [2, 25].

Под *ФМ-алгоритмом* будем понимать следующую процедуру, позволяющую по заданной последовательности точек $v_1, ..., v_n$ построить неприводимую систему (1), описывающую политоп $P = P_n = conv(v_1, ..., v_n)$. Здесь не требуется, чтобы $v_j \in \Gamma_0(P)$; потребуем лишь, чтобы политоп $P_{d+1}$ был $d$ - симплексом и $0 \in intP_{d+1}$ (ограничения технического характера). Предположив, что задача решена для политопа $P$ (при $n = d + 1$ это просто) и появилась новая точка $v_{n+1}$, покажем ее решение для политопа $P' = P_{n+1}$. Положим $\mu_i = a_{i0} - a_i v_{n+1}$ и разобьем множество $1, ..., m$ на три подмножестваства

$$I_- = \{i/\mu_i < 0\},\ I_+ = \{i/\mu_i > 0\},\ I_0 = \{i/\mu_i = 0\}.$$

Далее для каждого $i \in I_-$ сформируем множество

$$M_i = \{i' \in I_+/F_i \cap F_{i'} \in \Gamma_{d-2}(P)\}$$

и для каждого $i' \in M_i$ образуем неравенство

$$(\mu_{i'} a_i - \mu_i a_{i'})x \leq \mu_{i'} a_{i0} - \mu_i a_{i'0}.$$

Если к системе (1) добавить все полученные таким способом неравенства и затем выбросить неравенства с номерами из $I_-$, то новая система будет описывать политоп $P'$. О неприводимости новой системы следует позаботиться дополнительно.

Следующее понятие является одним из основных в комбинаторной геометрии [2-4, 18, 25, 26]. Политоп $P'$ называется *комбинаторно эквивалентным* политопу $P$ ($P \sim P'$), если существует взаимно однозначное отображение множества $\Gamma(P)$ на множество $\Gamma(P')$, сохраняющее отношение включения (при этом решётки называют *изоморфными* и пишут $\Gamma(P) \approx \Gamma(P')$).

Ещё меньше известно о следующей задаче:

Задача 3 (о числе комбинаторно неэквивалентных d-политопов с заданными f-векторами).

На множестве булевых функций от n переменных введём отношение эквивалентности, положив $\varphi(y_1, ..., y_n) \sim \varphi(y'_1, ..., y'_n)$, если $\varphi(y'_1, ..., y'_n) = \varphi(y_{\pi_1}, ..., y_{\pi_n})$, при некоторой перестановке $\pi$ номеров переменных $y_1, ..., y_n$.

Следующее легко проверяемое утверждение позволяет дать точный перевод задач комбинаторной геометрии (подобных задачам 2 и 3) на язык булевых функций.

**Утверждение 1**. $P \sim P' \Longleftrightarrow \varphi_p \sim \varphi_{p'}$

**2**. В этом пункте рассмотрим класс $P^s(d, n)$ симплициальных (политоп $P$ называется *симплициальным*, если любая его грань, отличная от $P$, является симплексом) $d$-политопов с n вершинами.

Граничный комплекс $\partial P$ симплициального политопа $P$ удовлетворяет условию:

$$F \in \partial P \text{ и } G \in \Gamma(F), \text{ то } G \in \partial P, \tag{11}$$

и, следовательно, даёт пример того, что в топологии называется *симплициальным комплексом* [3, 4, 25, 26]. Из условия (11) следует, что для задания $\partial P$ достаточно знать множество $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, ..., F_m\}$ или множество $N(P)$ минимальных по включению подмножеств $\{N_1, ..., N_l\}$ вершин булева $n$-куба, не принадлежащих $\partial P$ . Множество $N(P)$ необходимо для построения *кольца Стенли-Райснера* [3, 25], применяемого при изучении симплициального комплекса $\partial P$ алгебраическими методами.

Следующее утверждение, в частности, позволяет решить возникающий при этом вопрос о связи множеств $\Gamma_{d-1}(P)$ и $N(P)$ стандартными методами булевой алгебры.

**Утверждение 2**. Если $P \in P^s(d, n)$, то булева функция $\varphi_{\partial P}$ монотонна, $\Gamma_{d-1}(P)$ есть множество её верхних нулей, а $N(P)-$ множество её нижних единиц,

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \Pi_{i=1}^m(\bigvee_{j \notin F_m} v_j), \tag{12}$$

$$\varphi_{\partial P}(v_1, ..., v_n) = \bigvee_{k=1}^{l} \prod_{j \in N_k} v_j, \tag{13}$$

Для решения вопросов, связанных с эффективным представлением монотонной булевой функции (в различных базисах) отошлём к обзору [6]. Весьма полезным может оказаться применение пороговых булевых функций, так как используя результаты В. К.

Коробкова [5], множество нулей функции $\varphi_{\partial P}$ можно описать системой линейных неравенств

$$\sum_{j \in N_k} v_j \leq |N_k| - 1, k = 1, ..., l \tag{14}$$

Из теоремы 1 следует: для любого $P$ из $P^s(d,n)$ симплициальный комплекс $\partial P$ линейно разворачиваем, т. е. существует вектор $q$, упорядочивающий грани из $\Gamma_{d-1}(P)$ неравенствами (10) так, что

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^{m} [G_i, F_i], \tag{15}$$

где $[G,F] = \{H \in \Gamma(P)/G \subseteq H \subseteq F\}$, $G_{k+1}$ - наименьшая по включению грань грани $F_{k+1}$, не принадлежащая подкомплексу $(\partial P)_k = \bigcup_{i=1}^{k} [G_i, F_i]$, и $G_1 = \oslash$.

Отсюда несложно получить (при $k = 1, 2, ..., m-1$)

**Утверждение 3**.

$$\varphi_{(\partial P)_{(k+1)}}(v_1, ..., v_n) = \varphi_{(\partial P)_k}(v_1, ..., v_n)(\bigvee_{v_j \notin F_{k+1}} v_j), \tag{16}$$

Соответствующее утверждение можно сделать и для дизъюнктивной нормальной формы.

Из [17] следует также, что для любого $P$, $P$ из $P^s(d,n)$, многочлен $f(\lambda, \partial P)$ можно представить в виде

$$f(\lambda, \partial P) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} g_k(P)(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k), \tag{17}$$

где $g_0(P) = 1$ и $g_k(P)$- целые неотрицательные числа.

Заметим, что (17) влечет равенство $f(-1-\lambda, \partial P) = (-1)^d f(\lambda, \partial P)$, равносильное следующим *уравнениям Дена-Соммервилля* (см., например, [2-4, 18, 25, 26])

$$f_{k-1}(P) = \sum_{i=k}^{d} (-1)^{d-i} \binom{i}{k} f_{i-1}(P).$$

Для того, чтобы полностью охарактеризовать $f$-векторы симплициальных политопов (а, значит, и представляемых ими булевых функций) нам понадобится следующее определение. Для любых натуральных чисел $a$ и $i$ существует единственное *биномиальное* i-*разложение числа* $a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + ... + \binom{a_j}{j}$, где $a_i > a_{i-1} > ... > a_j \geq j \geq 1$. Тогда число $a^{<i>} = \binom{1+a_i}{1+i} + ... + \binom{1+a_j}{1+j}$ называется *i-й псевдостепенью числа a*.

Проанализировав накопленную к тому времени информацию, П. МакМюллен в 1971 г. [22] предположил, что добавление к вышеперечисленным условий

$$g_{k+1}(P) \leq (g_k(P))^{<k>}, k = 1, ..., \lfloor d/2 \rfloor - 1 \tag{18}$$

решает задачу 2, для класса симплициальных политопов. В 1980 г. это было доказано (Л. Биллера и К. Ли [16] - достаточность, Р. Стенли [24] - необходимость).

Сформулируем этот результат в следующем виде.

Теорема 2. Положим $F^{\partial}(\lambda, d, n) = \{f(\lambda, \partial P), P \in P^s(d, n)\}$. Тогда для того, чтобы $f(\lambda) \in F^{\partial}(\lambda, d, n)$, необходимо и достаточно существование таких неотрицательных целых чисел $g_k$ $(k = 0, 1, 2, ..., \lfloor d/2 \rfloor)$, что

$$g_0 = 1, g_1 = n - d - 1, g_{k+1} \leq g_k^{<k>} (k = 1, 2, ..., \lfloor d/2 \rfloor - 1)$$

и

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} g_k(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k).$$

Следующие два примера дают нижние и верхние оценки величин $f_i(P)$ для $P$ из $P^s(d, n)$. В той или иной форме они излагаются во многих работах, например в [2, 3, 25, 26]. Там же можно найти сведения по истории вопроса и соответствующую библиографию.

Пример 4. Пусть $P_n \in P^s(d, n)$, $F-$ одна из его $(d-1)$-мерных граней, и $v_{n+1}$ $-$ точка „над" ней, т. е. если $ax \leq \alpha$ $-$ неравенство, соответствующее $F$, то $v_{n+1}$ удовлетворяет остальным неравенствам системы (1), но $av_{n+1} > d$. Тогда $P_{n+1} = conv(P_n, v_{n+1}) \subseteq P^s(d, n+1)$, $g_i(P_{n+1}) = g_i(P_n)$ при $i \neq 1$ и $g_1(P_{n+1}) = g_1(P_n) + 1$. В частности, взяв $d$-симплекс в качестве $P_{d+1}$, получим $g(P_n) = (1, n-d-1, 0, ..., 0)$. Отсюда следует, что для любого $P$ $P^s(d, n)$

$$f_i(P) \geq \binom{d+1}{i+1} + (n-d-1)\binom{d}{i}, \quad i = 1, ..., d-2,$$

$f_{d-1}(P) \geq (n-d)(d-1)+2$ (это гипотеза Б. Грюнбаума о нижней границе, доказанная Д. Барнеттом в [15]).

Пример 5 (см., например, [2-4, 18, 26]). Пусть $v(t) = (t, t^2, t^3, ..., t^d)$ – отображение $R$ в $R^d$, $t_1 < t_2 < ... < t_n$. При $n > d$ определим *циклический многогранник* $C(d,n) = conv(v(t_1), ...v(t_n))$. Известно, что $C(d,n) \in P^s(d,n)$ и $f_i(C(d,n)) = \binom{n}{i+1}$ при $i = 0, ..., \lfloor d/2 \rfloor - 1$. Отсюда из уравнения (17) следует, что $g_k(C(d,n)) = \binom{n-d+k-2}{k}$, а из неравенства (18), что при каждом $k = 0, ..., \lfloor d/2 \rfloor$ это максимально возможные значения для $g_k(P)$ на классе $P^s(d,n)$. Подставляя их в формулу (17), находим для $k = 0, 1, ..., d$

$$f_{k-1}(C(d,n)) = \sum_{i=0}^{\delta} \left( \binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} \quad d = 2\delta + 1,$$

$$f_{k-1}(C(d,n)) = \sum_{i=0}^{\delta-1} \left( \binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right) \binom{n-d-1+i}{i} + \binom{\delta}{k-\delta} \binom{n-\delta-1}{\delta} \quad d = 2\delta$$

Это ключ к доказательству уже упомянутого в п. 1 результата П. Макмюллена [21]: для любого $d-$ политопа $P$ с $n$ вершинами

$$f_i(P) \le f_i(C(d,n)), \ i = 0, 1, ..., d-1.$$

Отсюда, в частности, следует неулучшаемая верхняя оценка числа $m$ конъюнкций в (12)

$$m \le \binom{n - \lfloor (d-1)/2 \rfloor - 1}{\lfloor d/2 \rfloor} + \binom{n - \lfloor d/2 \rfloor - 1}{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}.$$

**3**. Множество $V = \{v_1, ..., v_n\}$, где $v_j \in \mathbf{R}^d$, назовём $(d,n)$-*точечной конфигурацией*, если $P = convV$ есть $d$-политоп. *Триангуляцией политопа $P$ с узлами из множества $V$* назовём множество $T(V) = \{S_1, ..., S_t\}$ таких $d$-симплексов $S_\tau$, для которых выполнены три следующие условия:

1)$\Gamma_0(S_\tau) \subseteq V$,

2) $\bigcup_{\tau=1}^{t} S_\tau = P$ и

3) пересечение любых двух $d$-симплексов является гранью каждого из них.

Тогда множество $\triangle(T(V)) = \bigcup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ даёт ещё один пример симплициального комплекса. Будем писать $\triangle$ вместо $\triangle(T(V))$, если это не приводит к недоразумениям. При $k = -1, 0, ..., d$ обозначим через $\triangle_k = \bigcup_{\tau=1}^{t} \Gamma_k(S_\tau)$ множество $k$-мерных граней симплициального комплекса $\triangle$, через $\partial\triangle$ его граничный подкомплекс, положим $f_k(\triangle) = |\triangle_k|$, $f(\triangle) = (f_{-1}(\triangle), ..., f_d(\triangle))$ и определим многочлены $f(\lambda, \triangle)$, $f(\lambda, \partial\triangle)$ и булевы функции $\varphi_\triangle$ и $\varphi_{\partial\triangle}$ аналогично прежнему.

Пример 6. Пусть $Q = pyr_{v_0}P-$ пирамида с апексом $v_0$ и основанием $P = conv(v_1, ..., v_n)$ (см. пример 3), $T(V) = \{S_1, S_2, ..., S_t\}-$ триангуляция политопа $P$ с узлами из $V = \{v_1, ..., v_n\}$ и $S'_\tau = pyr_{v_0}S_\tau$ $(\tau = 1, ..., t)$. Тогда $T(V') = \{S'_1, ..., S'_t\}-$ триангуляция $Q$ с узлами из $V' = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ и, если $\Delta$ и $\Delta'-$ соответствующие симплициальные комплексы, то $\varphi_{\Delta'}(v_0, ..., v_n) = \varphi_\Delta(v_1, ..., v_n)$ и $f(\lambda, \Delta') = (1 + \lambda)f(\lambda, \Delta)$.

**Утверждение 4.** Для любой триангуляции любой точечной конфигурации булевы функции $\varphi_\triangle$ и $\varphi_{\partial\triangle}$ монотонны. Если $V = \Gamma_0(P)$ и $P \in P^s(d, n)$, то $\varphi_{\partial\triangle} = \varphi_{\partial P}$.

Пример 7. Если $n = d + 2$, то существуют ровно две различных триангуляции $T_1(V)$ и $T_2(V)$. Если $\mu = (\mu_1, ..\mu_n)$ такой ненулевой вектор, для которого $\sum_{j=1}^n \mu_j = 0$ и $V\mu = 0$, то он определяется однозначно с точностью до умножения на постоянную, отличную от нуля. Положим

$$J_> = \{j \ / \ \mu_j > 0\} \quad J_< = \{j \ / \ \mu_j < 0\}.$$

Тогда

$$\varphi_{\triangle(T_1(V))}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_>} v_j,$$

$$\varphi_{\triangle(T_2(V))}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_<} v_j,$$

$$\partial\triangle = \partial\triangle(T_1(V)) = \partial\triangle(T_2(V))$$

и

$$\varphi_{\partial\triangle}(v_1, ..., v_n) = \prod_{j \in J_>} v_j \vee \prod_{j \notin J_>} v_j = \prod_{j \in J_<} v_j \vee \prod_{j \notin J_<} v_j.$$

Попытки распространить другие результаты п. 2 на симплициальные комплексы $\triangle(T(V))$ наталкиваются на серьезные трудности. Главная из них состоит в том, что $\triangle(T(V))$, вообще говоря, не является разворачиваемым: в [23] построен изящный пример триангуляции 3-симплекса (с добавленными к множеству вершин восемью узлами триангуляции), не допускающей никакой развертки. Однако, в рассматриваемом случае свойство разворачиваемости удается заменить разбиваемостью.

Пусть $\triangle = \bigcup_{\tau=1}^t \Gamma(S_\tau)-$ симплициальный комплекс и $S_1, S_2, ..., S_t-$ его максимальные элементы. Если для каждого $\tau = 1, ..., t$ в $S_\tau$ можно указать такое $J_\tau$ так, что

$$\Delta = \bigcup_{\tau=1}^t [J_\tau, S_\tau], \tag{19}$$

где объединение дизъюнктно, т. е. $[J_\tau, S_\tau]\bigcap[J_\sigma, S_\sigma] = \oslash$ при $\tau \neq \sigma$, то $\triangle$ называется *разбиваемым.*

**Теорема 3** (П. Кляйншмидт и З. Смилански [19]). Для любой триангуляции $T(V)$ любой точечной конфигурации $V$ симплициальный комплекс $\triangle(T(V))$ разбиваем.

Кратко опишем идею доказательства их утверждения. В симплексе $S_1$ выберем точку $w$, находящуюся „в общем положении" (то есть не принадлежащую аффинной оболочке ни одной из $(d-1)$-мерных граней ни одного из симплексов $S_\tau$). При $\tau = 1, 2, ..., t$ найдем решение крамеровской системы линейных уравнений:

$$\sum_j \mu_{j\tau} = 1,\ \sum_j \mu_{j\tau} v_j = w, \tag{20}$$

где суммирование ведется по всем таким $j$, для которых $v_j \in \Gamma_0(S_\tau)$, и положим $J_\tau = \{v_j/\ \mu_{j\tau} < 0\}$. Ясно, что $J_1 = \oslash$ и $1 \leq |J_\tau| \leq d$ при $\tau \geq 1$. Пусть $F \in \Delta$ и $x = \sum_{j=1}^n \mu_{j0} v_j$, где $\mu_{j0} > 0$, если $v_j \in F$, и $\mu_{j0} = 0$ в противном случае. Тогда точка $x_\alpha = (1-\alpha)x+\alpha w \in P$ при $0 \leq \alpha \leq 1$. Отсюда следует, что существует при достаточно малом $\epsilon > 0$ единственное $\tau$ такое, что симплекс $S_\tau$ содержит отрезок $\{x_\alpha/\ 0 \leq \alpha \leq \epsilon\}$ и $J_\tau \subseteq F \subseteq S_\tau$. Тогда

$$f(\lambda, \triangle) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\triangle)\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}, \tag{21}$$

где $\gamma_k(\triangle) = |\{\tau/|J_\tau| = k\}|-$ целое неотрицательное число, не зависящее от выбора точки $w$, $\gamma_0(\triangle) = 1$ и $\gamma_{d+1}(\triangle) = 0$.

Из определения триангуляции следует, что любая $F \in \triangle_{d-1}$ не может принадлежать трём различным симплексам, но обязана принадлежать хотя бы одному. Если она принадлежит единственному симплексу, то назовём её *граничной*, а если двум, то - *внутренней*. Пусть $F_i$ граничная при $i = 1, 2, ..., m_1$, и внутренняя при $i = m_1 + 1, ..., m_1 + m_2$. Тогда $\partial\triangle = \bigcup_{i=1}^{m_1} \Gamma(F_i)$, а для остальных граней из $\triangle$, используя (19) и описанную при доказательстве теоремы 3 процедуру, несложно доказать, что

$$\triangle \setminus \partial\triangle = \bigcup_{\tau=1}^{t} [\overline{J_\tau}, S_\tau], \tag{22}$$

где объединение дизъюнктно и $\overline{J_\tau}-$ множество вершин симплекса $S_\tau$, дополнительное к $J_\tau$ (в предыдущем доказательстве надо рассмотреть отрезок $\{x_\alpha/\ -\epsilon \leq \alpha \leq 0\}$). Отсюда следует, что

$$f(\lambda, \triangle \setminus \partial\triangle) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\triangle)\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k, \tag{23}$$

$$f(\lambda,\partial\triangle)=\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor}(\gamma_k(\triangle)-\gamma_{d+1-k}(\triangle))(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}-\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k), \tag{24}$$

$$\varphi_{\partial\triangle}(v_1,...,v_n)=\varphi_{\triangle}(v_1,..,v_n)\vee\bigvee_{\tau=1}^{t}\prod_{v_j\in S_\tau\setminus J_\tau}v_j. \tag{25}$$

**Следствие 1** (аналог уравнений Дена-Соммервилля). $f(-1-\lambda,\partial\Delta)=(-1)^d f(\lambda,\partial\Delta)$.

В случае, когда $\Gamma_0(\Delta)\subseteq\Gamma_0(P)$, последнее утверждение доказано другим способом в [8]. Там же показано, что если $P=C(d,n)$ и $V=\Gamma_0(P)$, то при четном $d=2\delta$ многочлен $f(\lambda,\Delta)$ определяется единственным образом и равен

$$f(\lambda,\Delta)=\sum_{k=0}^{\delta}\binom{n-d+k-2}{k}\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}=f(d,n,\lambda),$$

а при нечетном $d=2\delta+1$

$$f(\lambda,\Delta)=f(d,n,\lambda)+\alpha\lambda^{\delta+1}(1+\lambda)^{\delta+1},$$

где $0\le\alpha\le\binom{n-\delta-2}{\delta+1}$, причем каждое значение $\alpha$ в указанных пределах реализуется на некоторой триангуляции политопа $C(d,n)$.

**Следствие 2**. Если $P\in P^S(d,n)$ и $V=\Gamma_0(P)$, то при $k=1,...,\left\lfloor\frac{d+1}{2}\right\rfloor$

$$\gamma_k(\Delta)\le\binom{n-d+k-2}{k}.$$

Этого оказалось достаточно для нахождения [10] максимального и минимального элементов на множестве $f-$ векторов триангуляций. Рассмотрим множество всевозможных триангуляций $T(V)$ всевозможных $(d,n)$-точечных конфигураций и обозначим множество соответствующих многочленов $f(\lambda,\Delta)$ через $F(\lambda,d,n)$, векторов $f(\Delta)$ – через $F(d,n)$, а векторов $\gamma(\triangle)=(\gamma_0(\triangle),...,\gamma_d(\triangle))$ – через $H(d,n)$. Заметим, что лексикографический порядок на множествах $F(d,n)$ и $H(d,n)$ совпадает и обозначим через $\gamma^{max}=(\gamma_0^{max},...,\gamma_d^{max})$ лексикографически максимальный на $H(d,n)$ вектор, а через $f^{max}(\lambda)-$ соответствующий ему многочлен. Покомпонентное сравнение векторов на множестве $F(d,n)$ задает на нем частичный порядок. Ясно, что $\gamma^{max}$ соответствует единственному максимальному относительно этого частичного порядка элементу множества $F(d,n)$. Теперь, взяв $P=C(d+1,n)$ и выбросив из него одну $d$-мерную грань, несложно показать, что $f^{max}(\lambda)=-\lambda^{d+1}+\sum_{k=0}^{\lfloor(d+1)/2\rfloor}\binom{n-d+k-3}{k}(\lambda^k(1+\lambda)^{d+2-k}-\lambda^{d+2-k}(1+\lambda)^k)$ и

$\gamma_k^{max} = \binom{n-d+k-2}{k} = \gamma_{d+1-k}^{max}$ при $k = 1, 2, ..., \lfloor (d+1)/2 \rfloor$ . Аналогично доказываются остальные результаты, анонсированные в [10].

Следуя [9] и считая, что $\gamma_0(\triangle) = 1$ и $\gamma_i(\triangle) = 0$ при $i \notin \{0, 1, ..., d\}$, положим при $i = 0, 1, ..., \lfloor d/2 \rfloor$ $\alpha_{2i}(\triangle) = \gamma_i(\triangle) - \gamma_{d+1-i}(\triangle)$ и $\varphi_{d,2i}(\lambda) = \lambda^i(1+\lambda)^{d+1-i}$, а при $i = 0, 1, ..., \lfloor (d+1)/2 \rfloor$ $\alpha_{2i+1}(\triangle) = \gamma_{d-i}(\triangle) - \gamma_{d+1-i}(\triangle)$ и $\varphi_{d,2i-1}(\lambda) = \lambda^i(1+\lambda)^{d+2-i} - \lambda^{d+2-i}(1+\lambda)^i$.

Тогда (21), (23) и (24) можно переписать соответственно в виде:

$$f(\lambda, \triangle) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i(\triangle)\varphi_{d,i}(\lambda), \tag{26}$$

$$f(\lambda, \triangle \backslash \partial\triangle) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\triangle)\lambda^{d+1-i}(1+\lambda)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \alpha_{2i+1}(\triangle)\varphi_{d,2i+1}(\lambda), \tag{27}$$

$$f(\lambda, \partial\triangle) = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_{2i}(\triangle)\varphi_{d-1,2i-1}(\lambda), \tag{28}$$

откуда, в частности, следует, что $\alpha_2(\triangle) \geq 0$ и $\alpha_4(\triangle) \leq (\alpha_2(\triangle))^{<1>}$.

**Следствие 3**. Если $V = \Gamma_0(P),\ P \in P^S(d,n)$ и $\triangle = \triangle(T(V))$, то $\alpha_{2i}(\triangle) = g_i(P)$ неотрицательные целые числа и для них выполняются неравенства (18).

Пример 8. При $d \leq 4$ множества $H(d,n)$ полностью характеризуются следующими условиями: целочисленный неорицательный вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_d) \in H(d,n)$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 \leq n-d-1$

$$\gamma_2 \leq \gamma_1 \quad d = 2,$$

$$\gamma_3 \leq \gamma_2 \leq (\gamma_1)^{<1>},\ \gamma_3 \leq \gamma_1 \quad d = 3,$$

$$\gamma_4 \leq \gamma_3 \leq \gamma_2 \leq (\gamma_1)^{<1>},\ \gamma_4 \leq \gamma_1,\ \gamma_2 - \gamma_3 \leq (\gamma_1 - \gamma_4)^{<1>} \quad d = 4.$$

Описанный в пункте 1 ФМ-алгоритм можно модифицировать [12] так, чтобы на каждом шаге получалась триангуляция $T_n = T(v_1, ..., v_n)$, и соответствующие ей симплициальные комплексы $\triangle_n$ и $\partial\triangle_n = \bigcup_{i=1}^m \Gamma(F_i)$. Появление новой точки $v_{n+1}$ дает линейную развертку симплициального комплекса $\partial\triangle_n = \bigcup_{i=1}^m [H_i, F_i]$. Положим $m_- = |I_-|,\ m_+ = |I_+|,\ \triangle_n^- = \bigcup_{i=1}^{m_-} [H_i, F_i]\ \ \triangle_n^+ = \bigcup_{i=1}^{m_+} [H_{m+1-i}, F_{m+1-i}]$. Тогда, добавляя к развертке $S_1, ..., S_t$ симплициального комплекса $\Delta_n$ развертку симплициального комплекса $pyr\Delta_n^- = \bigcup_{i \in I_-} pyrF_i$, где $pyrF_i$- пирамида с основанием $F_i$ и апексом $v_{n+1}$, получаем продолжение развертки симплициального комплекса $\Delta_{n+1}$. Назовём такие триангуляции ФМ-триангуляциями, а соответствующие им векторы $\gamma$ $\Phi M$-реализуемыми. Ясно, что симплициальные комплексы $\triangle_{n+1}$, $\triangle_n^-$ $\triangle_n^+$ являются разворачиваемыми (ср. [20]),

$$f(\lambda, \Delta_{n+1}) = f(\lambda, \Delta_n) + \lambda f(\lambda, \Delta_n^-). \tag{29}$$

Отсюда нетрудно доказать неотрицательность чисел $\alpha_i(\triangle_n)$, $\alpha_i(\triangle_n^-)$ $\alpha_i(\triangle_n^+)$, анонсированную в [9]. Кроме того, имеет место формула

$$\varphi_{\triangle_{n+1}}(v_1, ..., v_n) = (\varphi_{\triangle_n}(v_1, ..., v_n) \vee v_{n+1})\varphi_{\triangle_n^-}(v_1, ..., v_n), \tag{30}$$

из которой можно получить алгоритмы для нахождения множеств верхних нулей и нижних единиц функций $\varphi_{\partial\triangle} = \varphi_{\partial P}$, по крайней мере, если $V-$ множество точек в общем положении.

Вопросам построения ФМ-триангуляций, обладающих различными дополнительными свойствами, посвящена недавно защищённая Д. В. Груздевым кандидатская диссертация (см. также [12]).

Вопрос о характеризации многочленов $f(\lambda, \triangle)$ остаётся открытым, однако автор имеет алгоритм, позволяющий определить, является ли $\gamma$ - $\Phi M$-реализуемым. Аспирант С.В. Сидоров приготовил лексикографически упорядоченные списки $\Phi M$-реализуемых векторов (при d = 5 и небольших n), приведённых в Приложении.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

В следующих таблицах приведен список $\gamma$-векторов $\gamma(\Delta) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ для всех $\Phi M$ триангуляций $T$ 5-мерных точечных конфигураций размерности 5 с числом узлов от 6 до 9. Первую компоненту вектора $\gamma(\Delta)$ не будем заносить в таблицу, так как $\gamma_0 = 1$. Векторы записаны в лексикографическом порядке и занумерованы.

| $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ | $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ | $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ | $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ | $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ | $N$ | $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 0 0 0 0 | 51 | 3 2 1 1 1 | 101 | 3 4 3 3 0 | 151 | 3 5 5 1 0 | 201 | 3 6 4 1 0 | 251 | 3 6 8 4 1 |
| 2 | 1 0 0 0 0 | 52 | 3 2 2 0 0 | 102 | 3 4 3 3 1 | 152 | 3 5 5 2 0 | 202 | 3 6 4 2 0 | 252 | 3 6 8 5 0 |
| 3 | 1 1 0 0 0 | 53 | 3 2 2 1 0 | 103 | 3 4 3 3 2 | 153 | 3 5 5 2 1 | 203 | 3 6 4 3 0 | 253 | 3 6 8 5 1 |
| 4 | 1 1 1 0 0 | 54 | 3 2 2 1 1 | 104 | 3 4 4 0 0 | 154 | 3 5 5 3 0 | 204 | 3 6 4 3 1 | 254 | 3 6 8 5 2 |
| 5 | 1 1 1 1 0 | 55 | 3 2 2 2 0 | 105 | 3 4 4 1 0 | 155 | 3 5 5 3 1 | 205 | 3 6 4 4 0 | 255 | 3 6 8 6 0 |
| 6 | 1 1 1 1 1 | 56 | 3 2 2 2 1 | 106 | 3 4 4 1 1 | 156 | 3 5 5 4 0 | 206 | 3 6 4 4 1 | 256 | 3 6 8 6 1 |
| 7 | 2 0 0 0 0 | 57 | 3 2 2 2 2 | 107 | 3 4 4 2 0 | 157 | 3 5 5 4 1 | 207 | 3 6 5 0 0 | 257 | 3 6 8 6 2 |
| 8 | 2 1 0 0 0 | 58 | 3 3 0 0 0 | 108 | 3 4 4 2 1 | 158 | 3 5 5 4 2 | 208 | 3 6 5 1 0 | 258 | 3 6 8 6 3 |
| 9 | 2 1 1 0 0 | 59 | 3 3 1 0 0 | 109 | 3 4 4 3 0 | 159 | 3 5 5 5 0 | 209 | 3 6 5 2 0 | 259 | 3 6 9 0 0 |
| 10 | 2 1 1 1 0 | 60 | 3 3 1 1 0 | 110 | 3 4 4 3 1 | 160 | 3 5 5 5 1 | 210 | 3 6 5 3 0 | 260 | 3 6 9 1 0 |
| 11 | 2 1 1 1 1 | 61 | 3 3 1 1 1 | 111 | 3 4 4 3 2 | 161 | 3 5 5 5 2 | 211 | 3 6 5 3 1 | 261 | 3 6 9 2 0 |
| 12 | 2 2 0 0 0 | 62 | 3 3 2 0 0 | 112 | 3 4 4 4 0 | 162 | 3 5 5 5 3 | 212 | 3 6 5 4 0 | 262 | 3 6 9 3 0 |
| 13 | 2 2 1 0 0 | 63 | 3 3 2 1 0 | 113 | 3 4 4 4 1 | 163 | 3 5 6 0 0 | 213 | 3 6 5 4 1 | 263 | 3 6 9 3 1 |
| 14 | 2 2 1 1 0 | 64 | 3 3 2 1 1 | 114 | 3 4 4 4 2 | 164 | 3 5 6 1 0 | 214 | 3 6 5 5 0 | 264 | 3 6 9 4 0 |
| 15 | 2 2 1 1 1 | 65 | 3 3 2 2 0 | 115 | 3 4 4 4 3 | 165 | 3 5 6 2 0 | 215 | 3 6 5 5 1 | 265 | 3 6 9 4 1 |
| 16 | 2 2 2 0 0 | 66 | 3 3 2 2 1 | 116 | 3 4 5 0 0 | 166 | 3 5 6 2 1 | 216 | 3 6 5 5 2 | 266 | 3 6 9 5 0 |
| 17 | 2 2 2 1 0 | 67 | 3 3 2 2 2 | 117 | 3 4 5 1 0 | 167 | 3 5 6 3 0 | 217 | 3 6 6 0 0 | 267 | 3 6 9 5 1 |
| 18 | 2 2 2 1 1 | 68 | 3 3 3 0 0 | 118 | 3 4 5 1 1 | 168 | 3 5 6 3 1 | 218 | 3 6 6 1 0 | 268 | 3 6 9 5 2 |
| 19 | 2 2 2 2 0 | 69 | 3 3 3 1 0 | 119 | 3 4 5 2 0 | 169 | 3 5 6 4 0 | 219 | 3 6 6 2 0 | 269 | 3 6 9 6 0 |
| 20 | 2 2 2 2 1 | 70 | 3 3 3 1 1 | 120 | 3 4 5 2 1 | 170 | 3 5 6 4 1 | 220 | 3 6 6 3 0 | 270 | 3 6 9 6 1 |
| 21 | 2 2 2 2 2 | 71 | 3 3 3 2 0 | 121 | 3 4 5 3 0 | 171 | 3 5 6 4 2 | 221 | 3 6 6 3 1 | 271 | 3 6 9 6 2 |
| 22 | 2 3 0 0 0 | 72 | 3 3 3 2 1 | 122 | 3 4 5 3 1 | 172 | 3 5 6 5 0 | 222 | 3 6 6 4 0 | 272 | 3 6 9 6 3 |
| 23 | 2 3 1 0 0 | 73 | 3 3 3 2 2 | 123 | 3 4 5 3 2 | 173 | 3 5 6 5 1 | 223 | 3 6 6 4 1 | 273 | 3 6 10 0 0 |
| 24 | 2 3 1 1 0 | 74 | 3 3 3 3 0 | 124 | 3 4 5 4 0 | 174 | 3 5 6 5 2 | 224 | 3 6 6 5 0 | 274 | 3 6 10 1 0 |
| 25 | 2 3 2 0 0 | 75 | 3 3 3 3 1 | 125 | 3 4 5 4 1 | 175 | 3 5 6 5 3 | 225 | 3 6 6 5 1 | 275 | 3 6 10 2 0 |
| 26 | 2 3 2 1 0 | 76 | 3 3 3 3 2 | 126 | 3 4 5 4 2 | 176 | 3 5 7 0 0 | 226 | 3 6 6 5 2 | 276 | 3 6 10 3 0 |
| 27 | 2 3 2 2 0 | 77 | 3 3 3 3 3 | 127 | 3 4 5 4 3 | 177 | 3 5 7 1 0 | 227 | 3 6 6 6 0 | 277 | 3 6 10 3 1 |
| 28 | 2 3 2 2 1 | 78 | 3 3 4 0 0 | 128 | 3 5 0 0 0 | 178 | 3 5 7 2 0 | 228 | 3 6 6 6 1 | 278 | 3 6 10 4 0 |
| 29 | 2 3 3 0 0 | 79 | 3 3 4 1 0 | 129 | 3 5 1 0 0 | 179 | 3 5 7 2 1 | 229 | 3 6 6 6 2 | 279 | 3 6 10 4 1 |
| 30 | 2 3 3 1 0 | 80 | 3 3 4 1 1 | 130 | 3 5 1 1 0 | 180 | 3 5 7 3 0 | 230 | 3 6 6 6 3 | 280 | 3 6 10 5 0 |
| 31 | 2 3 3 2 0 | 81 | 3 3 4 2 0 | 131 | 3 5 2 0 0 | 181 | 3 5 7 3 1 | 231 | 3 6 7 0 0 | 281 | 3 6 10 5 1 |
| 32 | 2 3 3 2 1 | 82 | 3 3 4 2 1 | 132 | 3 5 2 1 0 | 182 | 3 5 7 4 0 | 232 | 3 6 7 1 0 | 282 | 3 6 10 5 2 |
| 33 | 2 3 3 3 0 | 83 | 3 3 4 2 2 | 133 | 3 5 2 2 0 | 183 | 3 5 7 4 1 | 233 | 3 6 7 2 0 | 283 | 3 6 10 6 0 |
| 34 | 2 3 3 3 1 | 84 | 3 3 4 3 0 | 134 | 3 5 2 2 1 | 184 | 3 5 7 4 2 | 234 | 3 6 7 3 0 | 284 | 3 6 10 6 1 |
| 35 | 2 3 3 3 2 | 85 | 3 3 4 3 1 | 135 | 3 5 3 0 0 | 185 | 3 5 7 5 0 | 235 | 3 6 7 3 1 | 285 | 3 6 10 6 2 |
| 36 | 2 3 4 0 0 | 86 | 3 3 4 3 2 | 136 | 3 5 3 1 0 | 186 | 3 5 7 5 1 | 236 | 3 6 7 4 0 | 286 | 3 6 10 6 3 |
| 37 | 2 3 4 1 0 | 87 | 3 4 0 0 0 | 137 | 3 5 3 2 0 | 187 | 3 5 7 5 2 | 237 | 3 6 7 4 1 | | |
| 38 | 2 3 4 2 0 | 88 | 3 4 1 0 0 | 138 | 3 5 3 2 1 | 188 | 3 5 7 5 3 | 238 | 3 6 7 5 0 | | |
| 39 | 2 3 4 2 1 | 89 | 3 4 1 1 0 | 139 | 3 5 3 3 0 | 189 | 3 6 0 0 0 | 239 | 3 6 7 5 1 | | |
| 40 | 2 3 4 3 0 | 90 | 3 4 1 1 1 | 140 | 3 5 3 3 1 | 190 | 3 6 1 0 0 | 240 | 3 6 7 5 2 | | |
| 41 | 2 3 4 3 1 | 91 | 3 4 2 0 0 | 141 | 3 5 4 0 0 | 191 | 3 6 1 1 0 | 241 | 3 6 7 6 0 | | |
| 42 | 2 3 4 3 2 | 92 | 3 4 2 1 0 | 142 | 3 5 4 1 0 | 192 | 3 6 2 0 0 | 242 | 3 6 7 6 1 | | |
| 43 | 3 0 0 0 0 | 93 | 3 4 2 1 1 | 143 | 3 5 4 2 0 | 193 | 3 6 2 1 0 | 243 | 3 6 7 6 2 | | |
| 44 | 3 1 0 0 0 | 94 | 3 4 2 2 0 | 144 | 3 5 4 2 1 | 194 | 3 6 2 2 0 | 244 | 3 6 7 6 3 | | |
| 45 | 3 1 1 0 0 | 95 | 3 4 2 2 1 | 145 | 3 5 4 3 0 | 195 | 3 6 3 0 0 | 245 | 3 6 8 0 0 | | |
| 46 | 3 1 1 1 0 | 96 | 3 4 3 0 0 | 146 | 3 5 4 3 1 | 196 | 3 6 3 1 0 | 246 | 3 6 8 1 0 | | |
| 47 | 3 1 1 1 1 | 97 | 3 4 3 1 0 | 147 | 3 5 4 4 0 | 197 | 3 6 3 2 0 | 247 | 3 6 8 2 0 | | |
| 48 | 3 2 0 0 0 | 98 | 3 4 3 1 1 | 148 | 3 5 4 4 1 | 198 | 3 6 3 3 0 | 248 | 3 6 8 3 0 | | |
| 49 | 3 2 1 0 0 | 99 | 3 4 3 2 0 | 149 | 3 5 4 4 2 | 199 | 3 6 3 3 1 | 249 | 3 6 8 3 1 | | |
| 50 | 3 2 1 1 0 | 100 | 3 4 3 2 1 | 150 | 3 5 5 0 0 | 200 | 3 6 4 0 0 | 250 | 3 6 8 4 0 | | |

*Благодарности*

Автор благодарит своих коллег и студентов, принявших участие в наборе и редактировании представленных здесь лекций. Особенно хотелось бы отметить С.В. Сидорова, Д.В. Груздева, М.А. Илюшину, А.А. Бадера, С.С. Лялина, А.Н. Половинкина.

**Литература**

1. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.

2. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М. : Мир, 1988.

3. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике М.: МЦНМО, 2004.

4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

5. Коробков В. К. О некоторых целочисленных задачах линейного программирования // Проблемы Кибернетики. 1965 г. Вып. 14. М.: Наука, 297 - 299.

6. Коршунов А. Д. Монотонные булевы функции // Успехи математических наук. 2003. т.58, вып. 5(353). 89-162.

7. Сэвидж Дж. Е. Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998.

8. Шевченко В. Н. О разбиении политопа на симплексы без новых вершин // Известия ВУЗ. Математика. 1997, № 12 (427), 89-99.

9. Шевченко В. Н. Триангуляции точечных конфигураций и их $f$ - векторы. /Тезисы докладов XII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики"ч.II, МГУ-ННГУ, 1999, 255.

10. Шевченко В. Н. О максимальных триангуляциях выпуклых политопов. // Международная конференция "Дискретный анализ и исследование операций": материалы конференции (Новосибирск, 26 июня - 1 июля 2000 г.) Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000, 159.

11. Шевченко В. Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции. // Материалы XVI международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем". (Санкт-Петербург, 26-30 июня 2006 г.), стр. 135-142.

12. Шевченко В. Н. Груздев Д. В. Модификация алгоритма Фурье-Моцкина для построения триангуляции и её звёздной развёртки. // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2006. т.13, № 1. 1-101.

13. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука 1968.

14. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

15. Barnette D. The minimum number of vertices of a simple politope // Israel J. Math. -1971/- V.10- P. 121-125.

16. Billera L., Lee C. Sufficiency of Mc Mullens conditions for f-vectors of simplicial polytopes // Bull. AMS. 1980, V.2, N1, 181-185.

17. Bruggesser H., Mani P. Shellable decompositions of cells and spheres. // Math Scand, 1971, 29, 197, 205.

18. Grunbaum B. Convex polytopes. N-Y: Wiley and Sons, 1967.

19. Kleinschmidt P., Smilansky Z. New results for simplicial spherical polytopes / Discrete and Computation Geometry. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, V.6, AMS, 1991, 187-197.

20. Lee C. Regular triangulations of convex politopes // Applied Geometry and Discrete Mathematics - The Victor Klee Festschrift. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991.- V.4- AMS- P. 443-456.

21. McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. 1970, V.17, 179-184.

22. McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytops //Israel J.Math. -1971.-V.9-P. 559-570.

23. Rudin M. E. An unshellable triangulation of a tetrahedron // Bulletin AMS. 1958. V. 64, 90-91.

24. Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytope // Advances in Math. 1980, V.35, N.3, 236-238.

25. Stanley R. P. Combinatorics and Commutative Algebra. Progress in mathematics V. 41: Birkhauser, Boston, 1983.

26. Ziegler G. Lectures on polytopes. Berlin: Springer-Verlag, 1995.