МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки
09.03.03 «Прикладная информатика»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.21
ББК В171(Я73-4)

ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. Составитель Сморкалова В.М.: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 23 с.

Рецензент: к.т.н., доцент **П.Д. Басалин**

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов третьего курса факультета вычислительной математики и кибернетики, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика». Оно включает практические занятия по разделу «Математическая статистика» общего курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Темы занятий: «Математическая постановка задачи проверки статистических гипотез», «Критерий Неймана-Пирсона», «Связь критериев проверки гипотез с доверительными интервалами». По каждой теме занятий в пособии дается необходимая теоретическая информация и приводится подробное решение типовых задач.

УДК 519.21
ББК В171(Я73-4)

1. Математическая постановка задачи проверки статистических гипотез

Определение 1.1*. Статистической гипотезой называется любое предположение о законе распределения вероятностей случайной величины ξ и, в частности, о числовых значениях неизвестных параметров распределения.*

Определение 1.2*. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения ξ. В противном случае гипотеза называется сложной.*

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ - n повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ, функция распределения которой $F(x)$ не известна. Поскольку выборка повторная, то ее элементы можно трактовать как значения независимых случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и ξ. Относительно неизвестной функции распределения $F(x)$ выдвигается простая гипотеза $\mathrm{H}_0 : F(x) = F_0(x)$, либо сложная гипотеза $\mathrm{H}_0 : F(x) = F_0(x;\theta)$, где $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$ - неизвестный параметр. Требуется по выборке проверить гипотезу H_0 (ее называют *нулевой* или *основной*) и либо отклонить ее, так как выборочные данные ей противоречат, либо не отклонить, поскольку выборочные данные согласуются с ней.

Частным случаем данной задачи является задача проверки гипотезы о числовых значениях параметров распределения. Она может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ - n повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ, функция распределения которой $F(x;\theta)$ известна с точностью до параметра $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$. Относительно неизвестного параметра выдвигается простая гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ (θ_0- точка в пространстве R^m **с** известными координатами), либо сложная гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta$, $(\Theta \subset R^m)$. Требуется по выборке проверить гипотезу H_0.

Правило проверки основной гипотезы, называемое также критерием, заключается в следующем. Выборку трактуют как точку с координатами $(x_1,\ldots,x_n)$ в пространстве R^n. Предварительно пространство R^n разбивается на два непересекающихся множества W_0 и $\overline{W}_0$. Если выборка такова, что $(x_1,\ldots,x_n) \in W_0$, то гипотеза H_0 отклоняется. Множество W_0 называют *критической областью* гипотезы H_0.

При решении задач проверки статистических гипотез наряду с основной гипотезой H_0 могут выдвигаться дополнительные гипотезы $\mathrm{H}_i, i = 1,\ldots,k$, называемые *альтернативными.* Альтернативные гипотезы могут быть как простыми, так и сложными.

Рассмотрим простейшую из задач проверки статистических гипотез о значениях неизвестных параметров распределений. А именно, рассмотрим случай, когда основная гипотеза является простой и единственная альтернативная также является простой. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $x_1,\dots,x_n$ - повторная выборка из распределения $F(x;\theta)$, где θ- неизвестный параметр. Относительно неизвестного параметра выдвигается простая основная гипотеза $\mathrm{H}_0:\theta=\theta_0$ и простая альтернативная $\mathrm{H}_1:\theta=\theta_1$ $(\theta_1\neq\theta_0)$. Требуется по выборке проверить гипотезу H_0.

Когда задача сформулирована таким образом, это означает, что неизвестный параметр может принимать только два значения: θ_0 или θ_1. Правило проверки в данном частном случае заключается в следующем. Если $(x_1,\dots,x_n)\in W_0$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если $(x_1,\dots,x_n)\in\overline{W}_0$, то принимается гипотеза H_0. $\overline{W}_0$ в этом случае называется областью принятия основной гипотезы. Принимая любое из указанных решений, можно совершить ошибку.

Определение 1.3. *Ошибка, состоящая в том, что отвергается правильная основная гипотеза, называется ошибкой первого рода.*

Определение 1.4. *Ошибка, состоящая в том, что принимается ложная основная гипотеза, называется ошибкой второго рода.*

Определение 1.5. *Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия (правила проверки гипотез) и обозначается* α.

Определение 1.6. Вероятность отклонить ложную основную гипотезу называется мощностью критерия.

С учетом приведенных определений, вероятность ошибки первого рода равна вероятности того, что точка с координатами $(x_1,\dots,x_n)$ попадет в критическую область, при условии, что гипотеза H_0 верна. То есть, $\alpha=\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0 \mid H_0\}$. Вероятность ошибки второго рода, которую принято обозначать β, равна вероятности того, что точка с координатами $(x_1,\dots,x_n)$ попадет в область принятия основной гипотезы, при условии, что верна гипотеза H_1. То есть, $\beta=\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\overline{W}_0 \mid H_1\}$. Мощность критерия равна вероятности того, что точка с координатами $(x_1,\dots,x_n)$ попадет в критическую область, при условии, что верна гипотеза H_1. Тогда, $\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0 \mid H_1\}=1-\beta$.

Таким образом, если в задаче проверки простой основной гипотезы о числовом значении параметра против простой альтернативы критическая область задана, то по выборке можно проверить гипотезы, принять одно из двух возможных решений и вычислить вероятности ошибок первого и второго рода.

Решим несколько задач такого типа.

Задача 1.1

Проверка правильности функционирования устройства осуществляется специальным тестом. Если устройство функционирует правильно, то вероятность прохождения теста равна 0,99; в противном случае вероятность прохождения теста равна 0,4. Устройство допускается к работе, если тест проходит пять раз при пяти испытаниях. В предположении, что число прохождений теста в пяти испытаниях подчиняется биномиальному распределению, указать критическую область для проверки гипотезы о том, что устройство функционирует правильно, и вычислить вероятности ошибок первого и второго рода.

Решение. Пусть тест был “запущен” пять раз и при каждом испытании фиксировалось, прошел тест или нет. В результате была получена выборка $x_1,\ldots,x_5$, в которой $x_i = 1$, если в i – м испытании тест прошел, и $x_i = 0$, если в i– м испытании тест не прошел. По выборке требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: p = 0{,}99$ против альтернативы $\mathrm{H}_1: p = 0{,}4$, где p – вероятность прохождения теста при одном испытании. В соответствии с условиями задачи критическая область W_0 имеет вид $W_0 = \left\{(x_1,\ldots,x_5): \sum_{i=1}^{5} x_i < 5\right\}$. Найдем вероятности ошибок первого и второго рода при использовании правила проверки, основанного на такой критической области.

$$\alpha = \mathrm{P}\{(\xi_1,\ldots,\xi_5) \in W_0 |\ H_0\} = \mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{5} \xi_i < 5 |\ p = 0{,}99\right\} = 1 - (0{,}99)^5 \approx 0{,}05.$$

$$\beta = \mathrm{P}\{(\xi_1,\ldots,\xi_5) \in \overline{W}_0 |\ H_1\} = \mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{5} \xi_i = 5 \mid p = 0{,}4\right\} = (0{,}4)^5 \approx 0{,}01.$$

Задача 1.2

Большая партия изделий содержит некоторую долю дефектных. Поставщик утверждает, что эта доля составляет 5%, а покупатель предполагает, что 10%. Условия поставки: из партии случайным образом отбирается и проверяется 10 изделий; партия принимается на условиях поставщика, если при проверке обнаружено не более одного дефектного изделия; в противном случае партия принимается на условиях покупателя.

Найти вероятности ошибок первого и второго рода при использовании указанных условий поставки.

Решение. По условиям задачи результатом проверки 10 изделий является выборка $x_1,\dots,x_{10}$, элементы которой можно трактовать как значения независимых случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_{10}$, каждая из которых принимает значения из множества $\{0,1\}$, причем $\xi_i=1$, если изделие с номером i дефектное, и $\xi_i=0$, если оно качественное. $\mathrm{P}\{\xi_i=1\}=p,\ i=\overline{1,10}$, так как объем выборки много меньше объема всей партии. Пусть $\mathrm{H}_0: p=0{,}05$, а $\mathrm{H}_1: p=0{,}1$. Тогда критическая область основной гипотезы $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_{10}): \sum\limits_{i=1}^{10} x_i>1\right\}$.

Найдем вероятности ошибок первого и второго рода.

$$\alpha=\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_{10})\in W_0 |\ H_0\}=\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{10}\xi_i>1 |\ p=0{,}05\right\}=$$

$$=1-\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{10}\xi_i\le 1 \,|\, p=0{,}05\right\}=1-(0{,}95)^{10}-10(0{,}05)(0{,}95)^9=0{,}086\,.$$

$$\beta=\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_{10})\in \overline{W}_0 |\ H_1\}=\mathrm{P}\left\{\sum_{i=1}^{10}\xi_i\le 1 \,|\, p=0{,}1\right\}=$$

$$=(0{,}9)^{10}+10(0{,}1)(0{,}9)^9=0{,}736\,.$$

Таким образом, при данных условиях поставки покупатель с большой вероятностью может получить партию изделий на условиях поставщика, в то время как она не удовлетворяет заявленному поставщиком качеству.

Задача 1.3

Из продукции автомата, обрабатывающего болты с номинальным значением контролируемого размера m=40мм, была взята выборка объема 36. Результаты предыдущих измерений дают основания полагать, что действительные контролируемые размеры болтов подчиняются нормальному распределению с дисперсией, равной $1\,(\textit{мм})^2$. Партия болтов бракуется, если выборочное среднее контролируемого размера больше 40,1 мм. Найти вероятность ошибки первого рода при использовании такого правила.

Решение. Из условий задачи следует, что основная гипотеза H_0 и критическая область W_0 имеют вид: $\mathrm{H}_0: m=40\textit{мм}$, $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_{36}): \frac{1}{36}\sum\limits_{i=1}^{36}x_i>40{,}1\right\}$. Тогда,

$$\alpha = \mathrm{P}\left\{(\xi_1,\dots,\xi_{36}) \in W_0 \middle| \ H_0\right\} = \mathrm{P}\left\{\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}\xi_i > 40{,}1 \middle| m = 40\right\} =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left\{\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}\xi_i \le 40{,}1 \middle| m = 40\right\} = 1 - \int_{-\infty}^{40{,}1}\frac{6}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-40)^2}{2}36\right)dx =$$

$= 1 - \int_{-\infty}^{0{,}6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$. То есть, при использовании данного правила, вероятность признать бракованной качественную партию болтов достаточно велика.

2. Критерий Неймана-Пирсона

Далее рассмотрим случай, когда правило проверки простой основной гипотезы о числовом значении параметра распределения против простой альтернативы не задано, и его необходимо построить. Вполне естественным является желание построить его таким образом, чтобы одновременно минимизировать вероятности ошибок первого и второго рода. Однако эти требования противоречивы: при фиксированном объеме выборки уменьшение вероятности ошибки первого рода влечет за собой увеличение вероятности ошибки второго рода, и наоборот. Поэтому, один из способов построения правила проверки двух простых гипотез состоит в том, что критическая область выбирается из решения задачи максимизации мощности критерия при заданном уровне значимости α. Критерии, мощность которых (при заданном уровне значимости) максимальна, получили название наиболее мощных критериев. Если выборка получена из непрерывного распределения, то для построения наиболее мощного критерия можно воспользоваться леммой Неймана-Пирсона.

Лемма Неймана-Пирсона. *Пусть $x_1,\dots,x_n$ n повторных независимых наблюдений над непрерывной случайной величиной ξ, плотность распределения которой $f(x,\theta)$ известна с точностью до параметра θ. Относительно θ выдвигаются две простые гипотезы:* $\mathrm{H}_0: \theta = \theta_0$ *и* $\mathrm{H}_1: \theta = \theta_1$, $(\theta_1 \ne \theta_0)$. *Тогда правило проверки гипотез, задаваемое критической областью*

$$W_0 = \left\{(x_1,\dots,x_n):\ \breve{f}(x_1,\dots,x_n;\theta_0) > 0,\ \frac{\breve{f}(x_1,\dots,x_n;\theta_1)}{\breve{f}(x_1,\dots,x_n;\theta_0)} > k > 0\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x_1,\dots,x_n):\ \breve{f}(x_1,\dots,x_n;\theta_0) = 0,\ \breve{f}(x_1,\dots,x_n;\theta_1) > 0\right\}, \qquad (2.1)$$

где k определяется из условия $\mathrm{P}\left\{(\xi_1,\dots,\xi_n) \in W_0 \middle| \ H_0\right\} = \alpha$ *(α - задано), является наиболее мощным критерием.*

В выражении (2.1) $\breve{f}(y_1,\dots,y_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta)$ - совместная плотность распределения (при фиксированном значении параметра θ) независимых случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$, каждая из которых распределена так же, как и ξ.

Решим несколько задач с использованием данной леммы.

Задача 2.1

По паспортным данным автомобильного двигателя расход топлива на 100 км пробега составляет 10 л. В результате изменения конструкции двигателя ожидается, что расход топлива на 100 км пробега уменьшится до 9 л. Для проверки этого факта были проведены испытания 25 случайно отобранных автомобилей с модернизированным двигателем. Выборочное среднее расходов топлива на 100 км пробега по результатам испытаний составило 9,3л. В предположении, что расход топлива на 100 км пробега имеет нормальное распределение с дисперсией 4 $(л)^2$ проверить гипотезу, утверждающую, что изменение конструкции двигателя не повлияло на расход топлива.

Решение. В соответствии с условиями задачи, по выборке $x_1,\dots,x_n,(n=25)$ из нормального распределения с параметрами a, $\sigma^2=4$ требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: a=a_0$ $(a_0=10)$ против альтернативы $\mathrm{H}_1: a=a_1$ $(a_1=9)$, если известно, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=9{,}3$. Зададим уровень значимости α=0,05 и, воспользовавшись леммой Неймана-Пирсона, построим наиболее мощный критерий. Для этого найдем совместную плотность распределения независимых случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$, каждая из которых имеет нормальное распределение с параметрами a, $\sigma^2=4$. $f(y_1,\dots,y_n;a)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i-a)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a)^2\right)$. Тогда, с учетом (2.1), критическая область W_0 будет иметь вид

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n):\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-a_1)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-a_0)^2\right)}>k>0\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,\dots,x_n):\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-a_0)^2-(x_i-a_1)^2\right)\right)>k>0\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,\dots,x_n):\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-a_0)^2-(x_i-a_1)^2\right)\right)>\ln k\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,\dots,x_n):\left(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_ia_0+a_0^2-x_i^2+2x_ia_1-a_1^2\right)\right)>\ln k\right\}.$$ Таким образом, $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n):\left((a_1-a_0)\sum_{i=1}^{n}x_i\right)>\frac{n}{2}(a_0^2-a_1^2)+\sigma^2\ln k\right\}.$ (2.2)

Если $a_1<a_0$, как в данной задаче, то критическая область примет вид $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n):\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i<\left(\frac{n}{2}(a_0^2-a_1^2)+\sigma^2\ln k\right)/(a_1-a_0)/n\right\}$, или

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n):\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i<\lambda\right\}. \quad (2.3)$$

Найдем константу λ из условия $\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0|\ H_0\}=\alpha$. $\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0|H_0\}=\mathrm{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i<\lambda|a=a_0\right\}=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2\sigma^2}n}dx=$

$=\int_{-\infty}^{\frac{\lambda-a_0}{\sigma}\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x)^2}{2}}dx$. Следовательно, $\frac{\lambda-a_0}{\sigma}\sqrt{n}=u_\alpha$ и $\lambda=a_0+u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где u_α - квантиль стандартного нормального распределения уровня α. Так как для стандартного нормального распределения $u_\alpha=-u_{1-\alpha}$, то $\lambda=a_0-u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Подставив найденное значение λ в выражение (2.3), получим

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n):\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i<a_0-u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}. \quad (2.4)$$

Правило проверки гипотезы о числовом значении математического ожидания нормальной случайной величины, задаваемое критической областью (2.4), называется левосторонним критерием.

В рассматриваемой задаче n=25, $a_0=10, \sigma=2, 1-\alpha=0{,}95$; $u_{0,95}=1{,}645$. Следовательно, $a_0-u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10-1{,}645\times 0{,}4=9{,}342$ и $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_{25}):\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}x_i<9{,}342\right\}$. Поскольку, по условиям задачи, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=9{,}3$, то гипотезу $\mathrm{H}_0: a=10$ следует отклонить и принять гипотезу $\mathrm{H}_1: a=9$. Отклоняя нулевую гипотезу, с вероятностью 0,05 мы совершаем ошибку.

Задача 2.2

Какой минимальный объем выборки следует взять в условиях задачи 2.4, чтобы при проверке гипотезы $\mathrm{H}_0 : a = 10$ против альтернативной $\mathrm{H}_1 : a = 9$ вероятность ошибки первого рода равнялась 0,01, а вероятность ошибки второго рода не превышала 0,1? Указать выражение для соответствующей критической области.

Решение. Для нахождения объема выборки n воспользуемся выражением (2.4). По условиям задачи, α=0,01 и $\mathrm{P}\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\overline{W}_0 |\ H_1\} = \mathrm{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \ge a_0 - u_{0,99}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \middle| a = a_1\right\} \le 0{,}1,$ или $1-\Phi\left(\frac{a_0 - u_{0,99}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \le 0{,}1,$ где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t)^2}{2}}dt$. Из последнего неравенства следует $\Phi\left(\frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} - u_{0,99}\right) \ge 0{,}9 \Rightarrow \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} - u_{0,99} \ge u_{0,9} \Rightarrow$ $\sqrt{n} \ge (u_{0,99} + u_{0,9})\frac{\sigma}{a_0 - a_1} \Rightarrow$ $\sqrt{n} \ge (2{,}326 + 1{,}282)\times 2 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 7{,}216 \Rightarrow$ $n \ge 52{,}0307$. Таким образом, минимальный объем выборки n=53. Критическая область при таком n и $\alpha = 0{,}01$ будет иметь вид $W_0 = \left\{(x_1,\ldots,x_{53}) : \frac{1}{53}\sum_{i=1}^{53}x_i < 9{,}361\right\}$.

Задача 2.3

По соответствующим нормативам средний вес таблетки лекарства сильного действия должен быть равен 0,5 мг. Выборочная проверка 121 таблетки полученной партии лекарств показала, что средний вес таблетки в выборке равен 0,53 мг. Путем многократного взвешивания таблеток было установлено, что их вес имеет нормальное распределение со стандартным отклонением $\sigma = 0{,}11$ мг. На уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о том, что средний вес таблетки во всей партии равен 0,5 мг против альтернативной гипотезы, состоящей в том, что он равен a_1 $(a_1 > 0{,}5)$.

Решение. По условиям задачи, мы имеем повторную выборку $x_1,\ldots,x_n, (n = 121)$ из нормального распределения с параметрами a,

$\sigma^2=(0{,}11)^2$. Требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: a=a_0$ $(a_0=0{,}5)$ против альтернативы $\mathrm{H}_1: a=a_1$ $(a_1>0{,}5)$, если известно, что $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=0{,}53$.

Для проверки гипотезы H_0, построим наиболее мощный критерий. Тогда, в соответствии с леммой Неймана-Пирсона, критическая область W_0 будет удовлетворять выражению (2.2). По условиям задачи, $a_1>a_0$, поэтому выражение (2.2) можно представить в виде $W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n): \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i>\left(\frac{n}{2}(a_0^2-a_1^2)+\sigma^2\ln k\right)/(a_1-a_0)/n\right\}$, или

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n): \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i>\lambda\right\}. \tag{2.5}$$

Найдем константу λ из условия $\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0 |\ H_0\}=\alpha$.

$$\mathrm{P}\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in W_0|H_0\}=\mathrm{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i>\lambda|a=a_0\right\}=1-\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2\sigma^2}n}dx=$$

$$=1-\int_{-\infty}^{\frac{\lambda-a_0}{\sigma}\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x)^2}{2}}dx.$$ Следовательно, $\frac{\lambda-a_0}{\sigma}\sqrt{n}=u_{1-\alpha}$ и $\lambda=a_0+u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $u_{1-\alpha}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\alpha$. Подставив найденное значение λ в выражение (2.5), получим

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_n): \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i>a_0+u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}. \tag{2.6}$$

Правило проверки гипотезы о числовом значении математического ожидания нормальной случайной величины, задаваемое критической областью (2.6), называется правосторонним критерием.

Так как в данной задаче n=121, $\sigma=0{,}11$ мг, $\alpha=0{,}01$, $u_{0,99}$=2,326, то критическая область примет вид

$$W_0=\left\{(x_1,\dots,x_{121}): \frac{1}{121}\sum_{i=1}^{121}x_i>0{,}5+2{,}326\frac{0{,}11}{\sqrt{121}}\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,\dots,x_{121}): \frac{1}{121}\sum_{i=1}^{121}x_i>0{,}52326\right\}.$$ Поскольку выборочное среднее равно 0,53 мг, то гипотезу $\mathrm{H}_0: a=0{,}5$ следует отклонить, а партию лекарств забраковать, как несоответствующую нормативам.

Анализируя выражения (2.4) и (2.6), заметим, что соответствующие критические области не зависят от величины a_1, фигурирующей в альтернативной гипотезе. А именно, если $a_1>a_0$, то, каково бы ни было численное значение a_1, правосторонний критерий будет наиболее мощным при заданном уровне значимости α; если $a_1 < a_0$, то наиболее мощным будет левосторонний критерий. Иными словами, правосторонний критерий, задаваемый критической областью (2.6), будет наиболее мощным для любой альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1 : a = a_1$, при условии, что $a_1 > a_0$. Аналогично, левосторонний критерий, задаваемый критической областью (2.4), будет наиболее мощным для любой альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1 : a = a_1$, при условии, что $a_1 < a_0$.

Определение 2.1 *Правило проверки простой основной гипотезы, обеспечивающее наибольшую мощность (при фиксированном уровне значимости α) для любой альтернативной гипотезы из некоторого класса гипотез, называется равномерно наиболее мощным критерием.*

Левосторонний и правосторонний критерии проверки гипотезы о числовом значении математического ожидания нормальной случайной величины являются примерами равномерно наиболее мощных критериев.

Равномерно наиболее мощные критерии замечательны тем, что их можно использовать при проверке простой гипотезы $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ против сложной альтернативной гипотезы вида $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$ или $\mathrm{H}_1 : \theta < \theta_0$, где θ- неизвестный параметр распределения, из которого получена выборка.

Задача 2.4

По повторной выборке объема 16 из нормального распределения с параметрами $\theta, \sigma = 4$ при уровне значимости 0,05 проверяется гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta = 2$ при конкурирующей гипотезе $\mathrm{H}_1 : \theta > 2$. Построить наиболее мощный критерий для проверки основной гипотезы и определить мощность критерия при альтернативном значении $\theta = 3$. Найти объем выборки, при котором мощность критерия равна 0,6, если альтернативная гипотеза имеет вид $\mathrm{H}_1 : \theta = 3$.

Решение. Так как выборка получена из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием и известной дисперсией, то для проверки гипотез, указанных в условиях задачи может быть использован правосторонний критерий, задаваемый критической областью (2.6). В соответствии с определением 2.1 этот критерий является равномерно наиболее мощным.

Подставив в выражение (2.6) все известные параметры, получим $W_0 = \left\{ (x_1, \ldots, x_{16}) : \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i > 2 + u_{0,95} \frac{4}{\sqrt{16}} \right\} = = \left\{ (x_1, \ldots, x_{16}) : \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i > 3{,}645 \right\}$.

Найдем мощность этого критерия.

$1-\beta = \mathrm{P}\{(\xi_1,\ldots,\xi_{16}) \in W_0 \mid H_1\} =$

$= \mathrm{P}\left\{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\xi_i > 3{,}645 \middle| \theta=3\right\} = 1-\left(\int_{-\infty}^{3,645}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2}\right)dx\right) = 1-\Phi(0{,}645) \approx 0{,}26$ Найдем объем выборки, при котором мощность будет равна 0,6. Вновь подставив в выражение (2.6) все известные параметры, получим $W_0 = \left\{(x_1,\ldots,x_n): \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i > 2+1{,}645\frac{4}{\sqrt{n}}\right\}$. Тогда

$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i > 2+1{,}645\frac{4}{\sqrt{n}} \middle| \theta=3\right\} =$

$= 1-\left(\int_{-\infty}^{2+1,645\frac{4}{\sqrt{n}}}\frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-3)^2}{32}n\right)dx\right) = 1-\Phi\left(\frac{2+1{,}645\frac{4}{\sqrt{n}}-3}{4}\sqrt{n}\right) = 0{,}6$, или

$\Phi\left(\frac{2+1{,}645\frac{4}{\sqrt{n}}-3}{4}\sqrt{n}\right) = 0{,}4$. Следовательно, $1{,}645-\frac{\sqrt{n}}{4} = u_{0,4}$. Так как для стандартного нормального распределения $u_{0,4} = -u_{0,6} \approx -0{,}25$, то $\sqrt{n} = 4(1{,}645+0{,}25) \Rightarrow \sqrt{n} = 7{,}58 \quad \Rightarrow n = 58$.

Задача 2.5

Случайная величина ξ имеет показательное распределение с неизвестным параметром θ $(\theta > 0)$. По одному наблюдению над случайной величиной ξ построить наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $\mathrm{H}_0: \theta = \theta_0$ $(\theta_0 = 1)$ против альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1: \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ при уровне значимости, равном 0,1. Найти мощность критерия, если $\theta_1 = 2$.

Решение. В соответствии с леммой Неймана-Пирсона, искомая критическая область будет иметь вид $W_0 = \left\{x:\ \ x \ge 0,\quad \frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)} > k > 0\right\} = \left\{x:\ \ x \ge 0,\quad \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 x}}{\theta_0 e^{-\theta_0 x}} > k > 0\right\} =$

$= \left\{x:\ \ x \ge 0,\quad \frac{\theta_1}{\theta_0}e^{-x(\theta_1-\theta_0)} > k > 0\right\} = = \left\{x:\ \ x \ge 0,\quad -x(\theta_1-\theta_0) > \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}k\right)\right\} =$

$$\{x:\ \ 0 \le x < \lambda\}. \tag{2.7}$$

Константу λ найдем из условия $\mathrm{P}\{\xi \in W_0 | \ H_0\} = \mathrm{P}\{0 \le \xi < \lambda | \theta = \theta_0\} = \int\limits_0^{\lambda} \theta_0 e^{-\theta_0 x} dx = 1 - e^{-\theta_0 \lambda} = \alpha$. Тогда $\ln(1-\alpha) = -\theta_0 \lambda$ и $\lambda = -\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\theta_0}$. Подставив найденное значение λ в выражение (2.7), получим $W_0 = \left\{ x: \ 0 \le x < -\dfrac{\ln(1-\alpha)}{\theta_0} \right\}$. Правило проверки, задаваемое такой критической областью, является равномерно наиболее мощным критерием. Следовательно, его можно использовать при решении задачи проверки простой основной гипотезы о числовом значении параметра показательного распределения $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ против сложной альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$.

С учетом того, что $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0{,}1$, представим критическую область в виде $W_0 = \{x: \ 0 \le x < -\ln 0{,}9\}$ и найдем мощность критерия, если $\theta_1 = 2$.

$$1 - \beta = \mathrm{P}\{\xi \in W_0 | \ H_1\} = \mathrm{P}\{0 \le \xi < -\ln 0{,}9 | \theta = 2\} =$$

$$= \int\limits_0^{-\ln 0{,}9} 2 e^{-2x} dx = 1 - e^{2 \ln 0{,}9} = 1 - 0{,}81 = 0{,}19.$$

3. Связь критериев проверки гипотез с доверительными интервалами

Рассмотрим случай, когда задача проверки гипотез сформулирована следующим образом.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - повторные независимые наблюдения над случайной величиной ξ с функцией распределения $F(x;\theta)$, где θ- неизвестный параметр. Относительно неизвестного параметра выдвигается простая основная гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ и сложная альтернативная $\mathrm{H}_1 : \theta \ne \theta_0$. Требуется по выборке проверить гипотезу H_0. Уровень значимости α задается.

Один из способов решения данной задачи заключается в следующем. Для неизвестного параметра θ строится доверительный интервал $\left(\underline{\theta}(x_1, \ldots, x_n); \overline{\theta}(x_1, \ldots, x_n)\right)$ надежности 1-α. Если этот интервал накрывает значение θ_0, то основная гипотеза не отвергается, в противном случае H_0 отвергается как противоречащая результатам наблюдений.

В тех случаях, когда при построении доверительного интервала применим центральный метод, данное правило проверки можно переформулировать относительно центральной статистики. Действительно, если $Y(x_1,\dots,x_n;\theta)$ - центральная статистика, то $\mathrm{P}\left\{u_{\frac{\alpha}{2}} \le Y(\xi_1,\dots,\xi_n;\theta) < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = $ $= \mathrm{P}\{\underline{\theta}(\xi_1,\dots,\xi_n) \le \theta < \overline{\theta}(\xi_1,\dots,\xi_n)\} = 1-\alpha$, где $u_{\frac{\alpha}{2}},\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантили распределения случайной величины $Y(\xi_1,\dots,\xi_n;\theta)$ уровней $\frac{\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}$ соответственно, а $\xi_1,\dots,\xi_n$ – независимые случайные величины, распределенные так же, как и ξ. Следовательно, $\left(\underline{\theta}(x_1,\dots,x_n) \le \theta_0 < \overline{\theta}(x_1,\dots,x_n)\right) \Leftrightarrow \left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le Y(x_1,\dots,x_n;\theta_0) < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$. Поэтому правило проверки может быть сформулировано следующим образом. Если $\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le Y(x_1,\dots,x_n;\theta_0) < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$, то гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ не отвергается, в противном случае она отвергается как противоречащая результатам наблюдений.

Если (при фиксированном значении θ) $Y(\xi_1,\dots,\xi_n;\theta)$ - непрерывная случайная величина с плотностью распределения, симметричной относительно оси ординат, то $u_{\frac{\alpha}{2}} = -\ u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, и гипотеза $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ отвергается, если $|Y(x_1,\dots,x_n;\theta_0)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Решим несколько задач с использованием данного критерия.

Задача 3.1

Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобрано 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что выборка взята из партии с номиналом 10 кОм, если дисперсия величины сопротивления известна и равна 4 $(кОм)^2$. Предполагается, что величина сопротивления наудачу взятого резистора имеет нормальный закон распределения.

Решение. Из условий задачи следует, что имеется 36 повторных независимых наблюдений над случайной величиной ξ, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $\mathrm{M}\xi = a, D\xi = 4$. По выборке требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0 : a = 10$ при альтернативной гипотезе $\mathrm{H}_1 : a \ne 10$.

Рассмотрим центральную статистику $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_{36};a\right)=\dfrac{\frac{1}{36}\sum\limits_{i=1}^{36}\xi_i-a}{\sigma}\times 6$, где $\xi_1,\ldots,\xi_{36}-$ независимые случайные величины, каждая из которых распределена так же, как и ξ. Данная статистика имеет стандартное нормальное распределение, следовательно, гипотезу $\mathrm{H}_0: a=10$ следует отвергнуть, если $\left|\dfrac{\frac{1}{36}\sum\limits_{i=1}^{36}\xi_i-a}{\sigma}\times 6\right|_{a=10}>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\dfrac{\alpha}{2}$.

Вычислим $\left|\dfrac{\frac{1}{36}\sum\limits_{i=1}^{36}x_i-a}{\sigma}\times 6\right|_{a=10}=\left|\dfrac{9{,}3-10}{2}\times 6\right|=2{,}1$. Так как $2{,}1>u_{0,975}=1{,}96$, то гипотеза $\mathrm{H}_0: a=10$ отвергается как противоречащая результатам наблюдений.

Задача 3.2

Из долгого опыта по производству безалкогольного напитка известно, что количество напитка, производимого за единицу времени, имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием 500 единиц и стандартным отклонением 96 единиц. Планируется осуществить модернизацию производства, в результате которой может измениться количество производимого напитка (стандартное отклонение останется прежним). По 50 наблюдениям построить критическую область для проверки гипотезы о том, что количество производимого напитка после модернизации не изменилось. Принять уровень значимости равным 0,05.

Решение. Из условий задачи следует, что по 50 повторным независимым наблюдениям над случайной величиной ξ, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $\mathrm{M}\xi=a, D\xi=(96)^2$ требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: a=500$ против альтернативной $\mathrm{H}_1: a\neq 500$.

Рассмотрим центральную статистику $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_{50};a\right)=\dfrac{\frac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{50}\xi_i-a}{96}\times\sqrt{50}$, где $\xi_1,\ldots,\xi_{50}-$ независимые случайные величины, каждая из которых распределена так же, как и ξ. Данная статистика имеет стандартное нормальное распределение, следовательно, гипотезу $\mathrm{H}_0: a = 500$ следует отвергнуть, если $\left.\left|\dfrac{\frac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{50} x_i - a}{96} \times \sqrt{50}\right|\right|_{a=500} > u_{0,975}$, где $u_{0,975}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $0{,}975$.

Таким образом, искомая критическая область будет иметь вид

$$W_0 = \left\{ (x_1,\ldots,x_{50}): \quad \left|\frac{\frac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{50} x_i - 500}{96} \times \sqrt{50}\right| > 1{,}96 \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1,\ldots,x_{50}): \quad \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i < 473{,}4 \right\} \cup \left\{ (x_1,\ldots,x_{50}): \quad \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i > 526{,}6 \right\}.$$

Задача 3.3

Пусть $x_1,\ldots,x_4$ повторная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием a и неизвестной дисперсией σ^2. По выборке требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: a = 10$ против альтернативной $\mathrm{H}_1: a \neq 10$ при уровне значимости 0,05. Известно, что выборочное среднее равно 15,84, а несмещенная оценка дисперсии $\widehat{D}_n(x_1,\ldots,x_4) = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 16$.

Решение. Рассмотрим центральную статистику $Y(\xi_1,\ldots,\xi_4; a) = \dfrac{\frac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4} \xi_i - a}{\sqrt{\widehat{D}_n(\xi_1,\ldots,\xi_4)}} \times 2$. Эта статистика имеет распределение Стьюдента с тремя степенями свободы. Плотность распределения Стьюдента симметрична относительно оси ординат, поэтому гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $\left|Y(x_1,\ldots,x_n; a)\right|\Big|_{a=10} > t_{3,1-\frac{\alpha}{2}}$, где $t_{3,1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль распределения Стьюдента с тремя степенями свободы уровня $1 - \frac{\alpha}{2}$. Вычислим $\left|Y(x_1,\ldots,x_n; a)\right|\Big|_{a=10} = \dfrac{15{,}84 - 10}{4} \times 2 = 2.92$. Так как $2{,}92 < t_{3;\,0{,}975} = 3{,}182$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Задача 3.4

Сырье, поступающее со складов a и b, номинально расфасовано по 1 кг в пакеты, маркированные буквами A и B соответственно. Из опыта известно, что веса наудачу взятых пакетов распределены нормально со стандартным отклонением 0,07кг и 0,03кг соответственно для складов a и b. Случайным образом отобрали 100 пакетов со склада a, их средний вес оказался равным 0,99кг. Средний вес четырехсот наудачу выбранных пакетов со склада b оказался равным 1,01кг. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что пакеты A и B имеют одинаковый средний вес.

Решение. По условиям задачи мы имеем две независимые повторные выборки $x_1,\ldots,x_{100}$ и $y_1,\ldots,y_{400}$ из нормальных распределений с параметрами $a_1, \sigma_1 = 0{,}07$ и $a_2, \sigma_2 = 0{,}03$ соответственно. По выборкам требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0 : a_1 = a_2$ против альтернативы $\mathrm{H}_1 : a_1 \neq a_2$, либо гипотезу $\mathrm{H}_0 : a_1 - a_2 = 0$ против альтернативы $\mathrm{H}_1 : a_1 - a_2 \neq 0$.

В соответствии с рассматриваемым правилом для проверки таких гипотез нужно построить доверительный интервала надежности $1-\alpha$ для параметра $\breve{a} = a_1 - a_2$. Если этот интервал не будет содержать значение $\breve{a} = 0$, то гипотезу $\mathrm{H}_0 : a_1 - a_2 = 0$ следует отвергнуть.

Рассмотрим статистики $\hat{a}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i$ и $\hat{a}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$, где $\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n$ - независимые случайные величины; ξ_i имеют нормальное распределение с параметрами $a_1, \sigma_1 = 0{,}07$, i=1,…,m; η_j имеют нормальное распределение с параметрами $a_2, \sigma_2 = 0{,}03$, j=1,…,n; m=100, n=400. По свойствам нормального распределения $\hat{a}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m) \sim \mathrm{N}\left(a_1, \frac{\sigma_1^2}{m}\right)$, $\hat{a}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n) \sim \mathrm{N}\left(a_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$, а разность $\hat{a}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m) - \hat{a}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ имеет нормальное распределение с параметрами $a_1 - a_2$ и $\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}$. Следовательно, статистика

$$Y(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;a_1,a_2) == \frac{(\hat{a}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m) - \hat{a}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n)) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

будет иметь стандартное нормальное распределение. Кроме того, эта статистика непрерывна и строго монотонна по параметру $\breve{a} = a_1 - a_2$, то есть является центральной статистикой, которую можно использовать при построении доверительного интервала для параметра $\breve{a}$. Таким образом, если $\left|Y(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;a_1,a_2)\right|_{a_1=a_2} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\frac{\alpha}{2}$, то гипотезу $H_0: a_1 - a_2 = 0$ следует отвергнуть, так как в этом случае доверительный интервал надежности $1-\alpha$ для параметра $\breve{a} = a_1 - a_2$ не накроет 0. Вычислим $\left|Y(\xi_1,\ldots,\xi_{100},\eta_1,\ldots,\eta_{400};a_1,a_2)\right|_{a_1=a_2} = \dfrac{|0{,}99-1{,}01|}{\sqrt{\dfrac{0{,}0049}{100}+\dfrac{0{,}0009}{400}}} \approx 2\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{2} > u_{0,975} = 1{,}96$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть, как противоречащую результатам измерений. То есть, веса пакетов, маркированных буквами А и В, следует считать разными.

Задача 3.5

Два штурмана определяли пеленг маяка по нескольким замерам, используя различные пеленгаторы. Первый штурман произвел 4 замера, при этом выборочное среднее полученных результатов оказалось равным $70{,}2^\circ$. Второй штурман произвел 9 замеров, выборочное среднее оказалось равным $70{,}5^\circ$. В предположении, что результаты измерений имеют нормальное распределение со стандартным отклонением $0{,}5^\circ$, проверить гипотезу о том, что различие результатов вызвано только случайными ошибками. Принять уровень значимости равным 0,05.

Решение. По условиям задачи штурманами получены две независимые повторные выборки $x_1,\ldots,x_4$ и $y_1,\ldots,y_9$ из нормальных распределений с параметрами $a_1, \sigma = 0{,}5^\circ$ и $a_2, \sigma = 0{,}5^\circ$ соответственно. По выборкам требуется проверить гипотезу $H_0: a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе $H_1: a_1 \neq a_2$, либо гипотезу $H_0: a_1 - a_2 = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$.

Для решения данной задачи воспользуемся результатами предыдущей и вычислим значение статистики

$$\left|Y\left(x_1,\dots,x_4,y_1,\dots,y_9;a_1,a_2\right)\right| = = \left|\frac{\left(\hat{a}_1(x_1,\dots,x_4)-\hat{a}_2\left(y_1,\dots,y_9\right)\right)-(a_1-a_2)}{\sigma\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}}\right|,$$ если

$a_1=a_2$. Тогда $\left|Y\left(x_1,\dots,x_4,y_1,\dots,y_9;a_1,a_1\right)\right| = \dfrac{0{,}3}{0{,}5\dfrac{\sqrt{13}}{6}} = \dfrac{18}{5\times 3{,}6} = 1$. Так как $1 < u_{0,975} = 1{,}96$, то гипотеза $\mathrm{H}_0: a_1=a_2$ не отвергается.

Задача 3.6

При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты (в килограммах вещества за час работы):

№ измерения	1	2	3	4	5
Агрегат 1	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат 2	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Можно ли считать, что производительности агрегатов одинаковы, в предположении, что обе выборки получены из нормальных распределений с одинаковой дисперсией. Принять уровень значимости равным 0,05.

Решение. По условиям задачи результаты измерений производительности агрегатов 1 и 2 можно рассматривать как значения независимых случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_m,\eta_1,\dots,\eta_n$, где $\xi_i \sim \mathrm{N}\left(a_1,\sigma^2\right)$, $i=\overline{1,m}$; $\eta_j \sim \mathrm{N}\left(a_2,\sigma^2\right)$, $i=\overline{1,n}$; (m=n=5). По выборкам требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0: a_1=a_2$ против альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1: a_1\neq a_2$, либо гипотезу $\mathrm{H}_0: a_1-a_2=0$ против альтернативы $\mathrm{H}_1: a_1-a_2\neq 0$.

Рассмотрим статистики $\hat{a}_1\left(\xi_1,\dots,\xi_m\right)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i$, $\hat{a}_2\left(\eta_1,\dots,\eta_n\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i$,

$$\hat{D}_1\left(\xi_1,\dots,\xi_m\right)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\xi_i-\hat{a}_1\left(\xi_1,\dots,\xi_m\right)\right)^2,$$

$$\hat{D}_1\left(\eta_1,\dots,\eta_n\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\eta_j-\hat{a}_2\left(\eta_1,\dots,\eta_n\right)\right)^2,$$ являющиеся несмещенными оценками математических ожиданий и дисперсий случайных величин ξ_i и η_j. Так как дисперсии ξ_i и η_j одинаковы, то можно найти несмещенную оценку

дисперсии по объединенной выборке $\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n$. Эта оценка будет иметь вид $S^2(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n)=\frac{(m-1)\widehat{D}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m)+(n-1)\widehat{D}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n)}{m+n-2}$. Тогда, можно доказать, что статистика $Y(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;a_1,a_2)=\frac{\widehat{a}_1(\xi_1,\ldots,\xi_m)-\widehat{a}_2(\eta_1,\ldots,\eta_n)-(a_1-a_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$ будет иметь распределение Стьюдента с m+n-2 степенями свободы. Так как данная статистика непрерывна и строго монотонна по параметру $\breve{a}=a_1-a_2$, то она является центральной и, следовательно, может быть использована при построении доверительного интервала для параметра $\breve{a}$.

Таким образом, правило проверки гипотез в данном случае будет заключаться в следующем. Если $\left|Y(\xi_1,\ldots,\xi_5,\eta_1,\ldots,\eta_5;a_1,a_2)\right|_{a_1=a_2}>t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}}$, то гипотезу $\mathrm{H}_0: a_1-a_2=0$ следует отвергнуть.

Вычислим выборочные средние производительностей агрегатов 1 и 2: $\widehat{a}_1(x_1,\ldots,x_5)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}(14{,}1+\ldots+14{,}0)=13{,}32$;

$\widehat{a}_2(y_1,\ldots,y_5)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=\frac{1}{5}(14{,}0+\ldots+14{,}1)=13{,}8$. По каждой из выборок найдем несмещенные оценки дисперсии: $\widehat{D}_1(x_1,\ldots,x_5)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-13{,}32)^2\approx 3{,}37$; $\widehat{D}_2(y_1,\ldots,y_5)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(y_i-13{,}8)^2=0{,}46.$

Тогда, $S^2(x_1,\ldots,x_5,y_1,\ldots,y_5)\approx\frac{4(3{,}37+0{,}46)}{8}\approx 1{,}91$ и $\left|Y(x_1,\ldots,x_5,y_1,\ldots,y_5;a_1,a_2)\right|_{a_1=a_2}=\frac{13{,}32-13{,}8}{\sqrt{1{,}91\times 0{,}4}}\approx 0{,}55$. Так как $0{,}55<t_{8;0{,}975}=2{,}306$, то гипотеза $\mathrm{H}_0: a_1-a_2=0$ не отвергается, поскольку экспериментальные данные не противоречат гипотезе о том, что производительности агрегатов одинаковы.

Задача 3.7

На двух токарных станках обрабатываются втулки. Из втулок, сделанных на первом станке, случайным образом отобрано для проверки m=15 штук, из сделанных на втором станке – n=18 штук. По данным выборок $x_1,\ldots,x_m$ и $y_1,\ldots,y_n$ вычислены несмещенные оценки дисперсии контролируемого размера втулок для первого и второго станков. Они оказались равными:

$\widehat{D}_m(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x}) = 9{,}1;$ $\widehat{D}_n(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}) = 6{,}67$, где $\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$. Полагая, что размеры втулок подчиняются нормальному распределению, на уровне значимости 0,05 выяснить, обладают ли станки одинаковой точностью.

Решение. По условиям задачи, имеются две независимые повторные выборки $x_1,\ldots,x_m$ и $y_1,\ldots,y_n$ из двух нормальных распределений с параметрами a_1, σ_1^2 и a_2, σ_2^2 соответственно. По выборкам требуется проверить гипотезу $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Рассмотрим статистики $\widehat{D}_m(\xi_1,\ldots,\xi_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\xi_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\xi_j\right)^2$ и $\widehat{D}_n(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j\right)^2$, где $\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n$ - независимые случайные величины и $\xi_i \in \mathrm{N}(a_1, \sigma_1^2)$, $i = \overline{1,m}$; $\eta_j \in \mathrm{N}(a_2, \sigma_2^2)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;\sigma_1^2,\sigma_2^2\right) = \frac{\widehat{D}_m(\xi_1,\ldots,\xi_m)\sigma_2^2}{\widehat{D}_n(\eta_1,\ldots,\eta_n)\sigma_1^2}$ имеет распределение Фишера с m-1 и n-1 степенями свободы. Таким образом, правило проверки в данном случае будет заключаться в следующем. Гипотезу $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ следует отвергнуть как противоречащую результатам наблюдений, если $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;\sigma_1^2,\sigma_2^2\right)\Big|_{\sigma_1^2=\sigma_2^2} < X_{m-1,n-1;\frac{\alpha}{2}}$ или $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;\sigma_1^2,\sigma_2^2\right)\Big|_{\sigma_1^2=\sigma_2^2} > X_{m-1,n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$, где $X_{m-1,n-1;\frac{\alpha}{2}}$ и $X_{m-1,n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантили распределения Фишера с m-1 и n-1 степенями свободы уровней $\frac{\alpha}{2}$ и $1-\frac{\alpha}{2}$ соответственно.

Вычислим $Y\left(\xi_1,\ldots,\xi_m,\eta_1,\ldots,\eta_n;\sigma_1^2,\sigma_2^2\right)\Big|_{\sigma_1^2=\sigma_2^2} = \frac{9{,}1}{6{,}67} = 1{,}36$. Из таблиц найдем значения квантилей распределения Фишера

$X_{14,17;0,025} = \frac{1}{X_{17,14;0,975}} \approx \frac{1}{2,84} \approx 0,35$; $X_{14,17;0,975} = 2,72$. Так как 0,35<1,36<2,72, то гипотеза $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не отвергается.

Литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1988. – 1022 с.
2. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. – М.: Наука, 1977. – 407 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
5. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648с.
7. Математическая статистика: Учеб. для вузов/ В.Б. Горяинов, И.В. Павлов, Г.М. Цветкова и др. Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. А.В. Ефимова – М.: Наука, 1990. – 428 с.
9. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики: Учебник/ М.А. Федоткин. – М.: Высш. шк., 2006.– 368 с.