

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

**Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, Л.Н. Февральских**

# **СВОБОДНЫЕ УГЛОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Учебное пособие*

*Допущено методической комиссией механико-математического факультета в качестве учебного пособия для студентов высшего профессионального образования, обучающихся по направлениям подготовки «Механика и математическое моделирование»*

ННГУ 2015

УДК 531  
ББК 22.2

**Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, Л.Н. Февральских**

**Свободные угловые движения вязкоупругого твердого тела:** Учебное пособие / Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014. – 60 с.

*Рецензент:*

Д.В. Баландин – доктор физико-математических наук, профессор

Представлена общая постановка задачи об угловых движениях вязкоупругого тела. Проанализирована связь симметрии формы и упругих свойств тел с их угловыми движениями. На конкретных системах продемонстрированы новые явления в динамике твердых тел, связанные с их упругими и вязкими свойствами. Результаты используются для интерпретации некоторых особенностей динамики Земли.

*Подготовлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-08326)*

© Нижегородский госуниверситет  
им. Н.И. Лобачевского, 2015

## Содержание

Введение .....	4
§ 1. О свободных движениях твердого тела при учете малого внутреннего рассеяния энергии: геометрический подход к решению задачи .....	5
§ 2. Элементы линейной теории упругости: деформации, напряжения, уравнения движения и краевые условия .....	9
§ 3. Постановка задачи о близких к эйлеровым движениях вязкоупругих тел. Симметрия формы поверхности тела и его угловые движения .....	13
§ 4. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару. 17	
§ 5. О свободных движениях упругого эллипсоида .....	25
§ 6. Анизотропно-упругий шар в свободном движении .....	30
§ 7. О возможности перехода тела к новому состоянию стационарного вращения.....	43
§ 8. О свободном движении вязкоупругого квазишара.....	50
Литература.....	58

## Введение

Обычно при изучении движений твердого тела его рассматривают как абсолютно твердое, т.е. не принимают в расчет различные деформации, происходящие при движении. Тогда скорость и положение каждого элемента тела можно вычислить по известному движению системы осей, жестко с ним связанной, причем удобно начало связанной системы координат совместить с центром инерции тела, а оси ориентировать по главным осям инерции. Угловые движения тела относительно центра инерции характеризуются угловой скоростью связанной системы координат.

Следующей после абсолютно твердого тела более сложной и обладающей богатой динамикой моделью реальных объектов является линейное вязкоупругое тело. Задача о движении упругого тела относительно центра инерции возникла в связи с попыткой объяснить расхождение между теоретическими результатами и данными наблюдений в динамике Земли [1]. Решение этой задачи стало настоятельно необходимым с появлением искусственных спутников и обнаружением новых эффектов в их угловых движениях, обусловленных упругими свойствами. Для нормального функционирования искусственных космических объектов необходимо приведение их в заданную ориентацию в пространстве, что часто затруднено наличием гибких элементов (антенны, солнечные батареи, сами устройства гравитационной стабилизации) и конечной жесткостью самих объектов. Внимание к задаче об угловых движениях деформируемого твердого тела связано также с появлением неконтактных гироскопов, повышение точности которых невозможно без учета упругих свойств чувствительных элементов.

Учет вязкоупругих свойств тела существенно усложняет задачу. Так, например, свободное (т.е. в отсутствие сил и моментов) деформируемое тело совершает колебания, обусловленные упругими свойствами, и участвует в угловых движениях, отличающихся от движений абсолютно твердого тела, причем само понятие "угловые движения" для вязкоупругого тела нуждается в уточнении.

Сосредоточимся на изучении угловых движений вязкоупругого тела, т.е. его движений как целого относительно центра масс. До недавнего времени единственным существенным результатом, имевшимся здесь, являлся вывод о неустойчивости вращения тела вокруг оси минимального момента инерции при наличии внутреннего трения. Дело в том, что в рамках модели абсолютно твердого тела можно сделать лишь вывод о неустойчивости вращательного движения вокруг оси среднего момента инерции. Вращение вокруг осей наибольшего и наименьшего моментов инерции, хоть и считают обычно устойчивыми (при малых отклонениях тело продолжает пребывать вблизи первоначального состояния), с точки зрения практической устойчивости следует отнести к сомнительным случаям. Введение в рассмотрение малого внутреннего трения позволяет разрешить это недоумение (например, [2]). Вращение вокруг оси наибольшего момента инерции становится асимптотически устойчивым, а вращение вокруг оси наименьшего момента инерции - неустойчивым.

Задача об угловых движениях вязкоупругого тела поддается анализу, когда тело достаточно жестко (следовательно, частоты интересующих нас движений существенно отделены от остального спектра), а вязкие свойства тела обеспечивают достаточно быстрое затухание упругих колебаний. Именно в такой постановке решал задачу Ф.Л. Черноушко [3]. Им рассматривалось движение относительно центра масс твердого тела, содержащего недеформируемую часть и жестко соединенную с ней массу сплошной вязкоупругой среды. За угловое движение

в этом случае принято движение системы координат, жестко связанной с недеформируемой частью конструкции. Показано, что наличие собственной упругости и внутренней диссипации сводится к действию на тело возмущающих моментов, имеющих в предположении малости деформаций соответственно вид многочленов четвертой и пятой степеней от компонентов угловой скорости тела. В работе [4] Н.Е. Егарминым аналогично [3] поставлена задача о движении деформируемого тела (без абсолютно твердой части) вокруг центра масс и получены уравнения движения типа уравнений Эйлера, в которых внутренняя упругость сведена к эквивалентному моменту, выражающемуся многочленом четвертой степени от компонентов угловой скорости. На основе свойств симметрии тела в исходном недеформированном состоянии оказалось возможным уточнить вид этого момента, Деформация тела при его движении рассматривается относительно некоторой системы координат, совпадающей с главными осями тела в исходном недеформированном состоянии. Под угловыми движениями тела в [4] понимается движение этой искусственно и без должного обоснования введенной системы координат.

Общие вопросы динамики и устойчивости стационарных вращений вязкоупругого тела обсуждались в работах авторов [5-7]. В цикле работ [8-10] рассмотрен ряд задач, в которых поведение свободно вращающегося твердого деформируемого тела существенным образом определяется его упругими свойствами. Изучена динамика однородного изотропного тела, близкого по форме к шару. Найдены стационарные вращения тела, движения вектора кинетического момента относительно тела и зависимость этих движений от формы поверхности. Исследованы устойчивость стационарных вращений и возможный процесс перехода тела при изменении угловой скорости от одного состояния стационарного вращения к другому. Рассмотрена задача о свободном движении анизотропного упругого шара. Показана полная аналогия в поведении этого объекта и изотропного тела произвольной формы, которому в жестком представлении отвечает шаровой тензор инерции. Исследована динамика вращающегося упругого эллипсоида при произвольном соотношении полуосей. Изучено влияние вязкоупругих свойств вращающегося эллипсоида на его угловые движения. В этом случае поведение тела обнаруживает качественно новые эффекты, связанные с его вязкими свойствами. Результаты использованы для интерпретации чандлеровской нутации Земли и возможности глобального перемещения ее полюсов [22].

Цель книги - дать по возможности полное изложение особенностей динамики твердого тела, связанных с его упругими и вязкими свойствами. В ее основу положены результаты, полученные авторами.

## **§ 1. О свободных движениях твердого тела при учете малого внутреннего рассеяния энергии: геометрический подход к решению задачи**

Задача о свободных движениях абсолютно твердого тела представлена в большей части книг по механике. Наилучшим является наглядный, весьма изящный и эффективный геометрический подход к ее изложению, примененный Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем в книге [11]. Этот подход используется в дальнейшем при изучении динамики вязкоупругого тела. Геометрический метод продемонстрируем на задаче о движении твердого тела при учете малой внутренней диссипации энергии. Однако смысл задачи не сводится к иллюстрации метода, ее результаты представляют большой самостоятельный интерес.

Рассмотрим движение твердого тела относительно неподвижной точки - центра инерции (точка 0). Систему осей  $Ox_1x_2x_3$  считаем неподвижной в пространстве, а систему  $Ox_1x_2x_3$ , жестко свяжем с телом, ориентируя ее оси по главным осям инерции тела. Тензор инерции в этой системе осей является диагональным с компонентами  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ . Для определенности примем, что  $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$ .

Движение тела представляет собой вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Компоненты момента количества движения тела определяются выражением  $K_i = I_{ij}\omega_j$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , а по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. В нашем случае момент количества движения имеет вид  $\vec{K} = I_{11}\omega_1\vec{e}_1 + I_{22}\omega_2\vec{e}_2 + I_{33}\omega_3\vec{e}_3$ , где  $\vec{e}_m$  - единичные векторы системы  $Ox_1x_2x_3$ .

При свободном движении тела

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

т.е. его кинетический момент сохраняется. Неизменной остается и кинетическая энергия тела  $T = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j$ . В этом можно убедиться, в частности, умножив (1) скалярно на вектор угловой скорости. Запишем два интеграла движения в следующем виде:

$$I_{11}^2\omega_1^2 + I_{22}^2\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2 = K^2, \quad (2)$$

$$I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 = 2T. \quad (3)$$

Если выбрать в качестве переменных компоненты вектора момента количества движения, то эти интегралы принимают вид

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = K^2, \quad (4)$$

$$\frac{K_1^2}{2TI_{11}} + \frac{K_2^2}{2TI_{22}} + \frac{K_3^2}{2TI_{33}} = 1. \quad (5)$$

Интегралы допускают геометрическую интерпретацию. Это - уравнения сферы радиуса  $K$  с центром в точке 0 и эллипсоида с полуосями  $\sqrt{2TI_{11}}$ ,  $\sqrt{2TI_{22}}$ ,  $\sqrt{2TI_{33}}$ . Эллипсоид имеет ориентацию главных осей, совпадающую с ориентацией главных осей эллипсоида инерции. Различие между ними состоит в том, что наименьшей оси одного отвечает наибольшая ось другого.

Движение вектора  $\vec{K}$  относительно тела таково, что энергия и момент количества движения сохраняются, поэтому конец вектора  $\vec{K}$  всегда остается на линии пересечения поверхностей сферы и эллипсоида. Убедимся в том, что такое пересечение существует. Рассмотрим выражение (2) совместно с двумя следующими соотношениями, получаемыми из (3) умножением соответственно на  $I_{11}$  и  $I_{33}$ ;

$$2TI_{11} = I_{11}^2\omega_1^2 + I_{11}I_{22}\omega_2^2 + I_{11}I_{33}\omega_3^2,$$

$$2TI_{33} = I_{11}I_{33}\omega_1^2 + I_{22}I_{33}\omega_2^2 + I_{33}^2\omega_3^2.$$

Из этих выражений и неравенства  $I_{11} \leq I_{22} \leq I_{33}$  следует

$$2TI_{11} \leq K^2 \leq 2TI_{33} \quad (6)$$

Значит, радиус сферы лежит между наименьшей и наибольшей осями эллипсоида. Знак равенства в (6) отвечает вращению тела вокруг оси наибольшего или наименьшего моментов инерции.

Исследуем вид траекторий конца вектора  $\vec{K}$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Их уравнение имеет вид

$$\frac{K_i^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{ii}} - \frac{1}{I_{ll}} \right) + \frac{K_j^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{jj}} - \frac{1}{I_{ll}} \right) = 1 - \frac{K^2}{2TI_{ll}},$$

где  $i, j, l = 1, 2, 3$  и  $i \neq j \neq l$ .

Исходя из принятого соотношения между моментами инерции тела, нетрудно установить, что проекции траектории вектора  $\vec{K}$  на плоскости  $Ox_1x_2$  и  $Ox_2x_3$  являются замкнутыми эллипсами или эллиптическими дугами:

$$\frac{K_1^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{11}} - \frac{1}{I_{33}} \right) + \frac{K_2^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{22}} - \frac{1}{I_{33}} \right) = 1 - \frac{K^2}{2TI_{33}},$$

$$\frac{K_2^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{22}} - \frac{1}{I_{11}} \right) + \frac{K_3^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{33}} - \frac{1}{I_{11}} \right) = 1 - \frac{K^2}{2TI_{11}}.$$

Проекции траекторий  $\vec{K}$  на  $Ox_1x_3$  представляют собой гиперболы, которые могут вырождаться в две прямые линии

$$\frac{K_3^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{33}} - \frac{1}{I_{22}} \right) + \frac{K_1^2}{2T} \left( \frac{1}{I_{11}} - \frac{1}{I_{22}} \right) = 1 - \frac{K^2}{2TI_{22}}.$$

Теперь обсудим некоторые частные случаи.

- а. Пусть кинетическая энергия тела равна  $T = K^2/2I_{11}$ . Тогда сфера полностью размещается в эллипсоиде. Поверхности соприкасаются в точках  $(\pm K, 0, 0)$ .
- б. Если  $T = K^2/2I_{22}$ , то траектория конца вектора  $\vec{K}$  имеет проекцией на  $Ox_1x_3$

две прямые линии, проходящие через начало координат, следовательно, представляет собой два больших круга сферы.

- в. В том случае, когда  $T = K^2/2I_{33}$ , эллипсоид полностью располагается в сфере.

Эти поверхности соприкасаются в точках  $(0, 0, \pm K)$ .

- г. Если тело обладает осевой симметрией, к примеру,  $Ox_3$  - ось симметрии, то проекции траекторий  $\vec{K}$  на плоскость  $Ox_1x_3$  - окружности.
- д. В тривиальной ситуации сферического твердого тела поверхности (4), (5) совпадают. Следовательно, любое начальное положение вектора  $\vec{K}$  относительно тела остается неизменным во времени.

На рис. 1 показаны траектории вектора  $\vec{K}$  на сфере постоянного кинетического момента. В отсутствие момента внешних сил кинетический момент тела в неподвижных осях  $Ox_1x_2x_3$  сохраняет направление и величину. Поэтому движение  $\vec{K}$  является фактически движением тела - системы  $Ox_1x_2x_3$  вокруг фиксированного положения вектора  $\vec{K}$ .

Геометрическое описание движения тела является неполным, т.к. положение тела определяется с точностью до произвольного вращения вокруг  $\vec{K}$ . Эту неопределенность можно устранить вычислением вектора угловой скорости:  $\omega_i = K_i/I_{ii}$ , определяя таким образом положение оси мгновенного вращения.

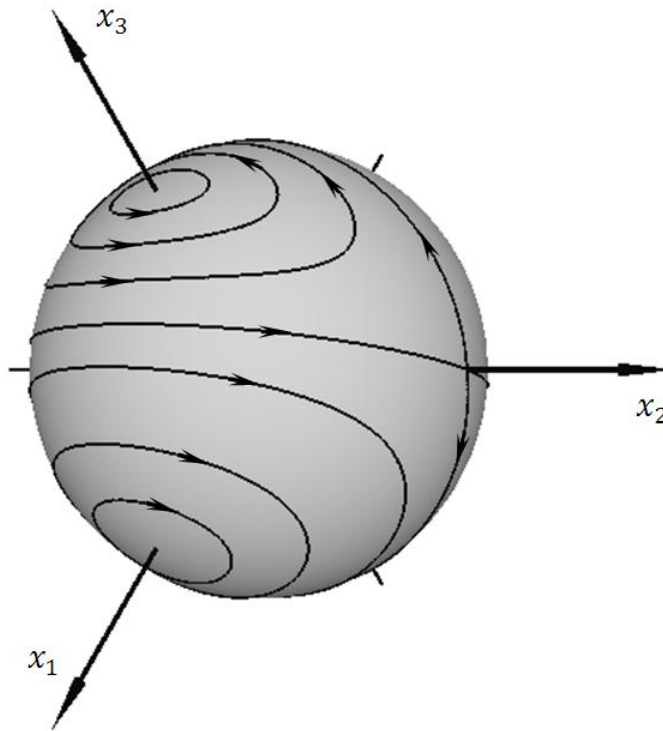


Рис. 1

Согласно рис. 1 все траектории являются замкнутыми кривыми, следовательно, им отвечают периодические движения вектора  $\vec{K}$  относительно тела. Малое отклонение  $\vec{K}$  от одной из осей стационарного вращения  $Ox_1$ ,  $Ox_3$  приводит к тому, что его конец описывает в теле малую замкнутую кривую вокруг стационарной точки, т.е. тело совершает движения, близкие к первоначальным. На этом основании стационарные вращения вокруг осей наибольшего и наименьшего моментов инерции принято считать устойчивыми. Такой взгляд не имеет достаточных оснований. Дело в том, что обсуждаемые ситуации относятся к числу критических по Ляпунову, поэтому на вопрос об устойчивости стационарных вращений тела вокруг  $Ox_1$  и  $Ox_3$  в рамках модели абсолютно твердого тела ответить не удастся.

Что касается вращения вокруг средней оси  $Ox_2$ , то с исследованием его устойчивости проблемы не возникают. Это стационарное вращение абсолютно твердого тела неустойчиво. Достаточно малые отклонения  $\vec{K}$  от  $Ox_2$  вызывают движения, уводящие тело в положения, далекие от первоначального.

Уточним модель, включив в рассмотрение малую внутреннюю диссипацию. Это не скажется на кинетическом моменте  $\vec{K}$ , который остается неизменным, а кинетическая энергия тела будет уменьшаться со временем, переходя во внутреннюю энергию тела. Следовательно, сфера кинетического момента сохраняется, а эллипсоид уменьшается в размерах.

Пусть тело приведено во вращение вокруг главной оси наименьшего момента инерции  $Ox_1$  и затем совершает свободное движение. В начальном состоянии поверхности сферы и эллипсоида соприкасаются в двух точках  $(\pm K, 0, 0)$  (ранее рассмотренный случай а). С уменьшением энергии (эллипсоида) конец вектора  $\vec{K}$  будет описывать раскручивающуюся спираль. Значит, стационарное вращение вокруг оси наименьшего момента инерции неустойчиво. Этому состоянию тела отвечает наибольшая энергия при заданном кинетическом моменте.



При вращении тела вокруг  $Ox_3$  - оси наибольшего момента инерции (случай в) поверхности сферы и эллипсоида соприкасается в точках  $(0, 0, \pm K)$ . Малое отклонение  $\vec{K}$  от этого направления означает, что кинетическая энергия тела становится больше, чем  $T = K^2/2I_{33}$ . Со временем  $T$  уменьшается. При этом конец вектора  $\vec{K}$  описывает на сфере скручивающуюся спираль. При достижении кинетической энергией значения  $K^2/2I_{33}$  кинетический момент приходит в положение  $Ox_3$ , тело совершает чистое вращение вокруг  $\vec{K}$ . Этому состоянию отвечает минимум энергии при фиксированном кинетическом моменте.

Таким образом, устойчивым является лишь стационарное вращение твердого тела вокруг оси наибольшего момента инерции, а вращения относительно осей среднего и наименьшего моментов инерции неустойчивы. Исследование устойчивости стационарных вращений твердого тела удалось выполнить лишь после учета внутренней диссипации энергии, т.е. отступив от модели абсолютно твердого тела, причем важен сам факт учета рассеяния энергии, а механизм его в задаче устойчивости не имеет принципиального значения.

В заключение заметим, что приведенные результаты интересны с точки зрения многих задач и подтверждаются наблюдениями за динамикой искусственных космических объектов. Например, известно, что американский спутник *Explorer 1* стабилизировался вокруг оси наименьшего момента инерции. После первого оборота вокруг Земли, т.е. за время порядка 1,5 часа, он перешел в более предпочтительное положение, развернувшись относительно первоначального состояния на угол порядка  $60^\circ$  [2].

## § 2. Элементы линейной теории упругости: деформации, напряжения, уравнения движения и краевые условия

Динамика рассматриваемых здесь упругих объектов с распределенными параметрами описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Их характеристики - смещения, напряжения и другие, зависят как от времени, так и от пространственных переменных. Внешние воздействия на такие системы моделируются объемными и поверхностными силами.

Рассмотрим ограниченную поверхностью  $S$  упругое тело объема  $V$ . С телом в недеформированном состоянии свяжем систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . При деформировании некоторая точка тела с координатами в исходном недеформированном состоянии  $x_1, x_2, x_3$  переходит в положение с координатами  $a_1 = a_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $a_2 = a_2(x_1, x_2, x_3)$ ,  $a_3 = a_3(x_1, x_2, x_3)$ . Деформацию характеризуют вектором смещения  $\vec{u}$ , компоненты которого имеют вид

$$u_i = a_i(x_1, x_2, x_3) - x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками при деформировании тела составляет

$$ds^2 - ds_0^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Эту разность представим в виде

$$ds^2 - ds_0^2 = 2u_{ij}(x_1, x_2, x_3)dx_idx_j,$$

где  $u_{ij}$  - тензор деформаций в координатах тела до деформирования.

Воспользовавшись тем, что

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_i}{\partial x_3} dx_3$$

найдем выражение для составляющих тензора  $u_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Все деформации тела считаем малыми, обычно малы и компоненты вектора смещения. Поэтому в  $u_{ij}$  ограничимся лишь линейными членами. В этом приближении различие в геометрии исходного и деформированного состояний тела несущественно.

Из деформированного тела выделим прямоугольный параллелепипед с ребрами  $dx_1, dx_2, dx_3$ . Для напряжений на гранях параллелепипеда введем обозначения  $\vec{\sigma}_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ ,  $\vec{\sigma}_2(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ ,  $\vec{\sigma}_3(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$  (рис. 2).

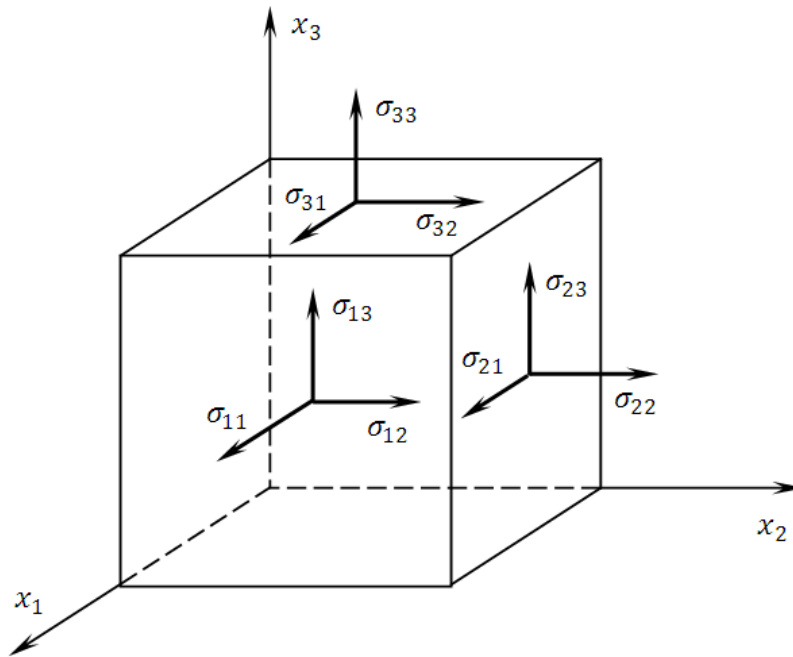


Рис. 2

Тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  является симметричным тензором:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Плотность объемных сил в точке с координатами  $x_1, x_2, x_3$  (включая и силу инерции) обозначается  $\vec{F}(x_1, x_2, x_3)$ .

Уравнение баланса сил, приложенных к элементу объема

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\sigma}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\sigma}_3}{\partial x_3} + \vec{F} = 0$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Напряжение в некоторой точке с координатами  $x_1, x_2, x_3$  на площадке с внешней нормалью  $\vec{n}$  вычисляется через напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям  $Ox_i$ , следующим образом:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + \vec{\sigma}_2 \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) + \vec{\sigma}_3 \cos(\vec{n}, \vec{e}_3),$$

где  $\vec{e}_i$  - единичный вектор, направленный по  $Ox_i$ . Это выражение в проекциях на  $Ox_1x_2x_3$  имеет вид  $\sigma_{ij}n_j$ .

Если на поверхности тела  $S$  задана внешняя сила плотностью  $\vec{q}$ , то краевые условия на  $S$  имеют вид

$$\sigma_{ij}n_j = q_i, \quad i = 1,2,3. \quad (8)$$

Плотность внутренней энергии  $\varepsilon$  - энергия деформации упругого тела, отнесенная к единице объема до деформации, является функцией компонент тензора деформации, поскольку они определяют состояние тела. Считая  $u_{ij}$  малыми, представим  $\varepsilon$  в виде ряда по этим величинам и ограничимся квадратичными членами

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}C_{ijkl}u_{ij}u_{kl}, \quad \varepsilon_0 = const.$$

Постоянный тензор  $C_{ijkl}$  характеризует свойства вещества тела. Реальные материалы обладают некоторой симметрией, что упрощает вид этого тензора. Например, для изотропного тела компоненты  $C_{ijkl}$  выражаются через постоянные Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , а плотность внутренней энергии запишется в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \mu u_{ij}^2 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2.$$

В общем случае  $C_{ijkl}$  имеет 21 независимую компоненту, т.к. в силу симметричности тензора деформаций должен удовлетворять условиям

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Полная энергия тела  $E = \int_V \varepsilon(u_{ij})dV$ , где интегрирование проводится по объему тела до деформирования. К телу приложена объемная сила  $F_i$  и поверхностная нагрузка  $q_i$ , отнесенные соответственно к единице объема и единице площади в исходном состоянии. Принцип возможных перемещений требует, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\delta E - \int_V F_i \delta u_i dV - \int_S q_i \delta u_i dS = 0, \quad (9)$$

где  $\delta u_i$  - кинематически допустимые вариации смещений.

Вычислим вариацию полной энергии

$$\delta E = \int_V \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \delta u_i \right] dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \right] \delta u_i dV.$$

С помощью теоремы Гаусса это выражение приводится к виду

$$\delta E = \int_S \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \delta u_i n_j dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \right] \delta u_i dV,$$

где  $n_j$  - составляющая вектора внешней нормали к поверхности.

Подставляя  $\delta E$  в (9) и приравнявая нулю множители при  $\delta u_i$  в силу произвольности вариации, получим уравнения для элемента объема и условия на поверхности тела, принимающие после перевода к производным по компонентам тензора деформации  $u_{ij}$  следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ij}} \right) + F_i = 0 \text{ в } V \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ij}} n_j = q_i \text{ на } S \quad (11)$$

Очевидное следствие, вытекающее из (7), (8) и (10), (11) состоит в том, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ij}}.$$

Воспользовавшись выражением для плотности энергии  $\varepsilon$ , имеем в общем случае  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{kl}$ . Для изотропного тела  $\sigma_{ij} = \lambda u_{ll} + 2\mu u_{ij}$ . С учетом этого уравнение (7) приводится к виду

$$\lambda \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + F_i = 0.$$

После подстановки

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

имеем

$$\lambda \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + F_i = 0.$$

В этом уравнении удобно перейти к векторным обозначениям, в которых величины  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$  являются компонентами вектора  $\Delta \vec{u}$ , а  $\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \text{div } \vec{u}$ . Выделим также силу инерции в плотности объемных сил:

$$\vec{F} = \vec{\phi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Окончательно уравнение движения элемента объема изотропного тела запишется в виде

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{\phi} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

При повороте тела как целого (жесткое движение) вектор смещения элемента тела, радиус-вектор которого  $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$  можно представить в виде  $\vec{u}_0 = [\vec{r}, \vec{c}]$ , где  $\vec{c}$  - постоянный вектор. Нетрудно убедиться, что решение задачи (7), (8) можно найти лишь с точностью до вектора жесткого движения  $\vec{u}_0$ .

Введем в рассмотрение внутреннее трение - свойство твердых тел необратимо превращать в теплоту кинетическую энергию макроскопического движения. Состояние тела определяется не только деформациями, о чем ранее говорилось, но и их производными первого и высших порядков по времени. Физически это означает, что движение атомов тела зависит от макроскопического движения в данный момент и от его предыстории. Здесь речь пойдет лишь о явлениях, называемых неупругостью и представляющих собой отклонение от законов теории упругости в отсутствие остаточных деформаций. Это - необратимые процессы, связанные с конечностью скорости движения в теле.

Если исходить из того, что состояние тела определяется главным образом деформациями и их первыми производными по времени, то можно ввести в рассмотрение диссипативную функцию [12]

$$\psi = \frac{1}{2} \eta_{ijlm} \dot{u}_{ij} \dot{u}_{lm}.$$

Тензор вязкости  $\eta_{ijlm}$  обладает свойствами симметрии, аналогичными свойствам тензора упругих постоянных  $C_{ijkl}$ . В общем случае  $\psi$  он имеет 21 независимую компоненту. В изотропном теле компоненты тензора  $\eta_{ijlm}$  выражаются через два коэффициента вязкости  $\eta$  и  $\xi$ , а диссипативная функция принимает вид

$$\psi = \eta \dot{u}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \xi \dot{u}_{ll}^2.$$

Учет вязкости в уравнениях движения элемента объема осуществляется заменой тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  суммой  $\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ . Тензор вязких напряжений в общем случае имеет вид

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{u}_{ij}} = \eta_{ijlm} \dot{u}_{lm},$$

а в изотропном теле

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \left( \dot{u}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{u}_{ll} \right) + \xi \delta_{ij} \dot{u}_{ll}.$$

### § 3. Постановка задачи о близких к эйлеровым движениях вязкоупругих тел. Симметрия формы поверхности тела и его угловые движения

Однородное изотропное тело объема  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , находится в свободном движении. Введем неинерциальную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре инерции тела, вращающуюся с угловой скоростью  $\vec{\omega}(t)$ , в которой отсутствуют движения тела как целого. Сказанное означает, что вектор смещений элемента тела  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  относительно  $Ox_1x_2x_3$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_V \vec{u} dV = 0, \quad \int_V [\vec{r}, \dot{\vec{u}}] dV = 0. \quad (12)$$

Смысл первого условия очевиден, а содержание второго состоит в том, что момент количества движения за счет скоростей деформаций равен нулю. Это и есть математическое выражение требования отсутствия движения тела как целого относительно подлежащей определению системы координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Уравнение движения элемента объема тела в  $Ox_1x_2x_3$  и условия отсутствия напряжений на его поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \{ \ddot{\vec{u}} + [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}}]] + 2[\vec{\omega}, \dot{\vec{u}}] \} = \\ & = \left[ \kappa + 1 + \varepsilon \delta (\zeta + 1) \frac{\partial}{\partial t} \right] \text{grad div } \vec{u} + \left( 1 + \varepsilon \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \vec{u} \text{ в } V, \\ & \left[ \left( \kappa + \varepsilon \delta \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ll} \delta_{pq} + 2 \left( 1 + \varepsilon \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{pq} \right] n_q = 0 \text{ на } S. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $n_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) - компоненты вектора нормали к поверхности тела,

$$u_{pq} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) -$$

компоненты тензора деформации,

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \zeta = \frac{\xi}{\eta}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\rho l^2}{\mu t_*^2}, \quad \delta = \frac{\eta}{l \sqrt{\rho \mu}},$$

$\rho$  - плотность.

При записи уравнений (13) в безразмерных переменных и параметрах в качестве масштаба длины принят характерный размер тела  $l$ , масштаб времени  $t_*$  - характерное время движения тела как целого относительно центра масс.

Таким образом, векторы смещения  $\vec{u}$  и угловой скорости  $\vec{\omega}$ , характеризующие движение деформируемого твердого тела, определяются в результате решения задачи (12), (13).

В выбранной системе координат входящие в компоненты вектора момента количества движения  $K_l = I_{lm} \omega_m$  элементы тензора инерции, в отличие от случая абсолютно твердого тела, зависят от деформации тела:

$$I_{lm} = \int_V \{(x_n^2 + 2x_n u_n) \delta_{lm} - (x_l x_m + 2x_l u_m)\} dV.$$

Здесь как обычно в линейной теории упругости не учтены квадратичные по деформациям члены.

Момент количества движения  $\vec{K}$  в  $Ox_1x_2x_3$  удовлетворяет векторному уравнению

$$\dot{\vec{K}} + [\vec{\omega}, \vec{K}] = 0. \quad (14)$$

Это уравнение нетрудно получить, умножив (13) векторно на  $\vec{r} + \vec{u}$  и проинтегрировав полученные соотношения по  $V$  с учетом (12) и условий на поверхности  $S$ . Оно не содержит параметров вязкоупругого оператора, порождающего только внутренние силы рассматриваемой замкнутой системы.

Будем предполагать, что характеристики вязкоупругих свойств тела таковы, что при изучаемых движениях выполнены следующие условия:

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1. \quad (15)$$

Физический смысл этих условий в том, что периоды упругих колебаний много меньше времени их затухания, в свою очередь много меньшего периода вращательных движений  $T_k \ll T_g \ll t_*$ , т.е. тело можно считать достаточно жестким лишь при определенном ограничении на величину угловой скорости. При некоторых формах тела это ограничение делает интервал допустимых значений угловой скорости весьма малым. К примеру, для сильно вытянутого тела длины  $l$  (стержень), второй характерный размер которого  $a \leq l$  параметр  $\varepsilon^2 = \rho l^4 / \mu a^2 t_*^2$ .

Упрощающие предположения (15) позволяют представить вектор смещения в виде

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon^2 (\vec{u}'(\vec{r}, t) + \varepsilon \delta \vec{u}''(\vec{r}, t)) + \dots$$

После подстановки  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  в (12) и (13) приходим к квазистатической задаче для  $\vec{u}'$ :

$$\begin{aligned} (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}' + \Delta \vec{u}' &= [\vec{\omega}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \text{ в } V, \\ [ku'_{ii} \delta_{ij} + 2u'_{ij}] n_j &= 0 \text{ на } S, \\ \int_V \vec{u}' dV &= 0, \quad \int_V [\vec{r}, \dot{\vec{u}}'] dV = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

и следующей также квазистатической задаче для  $\vec{u}''$ :

$$\begin{aligned} (\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}'' + \Delta \vec{u}'' &= -(\zeta + 1) \text{grad div } \dot{\vec{u}}' - \Delta \dot{\vec{u}}' \text{ в } V, \\ [ku''_{ii} \delta_{ij} + 2u''_{ij}] n_j &= -[\zeta \dot{u}'_{ii} \delta_{ij} + 2\dot{u}'_{ij}] n_j \text{ на } S, \\ \int_V \vec{u}'' dV &= 0, \quad \int_V [\vec{r}, \dot{\vec{u}}''] dV = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате решения задачи (16) определяется  $\vec{u}'$  и угловая скорость  $\vec{\omega}$ , отвечающая движению недеформированного твердого тела. Поправку к  $\vec{\omega}$ , обусловленную упругостью, можно найти, рассматривая следующее приближение по  $\varepsilon^2$ , но при этом придется вычислять  $\vec{u}'''(\vec{r}, t)$ . Этого можно избежать, если обратиться к уравнению (14) для момента количества движения. После решения задач (16) и (17) по  $\vec{u}'$  и  $\vec{u}''$  вычисляются компоненты  $I_{ij}$ , имеющие в этом приближении вид

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + \varepsilon^2 I'_{ij} + \varepsilon^3 \delta I''_{ij}.$$

Затем из (14) находим поправку к угловой скорости  $\vec{\omega}$ , связанную с учетом упругих и вязких свойств тела.

Наличие малых параметров позволяет свести сложную задачу (12), (13) к более простым квазистатическим задачам (16), (17). Тем не менее, изучение конкретных систем сопряжено с большими трудностями. Однако некоторые заключения о движении деформируемого тела можно сделать, не решая эти задачи, а рассматривая интегралы движения аналогично случаю абсолютно твердого тела (§ I).

Остановимся на задаче (16), описывающей движение консервативной системы. В соответствии с уравнением для элемента объема и краевыми условиями  $\vec{u}'$  (следовательно,  $I'_{ij}$ ) является однородным многочленом второй степени компонент угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Поэтому компоненты вектора кинетического момента можно представить следующим образом:

$$K_i = K_i^0 + \varepsilon^2 K_{ijlm} \omega_j \omega_l \omega_m, \quad (18)$$

а энергию тела  $E$  так:

$$E = \frac{1}{2} I_{ij}^0 \omega_i \omega_j + \frac{3}{4} \varepsilon^2 K_{ijlm} \omega_i \omega_j \omega_l \omega_m. \quad (19)$$

Вид второго слагаемого в выражении для  $E$  можно уяснить, обратившись к уравнению (14).

Из него следует, что  $(\vec{\omega}, \dot{\vec{K}}) = 0$ , поэтому

$$\frac{d}{dt} (\vec{\omega}, \vec{K}) = \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{K} \right) + \left( \vec{\omega}, \frac{d\vec{K}}{dt} \right) = \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{K} \right)$$

или

$$\frac{d}{dt} (\vec{\omega}, \vec{K}) - \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{K} \right) = 0.$$

Проинтегрировав это выражение по времени от 0 до  $t$ , получим

$$(\vec{\omega}, \vec{K}) - \int_0^{\omega} \vec{K} d\vec{\omega} = const. \quad (20)$$

Это - условие сохранения кинетической энергии тела.

Например, при  $\vec{K} = I_{33} \vec{\omega}$  (абсолютно твердое тело) имеем

$$I_{33} \omega^2 - \int_0^{\omega} I_{33} \vec{\omega} d\vec{\omega} = const$$

или

$$E = \frac{I_{33} \omega^2}{2} = const,$$

а при учете собственной упругости в этом случае

$$\vec{K} = I_{33} \vec{\omega} + k \omega^2 \vec{\omega}$$

( $k$  - постоянная величина) и подстановка  $\vec{K}$  в выражение (20) дает

$$E = I_{33} \omega^2 + k \omega^4 - \int_0^{\omega} (I_{33} \vec{\omega} + k \omega^2 \vec{\omega}) d\vec{\omega} = \frac{I_{33} \omega^2}{2} + \frac{3}{4} k \omega^4.$$

Очевидна инвариантность  $K_{ijmn}$  к перестановке индексов, поэтому число различных компонент этого тензора в общем случае равно 15, и соответствующим выбором системы координат оно может быть уменьшено до 12. Для симметричных тел компоненты тензора отражают их свойства симметрии, число различных

$K_{ijmn}$  будет тем меньше, чем выше степень симметрии тела и его нетрудно определить. В табл. №1 приведено число независимых компонент  $K_{ijmn}$  для некоторых симметричных фигур.

**Табл. №1.** Число независимых  $K_{ijmn}$  для некоторых симметричных фигур

Форма тела	Число различных $K_{ijmn}$
Произвольная форма тела	12
Тело, обладающее симметрией эллипсоида, прямоугольный параллелепипед $a \neq b \neq c$	6
Прямоугольный параллелепипед $a = b \neq c$	4
Круговой цилиндр, эллипсоид вращения, правильные призмы с числом боковых сторон $n = 4$	3
Октаэдр, куб, тетраэдр, тело форма которого имеет симметрию сферической функции $Y_{ij}(\theta, \varphi)$ с $i, j = 3, 4$	2
Шар, икосаэдр, додекаэдр, тело с поверхностью, имеющей симметрию $Y_{ij}(\theta, \varphi)$ с $i > 4$	1

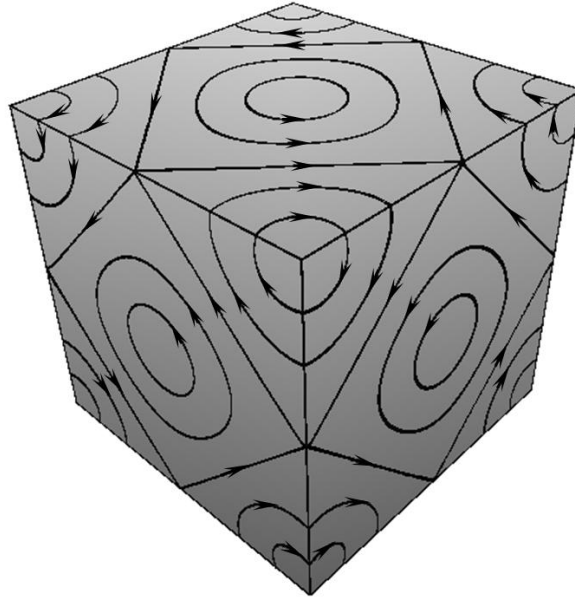
Несферические тела из последней позиции обладают меньшей, чем шар симметрией, но форма поверхности четвертого порядка в рассматриваемом приближении не может разрешить столь большое число особенностей этих тел. Поэтому поверхность  $E = const$  в этом случае представляет собой сферу подобно тому, как в жестком представлении любой правильный многогранник.

В консервативном приближении по двум интегралам  $E = const$  и  $\vec{K}^2 = const$  можно найти траектории движения вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела (полодии), в том числе стационарные вращения, и решить задачу об устойчивости последних.

Наиболее отчетливо влияние упругих свойств тела на угловые движения проявляется в случае однородных тел, имеющих в недеформированном состоянии форму правильных многогранников или других тел, обладающих в недеформированном состоянии шаровым тензором инерции  $I_0$ . Вид полодий можно получить из следующих соображений. Направления стационарных вращений будут соответствовать осям симметрии тел. Следовательно, поверхность  $E(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = const$  имеет либо экстремумы, либо седловые точки вдоль этих направлений и в этом смысле как бы повторяет поверхность тела, если оно центрально симметрично. Эти же соображения приводят к тому, что поверхность  $\vec{K}^2 = const$  имеет подобный вид, в силу чего и непосредственно из соотношений (18), (19) можно получить интегральную сферическую поверхность  $4/3 E - 1/2 I_0 \vec{K}^2 = const$ , где опущены члены выше четвертого порядка по  $\omega_i$ . Пересечение двух интегральных поверхностей: сферической и подобной форме тела, и определяет качественное поведение траекторий вектора  $\vec{\omega}$  в теле.

Поясним сказанное на примере куба. В силу симметрии поверхность  $E = const$  должна иметь экстремальные точки при ориентации  $\vec{\omega}$  вдоль главных направлений: на центры граней куба, его вершины и середины ребер. Эта поверхность имеет столько же максимумов и минимумов, сколько вершин и граней у куба. Вид годографов вектора  $\vec{\omega}$  в упругом кубическом теле показан на рис. 3. Такой же вид годографов будет в тетраэдре и октаэдре, так как соответствующие им центрально-симметричные поверхности  $E(\vec{\omega}) = E(-\vec{\omega}) = const$  имеют симметрию куба. Движения абсолютно твердых тел этих форм эквивалентны движениям шара.





**Рис. 3**

Отметим существенную разницу в поведении абсолютно твердого куба, движения которого тривиальны, и куба при учете упругости. Вращениям вокруг главных направлений, ориентированных на центры граней и вершины, соответствуют особые точки типа центр.

Это вращения с максимальной и минимальной энергиями. Вращениям вокруг направлений на середины ребер отвечают седловые точки. Картина траекторий в случае абсолютно твердого куба - множество течек плотно расположенных на сфере и соответствующих стационарным движениям вокруг произвольной оси тела.

Вычисление величин  $K_{ijmn}$  для конкретных тел сопряжено со значительными трудностями. Тем не менее, его удастся выполнить аналитически в ряде задач: однородное изотропное тело с поверхностью, близкой к сферической, трехосный однородный изотропный эллипсоид, шар, выполненный из анизотропно-упругого материала.

#### **§ 4. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару**

Для начала еще раз заметим, что наиболее отчетливо влияние упругости тел на их поведение в свободном движении наблюдается в случаях, когда в недеформированном состоянии главные моменты инерции тела либо совпадают, либо весьма близки. Это характерно, в частности, для квазисферических тел. Сферическое однородное, изотропное тело может рассматриваться как вырожденный случай. Вырождение снимается с появлением неоднородности, анизотропии или несферичности поверхности, что приводит к картине траекторий вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела существенно отличающейся от тривиальной.

Итак, рассматривается однородное, изотропное квазисферическое тело. Уравнение его поверхности в сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  имеет вид

$$r = R(\theta, \varphi) = 1 + s \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$\alpha_{lm} = a_{lm} + jb_{lm}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad \alpha_{lm} = (-1)^m \alpha_{l,-m},$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  - сферические гармоники,  $a_{lm}, b_{lm}$  - вещественные постоянные величины.

Отсутствие в разложении гармоник нулевого и первого порядка объясняется тем, что  $Y_{00}$  изменяет лишь масштаб длины, а  $Y_{1m}$  отвечает смещению тела как целого.

Будем предполагать, что  $\varepsilon \ll s \ll 1$ . Даже в этом случае задача (16) является весьма громоздкой. Однако рассмотрение упрощается ввиду того, что интерес представляют лишь компоненты тензора  $I'_{lm}$ , которые вычисляются по  $\vec{u}'$ , в силу чего налагаются существенные ограничения на состав гармоник поверхности, влияющих на динамику тела в рассматриваемом приближении.

Вектор смещения  $\vec{u}'$  можно представить в виде

$$\vec{u}' = \sum_{l,m,\nu} {}^\nu f_{lm}(r) \vec{Y}_{lm}^\nu(\theta, \varphi),$$

где  ${}^\nu f_{lm}(r)$  - полиномы, а шаровые векторы  $\vec{Y}_{lm}^\nu$  даются выражениями [13]:

$$\vec{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) = (l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)\vec{e}_r - r \operatorname{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\vec{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) = lY_{lm}(\theta, \varphi)\vec{e}_r + r \operatorname{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$\vec{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) = [\vec{r}, \operatorname{grad} Y_{lm}(\theta, \varphi)], \quad l = 1, 2, \dots$$

Заметим, что математический аппарат шаровых векторов, использовавшийся в квантовой механике, оказался естественным аппаратом решения задач теории упругости в случаях изотропных сферических тел и был впервые применен с этой целью Г.И. Петрашением [13].

В выражениях для  ${}^\nu f_{lm}$  ограничимся линейными по  $s$  членами

$${}^\nu f_{lm} = {}^\nu f_{lm}^0 + s {}^\nu f_{lm}^1.$$

Представим вектор смещения и тензор напряжений следующим образом

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + s\vec{u}_1, \quad \sigma_{pq} = \sigma_{pq}^0 + s\sigma_{pq}^1,$$

где  $\vec{u}_0$  и  $\sigma_{pq}^0$  отвечают задаче о деформировании, шара.

Поскольку с точностью до членов  $\sim s^2$  вектор нормали к поверхности тела имеет вид

$$\vec{n} = \vec{e}_r - s \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left[ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right],$$

условия отсутствия напряжений на поверхности  $S$  при приближенном решении задачи (16) трансформируется в соотношения

$$\sigma_{rr}^0 = \sigma_{r\theta}^0 = \sigma_{r\varphi}^0, \quad (21)$$

$${}^1\sigma_{rr}^0 + \sigma_{rr}^1 = 0,$$

$${}^1\sigma_{r\theta}^0 + \sigma_{r\theta}^1 - \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left( \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta}^0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \sigma_{\theta\varphi}^0 \right) = 0, \quad (22)$$

$${}^1\sigma_{r\varphi}^0 + \sigma_{r\varphi}^1 - \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} \left( \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \sigma_{\theta\varphi}^0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \sigma_{\varphi\varphi}^0 \right) = 0,$$

где  ${}^1\sigma_{ri}^0$  - пропорциональная  $s$  часть тензора  $\sigma_{ri}^0$  после подстановки в него

$$r = 1 + s \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm},$$

Вектор деформации вращающегося шара  $\vec{u}_0$  в случае произвольной ориентации угловой скорости  $\vec{\omega}$  по отношению к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , полученной из решения задачи (16) при  $\vec{\omega} = 0$  и краевых условиях, заданных на сфере, имеет вид

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= r\omega^2(B_1 + r^2B_2)\vec{Y}_{00}^+ + r(B_3 + r^2B_4)\vec{F}_2^- + r^3B_5\vec{F}_2^+, \\ \vec{F}_2^{+,-} &= \frac{1}{3}\beta_1\vec{Y}_{20}^{+,-} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\beta_2\vec{Y}_{21}^{+,-} - \beta_2^*\vec{Y}_{2,-1}^{+,-}) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}(\beta_3\vec{Y}_{22}^{+,-} + \beta_3^*\vec{Y}_{2,-2}^{+,-}), \\ B_1 &= \frac{2\sqrt{\pi}(5\kappa + 6)}{15(3\kappa + 2)(\kappa + 2)}, \quad B_2 = -\frac{2\sqrt{\pi}}{15(\kappa + 2)}, \quad B_3 = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{4\kappa + 3}{19\kappa + 14}, \\ B_4 &= -\frac{1}{10}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{21\kappa + 16}{19\kappa + 14}, \quad B_5 = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\kappa + 1}{19\kappa + 14}, \\ \beta_1 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_3^2, \quad \beta_2 = -\omega_1\omega_3 + j\omega_2\omega_3, \quad \beta_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2j\omega_1\omega_2.\end{aligned}$$

В частном случае  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = \omega$

$$\vec{u}_0 = \omega^2 \left[ r(B_1 + r^2B_2)\vec{Y}_{00}^+ - \frac{2}{3}r(B_3 + r^2B_4)\vec{Y}_{20}^- - \frac{2}{3}r^3B_5\vec{Y}_{20}^+ \right].$$

Поправка к вектору деформации, обусловленная несферичностью тела, [13], легко может быть получена и определяется выражением

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \sum_{p=0, |q| \leq p}^N \left\{ M_{pq}r^{p+1}\vec{Y}_{pq}^+ + \left[ Q_{pq}r^{p-1} - \frac{(p+1)(2p+3)(\kappa+1)}{2(1+p(\kappa+3))}M_{pq}r^{p+1} \right] \vec{Y}_{pq}^- + \right. \\ &\quad \left. + T_{pq}r^p\vec{Y}_{pq}^0 \right\} + r^3(\beta_4\vec{Y}_{11}^0 - \beta_4^*\vec{Y}_{1,-1}^0 - \beta_5\vec{Y}_{10}^0),\end{aligned}$$

где  $M_{pq}, Q_{pq}, T_{pq}$  - постоянные коэффициенты,

$$Q_{00} = Q_{1q} = T_{1q} = 0, \quad \beta_4 = \frac{1}{10s}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\dot{\omega}_1 - j\dot{\omega}_2), \quad \beta_5 = \frac{1}{5s}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\dot{\omega}_3.$$

Здесь принято во внимание, что в данной задаче  $\dot{\omega}_l$  - величина порядка  $s$ .

Вычислив по  $\vec{u}_0$  и  $\vec{u}_1$  компоненты тензора напряжений, приведем соотношения (22) к виду

$$\begin{aligned}\sum_{l,m} \left\{ M_{lm} \frac{1}{2l+1} [(D_1(l) - lD_2(l))\vec{Y}_{lm}^+ + (D_1(l) + (l+1)D_2(l))\vec{Y}_{lm}^-] + \right. \\ \left. + Q_{lm}2(l+1)\vec{Y}_{lm}^- + T_{lm}(l-1)\vec{Y}_{lm}^0 + \right. \\ \left. + \alpha_{lm} \frac{2\omega^2}{15(\kappa+2)(2l+1)} [(2l-5\kappa-6)\vec{Y}_{lm}^+ - (2l+5\kappa+8)\vec{Y}_{lm}^-] \right\} + \\ + \sqrt{2}\beta_4\vec{Y}_{11}^0 - \sqrt{2}\beta_4^*\vec{Y}_{1,-1}^0 - 2\beta_5\vec{Y}_{10}^0 = \vec{\phi}(\theta, \varphi),\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\vec{\phi}(\theta, \varphi) &= \sum_{l,m} \alpha_{lm} \left\{ 2N_1Y_{lm}\vec{F}_2^- - N_2 \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \left[ \vec{e}_\theta \left( 4 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F + \vec{e}_\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{F}{\sin \theta} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. - N_2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \left[ \vec{e}_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{F}{\sin \theta} \right) - \vec{e}_\varphi \left( 2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F \right] \right\},\end{aligned}$$

$$N_1 = \frac{2(4\kappa + 3)}{19\kappa + 14} \sqrt{\frac{\pi}{5}}, \quad N_2 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)} \sqrt{\frac{\pi}{5}}, \quad F(\theta, \varphi) = 2(\vec{F}_2^-, \vec{e}_r),$$

$$D_1 = (l+1)(l+3) \frac{(l+1)(2-l-l\kappa) + (2l+3)\kappa}{1+l(\kappa+3)},$$

$$D_2 = 1 - l(l+1) \frac{(2l+3)(\kappa+1)}{1+l(\kappa+3)}.$$

Представив функцию  $\vec{\phi}(\theta, \varphi)$  в виде ряда по шаровым векторам, приравнивая коэффициенты при шаровых векторах с одинаковыми значками, получим систему неоднородных алгебраических уравнений относительно величин  $M_{lm}, Q_{lm}, T_{lm}$ . Среди них имеются три соотношения, отвечающие равенству нулю коэффициентов при  $\vec{Y}_{11}^0, \vec{Y}_{1,-1}^0, \vec{Y}_{10}^0$ :

$$\dot{\omega}_1 = s\omega_2\omega_3 \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left( a_{20} + \sqrt{\frac{2}{3}} a_{22} \right),$$

$$\dot{\omega}_2 = s\omega_1\omega_3 \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left( -a_{20} + \sqrt{\frac{2}{3}} a_{22} \right),$$

$$\dot{\omega}_3 = -s\omega_1\omega_2 \sqrt{\frac{15}{2\pi}} a_{22},$$

где  $a_{20}, a_{22}$  - параметры, входящие в уравнение поверхности тела.

Это - уравнения Эйлера для абсолютно твердого квазишара. Здесь они выступают в роли условий разрешимости системы и условий выполнения второго интегрального условия (16). Вместе с тем они являются нулевым приближением интегрального соотношения  $\dot{\vec{K}} + [\vec{\omega}, \vec{K}] = 0$  ( $\varepsilon^2 \rightarrow 0, \vec{u} \rightarrow 0$ ). Отметим, что первое интегральное условие (16), означающее выбор начала системы координат  $Ox_1x_2x_3$  в центре масс, выполнено за счет того, что в  $\vec{u}_0$  и  $\vec{u}_1$  при представлении в сферических координатах отсутствуют члены вида  $const \cdot \vec{Y}_{1m}^-$ , т.е.  $Q_{1q} = 0$ .

Задача отыскания вектора деформации  $\vec{u}'$ , на первый взгляд, тем сложнее, чем богаче представлены сферические гармоники в уравнении поверхности тела. Однако рассмотрение упрощается, так как в дальнейшем по  $\vec{u}'$  вычисляются поправки к компонентам тензора инерции  $I'_{pq}$ , зависящие, как оказалось, лишь от малого числа гармоник.

Искомые величины  $I'_{pq}$  суть

$$\int_V u_q x_p dV.$$

Компоненты вектора деформации в декартовой системе координат  $u_q$  связаны с его представлением в сферических координатах соотношениями  $(\vec{u}', \vec{Y}_{1q}^-)$ , а  $x_p \sim rY_{1p}$ , поэтому приходим к вычислению интегралов

$$\sum_{l,m,v} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R(\theta,\varphi)} r^3 [ {}^v f_{lm}^0(r) + s {}^v f_{lm}^1(r) ] (\vec{Y}_{lm}^v, \vec{Y}_{1q}^-) Y_{1p} dr$$

Как оказалось в рассматриваемом приближении данные интегралы отличны от нуля лишь для весьма ограниченных значений  $l$ . Покажем это. Проинтегрировав последнее выражение по  $r$ , имеем

$$\sum_{l,m,v} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 [ {}^v f_{lm}^0(r) + s {}^v f_{lm}^1(r) ] (\vec{Y}_{lm}^v, \vec{Y}_{1q}^-) Y_{1p} dr +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l,m,\nu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^{R(\theta,\varphi)} r^3 {}^\nu f_{lm}^0(r) (\vec{Y}_{lm}^\nu, \vec{Y}_{1q}^-) Y_{1p} dr = \\
& = \sum_{l,m,\nu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi ({}^\nu \beta_{lm}^0 + s {}^\nu \beta_{lm}^1) (\vec{Y}_{lm}^\nu, \vec{Y}_{1q}^-) Y_{1p} \sin \theta d\theta + \\
& + s \sum_{l,m,\nu} \sum_{i,j} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi {}^\nu \beta_{lmi}^0 Y_{ij} (\vec{Y}_{lm}^\nu, \vec{Y}_{1q}^-) Y_{1p} \sin \theta d\theta.
\end{aligned} \tag{24}$$

В силу ортогональности сферических функций первый интеграл отличен от нуля лишь в том случае, когда так называемое разложение Клебша-Гордана скалярного произведения шаровых векторов [14] содержит сферические гармоники  $Y_{kd}$  с  $k = 1$ . Воспользовавшись этим условием, т.е. условием треугольника для коэффициентов Клебша-Гордана [14], которые входят в коэффициенты разложения, заключаем, что это возможно лишь при  $l = 0, 2$ . Поскольку  ${}^\nu \beta_{lm}^0$  ( $l = 0, 2$ ) отвечает задаче о деформировании шара, остается выяснить, от каких гармоник, характеризующих несферичность тела, зависят коэффициенты  ${}^\nu \beta_{lm}^1$  ( $l = 0, 2; \nu = +, -$ ), полученные в результате интегрирования соответствующих функций  ${}^\nu f_{lm}^1(r)$  по  $r$  в пределах от 0 до 1. Иначе, необходимо определить, от каких параметров  $\alpha_{ik}$  зависят  $M_{00}, M_{2m}$  и  $Q_{2m}$ . Представив функцию  $\vec{\phi}(\theta, \varphi)$  в соотношении (23) в виде ряда по шаровым векторам, нетрудно убедиться, что величины  ${}^\nu \beta_{lm}^1$  ( $l = 0, 2$ ) определяются отклонением поверхности тела от сферы лишь по второй гармонике.

Обратимся ко второму интегралу (24). Параметры  ${}^\nu \beta_{lmi}^0$  получены в результате интегрирования функций  ${}^\nu f_{lm}^0(r)$ , следовательно, здесь  $l = 0, 2$ . Вновь воспользуемся разложением Клебша-Гордана, условием треугольника и ортогональностью сферических гармоник. В результате последовательного преобразования в сумму сферических гармоник скалярного произведения  $(\vec{Y}_{lm}^\nu, \vec{Y}_{1q}^-)$ , а затем произведения полученного ряда на  $Y_{1p}$  приходим к выводу, что интеграл зависит от параметров несферичности  $\alpha_{ik}$  с  $i = 2, 4$ .

Таким образом, имея в виду, что  $\vec{u}'$  определяется для вычисления величин  $I'_{pq}$ , при решении задачи (16) следует принимать во внимание отклонение поверхности тела от сферы лишь по нижшим гармоникам 2-й и 4-й, а из соотношений (23) достаточно найти  $M_{00}, M_{2m}$  и  $Q_{2m}$ . Эти коэффициенты были вычислены и оказались равными

$$\begin{aligned}
M_{00} &= \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{N_1}{3\kappa + 2} \left[ \alpha_{20} \beta_1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_{22} (\beta_3 + \beta_3^*) \right], \\
M_{20} &= \omega^2 N_3 \alpha_{20} + N_4 \gamma_1 + N_5 \gamma_2, \quad M_{21} = -\sqrt{\frac{3}{2}} N_4 \gamma_3 + \frac{1}{2} N_5 \gamma_4, \quad M_{2,-1} = -M_{21}^*, \\
M_{22} &= \omega^2 N_3 \alpha_{20} + \sqrt{\frac{3}{2}} N_4 \gamma_5 + N_5 \gamma_6, \quad M_{2,-2} = M_{22}^*, \\
Q_{20} &= \omega^2 N_6 \alpha_{20} + N_7 \gamma_1 + N_8 \gamma_2, \quad Q_{21} = -\sqrt{\frac{3}{2}} N_7 \gamma_3 + \frac{1}{2} N_8 \gamma_4, \quad Q_{2,-1} = -Q_{21}^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22} &= \omega^2 N_6 \alpha_{22} + \sqrt{\frac{3}{2}} N_7 \gamma_5 + N_8 \gamma_6, & Q_{2,-2} &= Q_{22}^*, \\
\gamma_1 &= \beta_1 \alpha_{20} + \sqrt{\frac{3}{2}} (\beta_3 + \beta_3^*) \alpha_{22}, \\
\gamma_2 &= 2\beta_1 \alpha_{40} - 2\sqrt{5} (\beta_2 \alpha_{41}^* + \beta_2^* \alpha_{41}) - \sqrt{\frac{5}{2}} (\beta_3 \alpha_{42}^* + \beta_3^* \alpha_{42}), \\
\gamma_3 &= \beta_2 \alpha_{20} + \sqrt{6} \beta_2^* \alpha_{22}, \\
\gamma_4 &= 8\sqrt{2} \beta_2 \alpha_{40} + 2\sqrt{10} \beta_1 \alpha_{41} + \sqrt{10} \beta_3 \alpha_{41}^* - 8\sqrt{5} \beta_2^* \alpha_{42}^* - \sqrt{70} \beta_3^* \alpha_{43}, \\
\gamma_5 &= \beta_3 \alpha_{20} - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1 \alpha_{22}, \\
\gamma_6 &= -\beta_3 \alpha_{40} + 2\sqrt{5} \beta_2 \alpha_{41} + \sqrt{10} \beta_1 \alpha_{42} - 2\sqrt{35} \beta_2^* \alpha_{43}^* - \sqrt{70} \beta_3^* \alpha_{44}, \\
N_3 &= \frac{2(5\kappa + 2)(2\kappa + 7)}{75(\kappa + 2)(19\kappa + 14)}, & N_4 &= -\frac{(5\kappa + 2)(2\kappa + 7)}{105(19\kappa + 14)^2}, \\
N_5 &= \frac{4\sqrt{5}(4\kappa + 3)(2\kappa + 7)}{105(19\kappa + 14)^2}, & N_6 &= \frac{40\kappa^2 + 89\kappa + 42}{15(\kappa + 2)(19\kappa + 14)}, \\
N_7 &= \frac{89\kappa^2 + 130\kappa + 48}{12(19\kappa + 14)^2}, & N_8 &= \frac{2\sqrt{5}(\kappa + 1)(4\kappa + 3)}{5(19\kappa + 14)^2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что отклонение поверхности тела по 3-й гармонике не влияет в рассматриваемом приближении на его угловые движения, т.к. поверхность, соответствующая энергии такого тела, в силу  $E(\vec{\omega}) = E(-\vec{\omega}) = const$  имеет большую, чем три степень симметрии. Так, например, треугольной призме соответствует поверхность энергии с симметрией шестиугольной призмы, а тетраэдру соответствует поверхность  $E$  с симметрией куба. В этом и состоит суть дополнения поверхности тела до центрально-симметричной.

Теперь нетрудно вычислить  $I'_{pq}$  - поправки к тензору инерции абсолютно твердого тела, а затем найти компоненты тензора  $K_{pqlm}$ .

В итоге приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m = 8\pi \omega^4 Q_1 + \\
&+ 8\pi s Q_2 \left\{ \omega_1^4 \left[ Q_3 (a_{20} - \sqrt{6} a_{22}) + \frac{3}{2} a_{40} - \sqrt{10} a_{42} + \frac{1}{2} \sqrt{70} a_{44} \right] + \right. \\
&+ \omega_2^4 \left[ Q_3 (a_{20} + \sqrt{6} a_{22}) + \frac{3}{2} a_{40} + \sqrt{10} a_{42} + \frac{1}{2} \sqrt{70} a_{44} \right] + \omega_3^4 [-2Q_3 a_{20} + 4a_{40}] + \\
&+ 2\omega_1^3 \omega_2 [\sqrt{10} b_{42} - \sqrt{70} b_{44}] + 2\omega_1^3 \omega_3 [3\sqrt{5} a_{41} - \sqrt{35} a_{43}] + \\
&+ \omega_1^2 \omega_2^2 [2Q_3 a_{20} + 2Q_4 a_{22} + 3(a_{40} - \sqrt{70} a_{44})] + \\
&+ \omega_1^2 \omega_3^2 \left[ -\left( Q_3 + \frac{1}{2} \sqrt{6} Q_4 \right) a_{20} + (-\sqrt{6} Q_3 + Q_4) a_{22} - 12a_{40} + 6\sqrt{10} a_{42} \right] + \\
&+ 2\omega_2^3 \omega_1 [\sqrt{10} b_{42} + \sqrt{70} b_{44}] - 2\omega_2^3 \omega_3 [3\sqrt{5} b_{41} + \sqrt{35} b_{43}] + \\
&+ \omega_2^2 \omega_3^2 \left[ -\left( Q_3 + \frac{1}{2} \sqrt{6} Q_4 \right) a_{20} + (\sqrt{6} Q_3 - Q_4) a_{22} - 12a_{40} - 6\sqrt{10} a_{42} \right] + \\
&+ 6\omega_2^2 \omega_1 \omega_3 [\sqrt{5} a_{41} + \sqrt{35} a_{43}] + 6\omega_1^2 \omega_2 \omega_3 [-\sqrt{5} b_{41} + \sqrt{35} b_{43}] - \\
&\left. - 2\sqrt{10} \omega_3^2 \omega_1 \omega_2 b_{42} - 8\sqrt{5} \omega_3^3 \omega_1 a_{41} - 8\sqrt{5} \omega_3^3 \omega_2 b_{41} \right\},
\end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{1}{3150} \left[ \frac{16(5\kappa + 8)}{(\kappa + 2)(3\kappa + 2)} + \frac{5(85\kappa + 16)}{19\kappa + 14} \right], \quad Q_2 = \frac{(\kappa + 1)(35\kappa + 26)}{105\sqrt{\pi}(19\kappa + 14)^2},$$

$$Q_3 = \frac{1}{3\sqrt{5\pi}} \frac{1}{Q_2} \left[ \frac{1}{21} - \frac{1}{35(19\kappa + 14)} + \frac{2}{15(3\kappa + 2)} + \frac{(\kappa + 1)(5\kappa + 2)}{35(19\kappa + 14)^2} \right],$$

$$Q_4 = -\frac{\sqrt{30}(10\kappa + 7)(19\kappa + 14)}{(\kappa + 1)(35\kappa + 26)}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора инерции абсолютно твердого квазишара в  $Ox_1x_2x_3$  имеют вид

$$I_{11}^0 = \frac{8\pi}{15} + s \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} [a_{20} - \sqrt{6}a_{22}] = I_0 + sC_1,$$

$$I_{22}^0 = \frac{8\pi}{15} + s \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} [a_{20} + \sqrt{6}a_{22}] = I_0 + sC_2,$$

$$I_{33}^0 = \frac{8\pi}{15} - s \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a_{20} = I_0 + sC_3.$$

Два интеграла уравнений Эйлера для упругого квазишара  $E = const$  и  $K^2 = const$  позволяют сделать заключение о характере его движения по годографу вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела, который в данной задаче удобно определять по пересечению центрально-симметричной поверхности 4-го порядка  $E = const$  с поверхностями  $4/3 E - 1/2 I_0 K^2 = const$  при различных  $K^2$ , представляющих в общем случае эллипсоиды. В частном случае шарового тензора инерции тела в жестком представлении, т.е. при  $a_{20} = a_{22} = 0$ , построение годографа существенно упрощается, поскольку поверхности  $4/3 E - 1/2 I_0 K^2 = 1/6 I_0 \omega^2$  представляют собой концентрические сферы.

Проиллюстрируем результаты рассмотрения на примере квазишара, обладающего симметрией куба. В системе координат  $Ox_1x_2x_3$  с осями  $Ox_1, Ox_2$ , направленными на центры "ребер куба", отличны от нуля параметры  $\alpha_{40} = \alpha_{40} = -1, \alpha_{44} = \alpha_{44} = \sqrt{5/14}$ , следовательно

$$R(\theta, \varphi) = 1 + s \frac{3}{16\sqrt{\pi}} (-3 - 35 \cos^4 \theta + 30 \cos^2 \theta + 5 \sin^4 \theta \cos 4\varphi).$$

Удобно ориентировать систему  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы ее оси проходили через центры "граней куба". Это достигается заменой в выражении для  $R(\theta, \varphi)$   $\varphi$  на  $\varphi + \pi/4$ . После такой замены уравнение поверхности принимает вид

$$R(\theta, \varphi) = 1 - s \frac{3}{16\sqrt{\pi}} (3 + 35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 5 \sin^4 \theta \cos 4\varphi).$$

В этом случае обусловленные собственной упругостью тела поправки к энергии и квадрату кинетического момента принимают симметричную форму

$$K_{pqlm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m =$$

$$= 8\pi \{ Q_1 \omega^4 + 4s Q_2 [ -(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) + 3(\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2) ] \}.$$

Экстремальные точки поверхности  $E = const$  совпадают с экстремальными точками поверхности тела, если оно центрально-симметрично, или поверхности, дополненной до центрально-симметричной в противном случае. В рассматриваемом примере  $E = const$  имеет экстремальные точки при ориентации  $\vec{\omega}$  вдоль оси симметрии тела, т.е. на центры граней, вершины и середины ребер куба. Вращения вокруг этих направлений являются стационарными. Годограф вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела представлен на рис. 4. Отметим, что для квазишара, обладающего симметрией тетраэдра и ориентированного относительно  $Ox_1x_2x_3$  как

показано на рис. 5, годограф вектора  $\vec{\omega}$  тот же, что в случае куба, т.к. поверхность тетраэдра, дополненная до центрально-симметричной, обладает симметрией куба.

На рис.4 показано направление движения вектора  $\vec{\omega}$  в теле, которое определено в результате решения уравнения (14), имеющего при малых отклонениях  $\vec{\omega}$  от стационарного положения весьма простой вид. В соответствии с тем, что все траектории вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела получены пересечением двух замкнутых поверхностей - они замкнуты (рис. 4).

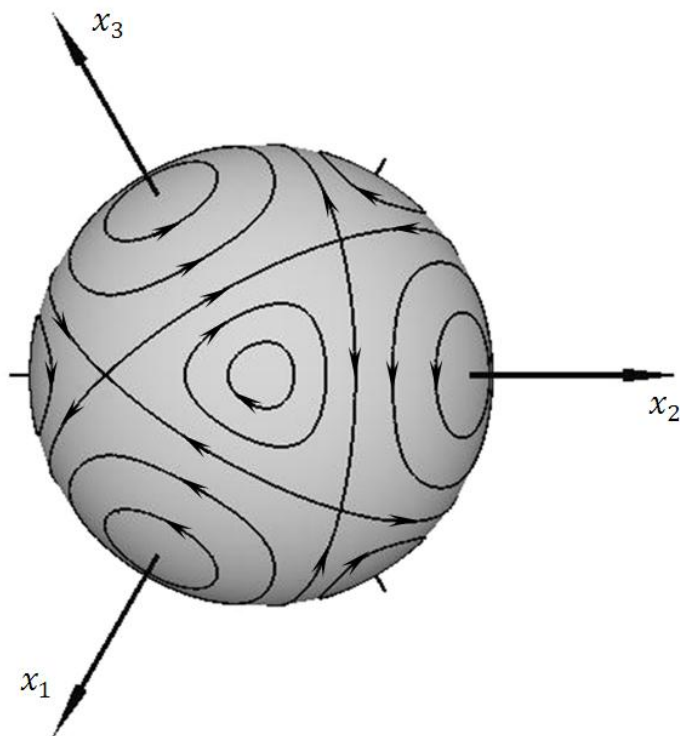


Рис. 4

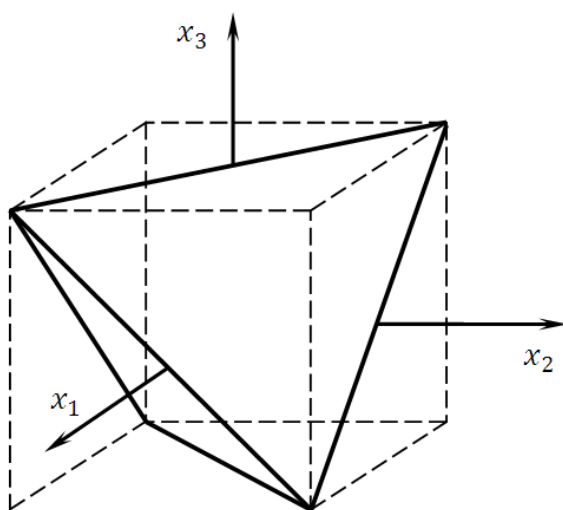


Рис. 5

Малое возмущение  $\vec{\omega}$  из начального положения, отвечающего консервативно устойчивому стационарному вращению (центры граней и вершины куба), приводит к тому, что конец вектора  $\vec{\omega}$  описывает в теле малую замкнутую кривую вокруг его начального положения. Вся поверхность тела разбивается на ячейки



консервативно устойчивых движений, границами которых являются особые траектории (сепаратрисы), проходящие через неустойчивые состояния равновесия (середины граней куба) и являющиеся отрезками больших кругов.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать заключение об асимптотической устойчивости стационарных вращений вязкоупругого тела. Фиксируя величину вектора кинетического момента и вычисляя соответствующие ей угловые скорости при различных стационарных вращениях квазишара, нетрудно установить, что энергия  $E$  минимальна при  $\vec{\omega}$ , ориентированном на вершины куба. Ориентации  $\vec{\omega}$  на середины граней и ребер отвечает соответственно максимальное и среднее значения энергии. Используя соображения о диссипации энергии при движении тела, можно заключить, что асимптотически устойчивым будет лишь стационарное вращение, которому отвечает минимальное значение энергии  $E$ , т.е. вращение вокруг оси, проходящей через вершины куба.

### § 5. О свободных движениях упругого эллипсоида

Речь пойдет о свободных движениях упругого однородного изотропного эллипсоида с произвольными полуосями  $a_1, a_2, a_3$ . Дело в том, что получение аналитическим путем решений, описывающих как вращательные движения тела, так и его напряженно-деформированное состояние возможно лишь для однородных изотропных эллипсоидальных тел. Ранее эта задача была решена в небольшом числе частных случаев фиксированного положения оси вращения в теле и соотношений между полуосями эллипсоида, а именно для шара (например, [12]) и двухосного эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии [15].

Пусть в исходном недеформированном состоянии ( $\omega = 0$ ) оси системы  $Ox_1x_2x_3$  ориентированы по главным осям инерции, тогда уравнение поверхности эллипсоида запишется в виде

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Составляющие вектора смещения  $u_i^i$  (далее обозначаются  $u_i$ ) в соответствии с (16) отыскиваются в виде многочленов, содержащих линейные и кубические члены по пространственным переменным

$$u_i = \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \alpha_3^i x_3 + a_{klm}^i x_1^k x_2^l x_3^m, \quad i, k, l, m = 1, 2, 3, \quad (25)$$

$$k + l + m = 3.$$

Такой вид  $\vec{u}$  дает нетривиальное решение задачи (16) и автоматически удовлетворяет первому интегральному условию. Включение в  $u_i$  других степеней пространственных переменных соответствовало бы однородной статической задаче, имеющей лишь тривиальное решение.

Подстановка  $u_i$  в уравнение (16) и приравнивание членов при  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) дает девять уравнений, из которых приведем следующие:

$$3(\kappa + 2)a_{300}^1 + a_{120}^1 + a_{102}^1 + (\kappa + 1)(a_{210}^2 + a_{201}^3) = -\frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2),$$

$$2(\kappa + 2)a_{210}^1 + 2(a_{012}^1 + 3a_{030}^1) + (\kappa + 1)(2a_{120}^2 + a_{111}^3) = \omega_1\omega_2 - \dot{\omega}_3,$$

$$2(\kappa + 2)a_{201}^1 + 2(a_{021}^1 + 3a_{003}^1) + (\kappa + 1)(a_{111}^2 + 2a_{102}^3) = \omega_1\omega_3 + \dot{\omega}_2.$$

Остальные шесть уравнений получаются циклической перестановкой индексов коэффициентов  $a_{klm}^i$  и проекций вектора  $\vec{\omega}$ .

Краевые условия (16) дают три соотношения, имеющие место на поверхности эллипсоида

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \sigma_{x_1 x_j} c_j^{-2} x_j = \\
& = x_1 \{c_1^{-2}[(\kappa + 2)a_1^2 + \kappa(a_2^2 + a_3^2)] + x_2^2 c_1^{-2}[3(\kappa + 2)a_{300}^1 + \kappa(a_{210}^2 + a_{201}^3)] + \\
& \quad + x_2^2 [c_1^{-2}((\kappa + 2)a_{120}^1 + \kappa(3a_{030}^2 + a_{021}^3)) + 2c_3^{-2}(a_{120}^1 + a_{210}^2)] + \\
& \quad + x_3^2 [c_1^{-2}((\kappa + 2)a_{102}^1 + \kappa(a_{012}^2 + 3a_{003}^3)) + 2c_3^{-2}(a_{102}^1 + a_{201}^3)]\} + \\
& \quad + x_2 \{c_2^{-2}[a_1^2 + a_2^1] + \\
& \quad + x_1^2 [c_1^{-2}(2(\kappa + 2)a_{210}^1 + \kappa(2a_{120}^2 + a_{111}^3)) + c_2^{-2}(a_{210}^1 + 3a_{300}^2)] + \\
& \quad + x_2^2 c_2^{-2}(3a_{030}^1 + a_{120}^2) + x_3^2 [c_2^{-2}(a_{012}^1 + a_{102}^2) + c_3^{-2}(2a_{012}^1 + a_{111}^3)]\} + \\
& \quad + x_3 \{c_3^{-2}[a_1^3 + a_3^1] + \\
& \quad + x_1^2 [c_1^{-2}(2(\kappa + 2)a_{201}^1 + \kappa(a_{111}^2 + 2a_{102}^3)) + c_3^{-2}(a_{201}^1 + 3a_{300}^2)] + \\
& \quad + x_2^2 [c_2^{-2}(a_{012}^1 + a_{111}^2) + c_3^{-2}(a_{021}^1 + 2a_{120}^3)]\} + x_3^2 c_3^{-2}(3a_{003}^1 + a_{102}^3)\} + \\
& \quad + x_1 x_2 x_3 \{c_1^{-2}[(\kappa + 2)a_{111}^1 + 2\kappa(a_{021}^2 + a_{012}^3)] + 2c_2^{-2}(a_{111}^1 + 2a_{201}^3) + \\
& \quad + 2c_3^{-2}(a_{111}^1 + 2a_{210}^3)\} = 0, \\
& \quad (1,2,3), \quad (k, l, m).
\end{aligned}$$

Здесь и далее символы  $(1,2,3)$  и  $(k, l, m)$  означают циклическую перестановку индексов.

Потребуем, чтобы в каждом выражении при  $x_i$ , стоящем в фигурных скобках, выделялось множителем уравнение поверхности эллипсоида, а выражение, стоящее при  $x_1 x_2 x_3$ , обращалось в нуль. Например, выражение при  $x_1$  дает следующие три уравнения:

$$\begin{aligned}
c_1^2 [3(\kappa + 2)a_{300}^1 + \kappa(a_{210}^2 + a_{201}^3)] &= -(\kappa + 2)\alpha_1^1 - \kappa(\alpha_2^2 + \alpha_3^3), \\
c_2^2 [(\kappa + 2)a_{120}^1 + \kappa(3a_{030}^2 + a_{021}^3) + 2c_1^2(a_{120}^1 + a_{210}^2)] &= \\
&= -(\kappa + 2)\alpha_1^1 - \kappa(\alpha_2^2 + \alpha_3^3), \\
c_3^2 [(\kappa + 2)a_{102}^1 + \kappa(a_{012}^2 + 3a_{003}^3) + 2c_1^2(a_{102}^1 + a_{201}^3)] &= \\
&= -(\kappa + 2)\alpha_1^1 - \kappa(\alpha_2^2 + \alpha_3^3).
\end{aligned}$$

В итоге из краевых условий (16) получим 30 соотношений.

Второе интегральное условие (16) сводится к следующим трем алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned}
c_1^2 [7\alpha_1^3 + 3c_1^2 a_{300}^3 + c_2^2 a_{120}^3 + c_3^2 a_{102}^3] &= a_3^2 [7\alpha_3^1 + c_1^2 a_{201}^1 + c_2^2 a_{021}^1 + 3c_3^2 a_{003}^1], \\
c_2^2 [7\alpha_2^3 + c_1^2 a_{210}^3 + 3c_2^2 a_{030}^3 + c_3^2 a_{012}^3] &= a_3^2 [7\alpha_3^2 + c_1^2 a_{201}^2 + c_2^2 a_{021}^2 + 3c_3^2 a_{003}^2], \\
c_2^2 [7\alpha_2^1 + c_1^2 a_{210}^1 + 3c_2^2 a_{030}^1 + c_3^2 a_{012}^1] &= a_1^2 [7\alpha_1^2 + 3c_1^2 a_{300}^2 + c_2^2 a_{120}^2 + c_3^2 a_{102}^2].
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе из 42 уравнений относительно 39 неизвестных величин  $\alpha_j^i$ ,  $a_{klm}^i$  и 3 компонент угловой скорости  $\omega_i$ ,  $(i, j, k, l, m = 1, 2, 3; k + l + m = 3)$ . Для существования решения этой системы необходимо выполнение соотношений

$$\dot{\omega}_1 = \frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2 + c_2^2} \omega_2 \omega_3, \quad (1,2,3),$$

которые представляют собой уравнения Эйлера для недеформируемого эллипсоида с полуосями  $c_1, c_2, c_3$  и выступают здесь в качестве условий разрешимости задачи (16).

Решение системы облегчается тем, что она разбивается на четыре группы уравнений, каждая из которых решается независимо от других. В результате вычислений находим

$$\begin{aligned}
a_{102}^1 &= c_3^{-2} \left[ -\alpha_1^1 + \frac{1}{3\kappa + 2} (\kappa c_2^2 s_1 - 2(\kappa + 1) c_1^2 s_2) \right], \\
a_{120}^1 &= c_2^{-2} \left[ -\alpha_1^1 + \frac{1}{3\kappa + 2} (\kappa c_3^2 s_1 - 2(\kappa + 1) c_1^2 s_3) \right], \\
a_{300}^1 &= \frac{1}{3} c_1^{-2} \left[ -\alpha_1^1 + \frac{\kappa}{3\kappa + 2} (c_3^2 s_2 + c_2^2 s_3) \right], \\
&\quad (1,2,3), \quad (k, l, m).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= A_2 \alpha_1^1 + D_3 \alpha_2^2 + B_1 \alpha_3^3 - \frac{1}{2} \omega_1^2, & s_2 &= B_2 \alpha_1^1 + A_3 \alpha_2^2 + D_1 \alpha_3^3 - \frac{1}{2} \omega_2^2, \\
s_3 &= D_2 \alpha_1^1 + B_3 \alpha_2^2 + A_1 \alpha_3^3 - \frac{1}{2} \omega_3^2,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= [c_3^2 (c_1^2 + c_2^2) \kappa - c_1^2 c_2^2 (\kappa + 2)] \frac{\Delta}{2(\kappa + 1)}, \\
B_1 &= [c_3^2 (c_1^2 - c_2^2) \kappa + c_1^2 c_2^2 (\kappa + 2)] \frac{\Delta}{2(\kappa + 1)}, \\
D_1 &= [c_3^2 (c_2^2 - c_1^2) \kappa + c_1^2 c_2^2 (\kappa + 2)] \frac{\Delta}{2(\kappa + 1)}, \\
\Delta &= (\kappa + 1) c_1^{-2} c_2^{-2} c_3^{-2}.
\end{aligned}$$

Остальные величины  $A_i, B_i, D_i$  получаются циклической перестановкой в этих формулах  $c_1, c_2, c_3$ .

Параметры  $\alpha_1^1, \alpha_2^2, \alpha_3^3$ , через которые выражаются приведенные выше девять коэффициентов  $a_{klm}^i$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&[2(c_1^4 + c_3^4)(\kappa + 1) + c_1^2 c_3^2 (3\kappa + 2)] s_2 - c_2^2 c_3^2 \kappa s_3 - c_1^2 c_2^2 \kappa s_1 + \\
&\quad + (3\kappa + 2)(c_1^2 \alpha_1^1 + c_3^2 \alpha_3^3) = 0, \\
&c_2^2 c_3^2 \kappa s_2 + c_1^2 c_3^2 \kappa s_1 - [2(c_1^4 + c_2^4)(\kappa + 1) + c_1^2 c_2^2 (3\kappa + 2)] s_3 - \\
&\quad - (3\kappa + 2)(c_1^2 \alpha_1^1 + c_2^2 \alpha_2^2) = 0, \\
&c_1^2 c_2^2 \kappa s_2 - [2(c_2^4 + c_3^4)(\kappa + 1) + c_2^2 c_3^2 (3\kappa + 2)] s_1 + c_1^2 c_3^2 \kappa s_3 - \\
&\quad - (3\kappa + 2)(c_2^2 \alpha_2^2 + c_3^2 \alpha_3^3) = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Формулы для  $\alpha_i^i$  ввиду громоздкости выписывать не будем. При рассмотрении конкретной задачи, когда задаются числовые значения величин  $c_j$  и коэффициента  $\kappa$ , величины  $\alpha_i^i$  легко вычисляются.

Для остальных коэффициентов  $a_{klm}^i$  имеем

$$\begin{aligned}
a_{201}^1 &= a_{102}^3 = -\frac{\kappa}{4(\kappa + 1)} a_{111}^2, & a_{012}^1 &= F_1 \left[ c_1^2 \frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)} + c_3^2 \right] \omega_1 \omega_2, \\
a_{102}^2 &= F_1 \left[ c_2^2 \frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)} + c_3^2 \right] \omega_1 \omega_2, & a_{210}^1 &= F_1 \frac{\kappa}{2(\kappa + 1)} c_3^2 \omega_1 \omega_2, \\
a_{030}^1 &= \frac{1}{3} \omega_1 \omega_2 \left[ c_1^2 (c_1^2 + c_2^2)^{-1} - ((3\kappa + 2)c_1^2 + \kappa c_3^2) \frac{1}{2(\kappa + 1)} F_1 \right], \\
a_{003}^1 &= \frac{1}{3} \omega_1 \omega_2 \left[ c_1^2 (c_1^2 + c_3^2)^{-1} - ((3\kappa + 2)c_1^2 + \kappa c_2^2) \frac{1}{2(\kappa + 1)} F_1 \right], \\
\alpha_1^2 &= \frac{1}{7} \omega_1 \omega_2 (c_1^2 + c_2^2)^{-1} \{ c_1^2 c_2^2 (c_1^2 - c_2^2) (c_1^2 + c_2^2)^{-1} + \\
&\quad + F_1 \left[ \frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)} (c_1^2 c_2^2 (c_2^2 - c_1^2) - \right. \\
&\quad \left. - 7c_1^2 (c_1^2 c_3^2 + 2c_1^2 c_2^2 + c_2^2 c_3^2)) + \frac{\kappa}{2(\kappa + 1)} c_3^2 (c_2^4 - c_1^4) + c_3^4 (c_1^2 - c_2^2) - 14c_1^2 c_3^4 \right] \},
\end{aligned}$$

$$\alpha_2^1 = -\frac{1}{7}\omega_1\omega_2(c_1^2 + c_2^2)^{-1}\{c_1^2c_2^2(c_1^2 - c_2^2)(c_1^2 + c_2^2)^{-1} +$$

$$+F_1\left[\frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)}(c_1^2c_2^2(c_2^2 - c_1^2) +$$

$$+7c_2^2(c_1^2c_3^2 + 2c_1^2c_2^2 + c_2^2c_3^2)) + \frac{\kappa}{2(\kappa + 1)}c_3^2(c_2^4 - c_1^4) + c_3^4(c_1^2 - c_2^2) + 14c_2^2c_3^4\right]\},$$

$$F_1 = c_1^2c_2^2(c_1^2 + c_2^2)^{-1}\left[\frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)}(c_1^2c_3^2 + 3c_1^2c_2^2 + c_2^2c_3^2) + 2c_3^4\right]^{-1},$$

$$(1,2,3), \quad (k, l, m).$$

Отметим, что полученные результаты согласуются с имеющимися в литературе данными по деформированию двухосного эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии [15] и шара [12].

Рассмотрим уравнения движения эллипсоида (уравнения для  $\omega_i$ ) учитывающие его упругие свойства, к которым придем, воспользовавшись уравнением для кинетического момента (14). Входящие в выражения для компонент кинетического момента величины  $I_{lm}$  в соответствии с проведенными вычислениями имеют вид

$$I_{x_1x_1} = I_{x_1x_1}^0 + \varepsilon^2 I_{x_1x_1}^1 = \frac{1}{5}(c_2^2 + c_3^2) +$$

$$+ \frac{2}{35}\varepsilon^2\{7(c_2^2\alpha_2^2 + c_3^2\alpha_3^3) + 3c_2^4a_{030}^2 + 3c_3^4a_{003}^3 + c_1^2(c_2^2a_{210}^2 + c_3^2a_{201}^3) +$$

$$+ c_2^2c_3^2(a_{012}^2 + a_{021}^3)\},$$

$$I_{x_1x_2} = \frac{4}{35}\varepsilon^2c_1^2c_2^2(c_1^2 + c_2^2)^{-1}F_1\left[\frac{3\kappa + 2}{2(\kappa + 1)}(2c_1^2c_3^2 + 5c_1^2c_2^2 + 2c_2^2c_3^2) + 4c_3^4\right]\omega_1\omega_2,$$

$$(1,2,3), \quad (k, l, m).$$

Дальнейшее рассмотрение приводит к громоздким выражениям, поэтому его целесообразно проводить при конкретных числовых значениях  $\kappa$  (коэффициента Пуассона  $\nu$ ) и полуосей  $c_j$ . Тогда все величины, входящие  $I'_{ij}$  легко вычисляются и можно сделать заключение о динамике упругого эллипсоида без ограничений на величины  $\kappa$  и  $c_j$ .

В качестве примера рассмотрим эллипсоид вращения. Считаем, что  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $c_3 = 1 + c/2$ , где  $\varepsilon \ll |c| \ll 1$ . При  $\kappa = 1,5$  ( $\nu = 0,3$ ) с точностью до членов, линейных по  $c$ , имеем

$$I_{x_1x_1} = I_{x_2x_2} = \frac{2}{35}\{3,5(2 + c) +$$

$$+ \varepsilon^2[(\omega_1^2 + \omega_2^2)(0,57 + 0,932c) + \omega_3^2(0,056 - 0,4c)]\},$$

$$I_{x_3x_3} = \frac{2}{35}\{7 + \varepsilon^2[(\omega_1^2 + \omega_2^2)(0,056 - 0,4c) + \omega_3^2(0,979 + 0,019c)]\},$$

$$I_{x_1x_2} = \frac{2}{35}\varepsilon^2[0,462 + 0,138c]\omega_1\omega_2,$$

$$I_{x_1x_3} = \frac{2}{35}\varepsilon^2[0,924 + 0,894c]\omega_1\omega_3, \quad I_{x_2x_3} = \frac{2}{35}\varepsilon^2[0,924 + 0,894c]\omega_2\omega_3.$$

Составляющие вектора кинетического момента в этом случае определяются формулами

$$K_{x_1, x_2} = \frac{2}{35}\omega_{1,2}\{3,5(2 + c) + \varepsilon^2 0,979\omega^2 + \varepsilon^2 c[1,07(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 0,494\omega_3^2]\},$$

$$K_{x_3} = \frac{2}{35}\omega_3\{7 + \varepsilon^2 0,979\omega^2 + \varepsilon^2 c[0,495(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 0,019\omega_3^2]\}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (14), получим искомые уравнения

движения.

Предположим, что вращение происходит вокруг оси, близкой к оси симметрии эллипсоида, и ограничимся при написании уравнения (14) линейными по  $\omega_1$  и  $\omega_2$  членами. Тогда придем к следующим уравнениям свободного движения тела:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 + j\dot{\omega}_2 &= j\Omega(\omega_1 + j\omega_2), & \dot{\omega}_3 &= 0, \\ \Omega &= 0,5(-1 + 0,004\varepsilon^2\omega_3^2)\omega_3.\end{aligned}\quad (28)$$

Для сравнения приведем параметр  $\Omega$ , вычисленный при других значениях параметра  $\kappa$ :

$$\begin{aligned}\kappa = \frac{2}{3} & \quad (v = 0,2), & \Omega &= 0,5c(-1 + 0,009\varepsilon^2\omega_3^2)\omega_3, \\ \kappa = 0 & \quad (v = 0), & \Omega &= 0,5c(-1 + 0,016\varepsilon^2\omega_3^2)\omega_3.\end{aligned}$$

Из (28) получим, что  $\omega_1 + j\omega_2 = \omega_0 \exp(j\Omega t)$  ( $\omega_0$  - постоянная, определяемая начальными условиями), т.е. проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси симметрии эллипсоида, оставаясь постоянной по величине, вращается в этой плоскости с угловой скоростью  $\Omega$ , определяя частоту деформирования тела. Такое же движение относительно тела совершает вектор момента количества движения  $\vec{K}$ . При фиксированном  $\omega_3$  частота деформирования уменьшается для вытянутого эллипсоида вращения ( $c > 0$ ) тем сильнее, чем меньше  $v$ , а для сплюсненного эллипсоида ( $c < 0$ ) происходит увеличение частоты деформирования.

Для иллюстрации применения полученных результатов определим деформацию симметричного эллипсоида при его стационарном вращении вокруг оси, лежащей в плоскости симметрии, и вычислим компоненты тензора напряжений. Считаем  $c_1 = c_2 = 1$  при произвольном  $c_3$ ,  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ . Составляющие вектора смещения, определяемые соотношениями (26), (27), приведем для случая  $\kappa = 0$  ( $v = 0$ ), когда они имеют весьма компактный вид

$$\begin{aligned}u_1 &= x_1 \left\{ \alpha_1^1 \left[ 1 - 2c_3^{-2}x_3^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_1^2 \right] + \alpha_2^2 [c_3^{-2}x_3^2 - x_2^2] + \alpha_3^3 c_3^{-2} [x_2^2 - c_3^{-2}x_3^2] \right\}, \\ u_2 &= x_2 \left\{ \alpha_1^1 [c_3^{-2}x_3^2 - x_1^2] + \alpha_2^2 \left[ 1 - 2c_3^{-2}x_3^2 - 2x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3^3 c_3^{-2} [x_1^2 - c_3^{-2}x_3^2] + \frac{1}{2}\omega_1^2 x_3^2 \right\}, \\ u_3 &= x_3 \left\{ (\alpha_1^1 - \alpha_2^2) c_3^2 (x_2^2 - x_1^2) + \alpha_3^3 \left[ 1 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}c_3^{-2}x_3^2 \right] + \frac{1}{2}\omega_1^2 c_3^2 x_2^2 \right\}, \\ \alpha_1^1 &= -\frac{1}{2}q_1^{-1}\omega_1^2(1 + c_3^2 + c_3^4)(1 + c_3^2 + 5c_3^4), \\ \alpha_2^2 &= \frac{1}{2}q_1^{-1}\omega_1^2(1 + c_3^2 + c_3^4)(10 + 7c_3^2 + 11c_3^4), \\ \alpha_3^3 &= 2q_2^{-1}\omega_1^2(1 + c_3^2 + c_3^4), \\ q_1 &= (3 + 2c_3^2 + 2c_3^4)(11 + 8c_3^2 + 16c_3^4), & q_2 &= c_3^2(11 + 8c_3^2 + 16c_3^4).\end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\{-\alpha_1^1 x_1^2 - (2\alpha_1^1 + \alpha_2^2 - c_3^{-2}\alpha_3^3)x_2^2 - (2\alpha_1^1 - \alpha_2^2 + c_3^{-2}\alpha_3^3)c_3^{-2}x_3^2 + \alpha_1^1\}, \\ \sigma_{22} &= 2\{-(\alpha_1^1 + \alpha_2^2 - c_3^{-2}\alpha_3^3)x_1^2 - \alpha_2^2 x_2^2 + \\ &\quad + [(\alpha_1^1 - \alpha_2^2 - c_3^{-2}\alpha_3^3)c_3^{-2} + \frac{1}{2}\omega_1^2]x_3^2 + \alpha_2^2\}, \\ \sigma_{33} &= 2\left\{ [c_3^2(\alpha_1^1 - \alpha_2^2) - 2\alpha_3^3]x_1^2 + [c_3^2(\alpha_1^1 - \alpha_2^2) - 2\alpha_3^3 + \frac{1}{2}c_3^2\omega_1^2]x_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - c_3^{-2}\alpha_3^3 x_3^2 + \alpha_3^3 \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= 2x_1x_2[-3(\alpha_1^1 + \alpha_2^2) + 2\alpha_3^3], \\ \sigma_{13} &= 2x_1x_3[-\alpha_1^1(c_3^2 + 2c_3^{-2}) - \alpha_2^2(c_3^2 + c_3^{-2}) - \alpha_3^3(2 + c_3^{-4})], \\ \sigma_{23} &= 2x_2x_3[\alpha_1^1(c_3^2 + c_3^{-2}) + \alpha_2^2(c_3^2 + 2c_3^{-2}) - \alpha_3^3(2 + c_3^{-4}) + \omega_1^2(1 + c_3^2)].\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, понятен физический смысл параметра  $\alpha_j^i$ . Это – величина, равная  $1/2 \sigma_{ii}$  в точке  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ii}$  в этой точке принимают наибольшие значения.

В случаях  $c_1 \neq c_2 \neq c_3$  и  $\kappa \neq 0$  деформации и напряжения также можно получить, но они имеют весьма громоздкий вид.

Заметим, что если решение задачи о напряженно-деформированном состоянии шара было взято в качестве порождающего при изучении движений вокруг центра инерции упругого тела с произвольной поверхностью, близкой к сфере, то задача о напряженно-деформированном состоянии вращающегося эллипсоида может служить основой при нахождении вращательных движений квазиэллипсоидальных тел.

## § 6. Анизотропно-упругий шар в свободном движении

Рассматриваемый в этой части работы однородный анизотропно-упругий шар в свободном движении служит еще одним примером, когда решение задачи о движении твердого деформируемого тела можно получить аналитическим путем.

Связь тензора напряжений и тензора деформации в случае анизотропно-упругого тела (16)

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}u_{mn},$$

где тензор упругих постоянных  $C_{ijmn}$  имеет 21 независимую компоненту, представим в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} + C'_{ijmn}u_{mn}.$$

Величины  $C'_{ijmn}$  (в дальнейшем обозначаются  $C_{ijmn}$ ) удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm} = C_{mnij}.$$

Будем интересоваться лишь близкими к эйлеровым движениями деформируемого тела:

$$\varepsilon^2 \ll 1, \quad \varepsilon^2 = \frac{\rho R^2}{\mu t_*^2}.$$

Считаем, что упругие постоянные  $C_{ijmn}$  таковы, что выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \ll \gamma \ll 1, \quad (29)$$

где  $\gamma$  - отношение наибольшей из упругих постоянных  $C_{ijmn}$  к  $\mu$  ( $C_{ijmn} = \mu \gamma a_{ijmn}$ ).

Представим вектор деформации  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  в виде ряда по малым параметрам  $\varepsilon^2$  и  $\gamma$  и ограничимся в нем лишь первыми членами

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \varepsilon^2 [\vec{u}_0(\vec{r}, t) + \gamma \vec{u}_1(\vec{r}, t)].$$

В предположениях (29) упругие деформации  $\vec{u}_0$  и  $\vec{u}_1$  можно вычислять в системе  $Ox_1x_2x_3$ , связанной с недеформированным шаром (§ 4).

Вектор деформации  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  определяется в результате последовательного решения следующих задач.

1. Задача о деформировании вращающегося однородного изотропного шара

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} &= f_i \text{ в } V, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ij}^0 n_j &= 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3, \\ \int_V \vec{u}_0 dV &= 0, \quad \int_V [\vec{r}, \vec{u}_0] dV = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= \kappa \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_l} \delta_{ij} + \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i}, \\ \vec{f} &= [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем в качестве масштабных множителей приняты радиус шара  $R$ , его масса  $M$  и характерное время движения шара как целого  $t_*$ .

2. Задача вычисления  $\vec{u}_1(\vec{r}, t)$  по известному  $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial u_{1l}^1}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial u_{ij}^1}{\partial x_j} &= -a_{ijmn} \frac{\partial u_{mn}^0}{\partial x_j} \text{ в } V, \quad i = 1, 2, 3, \\ [\kappa u_{il}^1 \delta_{ij} + 2u_{ij}^1] x_j &= -a_{ijmn} u_{mn}^0 x_j \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3, \\ \int_V \vec{u}_1 dV &= 0, \quad \int_V [\vec{r}, \vec{u}_1] dV = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$u_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_i} \right), \quad u_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right).$$

Воспользуемся решением задачи (30), приведенным в §4. В декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_{01} &= x_1 \left[ \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} \left( \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \omega_1^2 \right] - \\ &- \omega_1 (x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3) \left[ -\frac{1}{2} \left( \xi_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( 3\xi_1 - \frac{1}{2} \right) (x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) - 2\xi_1 x_1^2 \right] + \\ &+ x_1 x_2 x_3 \omega_2 \omega_3 \left( 5\xi_1 - \frac{1}{2} \right) - x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \omega^2 \left( \frac{1}{3} \xi_1 + \xi_2 \right) + \\ &+ x_1 \omega_1^2 \left[ \xi_1 x_1^2 - \frac{1}{4} (6\xi_1 - 1) (x_2^2 + x_3^2) \right] + \frac{1}{4} x_1 (x_2^2 \omega_2^2 + x_3^2 \omega_3^2) (10\xi_1 - 1), \\ \xi_1 &= \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}. \end{aligned}$$

Циклическая перестановка  $x_1, x_2, x_3$  и  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  дает  $u_{02}, u_{03}$ .

Решение задачи (31) предваряет вычисление выражений, стоящих в правых частях уравнений и краевых условия. Эти выражения ввиду громоздкости не приводятся.

Воспользовавшись тем, что величины  $\partial u_{mn}^0 / \partial x_j$  линейны по  $x_1, x_2, x_3$ , а величины  $u_{mn}^0 x_j$  содержат линейные и кубические члены по пространственным координатам, представим задачу (31) в следующей форме:

$$(\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}_1 + \Delta \vec{u}_1 = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \text{ в } V, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \left[ \kappa \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_l} \delta_{ij} + \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right] x_j &= b_{ij} x_j + b_{ikmp} x_1^k x_2^m x_3^p \text{ на } S, \\ i &= 1, 2, 3, \quad k + m + p = 3, \end{aligned} \quad (33)$$

Входящие в эти выражения величины  $a_{ij}, b_{ij}, b_{ikmp}$  включают в общем случае 21 упругую постоянную  $a_{ijmn}$ .

Исходя из уравнения и краевых условий (32), (33), можно заключить, что

$$\vec{u}_1 = \vec{A}_n x_n + \vec{B}_{kmp} x_1^k x_2^m x_3^p, \quad n, k, m, p = 1, 2, 3, \quad k + m + p = 3.$$

Необходимо определить 39 величин  $A_{in}$  и  $B_{ikmp}$ .

После подстановки  $\vec{u}_1$  в уравнение (32), приравнивая нулю члены, стоящие при  $x_1, x_2, x_3$ , получим 9 уравнений. Краевые условия (32) дают 3 соотношения, выполняющиеся на поверхности шара  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Каждое из них можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^3 x_i [D_{i0}^j + x_1^2 D_{i1}^j + x_2^2 D_{i2}^j + x_3^2 D_{i3}^j] + x_1 x_2 x_3 D_4^j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $D_{ik}^j, D_4^j$  содержат неизвестные коэффициенты разложений  $A_{in}, B_{ikmp}$  и параметры  $a_{ijmn}$ . Потребовав, чтобы в выражении в квадратных скобках выделялось уравнение поверхности шара, а выражение, стоящее при  $x_1 x_2 x_3$  обращалось в нуль, получим еще 30 алгебраических уравнений.

Первое интегральное условие (31) выполнено в силу того, что  $\vec{u}_1$  содержит линейные и кубические члены по  $x_1, x_2, x_3$ , а второе интегральное условие сводится к уравнениям Эйлера для абсолютно твердого шара.

Система 39 уравнений, из которых определяются величины  $A_{in}, B_{ikmp}$  очень громоздка, однако она разбивается на 4 группы уравнений. В каждую из групп входят коэффициенты, вычисляемые независимо от других и определяющие соответственно добавки к диагональным компонентам тензора инерции  $I''_{ii}$  и к центробежным моментам инерции  $I''_{12}, I''_{13}, I''_{23}$ .

Решение задачи (32), (33) приводит к следующим выражениям для поправок к компонентам тензора инерции:

$$\begin{aligned} I''_{11} = & \frac{2}{35} \{ \omega^2 [\varepsilon_1 a_{1111} + \varepsilon_4 (a_{1122} + a_{1133}) + \varepsilon_9 (a_{1212} + a_{1313}) + \\ & + \varepsilon_{14} (a_{2222} + a_{3333}) + \varepsilon_{17} a_{2233} + \varepsilon_{19} a_{2323}] + \\ & + \omega_1^2 [\varepsilon_2 a_{1111} + \varepsilon_5 (a_{1122} + a_{1133}) + \\ & + \varepsilon_{10} (a_{1212} + a_{1313}) + \varepsilon_{15} (a_{2222} + 2a_{2233} + a_{3333})] + \\ & + \omega_2^2 [\varepsilon_6 a_{1122} + \varepsilon_7 a_{1133} + \varepsilon_{10} a_{1212} + \varepsilon_{16} a_{2222} + \varepsilon_{18} a_{2233} + \\ & + (\varepsilon_{15} + \frac{\varepsilon_{29}}{2}) a_{3333} + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{2323}] + \\ & + \omega_3^2 [\varepsilon_7 a_{1122} + \varepsilon_6 a_{1133} + \varepsilon_{10} a_{1313} + (\varepsilon_{15} + \frac{\varepsilon_{29}}{2}) a_{2222} + \\ & + \varepsilon_{18} a_{2233} + \varepsilon_{16} a_{3333} + (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{2323}] + \\ & + \omega_1 \omega_2 [\varepsilon_3 a_{1112} + \varepsilon_{11} a_{1222} + \varepsilon_{12} a_{1233} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1323}] + \\ & + \omega_1 \omega_3 [\varepsilon_3 a_{1113} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1223} + \varepsilon_{12} a_{1322} + \varepsilon_{11} a_{1333}] + \\ & + \omega_2 \omega_3 [\varepsilon_8 a_{1123} + 2\varepsilon_{10} a_{1213} + \varepsilon_{13} (a_{2223} + a_{2333})] \}, \\ I''_{11} = & -\frac{1}{35} \{ -\omega^2 [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}) (a_{1112} + a_{1222}) - \varepsilon_{26} a_{1233} + (2\varepsilon_{10} + \varepsilon_{28}) a_{1323}] + \\ & + \omega_1^2 \left[ \left( \varepsilon_{21} + \frac{\varepsilon_{25}}{2} \right) a_{1112} + \varepsilon_{21} a_{1222} + (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{28}) a_{1233} \right] + \\ & + \omega_2^2 \left[ \varepsilon_{21} a_{1112} + \left( \varepsilon_{21} + \frac{\varepsilon_{25}}{2} \right) a_{1222} + (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{28}) a_{1233} \right] + \\ & + \omega_3^2 [\varepsilon_{22} (a_{1112} + a_{1222}) + \varepsilon_{27} a_{1233} + 2\varepsilon_{28} a_{1323}] + \\ & + \omega_1 \omega_2 [\varepsilon_{20} (a_{1111} + 2a_{1122} + a_{2222}) + \varepsilon_{24} (a_{1133} + a_{2233}) + \varepsilon_{25} a_{1212} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{28}(a_{1313} + a_{2323}) + \varepsilon_{29}a_{3333}] + \\
& +\omega_1\omega_3[\varepsilon_{23}a_{1123} + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28})a_{1213} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28})(a_{2223} + a_{2333})] + \\
& +\omega_2\omega_3[\varepsilon_{23}a_{1322} + (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{28})(a_{1113} + a_{1333}) + (\varepsilon_{25} - \varepsilon_{28})a_{1223}], \\
\varepsilon_1 &= \frac{11}{72} - \frac{3}{2}\xi_1 + \frac{7}{3}\xi_3 + \frac{61}{6}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - 12\xi_2^2 - 140\xi_3^2, \\
\varepsilon_2 &= -\frac{11}{24} + \frac{9}{2}\xi_1 + 7\xi_3 - \frac{61}{2}\xi_1^2 + 12\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_3 &= -\frac{2}{3} + 2\xi_1 + 42\xi_3 - 12\xi_1^2 + 24\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_4 &= \frac{91}{36} - \frac{91}{4}\xi_1 + 49\xi_3 + \frac{4}{9}\xi_1^2 + \frac{28}{3}\xi_1\xi_2 - 56\xi_2^2 - 280\xi_3^2, \\
\varepsilon_5 &= -\frac{43}{24} + \frac{107}{4}\xi_1 + 14\xi_3 - \frac{86}{3}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_6 &= -\frac{49}{24} + \frac{83}{4}\xi_1 + 14\xi_3 + \frac{52}{3}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_7 &= -\frac{41}{24} + \frac{83}{4}\xi_1 + 7\xi_3 + 10\xi_1^2, \quad \varepsilon_8 = -\frac{2}{3} + 14\xi_3 + \frac{44}{3}\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_9 &= 8\left(\frac{1}{9}\xi_1^2 - \frac{1}{3}\xi_1\xi_2 - 2\xi_2^2\right), \quad \varepsilon_{10} = 4\xi_1\left(2\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_1\right), \\
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{3} + 14\xi_1 - 6\xi_1^2 + 24\xi_1\xi_2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{3} + 28\xi_1 - 14\xi_3 - \frac{22}{3}\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{3} - 2\xi_1 + 14\xi_3 + 18\xi_1^2 + 24\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{14} &= \frac{35}{6} - \frac{455}{18}\xi_1 - \frac{49}{6}\xi_3 - \frac{4}{3}\xi_1^2 - 8\xi_1\xi_2 - 12\xi_2^2, \\
\varepsilon_{15} &= -\frac{11}{12} + \frac{25}{2}\xi_1 + \frac{7}{2}\xi_3 - 10\xi_1^2, \quad \varepsilon_{16} = -\frac{5}{8} + 9\xi_1 + \frac{21}{2}\xi_3 + \frac{23}{2}\xi_1^2 + 12\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{17} &= \frac{77}{36} - \frac{511}{18}\xi_1 - \frac{49}{3}\xi_3 - \frac{8}{9}\xi_1^2 - 8\xi_2^2 - 560\xi_3^2 - \frac{16}{3}\xi_1\xi_2 - 140\xi_2\xi_3, \\
\varepsilon_{18} &= -\frac{17}{12} + 19\xi_1 + 14\xi_3 + \frac{34}{3}\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{19} &= -\frac{16}{9}(\xi_1 + 3\xi_2)^2, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{4}(1 - 14\xi_1)^2, \\
\varepsilon_{21} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{2}\xi_1 + 14\xi_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{4} - \frac{7}{6}\xi_1 - 18\xi_1^2, \\
\varepsilon_{23} &= 2\xi_1(14\xi_1 - 1), \quad \varepsilon_{24} = \frac{1}{2} - 12\xi_1 + 70\xi_1^2, \\
\varepsilon_{25} &= 2(1 - 2\xi_1 + 6\xi_1^2), \quad \varepsilon_{26} = -\frac{7}{12} + \frac{7}{2}\xi_1 - 14\xi_3 - \frac{8}{3}\xi_1^2 - 8\xi_1\xi_2, \\
\varepsilon_{27} &= -\frac{9}{4} - \frac{7}{2}\xi_1 + 142\xi_1^2, \quad \varepsilon_{28} = 4\xi_1^2, \quad \varepsilon_{29} = \frac{1}{4} - 5\xi_1 + 25\xi_1^2.
\end{aligned}$$

Выражения для остальных поправок к компонентам тензора инерции получаются в результате циклической перестановки  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и индексов 1, 2, 3 в  $a_{ijkl}$  (при этом используются свойства симметрии).

Тензор инерции анизотропного упругого шара имеет вид

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + \varepsilon^2(I'_{ij} + \gamma I''_{ij}), \quad I_{ij}^0 = \frac{2}{5}\delta_{ij},$$

$$I'_{ij} = \frac{2}{35} \left[ \omega^2 \left( -\frac{1}{3} + \frac{\xi_1}{3} + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \delta_{ij} + (1 - \xi_1) \omega_i \omega_j \right],$$

где  $I_{ij}^0$  - тензор инерции недеформированного шара,  $I'_{ij}$  - поправка к тензору инерции, связанная с деформацией  $\vec{u}_0$ .

Величины  $I'_{ij}, I''_{ij}$  - квадратичные функции компонент угловой скорости. Компоненты вектора кинетического момента и энергию тела представим в виде

$$K_p = I_{pq} \omega_q = I_{pq}^0 \omega_q + \varepsilon^2 (K'_{pqtm} + \gamma K''_{pqtm}) \omega_q \omega_l \omega_m,$$

$$E = \frac{1}{2} I_{pq}^0 \omega_p \omega_q + \frac{3}{4} \varepsilon^2 (K'_{pqtm} + \gamma K''_{pqtm}) \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m.$$

По приведенным результатам можно вычислить компоненты тензоров  $K'_{pqtm}$  и  $K''_{pqtm}$ . Компоненты тензора  $K''_{pqtm}$  в виду громоздкости здесь не приводятся. Для  $K'_{pqtm}$  имеет место следующее соотношение:

$$K'_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m = \frac{4}{35} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\xi_1}{3} + 2\xi_2 + 14\xi_3 \right] \omega^4.$$

Интегралы уравнений Эйлера  $E = const$  и  $\vec{K}^2 = const$  позволяют аналогично случаю упругого квазишара (§4) сделать заключение о характере движения тела по годографу вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела, который определяется по пересечению центрально-симметричной поверхности четвертого порядка  $E = const$  со сферическими поверхностями

$$\frac{4}{3} E - \frac{\vec{K}^2}{2I_0} = const,$$

отвечающими различным  $\vec{K}^2$ .

Проиллюстрируем результаты на следующих двух примерах.

1. Шар, в упругих свойствах которого имеется плоскость изотропии: все направления в плоскостях, нормальных к оси  $Ox_3$ , эквиваленты в отношении упругих свойств и тело изотропно в этих плоскостях. Анизотропные свойства тела характеризуются следующими параметрами [17]:

$$a_{1133} = a_{2233} = a, \quad a_{1313} = a_{2323} = b, \quad a_{3333} = c.$$

Интерес представляет "нешаровая" часть выражения  $K''_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m$ , которая имеет вид

$$\omega_3^4 [aQ_1 + bQ_2 + cQ_3] +$$

$$+ \omega_3^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left[ a \left( Q_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{25} \right) + b(Q_2 - \varepsilon_{25}) + c \left( Q_3 + \frac{1}{4} \varepsilon_{25} \right) \right],$$

$$Q_1 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{17}, \quad Q_2 = \varepsilon_9 + \varepsilon_{10} - \varepsilon_{19}, \quad Q_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{14} - \varepsilon_{15}.$$

Можно убедиться, что при любых значениях параметра  $\kappa \in [0, +\infty)$  (коэффициент Пуассона  $0 \leq \nu < 0,5$ )  $\varepsilon_{25} > 0$ ,  $Q_1 > 0$ , а величины  $Q_2$  и  $Q_3$  отрицательны, при этом

$$Q_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{25} > 0, \quad Q_3 + \frac{1}{4} \varepsilon_{25} < 0.$$

Пусть  $a = b = 0$ ,  $c > 0$ . Поверхность коэффициентов напряжения [17] является эллипсоидом вращения, тело наиболее податливо в плоскости  $Ox_1x_2$ . Годограф вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела представлен на рис. 6. Из соотношений для  $\vec{K}$  и  $E$  находим, что при постоянном  $\vec{K}^2$  вращению вокруг  $Ox_3$  отвечает наибольшая энергия. Принимая во внимание диссипацию энергии, заключаем, что устойчивым будет вращение вокруг осей, лежащих в плоскости  $Ox_1x_2$ .

Аналогично можно провести рассмотрение при произвольных значениях параметров  $a, b, c$ .

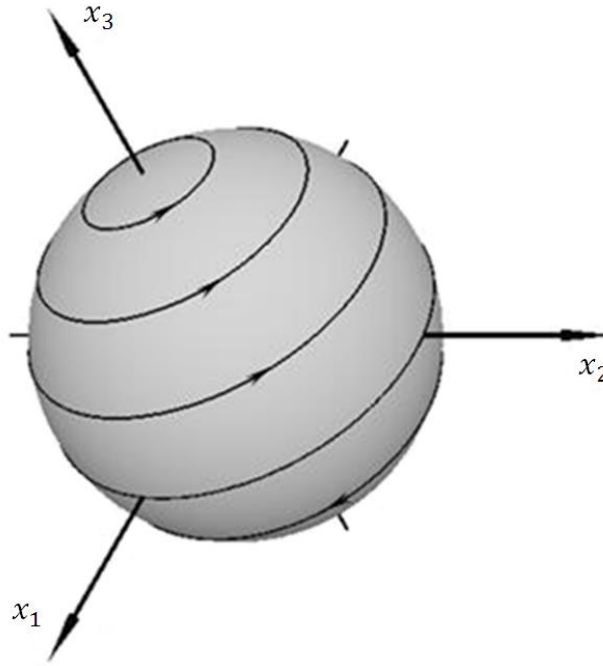


Рис. 6

2. Шар, упругие свойства которого обладают симметрией куба. Анизотропия характеризуется следующими параметрами:

$$a_{1122} = a_{1133} = a_{2233} = a, \quad a_{1212} = a_{1313} = a_{2323} = b, \\ a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = c.$$

"Нешаровая" часть выражения  $K''_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m$  имеет вид

$$(1 - 2\xi_1 + 6\xi_1^2)(c - a - 2b)(\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2).$$

При  $c = a + 2b$  она обращается в нуль, что отвечает изотропному упругому телу.

Пусть  $a \geq 0$  и (или)  $b \geq 0$ ,  $c = 0$ . Поверхность коэффициентов напряжения, имеющая симметрию куба, ориентирована так, что оси системы координат  $Ox_1x_2x_3$  проходят через центры "граней куба", т.е. в направлении этих осей тело наиболее податливо.

Фиксируя величину вектора кинетического момента, вычисляя отвечающие ей угловые скорости при различных стационарных вращениях шара, устанавливаем, что энергия  $E$  минимальна при ориентации  $\vec{\omega}$  на середины граней кубической поверхности коэффициентов напряжения (рис. 7). Как и в предыдущем примере, заключаем, что учете диссипации асимптотически устойчивым будет лишь вращение вокруг оси наибольшей податливости.

Таким образом, наблюдается аналогия в поведении свободно вращающегося анизотропно-упругого шара, рассмотренного в данной части работы, и однородного изотропного упругого квазишара, изучавшегося ранее. Отметим различные направления движения  $\vec{\omega}$  на рис.4 и рис.7, что отвечает различию устойчивости соответствующих осей стационарного вращения.

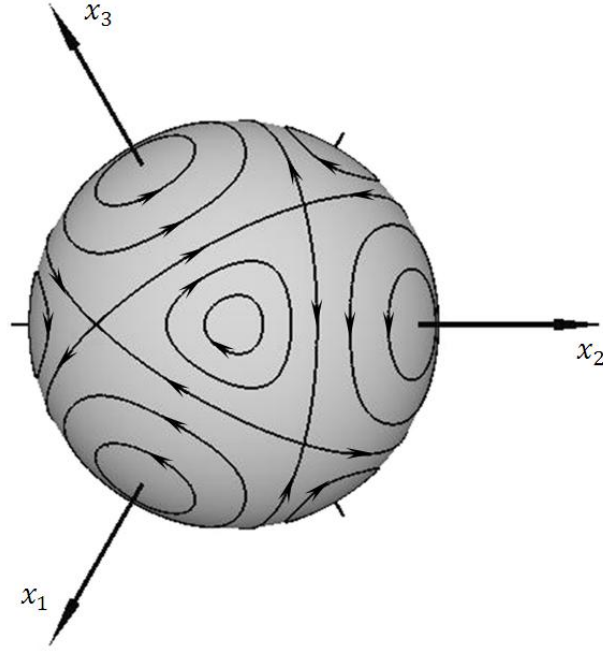


Рис. 7

Рассмотрение до сих пор проводилось в предположении малой анизотропии упругих свойств тела, что существенно упростило задачу и позволило вычислить поправки к компонентам тензора инерции. Если отказаться от этого предположения ( $\gamma \sim 1$ ), то при анизотропии упругих свойств общего вида задача не решается из-за трудностей вычислительного характера, хотя в ряд простейших случаев эти трудности преодолимы.

Не предполагая анизотропию малой, вновь рассмотрим свободно вращающимся шар, в упругих свойствах которого имеется плоскость изотропии. Решается квазистатическая задача вида (30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \text{ в } V, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ij} n_j &= 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl}$ . Отличны от нуля следующие компоненты тензора  $\lambda_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{1111} = \lambda_{2222} &= \kappa + 2, & \lambda_{1122} &= \kappa, & \lambda_{1212} &= 1, \\ \lambda_{1133} = \lambda_{2233} &= a, & \lambda_{1313} = \lambda_{2323} &= b, & \lambda_{3333} &= c. \end{aligned}$$

Вектор деформации отыскивается в виде многочлена

$$\vec{u} = \vec{q}_n x_n + \vec{r}_{kmn} x_1^k x_2^m x_3^p, \quad n, k, m, p = 1, 2, 3, \quad k + m + p = 3.$$

Вычисление величин, входящих в это выражение, дает

$$\begin{aligned} q_{13} &= q_{23}, & q_{11} &= q_{22}, & q_{31} &= q_{32}, \\ r_{1300} &= r_{2030}, & r_{1120} &= r_{2210}, & r_{1102} &= r_{2012}, \\ r_{1030} &= r_{2300}, & r_{1012} &= r_{2102}, & r_{1210} &= r_{2120}, \\ r_{3201} &= r_{3021}, & r_{3102} &= r_{3012}, & r_{1201} &= r_{2021}, \\ r_{1021} &= r_{2201}, & r_{1003} &= r_{2003}, & r_{3300} &= r_{3030}, \\ r_{3120} &= r_{3210}, & r_{1111} &= r_{2111}, & r_{1300} &= r_{1120}, \\ r_{1210} &= -\frac{a}{4b(\kappa + 1)} \left[ \frac{1}{2} (1 + b) \Omega^2 + (2 + 3b) \omega_1 \right], \\ r_{1012} &= -\frac{b}{4} \Omega^2 - \frac{3}{2} \omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1030} &= \frac{1}{12(\kappa+1)} \left[ \frac{a(1+b)}{2b} \Omega^2 + \left( \frac{a(2+3b)}{b} - 4(\kappa+1) \right) \omega_1 \right], \\
r_{3111} &= \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{2} (1+b) \Omega^2 + (2+3b) \omega_1 \right], \\
\omega_1 = q_{12} + q_{21} &= -\frac{\Omega^2}{2} \frac{(\kappa+1)[(a+4b)(1+b) - 2b^3] - a^2(1+b)}{(\kappa+1)(2a+8b+3ab+6b^2) - a^2(2+3b)}, \\
r_{1021} &= \frac{1}{2(3+b)} [(b-3)r_{1111} - 2\omega_2], \\
r_{1201} &= \frac{a^2 - \kappa c}{2[(\kappa+2)c - a^2]} r_{1111}, \\
r_{3120} &= -\frac{1}{2b(3+b)} [2\omega_2 + b(b+1)r_{1111}], \\
r_{3102} &= \frac{a}{a^2 - (\kappa+2)c} r_{1111}, \\
r_{1003} &= -\frac{1}{3b} \omega_2 + \frac{a}{3[(\kappa+2)c - a^2]} r_{1111}, \\
r_{3300} &= -\frac{1}{3b} \omega_2 + \frac{a^2 - \kappa c}{6[a^2 - (\kappa+2)c]} r_{1111}, \\
r_{1111} &= \frac{\sqrt{2}(3+b)}{4b} \omega_3 \Omega + \frac{4+b}{b} \omega_2, \\
\omega_2 = b(q_{31} + q_{13}) &= \frac{\sqrt{2}(3+b)}{4b} \omega_3 \Omega \left[ \frac{(\kappa+2)c - a^2}{(3b+3)(\kappa c - a^2) + 3c(b+1)} - \frac{4+b}{b} \right]^{-1}, \\
r_{1102} &= -\frac{1}{2a(a+2b)} \left[ \frac{a}{2} \Omega^2 - b\omega_3^2 - 8(\kappa+2)br_{1300} + 3(a+b)cr_{3003} \right], \\
r_{3201} &= -\frac{1}{2a(a+2b)} \left[ \frac{a}{2} \Omega^2 + (a+b)\omega_3^2 + 8(\kappa+2)(a+b)r_{1300} - 3bcr_{3003} \right], \\
q_{11} &= \frac{1}{4(a+2b)[(\kappa+1)c - a^2]} \left\{ \frac{a}{2} (c-2a)\Omega^2 + [c(a+b) + 2ab]\omega_3^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4[2b(\kappa+2)(2a-c) + c(a+2b)]r_{1300} + 3bc(2a-c)r_{3003} \right\}, \\
q_{33} &= \frac{1}{2(a+2b)[(\kappa+1)c - a^2]} \left\{ \frac{a}{2} [2(\kappa+1) - a]\Omega^2 - \right. \\
&\quad \left. - [2b(\kappa+1) + a(a+b)]\omega_3^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4[2ab(\kappa+2) - a(a+2b) - 4b(\kappa+1)(\kappa+2)]r_{1300} + 3bc[a - 2(\kappa+1)]r_{3003} \right\}, \\
r_{1300} &= \frac{3}{2\omega_3} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} [2a^2(a-2b) - c(a(a+b) + 2(a-b)(\kappa+1))] + \right. \\
&\quad \left. + c^2(\kappa+1+b) \right\} + \\
&\quad + \omega_3^2 [-4a^2b + c(a(b-a) + 4b(\kappa+1)) + c^2(\kappa+1+b)], \\
r_{3003} &= \frac{1}{\omega_3} \left\{ \frac{\Omega^2}{2} [8(\kappa+1)(\kappa+2)b + 4a(\kappa+2)(b-a) + \right. \\
&\quad \left. + 2a(2b+a-4ab+a^2) + \right. \\
&\quad \left. + c(a+4(\kappa+1)(\kappa+2) + 2(\kappa+2)(3b-a))] + \right. \\
&\quad \left. + \omega_3^2 [2a^2(a-b) - 4ab(\kappa+2) - c(a+b)(3+2\kappa)] \right\}, \\
\omega_3 &= 3\{-4a^2[a(a+2b) - 4b(\kappa+2)] + \\
&\quad + 2c[2a(a+b)(3+2\kappa) - 8b(\kappa+1)(\kappa+2) + \\
&\quad + ab(3a-2)] + c^2[b^2 - 6b(\kappa+2) - 4(\kappa+1)(\kappa+2)]\}.
\end{aligned}$$

Здесь принято, что  $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2}/2 \Omega$ . Величины  $q_{12}, q_{21}, q_{13}, q_{31}$  можно вычислить, рассмотрев совместно соотношения  $\omega_1 = q_{12} + q_{21}$ ,  $\omega_2 = b(q_{31} + q_{13})$  и условие отсутствия в системе  $Ox_1x_2x_3$  движений тела как целого

$$\int_V [\vec{r}, \vec{u}] dV = 0.$$

Приведенные выражения для  $q_{ij}, r_{ijkl}$  позволяют найти поправки к тензору инерции, обусловленные анизотропией упругих свойств шара, по формулам

$$I'_{11} = I'_{22} = \frac{2}{35} \{7(q_{11} + q_{33}) + 4r_{1300} + 3r_{3003} + r_{1102} + 2r_{3201}\},$$

$$I'_{33} = \frac{2}{35} \{7q_{11} + 4r_{1300} + r_{1102}\},$$

$$I'_{12} = -\frac{1}{35} \{7\omega_1 + 6r_{1030} + 2r_{1210} + 2r_{1012}\},$$

$$I'_{13} = I'_{23} = -\frac{1}{35} \{7\omega_2 + 3r_{3300} + 3r_{1003} + r_{3120} + r_{1021} + r_{3102} + r_{1201}\}.$$

Представление о качественных особенностях динамики шара дает проведенное ранее исследование случая малой анизотропии.

В заключение этой части работы речь пойдет о том, как на основе некоторых результатов, полученных при изучении свободных движений анизотропно-упругого тела, представляется свободная нутация Земли. Вопросы свободного движения Земли детально освещены в литературе (например, [1,18]). Кратко суть дела в следующем. По наблюдениям астрономов с большой степенью точности определены экваториальный  $I_{11}$  и осевой  $I_{33}$  моменты инерции Земли. Считая Землю абсолютно твердой, Эйлер показал, что ее ось мгновенного вращения может описывать конус около оси наибольшего момента инерции с периодом

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega} \frac{I_{11}}{I_{33} - I_{11}} = 305 \text{ суток.}$$

Попытки астрономов обнаружить движение оси Земли с эйлеровым периодом оказались безуспешными. Но в 1891 году С. Чандлер, кропотливо обработав большое число астрономических наблюдений, нашел круговое движение полюса с амплитудой, близкой к  $0,15''$ , и периодом  $T_4 = 428$  суток (например, [1, 18, 19]). С. Ньюкомб отождествил чандлеровское движение со свободным эйлеровым движением, объяснив увеличение его периода по сравнению с  $T_3$  тем, что Земля не является абсолютно твердым телом. Не отрицая и не подвергая сомнению справедливость различных моделей Земли, учитывающих в том или ином виде ее неоднородности и покрывающий Землю слой жидкости, здесь и в §9 покажем, что заслуживает внимания и предполагаемые модификации модели деформируемой Земли. Анизотропия упругих свойств и собственная диссипация могут занимать существенное и даже определяющее место в объяснении чандлеровской нутации Земли, с ними находят толкование и некоторые другие эффекты в динамике Земли.

В этой части работы сосредоточимся на анизотропно-упругом квазишаре как модели Земли. Гипотезу о многогранности Земли разделяли многие мыслители прошлого от Пифагора и Платона до Пуанкаре, но развитие она получила в 20-е годы текущего столетия в работах геолога С.И. Кислицына. Он создал модель, отражающую эволюцию многогранной (анизотропно-упругой) Земли и отвечающую важнейшим ее геологическим особенностям. На основе этой модели он указал, где следует искать новые месторождения полезных ископаемых, многие

из которых впоследствии были открыты [19]. Важным аргументом в пользу учета в модели деформируемой Земли ее анизотропных свойств является представление о структуре литосферы, а именно, наличие литосферных плит.

Деформируемый однородный изотропный шар, приведенный во вращение вокруг ориентированной произвольным образом оси, сохраняет в пространстве направление вращения в отсутствие внешних воздействий, нутационные движения не наблюдаются. Если форма тела в недеформированном состоянии отлична от сферы, причем уравнение поверхности, представленное в виде ряда по сферическим гармоникам, содержит  $Y_{2m}$  и (или)  $Y_{4m}$ , то наблюдается нутация оси тела (§4). Казалось бы, что в этом содержится ответ на вопрос о различии  $T_4$  и  $T_3$ . Эйлер подсчитал  $T_3$ , исходя из моментов инерции деформированной Земли в результате ее вращения. Но динамика в свободном движении определяется главным образом различием главных моментов инерции до деформирования  $I_{11}^0, I_{33}^0$ . Но они нам не известны.

Зная решение задачи о деформировании вращающегося шара, можно исключить вклад этих деформаций в наблюдаемые моменты инерции  $I_{11}, I_{33}$ . В результате получим соотношение

$$\frac{I_{33} - I_{11}}{I_{11}} - \frac{I_{33}^0 - I_{11}^0}{I_{11}^0} = \varepsilon^2 \frac{4\pi^2}{7} (1 - q), \quad q = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}. \quad (34)$$

Для оценок возьмем  $\nu = 0,25$ ,  $\lambda = \mu$ , т.е.  $\kappa = 1$ . Величину параметра  $\varepsilon^2$  определим исходя из того, что по наблюдениям собственных колебаний Земли, возбуждаемых сильными землетрясениями, период чисто радиальных колебаний  $P_s = 20$  мин [20]. В случае однородного изотропного шара

$$P_s = \frac{R\sqrt{\rho}}{0,408\sqrt{\lambda + 2\mu}},$$

поэтому выражение для  $\varepsilon^2$  приводится к виду

$$\varepsilon^2 = \frac{(0,408P_s)^2(\lambda + 2\mu)\omega_0^2}{4\pi^2\mu}.$$

Оказывается, что  $\varepsilon^2 \approx 10^{-4}$ . Расчет показывает, что при отвечающих Земле значениях параметров приближенное равенство между правой и левой частями соотношения (34) не достигается. Оно могло быть справедливым при периоде нутации, приближенно равном 330 суткам.

Таким образом, в рамках модели однородного изотропного квазишара имеющееся различие между периодом чандлеровской нутации и периодом Эйлера не находит объяснения. Изменим модель введением в рассмотрение анизотропии упругих свойств.

В проводимом рассмотрении, как и в предыдущем случае для получения выражения (34), достаточно вычислить первый член разложения вектора деформации по малым параметрам  $\vec{u}_m$ . Ранее отмечалось, что в общей постановке задачи о деформировании анизотропного шара при вращении требует громоздких вычислений. Поэтому ограничимся одним из наиболее простых случаев. Рассмотрим задачу о свободных движениях шара, упругие свойства которого обладают кубической симметрией (без предположения о малости анизотропии).

Решается следующая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \text{ в } V, & i &= 1,2,3, \\ \sigma_{ij}n_j &= 0 \text{ на } S, & i &= 1,2,3, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij} = (\kappa u_{ll} + a u_{ij})\delta_{ij} + 2u_{ij}$ , упругая постоянная  $a$  характеризует анизотропные свойства тела.

Вектор деформации здесь также отыскивается в виде многочлена

$$\vec{u} = \vec{q}_n x_n + \vec{r}_{ikmp} x_1^k x_2^m x_3^p, \quad n, k, m, p = 1, 2, 3, \quad k + m + p = 3.$$

По величинам  $q_{in}$  и  $r_{ikmp}$  (не приводятся из-за громоздкости) вычисляются поправки к компонентам тензора инерции. Они имеют вид

$$I'_{ii} = \varepsilon^2 \frac{2}{35} [(\delta_1 + \delta_3)\omega^2 + (\delta_2 - \delta_3)\omega_i^2],$$

$$I'_{ij} = \varepsilon^2 \frac{1}{35} \delta_4 \omega_i \omega_j, \quad i \neq j,$$

$$\delta_1 = \gamma_0 \frac{1}{\kappa + 2 + a} [14(\kappa + 2) + a(3\kappa + 16 + a)],$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\kappa + 2 + a} \left\{ \gamma [16(\kappa + 1) + a(3\kappa + 10 + a)] + \frac{2(3\kappa + 2) + a(\kappa + 2)}{a + 2} \right\},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\kappa + 2 + a} \left\{ \gamma(6 - \kappa + 3a) - \frac{2(3\kappa + 4) + a(\kappa + 6 + a)}{2(a + 2)} \right\},$$

$$\delta_4 = \frac{2(35\kappa + 26) + a(27\kappa + 44 + 9a)}{2(19\kappa + 14) + a(15\kappa + 24 + 5a)},$$

$$\gamma = -\frac{8(4\kappa + 3) + a[a^2 + a(3\kappa + 10) + 2(11\kappa + 14)]}{2(a + 2)\{2(19\kappa + 14) + a[a^2 + 11a + 32 + \kappa(3a + 25)]\}},$$

$$\gamma_0 = -\frac{1}{3}\gamma +$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{4(5\kappa + 6) + a[a^2 + a(3\kappa + 10) + 4(4\kappa + 7)]}{(a + 2)\{10(3\kappa + 2)(\kappa + 2) + a[a^2 + 2a(3\kappa + 7) + 9\kappa^2 + 52\kappa + 44]\}}.$$

При вращении вокруг оси, близкой к  $Ox_3$ , уравнение для компонент угловой скорости имеет вид

$$\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2), \quad \dot{\omega}_3 = 0,$$

где

$$\Omega = \omega_3 \left\{ v_0 + \frac{1}{35} \frac{\varepsilon^2 \omega_3^2}{I_{11}^0} [2(\delta_2 - \delta_3) - \delta_4] \right\}, \quad v_0 = \frac{I_{33}^0 - I_{11}^0}{I_{11}^0}.$$

Период нутации  $T_H = 2\pi/\Omega$ . Напомним, что в принятом масштабе времени  $\omega_3 = 2\pi$ .

Величина

$$v_1 = \frac{I_{33} - I_{11}}{I_{11}}$$

определяется равенством

$$v_1 = v_0 + \frac{2}{35} \frac{\varepsilon^2 \omega_3^2}{I_{11}^0} (\delta_2 - \delta_3).$$

Отсюда находим, что

$$v_1 - \frac{1}{T_H} = \frac{1}{35} \frac{\varepsilon^2 \omega_3^2}{I_{11}^0} \delta_4 = \frac{2\pi^2}{7} \varepsilon^2 \delta_4.$$

Для Земли разность  $v_1 - 1/T_H$  представляет собой разность величин, обратных  $T_3$  и  $T_4$ . Оказывается, что при  $\varepsilon^2$ , отвечающем Земле, нельзя указать значение параметра  $a$ , при котором выполнялось бы это соотношение, т.е. при вращении вокруг оси, близкой к  $Ox_3$  (ориентированной на центр грани "куба"), начальная эл-



липсоидальность формы и анизотропия упругих свойств не приводят к необходимому различию между  $\nu_1$  и  $1/T_H$ .

Иначе обстоит дело при вращении вокруг оси, близкой к  $Oy_3$ , ориентированной на вершину "куба" анизотропных свойств. Проекции вектора кинетического момента  $\vec{K}$  на оси системы координат  $Oy_1y_2y_3$ , которые будем считать главными осями недеформированного тела, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_{y_1} &= I_{11}^0 \omega_1 + \frac{\varepsilon^2}{35} \omega_1 [2(\delta_1 + \delta_3) \omega^2 + 2(\delta_2 - \delta_3) \omega_3^2], \\ K_{y_2} &= I_{11}^0 \omega_2 + \frac{\varepsilon^2}{35} \omega_2 [2(\delta_1 + \delta_3) \omega^2 + 2(\delta_2 - \delta_3) \omega_3^2], \\ K_{y_3} &= I_{33}^0 \omega_3 + \frac{\varepsilon^2}{35} \omega_3 \left[ 2(\delta_1 + \delta_3) \omega^2 + \frac{2}{3} (\delta_2 - \delta_3 + \delta_4) \omega_3^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_i$  - проекции угловой скорости на оси  $Oy_1y_2y_3$ . В выражениях для  $K_{y_j}$  учтены лишь линейные по  $\omega_1$  и  $\omega_2$  члены, т.к. предполагается, что  $\omega_1, \omega_2 \ll 1$ .

Из уравнения для кинетического момента (14) находим частоту нутации

$$\Omega = \omega_3 \left\{ \nu_0 + \frac{\varepsilon^2}{35} \frac{2}{3I_{11}^0} [\delta_4 - 2(\delta_2 - \delta_3)] \omega_3^2 \right\}.$$

После преобразования тензора инерции получим, что в  $Oy_1y_2y_3$

$$\nu_1 = \nu_0 + \frac{\varepsilon^2}{35} \delta_4 \frac{\omega_3^2}{I_{11}^0},$$

а выражение (34) принимает вид

$$\nu_1 - \frac{1}{T_H} = [\delta_4 + 4(\delta_2 - \delta_3)] \frac{\varepsilon^2 \omega_3^2}{105 I_{11}^0}.$$

Нетрудно убедиться, что эта формула при  $a = 0$  переходит в (34).

Расчет показывает, что при  $a = -1,11$  анизотропия упругих свойств совместно с начальной эллипсоидальностью обеспечивают в рассмотренной модели совпадение с данными по динамике Земли. Такое значение параметра  $a$  означает отклонение упругих постоянных по сравнению с изотропным случаем на 35% (в выражении для  $\sigma_{ij}$  изотропного тела коэффициент при  $u_{ij}$  равен  $\kappa + 2$ , анизотропного  $-\kappa + 2 + a$ ).

Таким образом, анизотропия упругих свойств может существенным образом влиять на характер свободного движения тела. В модели изотропного тела при рассмотренных значениях параметров возможна нутация с периодом 330 суток, а отклонение от изотропности 35% приводит к  $T_H = 430$  суток.

В заключение этой части работы обратим внимание на еще одну систему, поведение которой в свободном движении сходно с рассмотренными угловыми движениями анизотропно-упругого шара. Это – жесткий однородный шар, к которому прикреплены вязкоупругие стержни. Задача о динамике шара с произвольным числом скрепленных с ним упругих стержней может быть сведена к изучению угловых движений шара с одинаковыми стержнями, направленными в недеформированном состоянии вдоль лучей, идущих из центра шара в вершины правильных многогранников, вписанных в шар, с числом вершин (стержней) 4, 6, 8 и т.д. Поведение шара со стержнями, обладающего в недеформированном состоянии симметрией куба, рассматривалось в [21] и сходно с поведением шара с кубической анизотропией упругих свойств.

Качественное представление об эволюции вращательного движения тела дают траектории вектора  $\vec{\omega}$  относительно тела, также имеющего вид, показанный на рис. 7. Вращение вокруг оси, проходящей через середины противоположных ре-

бер куба, определяющего размещение стержней, неустойчиво. Проходящие через след от таких осей сепаратрисы разбивают поверхность шара на восемь треугольных и шесть четырехугольных областей. Центрами областей являются консервативно устойчивые вращения соответственно вокруг осей, проходящих через противоположные вершины и центры противоположных граней куба. Под влиянием диссипации консервативная устойчивость вращений первого типа, которая имеет гироскопический характер, разрушается, а устойчивость вращений второго типа усиливается до асимптотической.

Движения шара, со стержнями, направленными в вершины икосаэдра или додекаэдра, в первом приближении по  $\varepsilon^2$  являются тривиальными: любое направление  $\vec{\omega}$  в теле является стационарным. В следующем приближении при учете деформации порядка  $\varepsilon^4$  выявляется эволюция вращения этих тел.

Рассмотрим движение шара со стержнями, направленными в вершины икосаэдра [21]. Стационарные вращения тела образуют три семейства осей.

Первое семейство – стационарные вращения вокруг осей, проходящих через противоположные вершины

$$\begin{aligned} \omega_1 = \pm n_1 \omega, \quad \omega_2 = \pm n_2 \omega, \quad \omega_3 = 0, \quad (1,2,3), \\ n_1 = \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n_2 = \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Второе семейство образуют вращения вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \pm \omega, \quad (1,2,3), \\ \omega_1 = \pm m_1 \omega, \quad \omega_2 = \pm m_2 \omega, \quad \omega_3 = \pm \frac{\omega}{2}, \quad (1,2,3), \\ m_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \end{aligned} \quad (36)$$

Третье семейство состоит из вращений вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней

$$\begin{aligned} \omega_1 = \pm \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = \pm \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \quad \omega_3 = \pm \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \\ \omega_1 = \pm k_1 \omega, \quad \omega_2 = \pm k_2 \omega, \quad \omega_3 = 0, \quad (1,2,3), \\ k_1 = \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{6} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k_2 = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Характер эволюции вращательного движения системы следует из рис. 8, где показан след вектора  $\vec{\omega}$  в теле. Центры пятиугольных и треугольных областей отвечают консервативно устойчивым стационарным движениям (35), (37) соответственно.

При условии  $\vec{K}^2 = const$  энергия системы  $E$  принимает наименьшее значение на движениях (37), а наибольшее - на движениях (35). Значит, диссипация усилит устойчивость движений (37) до асимптотической и разрушит консервативную устойчивость вращения (35).



Рис. 8

### § 7. О возможности перехода тела к новому состоянию стационарного вращения

На конкретных примерах, рассмотренных в работах [23,24], обсудим одну характерную особенность в поведении тел в свободном движении, обусловленную их упругостью.

Рассмотрим упругий шар, обладающий плоскостями изотропии, перпендикулярными оси  $Ox_3$ . Предположим, что шар содержит точечные включения (неоднородности), которые приводят к малым отклонениям тензора инерции недеформированного тела  $I_{ij}^0$  от его значения для шара, но не влияют на деформации. Оси системы  $Ox_1x_2x_3$  являются главными осями инерции недеформированного тела  $I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}$ , где  $I_0 = 2/5$ ,  $\Delta_i \ll I_0$ .

Пусть тело приведено в быстрое вращение вокруг оси  $Ox_3$  с угловой скоростью  $\Omega$ . При малых возмущениях этого движения вектор угловой скорости  $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + (\Omega + \omega_3)\vec{e}_3$ , где  $\omega_i \ll \Omega$ . В данном приближении поправки к тензору инерции, связанные с учетом упругих свойств тела, в соответствии с §6, имеют вид

$$I'_{11} = I'_{22} = g_1\Omega^2, I'_{33} = \left[ g_1 + \frac{2}{35}(1 - \xi_1) \right] \Omega^2,$$

$$I'_{13} = \frac{2}{35}(1 - \xi_1)\Omega\omega_1, \quad I'_{23} = \frac{2}{35}(1 - \xi_1)\Omega\omega_2,$$

$$I''_{11} = I''_{22} = g_2 a_{3333}\Omega^2, \quad I''_{33} = g_3 a_{3333}\Omega^2, \quad I''_{13} = g_4 a_{3333}\Omega\omega_1, \quad I''_{23} = g_4 a_{3333}\Omega\omega_2,$$

где

$$g_1 = -0,019 + 0,019\xi_1 + 0,229\xi_2 + 1,6\xi_3,$$

$$g_2 = 0,298 - 0,93\xi_1 + 0,133\xi_3 + 0,581\xi_1^2 + 0,229\xi_1\xi_2 - 0,686\xi_2^2,$$

$$g_3 = -0,017 + 0,171\xi_1 + 0,533\xi_3 - 1,162\xi_1^2 + 0,914\xi_1\xi_2 - 0,686\xi_2^2 - 8\xi_3^2,$$

$$g_4 = -0,007 + 0,2\xi_1 - 1,4\xi_1^2,$$

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Уравнение Эйлера в проекциях на оси  $Ox_1x_2x_3$  принимает вид

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\dot{\omega}_1 + (\Delta_3 - \Delta_2)\Omega\omega_2 - \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_2 = 0, \\ \frac{2}{5}\dot{\omega}_2 + (\Delta_1 - \Delta_3)\Omega\omega_1 + \varepsilon\delta g a_{3333}\Omega^3\omega_1 = 0, \\ \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (38)$$

где  $g = g_2 + g_4 - g_3 = 0,308 - 0,901\xi_1 - 0,4\xi_3 + 0,343\xi_1^2 - 0,685\xi_1\xi_2 + 8\xi_3^2$ .

Отметим, что  $g > 0$  при любых значениях параметра  $\kappa \in (0, \infty)$ , в чем можно непосредственно убедиться.

Выражение для кинетической энергии тела при постоянном кинетическом моменте имеет вид

$$T = T_0 + \frac{1}{2} [(\Delta_3 - \Delta_1 - \varepsilon\delta g\Omega^2 a_{3333})\omega_1^2 + (\Delta_3 - \Delta_2 - \varepsilon\delta g\Omega^2 a_{3333})\omega_2^2]. \quad (39)$$

Однородный изотропный упругий шар ( $\Delta_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  и  $a_{3333} = 0$ ), как следует из (38), не прецессирует. Любое положение в нем оси вращения остается неизменным со временем. Шар принимает форму эллипсоида вращения, но деформации  $\vec{u}_0(\vec{r}, t)$  на угловом движении тела не сказываются.

Пусть  $Ox_3$  является осью среднего момента инерции, т.е.

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

В приближении абсолютно твердого тела вращение вокруг оси  $Ox_3$  неустойчиво. Ему отвечает седловая точка (рис. 9).

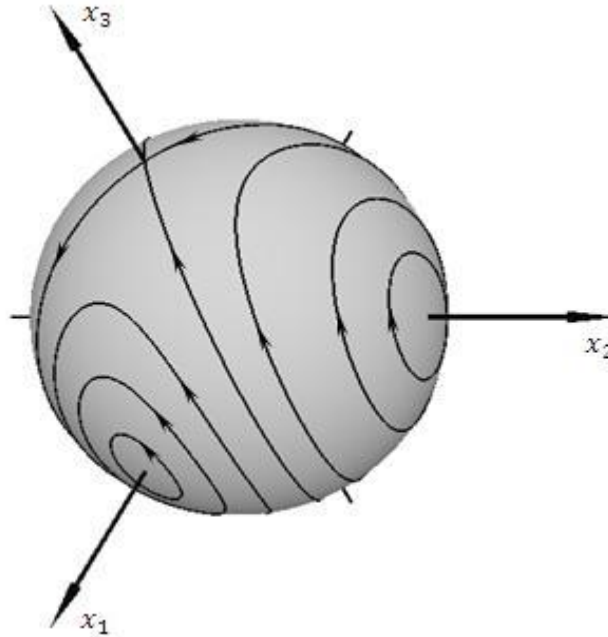


Рис. 9

Рассмотрим случай, когда тензор  $I_{ij}^0$  шаровой, т.е.  $\Delta_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а параметр, характеризующий анизотропию упругих свойств,  $a_{3333} < 0$ . В соответствии с (38) вращение вокруг  $Ox_3$  консервативно устойчиво вне зависимости от знака  $a_{3333}$ . На рис. 10 показаны траектории конца вектора  $\vec{K}$  на сфере постоянного кинетического момента при различных значениях кинетической энергии тела. Вращению вокруг  $Ox_3$  отвечает особая точка типа центр. При  $a_{3333} < 0$  учет малых внутренних потерь энергии приводит к трансформации центра в

устойчивый фокус, т.к. в этом случае вращению тела вокруг  $Ox_3$  отвечает минимум кинетической энергии при постоянном кинетическом моменте (39).

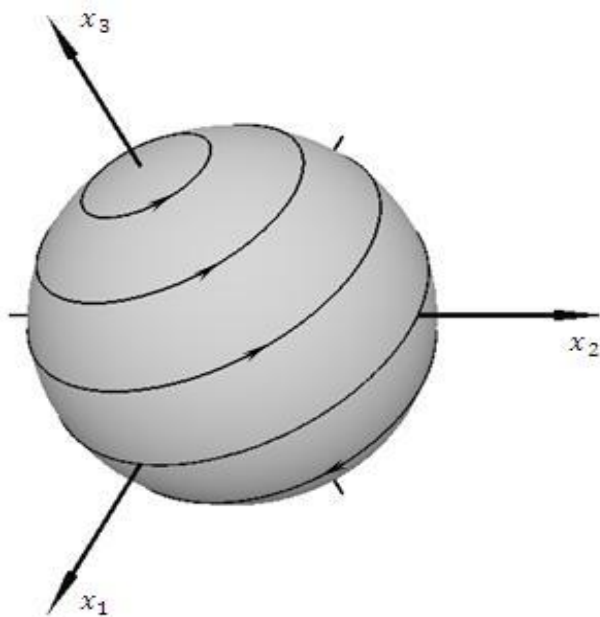


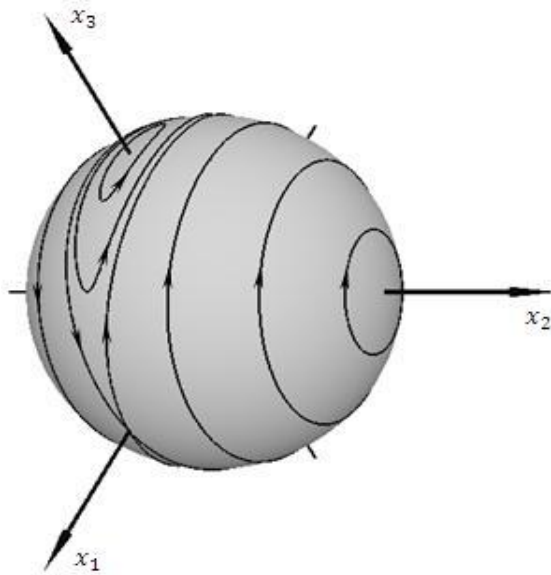
Рис. 10

Интересный качественный эффект обнаруживается в случае, когда анизотропия упругих свойств и малое отличие тензора инерции недеформированного тела от  $I_0$  наблюдается одновременно. В уравнениях движения (38) эти факторы оказывают различное влияние в зависимости от угловой скорости вращения  $\Omega$ . Пусть параметры  $\Delta_i$  ( $i = 1,2,3$ ),  $a_{3333}$  и угловая скорость  $\Omega$  таковы, что анизотропия определяет качество динамики тела (рис. 11). Стационарное вращение относительно оси  $Ox_3$ , консервативно устойчиво при достаточно больших значениях  $\Omega$  :

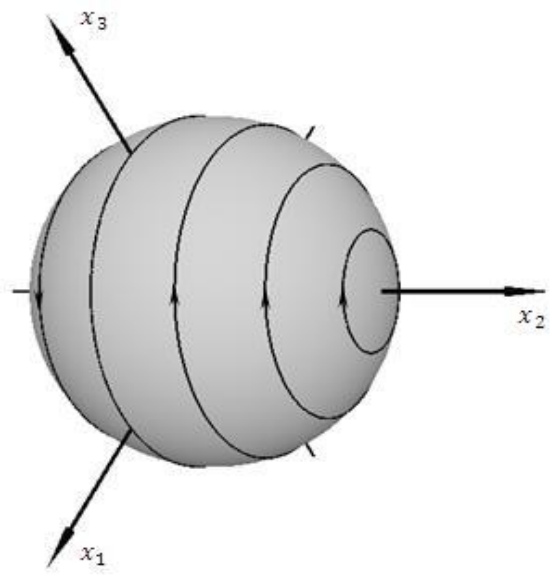
$$\Omega^2 > \frac{\Delta_1 - \Delta_3}{\varepsilon \delta g |a_{3333}|} = \Omega_*^2.$$

С уменьшением угловой скорости  $\Omega$  область притяжения устойчивого вращения относительно  $Ox_3$  уменьшается, сепаратрисы, показанные на рис. 11, сближаются. Наконец, при  $\Omega = \Omega_*$  траектории конца вектора кинетического момента на сфере  $\vec{K}^2 = const$  принимают вид, показанный на рис. 12.

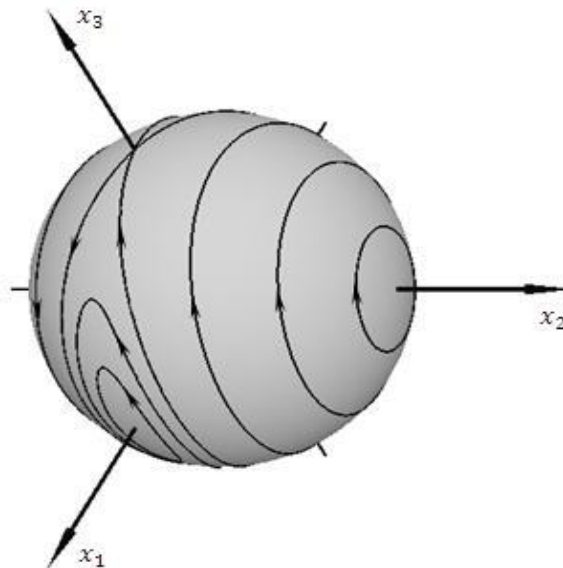
При  $\Omega < \Omega_*$  динамику тела определяет главным образом его тензор инерции в недеформированном состоянии (т.е. величины  $\Delta_i$ ,  $i = 1,2,3$ ): стационарное вращение вокруг  $Ox_3$  неустойчиво, а вращение относительно двух других осей консервативно устойчиво (рис. 13).



**Рис. 11**



**Рис. 12**



**Рис. 13**

Пусть твердое тело совершает угловые движения вблизи некоторого направления устойчивого стационарного вращения (в нашем случае – вокруг  $Ox_3$ ). Со временем внутренняя диссипация уменьшает кинетическую энергию (угловую скорость) тела. Однако качественно его динамика не изменится. Одновременно с уменьшением угловой скорости  $\Omega$  затухает прецессия тела, следовательно, прекращается какое-либо движение в теле, а вместе с ним внутреннее рассеяние энергии. Тело возвращается к исходному стационарному вращению, сокращается лишь область его притяжения.

Иначе обстоит дело, когда наряду с внутренней диссипацией энергии присутствует и малое внешнее сопротивление движению тела. Кинетический момент не сохраняется, но его изменение в виду малости можно не принимать в расчет. Внешнее сопротивление уменьшает угловую скорость  $\Omega$  тела и в отсутствие прецессии, а, следовательно, со временем изменяет соотношение между факторами, определяющими динамику тела. В результате при  $\Omega = \Omega_*$  ось устойчивого стационарного вращения смещается в теле в новое положение.

Сходное поведение обнаруживает и изотропное упругое тело, симметрия формы которого мало отличается от кубической, обладающее в недеформированном состоянии квазишаровым тензором инерции. Эта задача была разобрана в §4.

Рассмотрим однородного упругое тело, уравнение поверхности которого имеет вид:

$$R(\theta, \varphi) = 1 + \delta(\alpha_{40}Y_{40}(\theta, \varphi) + \alpha_{44}[Y_{44}(\theta, \varphi) + Y_{4,-4}(\theta, \varphi)]).$$

Ориентируем эллипсоид инерции недеформированного тела согласно рис. 14. Выберем систему главных осей  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы ось  $Ox_3$  проходила через главную диагональ «куба». В системе  $Ox_1x_2x_3$  тензор инерции недеформированного квазишара примет вид:

$$I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}, \quad \Delta_i \ll I_0.$$

Будем считать, что  $Ox_3$  – ось среднего по величине момента инерции:

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

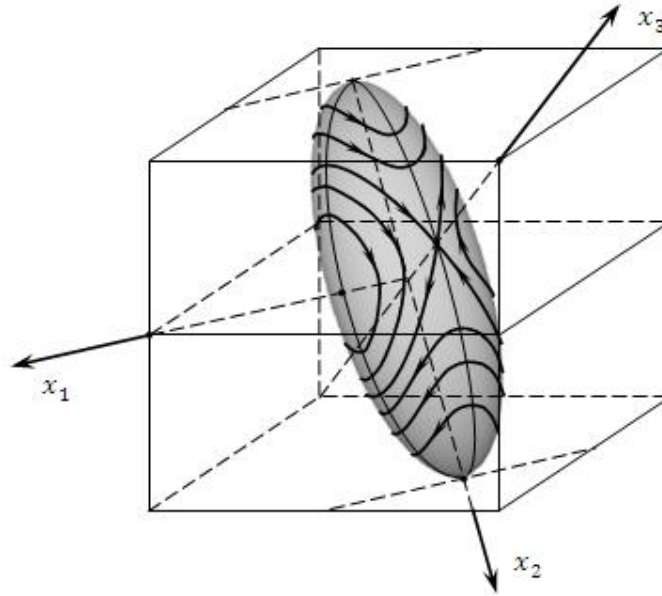


Рис. 14

Вычисленные по решению задачи поправки к тензору инерции, отвечающие деформированию шара, имеют вид:

$$I'_{ij} = \frac{2}{35} \left[ \left( -\frac{1}{3}(1 - \xi_1) + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \delta_{ij} + (1 - \xi_1) \omega_i \omega_j \right],$$

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

Четвертая гармоника формы вносит вклад в тензор инерции в виде поправок:

$$I''_{11} = Q_2 [(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{22} = Q_2 [(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2 + (3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_2^2 - 4\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{33} = Q_2 [-4\alpha_{40}\omega_1^2 - 4\alpha_{40}\omega_2^2 + 8\alpha_{40}\omega_3^2],$$

$$I''_{12} = Q_2 (2\alpha_{40} - 2\sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1\omega_2,$$

$$I''_{13} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_1\omega_3, \quad I''_{23} = -8Q_2\alpha_{40}\omega_2\omega_3,$$

$$Q_2 = \frac{(\kappa + 1)(35\kappa + 26)}{35\sqrt{\pi}(19\kappa + 14)^2}.$$

С учетом того, что  $I'_{ij}, I''_{ij}$  являются квадратичными функциями компонент угловой скорости, составляющие вектора кинетического момента  $\vec{K}$  и энергии  $E$  имеют вид:

$$\begin{aligned} K_p &= I_{pq}^0 \omega_q^2 + \varepsilon K_{pqtm} \omega_q \omega_l \omega_m, \\ E &= \frac{1}{2} I_{pq}^0 \omega_p \omega_q + \frac{3}{4} \varepsilon K_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m, \\ K_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m &= Q_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \\ &+ \delta Q_2 [(3\alpha_{40} + \sqrt{70}\alpha_{44})(\omega_1^4 + \omega_2^4) + 8a_{40}\omega_3^4 + 6(\alpha_{40} - \sqrt{70}\alpha_{44})\omega_1^2\omega_2^2 - \\ &- 24\alpha_{40}(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3^2], \\ Q_1 &= \frac{4}{35} \left[ \frac{1}{3} (1 - \xi_1) + 2\xi_2 + 14\xi_3 \right]. \end{aligned}$$

Годограф вектора угловой скорости может быть получен из пересечения центрально симметричной поверхности  $E = const$  с семейством поверхностей  $4/3 E - \vec{K}^2/2I_0$  при различных  $\vec{K}^2$ , представляющим в данном случае концентрические сферы.

Вращению вокруг осей, проходящих через вершины «куба» и центры граней, на сфере  $\vec{K}^2 = const$  отвечают особые точки типа центр. Вращение вокруг осей, направленных на середины ребер, неустойчиво. Ему отвечают седловые точки.

Пусть  $\alpha_{40} = -1$ ,  $\alpha_{44} = -\sqrt{5/14}$ . Уравнение поверхности тела

$$R(\theta, \varphi) = 1 - \delta \frac{3}{16\sqrt{\pi}} (3 + 35 \cos^4 \theta + 30 \cos^2 \theta + 5 \sin^4 \theta \cos 4\varphi)$$

Поправка к выражению для энергии тела имеет вид

$$\begin{aligned} K_{pqtm} \omega_p \omega_q \omega_l \omega_m &= Q_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \\ &+ \delta Q_2 [-(\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4) + 3(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что энергия тела при фиксированном кинетическом моменте имеет максимум при вращении тела вокруг осей, направленных на центры граней. Минимум энергии отвечает ориентации вектора  $\vec{\omega}$  на вершины «куба».

Принимая во внимание диссипацию энергии (пусть даже очень малую), заключаем, что вращение вокруг осей, проходящих через противоположные вершины «куба» асимптотически устойчиво, а вращение относительно направления на центры противоположных граней «куба» неустойчиво (соответственно устойчивые и неустойчивые фокусы на поверхности  $\vec{K}^2 = const$ ).

Эффект глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения продемонстрируем на примере тела, отклонение поверхности которого от сферы характеризуется эллипсоидальностью и указанными гармониками с  $l = 4$ . При этом предполагаем параметры  $\alpha_{2i}$  настолько меньшими, чем  $\alpha_{4i}$ , что при вращении тела основной вклад в его деформации связан с четвертой гармоникой формы.

Иначе – при достаточно больших значениях угловой скорости динамику тела определяет «кубичность» формы, а при малых  $\omega$ , когда влияние деформаций не существенно, движение тела обуславливает его эллипсоидальность в недеформированном состоянии.

Приведем тело в быстрое вращение вокруг оси  $Ox_3$  и будем рассматривать малые возмущения этого движения.

Перемещение в теле оси устойчивого стационарного вращения будем описывать геометрически, изображая годограф вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  на сфере постоянного по величине кинетического момента  $\vec{K}^2 = const$ .



При большой скорости вращения качество динамики тела определяется четвертой гармоникой формы (рис. 15). С уменьшением угловой скорости область притяжения устойчивого вращения уменьшается (рис. 16). Примыкающая к ней ячейка, ограничивающая неустойчивый фокус, сближается в сторону положения устойчивого вращения. Также ведет себя седловая точка, изначально находившаяся на границе области притяжения. Положение устойчивого вращения вместе с седловой точкой со временем «поворачиваются» в плоскости  $Ox_2x_3$ , иллюстрируя тем самым перераспределение влияния на динамику тела «кубичности» и эллипсоидальности его формы. При некотором критическом значении угловой скорости  $\Omega_1$  примыкающая к области притяжения ячейка исчезает. Ее граница «схлопывается» в отрезок, являющийся частью траектории, окружающей ось наименьшего момента инерции  $Ox_2$ . Место области притяжения заполняют траектории, охватывающие  $Ox_2$  (рис. 17). При дальнейшем замедлении вращения седло будет двигаться к положению оси  $Ox_3$ . Уменьшение угловой скорости до некоторого значения  $\Omega_2$  приводит к исчезновению неустойчивых фокусов, заключенных в петлях сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции  $Ox_1$ , и рождению в окрестности этой оси устойчивого фокуса. С этого момента эллипсоид инерции тела в недеформированном состоянии полностью определяет качество его динамики (рис. 18).

Пусть тело совершает угловые движения в малой окрестности оси  $Ox_3$ . Учтем малую внутреннюю диссипацию энергии и будем считать, что угловая скорость такова, что «кубичность» поверхности тела определяет его динамику. Со временем диссипация приводит к затуханию движений оси вращения в теле и переходу ее в устойчивое положение. При этом качество динамики тела не меняется.

Иначе обстоит дело, если имеется внешнее сопротивление движению. Под действием внешнего момента вращение тела замедляется, область притяжения устойчивого вращения уменьшается. При некотором критическом значении угловой скорости  $\Omega_1$  область притяжения исчезает, а ось вращения попадает в ячейку неустойчивого фокуса, отделенную сепаратрисами седловой точки, движущейся к положению оси  $Ox_3$ . При достаточной близости оси вращения к сепаратрисам седла даже малое возмущение способно привести ось в новую область устойчивого вращения. После попадания в эту область до некоторого момента времени ось вращения приближается к петлям сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции  $Ox_1$ . Уменьшение угловой скорости до значения  $\Omega_2$  приводит к появлению в этом положении нового устойчивого состояния стационарного вращения.

В рассмотренных задачах минимум кинетической энергии «перемещается» от  $Ox_3$  — исходного положения оси вращения к оси  $Ox_1$  наибольшего момента инерции тела в недеформированном состоянии, т.е. ось вращения за короткое время повернется в теле на угол  $\pi/2$ . В инерциальном пространстве такое явление представляет собой поворот тела. Процесс смены положения в теле осей устойчивого стационарного вращения имеет существенно меньший масштаб времени, чем уменьшение угловой скорости при вращении тела вблизи такого направления.

Заметим, что в рамках модели анизотропной Земли сказанное означает допустимость смены положения полюса. Изменение относительно Земли направления устойчивого вращения может обуславливаться не только уменьшением энергии при вращении, но и процессами, происходящими в Земле и приводящими к изменению ее анизотропных свойств, а, следовательно, направлений устойчивого вращения.

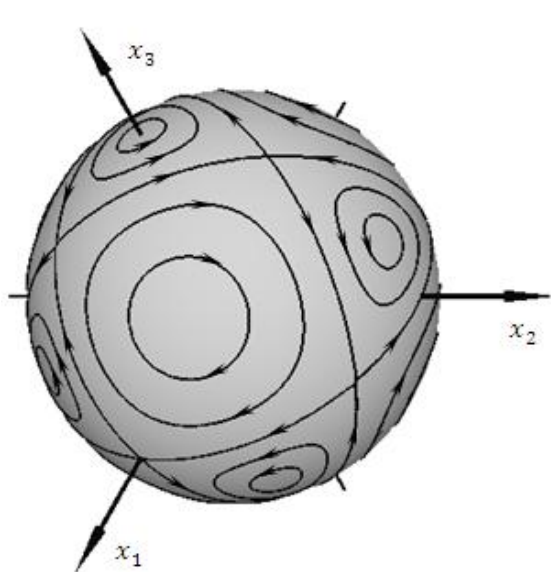


Рис. 15

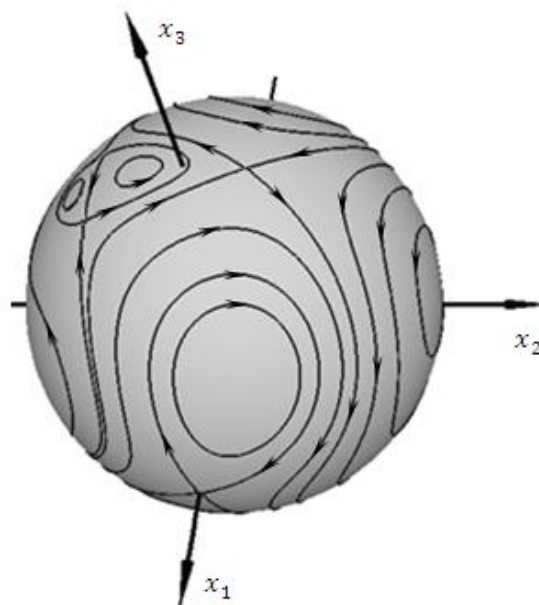


Рис. 16

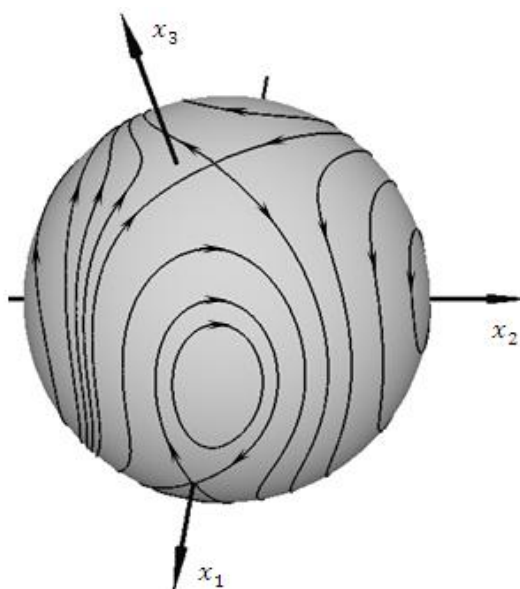


Рис. 17

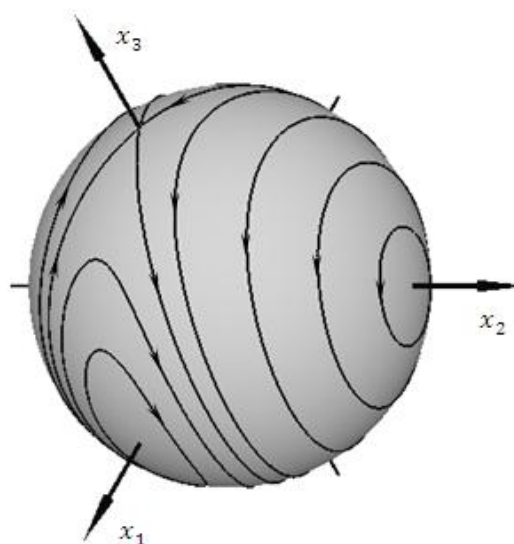


Рис. 18

## § 8. О свободном движении вязкоупругого квазишара

В отличие от рассмотренных ранее задач, где уточнение модели абсолютно твердого тела, состояло в учете его упругих свойств, а вязкость учитывалась только при утверждениях качественного характера, здесь обсуждается ситуация, когда для динамики тела существенны как его упругость, так и вязкие свойства. В такой постановке задача, о движении относительно центра масс вязкоупругого тела ранее не рассматривалась и может представлять интерес, в частности, в связи с интерпретацией чандлеровской нутации Земли.

Рассматривается однородный деформируемый, шар, подчиняющийся уравнениям линейной упруго-вязкой среды, шар приведен во вращение с постоянной

угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$ . В теле устанавливается стационарное напряженное состояние, характеризуемое вектором деформации  $\vec{u}_0(\vec{r})$  и зависящее только от упругих свойств тела. Шар принимает форму эллипсоида вращения. При малом отклонении от этого состояния совершается свободное движение, изучение которого проводится в этой части работы.

Движение тела с малым углом нутации рассматривается относительно системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_0)$ , где  $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_0$ , определяемой интегральными условиями (12).

В отличие от (13) уравнение движения элемента объема тела и соответствующие условия на поверхности  $S$  имеют несколько иной вид

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}, \vec{r} + \vec{u} \right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r} + \vec{u}]] + 2 \left[ \vec{\omega}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \right\} = \\ & = \gamma [(\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u} + \Delta \vec{u}] + (\zeta + 1) \frac{\partial}{\partial t} \text{grad div } \vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{u} \quad \text{в } V, \quad (40) \\ & \left( \left( \gamma \kappa + \zeta \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ii} \delta_{ij} + 2 \left( \gamma + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_{ij} \right) n_j = 0 \quad \text{на } S, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Входящие в эти выражения безразмерные параметры  $\delta$  и  $\gamma$  имеют вид

$$\delta = \frac{\rho R_0^2}{\eta t_*}, \quad \gamma = \frac{\mu t_*}{\eta},$$

где  $t_* = 2\pi/\omega_0$  - характерное время движения тела как целого.

Напомним, что введенный ранее в рассмотрение параметр

$$\varepsilon^2 = \frac{\rho R^2}{\mu t_*^2}$$

связан с наибольшим периодом упругих колебаний тела следующим образом:  $T_k = \varepsilon t_*$ . В соответствии с предположением о временных масштабах происходящих процессов  $\varepsilon \ll 1$ . Параметр  $\delta$  задает характерный масштаб процессов, обусловленных вязкостью тела:  $T_g = \delta t_*$ , считаем  $\delta \ll 1$ . В дальнейшем будем исходить из того, что соотношение между величинами  $\varepsilon$  и  $\delta$ , а следовательно, параметр  $\gamma = \delta/\varepsilon_2$ , могут изменяться в широких пределах.

Вектор деформации тела в соответствии с (40) имеет вид  $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}'$ , где  $\vec{u}'$  - отклонение от стационарного состояния, обусловленного вращением с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$ . Воспользовавшись известным решением задачи о деформировании вращающегося шара, запишем  $\vec{u}_0$  в форме

$$\begin{aligned} u_{01} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \left( \frac{1}{3} \xi_1 + \xi_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} x_3^2 (10\xi_1 - 1) \right\} x_1 \omega_0^2, \\ u_{02} &= \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \left( \frac{1}{3} \xi_1 + \xi_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} x_3^2 (10\xi_1 - 1) \right\} x_2 \omega_0^2, \\ u_{03} &= \varepsilon^2 \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \left( \frac{1}{3} \xi_1 + \xi_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + x_3^2 \xi_1 + \frac{1}{4} (x_1^2 + x_2^2) (1 - 6\xi_1) \right\} x_3 \omega_0^2, \end{aligned}$$

где

$$\xi_1 = \frac{3\kappa + 2}{2(19\kappa + 14)}, \quad \xi_2 = \frac{1}{15(\kappa + 2)}, \quad \xi_3 = \frac{1}{15(3\kappa + 2)}.$$

При длительном вращении с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$  шар трансформируется в эллипсоид вращения, определяемый только упругими свойствами, уравнение поверхности которого, считая полуоси

$$c_1 = c_2 = 1, \quad c_3 = 1 - u_{03}(0,0,1) - u_{01}(1,0,0) = 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} - 3\xi_1 \right) \omega_0^2,$$

запишем в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Отличные от нуля компоненты тензора инерции эллипсоида при стационарном вращении тела имеют вид

$$I_{11}^0 = I_{22}^0 = \frac{2}{5} + \frac{2}{35} \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2,$$

$$I_{33}^0 = \frac{2}{5} + \frac{2}{35} \varepsilon^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2,$$

где момент инерции невращающегося шара в принятых единицах составляет  $I_0 = 2/5$ . До сих пор поверхность покоящегося тела полагалась сферической, это представление сохраняется при определении его деформации. Малая несферичность поверхности, которая несущественна при вычислении деформации, будет введена в рассмотрение в дальнейшем при изучении движений тела как целого.

Вектор деформации  $\vec{u}'$  представим в виде  $\vec{u}' = \delta \vec{u}^{(1)} + \delta^2 \vec{u}^{(2)} + \dots$  и ограничимся первыми членами этого ряда. Для определения  $\vec{u}^{(1)}$  необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} & [\dot{\vec{\omega}}_1, \vec{r}] + [\vec{\omega}_0, [\vec{\omega}_1, \vec{r}]] + [\vec{\omega}_1, [\vec{\omega}_0, \vec{r}]] = \\ & = \gamma [(\kappa + 1) \text{grad div } \vec{u}^{(1)} + \Delta \vec{u}^{(1)}] + (\zeta + 1) \text{grad div } \dot{\vec{u}}^{(1)} + \Delta \dot{\vec{u}}^{(1)} \quad \text{в } V, \quad (41) \\ & \left( (\gamma \kappa u_{ii}^{(1)} + \zeta \dot{u}_{ii}^{(1)}) \delta_{ij} + 2(\gamma u_{ij}^{(1)} + \dot{u}_{ij}^{(1)}) \right) n_j = 0 \quad \text{на } S, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

где

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \quad u_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right).$$

Решение задачи (41) строится в виде многочленов по пространственным переменным, содержащих линейные и кубические члены. Это связано с тем, что выражение в левой части уравнения (41) является линейной функцией пространственных переменных, а уравнение содержит вторые производные искомых функций по этим переменным.

В случае, когда отношение упругих параметров  $\kappa$  совпадает с отношением характеристик вязких свойств тела  $\zeta$ , решение задачи (41) принимает наиболее компактную форму. Поэтому в дальнейшем считаем, что  $\kappa = \zeta$ . Это предположение существенно упрощает рассмотрение, но не имеет принципиального значения для изучаемого явления, хотя и ограничивает возможные соотношения между параметрами вязкоупругих свойств тела.

Рассмотрение задачи (41) приводит к выражению для вектора  $\vec{u}^{(1)}$  вида

$$\dot{u}_j^{(1)} + \gamma u_j^{(1)} = g_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

где  $g_j$  - многочлены, содержащие линейные и кубические члены по пространственным переменным, коэффициенты которых являются линейными функциями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Заметив, что в § 5, где изучалось деформирование вращающегося эллипсоида без учета вязкости, компоненты вектора деформации равны  $g_j$ , воспользуемся результатами и запишем выражение для связанных с  $\vec{u}^{(1)}$  поправок к

компонентам тензора инерции

$$I_{13(23)}^{(1)} = I_0 \delta d \omega_0 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_{1(2)} e^{\gamma \tau} d\tau,$$

где  $d = 1/7 (1 - \xi_1)$ . Остальные величины  $I_{ij}^{(1)}$  в рассматриваемом приближении отсутствуют.

Получим уравнения угловых движений тела. Вычислим поправки к компонентам тензора  $I_{ij}^0$ , связанные с  $\vec{u}^{(1)}$ , и уточненный с учетом вязкости вектор  $\vec{K}$  подставим в уравнение (14).

Прежде, чем привести выражения для составляющих вектора кинетического момента, сделаем еще одно предположение. Будем считать, что в недеформированном состоянии (при  $\omega_0 = 0$ ) тело является квазишаром с компонентами тензора инерции  $I_{11}^T = I_{22}^T = I_0(1 + a)$ ,  $I_{33}^T = I_0(1 + c)$ , причем величины  $a$  и  $c$  дают добавки к компонентам тензора инерции, сопоставимые с добавками к этим компонентам из-за трансформации шара в эллипсоид в результате вращения с угловой скоростью  $\omega_0$ .

Составляющие вектора кинетического момента определяются формулами

$$K_1 = I_0 \left\{ \left[ 1 + a + \frac{\varepsilon^2}{7} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2 \right] \omega_1 + \delta d \omega_0^2 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_1 e^{\gamma \tau} d\tau \right\},$$

$$K_2 = I_0 \left\{ \left[ 1 + a + \frac{\varepsilon^2}{7} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2 \right] \omega_2 + \delta d \omega_0^2 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_2 e^{\gamma \tau} d\tau \right\},$$

$$K_3 = I_0 \left[ 1 + c + \frac{\varepsilon^2}{7} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \xi_1 + 4\xi_2 + 28\xi_3 \right) \omega_0^2 \right] \omega_0.$$

Здесь члены с  $\varepsilon^2$  и  $\delta$  обусловлены упругими и вязкими свойствами тела. Подставив эти выражения в (14), приходим к уравнениям угловых движений тела с учетом его вязкоупругих свойств

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + (c - a)\omega_0\omega_2 + \varepsilon^2 d \omega_0^3 \omega_2 - \delta d \omega_0^3 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_2 e^{\gamma \tau} d\tau &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - (c - a)\omega_0\omega_1 - \varepsilon^2 d \omega_0^3 \omega_1 + \delta d \omega_0^3 e^{-\gamma t} \int_0^t \omega_1 e^{\gamma \tau} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

В предельном случае очень большой вязкости, когда  $\delta \rightarrow 0$ , система (42) представляет собой уравнения движения абсолютно твердого эллипсоида и имеет решение

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = z_0 \exp(i\Omega_1 t).$$

Здесь  $z_0$  - постоянная величина,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega$ , где

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{I_{33}^T - I_{11}^T}{I_0} \omega_0 \approx (c - a)\omega_0, \\ \Omega &= \frac{I_{33}^0 - I_{11}^0}{I_0} \omega_0 = \varepsilon^2 d \omega_0^3, \end{aligned}$$

$I_{ij}^T, I_{ij}^0 + I_{ij}^0$  - моменты инерции соответственно невращающегося и вращающегося тела, т.е. частота нутации тела  $\Omega_1$  в случае очень большой вязкости равна частоте нутации абсолютно твердого тела с эллипсоидальностью, складывающейся из начальной (член  $\Omega_0$ ) и обретенной при длительном вращении эллипсоидальности ( $\Omega$ ).

При  $\delta \neq 0$ , отыскивая решение уравнений (42) в виде  $\omega_1 + i\omega_2 = z_0 e^{pt}$ , приходим к характеристическому уравнению

$$p^2 + (\gamma - i\Omega_1)p - i\gamma\Omega_0 = 0.$$

Для дальнейшего удобно ввести величины  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $\Omega_0 = \alpha\Omega_1$ ,  $\gamma = \beta|\Omega_1|$ . Параметр  $\alpha$  связан с начальной эллипсоидальностью тела:

$$\alpha = (c - a)(c - a + \varepsilon^2 d\omega_0^3)^{-1},$$

и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Параметр  $\beta$  характеризует вязкие свойства тела, он всегда положителен. Характеристическое уравнение принимает вид

$$p^2 + (\beta|\Omega_1| - i\Omega_1)p - i\alpha\beta\Omega_1|\Omega_1| = 0. \quad (43)$$

В случае  $\alpha = 0$  (начальная эллипсоидальность отсутствует)  $p_1 = -(\beta - i)\Omega_1$ ,  $p_2 = 0$ , т.е. вне зависимости от  $\beta$  частота нутации равна  $\Omega_1 > 0$ , а затухание этого движения определяется величиной  $\beta\Omega_1$ . Понятно, что при достаточно больших  $\beta$ , это движение вследствие быстрого затухания не наблюдается. Иначе, деформация шара с малой собственной вязкостью при изменении положения тела относительно оси вращения  $\vec{\omega}_0$  "отслеживает" это изменение, следовательно, нутация отсутствует. Если же  $\beta \rightarrow 0$ , то нутационное движение тела, будет происходить с частотой  $\Omega_1$  при малом затухании. Второй корень характеристического уравнения  $p_2 = 0$ , что связано с возможностью любого положения оси вращения  $\vec{\omega}_0$  относительно изначально сферического тела.

При  $\alpha \neq 0$  приведем асимптотические выражения для корней характеристического уравнения в двух крайних случаях

1) при  $\beta \ll 1$

$$p_1 = |\Omega_1| \left\{ i[1 - \alpha(1 - \alpha)\beta^2] \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|} - (1 - \alpha)\beta \right\},$$

$$p_2 = |\Omega_1| \left\{ i\alpha(1 - \alpha) \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|} - \alpha\beta \right\},$$

2) при  $\beta \gg 1$

$$p_1 = |\Omega_1| \left\{ i(1 - \alpha) \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|} - \beta \right\},$$

$$p_2 = |\Omega_1| \left\{ i\alpha \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|} - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\beta} \right\}.$$

На рис.11 и рис.12 показана зависимость вещественных и мнимых частей корней характеристического уравнения (43) от  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом кривые пронумерованы так, что первая цифра означает принадлежность к корню  $p_1$  или  $p_2$ , а вторая определяет соответствие показанной на рисунке функции тому или иному значению  $\alpha$ . Следует отметить существенно различное поведение корней при различных значениях величины  $\alpha$ .

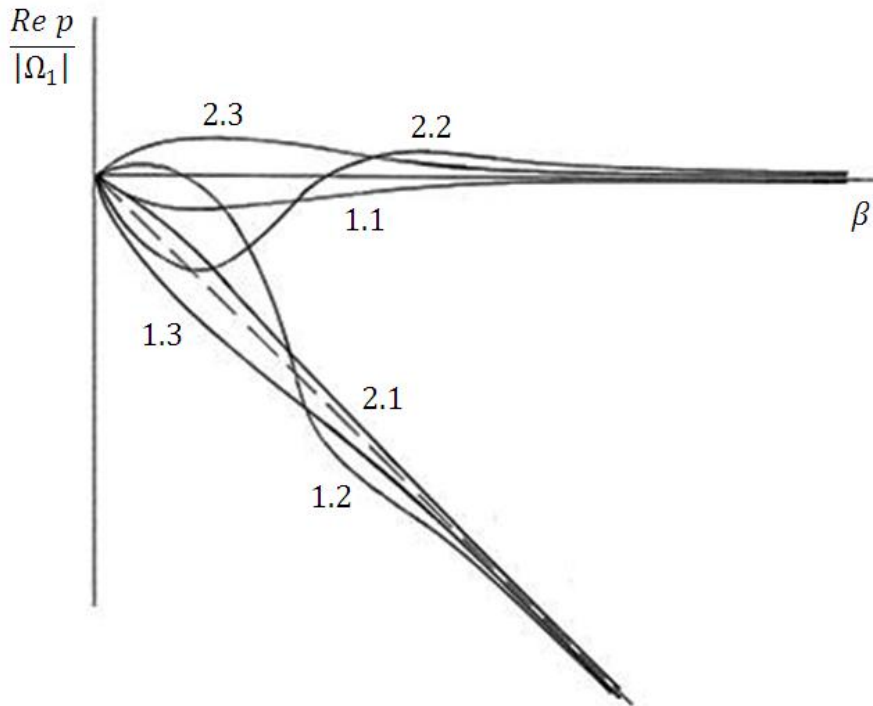


Рис. 19

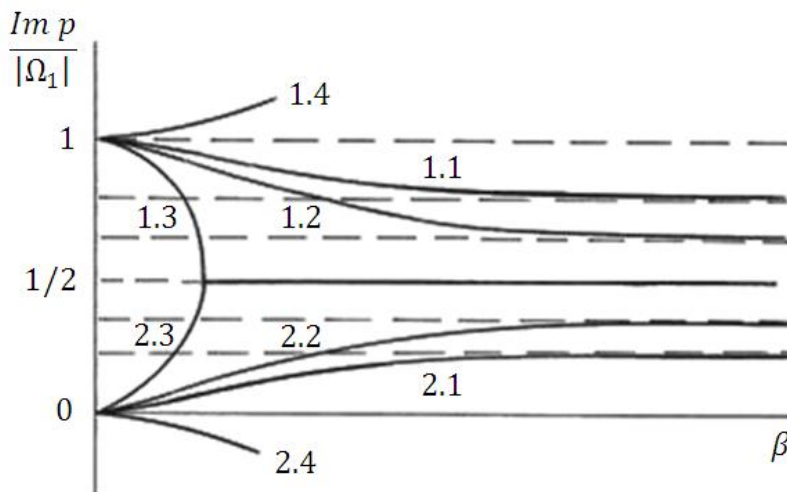


Рис. 20

Так, при начальной эллипсоидальности  $c > a$  (невращающееся тело сплюснуто) параметр  $\alpha$  при изменении угловой скорости меняется в пределах  $0 < \alpha < 1$ . Вращение тела в этом случае устойчиво, т.к.  $Re p_{1,2} < 0$  (кривые 1.1 и 2.1 на рис. 19). Если же  $c < a$  (вытянутый эллипсоид), а  $\varepsilon^2 d\omega_0^3 < a - c$ , чему соответствуют значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(1, +\infty)$ , то движения, отвечающие корню  $p_1$  для  $\beta \ll 1$  и корню  $p_2$  для  $\beta \gg 1$ , неустойчивы (кривые 1.2 и 2.2).

Иначе обстоит дело при  $\varepsilon^2 d\omega_0^3 > a - c$ , т.е.  $\alpha < 0$ , когда корень  $p_1$  имеет отрицательную вещественную часть, а  $Re p_2 > 0$  при любых  $\beta$  (кривые 1.3 и 2.3).

Мнимые части корней  $p_1$  и  $p_2$  при  $0 < \alpha < 1$  располагаются в полосе  $[0, \Omega_1]$ . Для иллюстрации характера зависимости  $Im p$  от параметра  $\beta$  на рис.20 показаны  $Im p_1$  и  $Im p_2$  при  $0,5 < \alpha_1 < 1$  (кривые 1.1 и 2.1),  $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$  (1.2 и 2.2) и  $\alpha_3 = 0,5$  (1.3 и 2.3). Отрицательным значениям параметра  $\alpha$  отвечают  $Im p_1 > \Omega_1$  и  $Im p_2 < 0$  (кривые 1.4 и 2.4).

Интересно отметить, что в соответствии с уравнением (43) при любых  $\alpha$  и  $\beta$  имеют место соотношения

$$\operatorname{Im} p_1 + \operatorname{Im} p_2 = \Omega_1, \quad \operatorname{Re} p_1 + \operatorname{Re} p_2 = -\beta|\Omega_1|.$$

Заключая изучение движений вязкоупругого тела, остановимся более детально на физической интерпретации результатов решения задачи (42). Обсуждение удобно провести при различных значениях  $\beta$ , отталкиваясь от случая большой вязкости ( $\beta \ll 1$ ). При вращении вязкоупругого тела вокруг оси симметрии оно обретает форму эллипсоида вращения, определяемого начальной эллипсоидальностью тела и его упругими свойствами. Движения тела при возмущении главного вращения существенно зависят от начальной эллипсоидальности и подразделяются на три случая:

1.  $c = a$  ( $\alpha = 0$ ),
2.  $c > a$  ( $0 < \alpha < 1$ ),
3.  $c > a$  ( $\alpha < 0$ ,  $\alpha > 1$ ).

Обсудим их последовательно.

1. Покоящееся сферически симметричное тело при вращении обретает форму двухосного эллипсоида, нутирующего в возмущенном движении при  $\beta \ll 1$  как твердое тело с малым затуханием. С уменьшением вязкости частота нутации остается неизменной, а затухание растет. Кроме этого, возможно бесконечно медленное движение оси вращения относительно тела, отвечающее нулевому корню характеристического уравнения и не зависящее от  $\beta$ . Это находится в соответствии с тем, что все направления оси вращения относительно изначально сферического тела равноправны.

2. Изначально сплющенное тело при вращении вокруг оси симметрии обретает большую разность между осевым и экваториальным моментами инерции. При возмущениях главного движения тело нутирует с частотой, уменьшающейся с ростом  $\beta$ . Движение, соответствующее нулевому корню случая  $\alpha = 0$ , принимает вид кругового движения того же направления, что нутационное. Частота этого кругового движения растет вместе с  $\beta$ . Невозмущенное движение устойчиво.

3. Вытянутый покоящийся эллипсоид с ростом угловой скорости превращается сначала в шаровое тело (при  $\varepsilon^2 d\omega_0^3 = a - c$ ), а затем в сплюснутый эллипсоид. Главное вращение неустойчиво как при малых, так и при больших  $\omega_0$ , что следует из анализа вещественных частей  $p_{1,2}$ . Это обусловлено вытянутостью эллипсоида инерции невращающегося тела.

Проведенное исследование угловых движений вязкоупругого тела можно применить к объяснению нутационных движений Земли. Предполагая сначала Землю, обладающей очень большой вязкостью, будем иметь период так называемой эйлеровой нутации

$$T_3 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = 306 \text{ суток.}$$

Период  $T_3$  получен по наблюдениям астрономических явлений и определяется формой Земли, если ее считать однородной, а не ее вязкоупругими свойствами. Зная из наблюдений значение частоты нутации Земли

$$\Omega_4 = \frac{2\pi}{T_4},$$

где  $T_4 = 428$  суток - период Чандлера, и добротность этих колебаний  $Q = 25$  [18], можно по зависимости корня  $p_1$  от  $\alpha$  и  $\beta$  определить значения параметров. Однако для этого требуются громоздкие вычисления. Поступим по-другому. Характеристический показатель  $p_1$ , определяющий нутационное движение, представим в виде  $p_1 = (-\nu + i\omega)\Omega_1$ . После подстановки  $p_1$  в уравнение (43), воспользовавшись тем, что при указанной добротности  $\nu \ll 1$ , выразим  $\alpha$  и  $\beta$  через



$\omega, \nu$  в виде

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \{(1 - 2\omega)\nu + \omega\beta\} \approx \omega, \quad \beta = \frac{(1 - \omega)\omega}{\nu} + \nu \approx \frac{(1 - \omega)\omega}{\nu}.$$

В оценке параметров будем исходить из того, что частота нутации  $\omega\Omega_1$  составляет 71% от  $\Omega_1$ , что соответствует соотношению между  $T_3$  и  $T_4$ , а в принятых обозначениях добротность  $Q = \omega/2\pi\nu$ . Отсюда находим, что  $\alpha \approx 0,71$ ,  $\beta \approx 47$ . Этому отвечает начальная эллипсоидальность, при которой

$$\frac{I_{33}^T - I_{11}^T}{I_{33}^T} \approx \frac{1}{430}$$

и коэффициент вязкости  $\nu = 2 \cdot 10^{16} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ , вычисленный по  $\beta$  и среднему значению коэффициента упругости Земли  $\mu = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н}/\text{м}^2$  [18]. Отметим, что полученный результат согласуется с другими оценками коэффициента вязкости [18], а величина периода Чандлера определяется соотношением моментов инерции невращающейся Земли и в основном вязкими, а не упругими свойствами Земли.

В рамках модели Земли как вязкоупругого квазишара находит толкование не только чандлеровская нутация, но и содержится возможность объяснения глобального перемещения полюсов. Пусть в исходном состоянии стационарное вращение тела вокруг оси симметрии устойчиво, т.е. начальная эллипсоидальность  $c - a$  положительна ( $0 < \alpha < 1$ ). Предположим, что со временем  $\alpha$  уменьшается. Это может быть связано с несезонным вследствие изменения климата накоплением льда в приполюсных областях или какими-либо другими причинами, меняющими соотношение между моментами инерции Земли.

При изменении знака  $\alpha$  устойчивость стационарного вращения нарушается, происходит глобальное смещение положения полюсов, являющееся следствием этой неустойчивости. При длительном наблюдении за изменением частоты чандлеровской нутации со временем (если таковое имеется), можно вычислить изменения параметра  $\alpha$  и в случае возможной смены знака  $\alpha$  предсказать возможность нарушения устойчивости стационарного вращения Земли, а следовательно, начало глобального перемещения полюсов.

## Литература

1. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.
2. Lamy P.L., Burns J.A. Geometrical Approach to Torque Free Motion of a Rigid Body Having Internal Energy Dissipation // Am. J. of Physics. V. 40. №3. 1973.
3. Черноусько Ф.Л. Влияние собственной упругости и диссипации на движение твердого тела относительно центра масс // Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1979. Вып. 41. С. 118-122.
4. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. АН СССР, МТТ. 1980. № 6. С. 43-48.
5. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О близких к эйлеровым движениях деформируемых тел // Механика гироскопических систем. Респ. межвуз. научно-техн. сб. Киев: Вища школа. 1983. Вып. 2. С. 23-29.
6. Денисов Г.Г., Новиков В.В. К задаче об устойчивости стационарных вращений деформируемого твердого тела // В кн. Устойчивость движения. Под ред. Матросова В.М., Иртегова В.Д. Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1985. С. 115-119.
7. Denisov G.G., Novikov V.V. The nontraditional problems of stability of elastic distributed system // Dynamics of System. 1993. №1. P. 1-20.
8. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР, МТТ. 1983. № 3. С. 43-50.
9. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях эллипсоида // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 69-74.
10. Новиков В.В. Анизотропно-упругий шар в свободном движении // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 767-774.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука. 1965. 203 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
13. Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Уч. зап. ЛГУ. Серия матем. наук. Механика. 1949. Вып. 17. С. 3-27.
14. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
15. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
16. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. шк. 1979. 432 с.
17. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостеориздат. 1950. 300 с.
18. Монин А.С. Вращение Земли и климат. Л.: Гидрсметеоиздат, 1972. 110 с.
19. Зигель Ф.Ю. Вам, земляне. М.: Недра, 1983. 160 с.
20. Мельхиор П. Физика и динамика планет. М.: Мир. Т. 1. 1975. 575 с.; Т. 2. 1976. 483 с.
21. Сидоренко В.В. О движении твердого тела с гибкими стержнями, допускающего группу симметрии // Изв. РАН. МТТ. 1995. №1. С. 3-11.
22. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободном движении вязкоупругого квазишара // Изв. РАН. МТТ. 1999. №1. С. 26-32.
23. Новиков В.В., Григорьева Л.Н. Об одном механизме глобального перемещения полюсов тела в свободном угловом движении // Вестник Нижегородского государственного ун-та им. Н.И. Лобачевского / Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. С. 169-172.

24. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К задаче о свободных угловых движениях деформируемого твердого тела, близкого по форме к шару // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. Т. 156. Книга 1. 2014. С. 109–116.

**Денисов Геннадий Григорьевич  
Новиков Валерий Вячеславович  
Февральских Любовь Николаевна**

**СВОБОДНЫЕ УГЛОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ  
ВЯЗКОУПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Учебное пособие*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского  
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23