

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.Л. Пригоровский
В.М. Сандалов
Е.С. Москова

**Задачи по теории колебаний,
устойчивости движения
и качественной теории
дифференциальных уравнений**

**Часть 4. Метод Ван-дер-Поля.
Метод Пуанкаре**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Нижегород
2017

УДК 517.938: 517.925(075.8)

ББК В 161.6я73

П 75

П 75 Пригоровский А.Л., Сандалов В.М., Москова Е.С. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 4. Метод Ван-дер-Поля. Метод Пуанкаре: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 24 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Матросов В.В.**

В данной части сборника задач представлена методика и примеры исследования на устойчивость динамических систем методами Ван-дер-Поля и Пуанкаре. Приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы, к которым даны ответы, указания и пояснения к решению.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и магистрантов, занимающихся изучением основ теории колебаний и устойчивости движения. Также оно может быть полезно аспирантам и преподавателям при изложении методов Ван-дер-Поля и Пуанкаре на лекциях и семинарских занятиях.

УДК 517.938: 517.925(075.8)

ББК В 161.6я73

© **Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2017**

Содержание

Введение.....	4
1. Метод Ван-дер-Поля.....	5
1.1. Основные положения метода Ван-дер-Поля.....	5
1.2. План решения задач методом Ван-дер-Поля	8
1.3. Примеры решения задач	8
1.3.1. Задача 1	8
1.3.2. Задача 2	10
1.4. Контрольные вопросы	14
2. Метод Пуанкаре	15
2.1. Основные положения метода Пуанкаре	15
2.2. Примеры решения задач методом Пуанкаре	17
2.3. Сравнение практических возможностей метода Ван-дер-Поля и метода Пуанкаре	18
2.4. Контрольные вопросы	18
3. Задачи, ответы и указания к решению	19
3.1. Задачи для самостоятельной работы	19
3.1.1. Исследование методом Ван-дер-Поля	19
3.1.2. Исследование методом Пуанкаре	20
3.2. Ответы и указания	21
Список литературы	23

Теория колебаний – живая, развивающаяся, многоплановая дисциплина, которая находит эффективное применение в различных отраслях естествознания и техники.

В.Д. Горяченко, «Элементы теории колебаний».

Введение

Данная часть учебно-методического пособия «Задачи теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений» включает в себя 3 главы.

Первая глава посвящена методу Ван-дер-Поля. В ней приведено частичное математическое обоснование метода, представлен план для решения практических задач с помощью метода Ван-дер-Поля, приведено подробное решение 2 примеров, а также предложено 14 контрольных вопросов.

Вторая глава посвящена методу Пуанкаре. В ней приведены его основные положения, рассмотрено подробное решение 2 задач методом Пуанкаре, проведен сравнительный анализ метода Пуанкаре и метода Ван-дер-Поля, а также предложено 7 контрольных вопросов.

В третьей главе представлены задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы и указания к решению. Всего предложено 20 примеров, 15 из которых на исследование методом Ван-дер-Поля, а остальные 5 – методом Пуанкаре.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов и магистрантов, занимающихся изучением теории колебаний. Также оно может быть полезно преподавателям при изложении методов Ван-дер-Поля и Пуанкаре на лекциях или семинарских занятиях.

В течение ряда лет на механико-математическом факультете Нижегородского государственного университета профессор В.Д. Горяченко совместно с одним из авторов настоящего учебно-методического пособия читал курс «Теория нелинейных колебаний». В.Д. Горяченко считал, что теория колебаний есть раздел *прикладной математики* и необходимо создание сборников задач по теории колебаний, устойчивости движения и элементам качественной теории дифференциальных уравнений. Предлагаемое пособие реализует один из разделов будущего сборника задач и создано в память о В.Д. Горяченко.

1. Метод Ван-дер-Поля

1.1. Основные положения метода Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение системы, близкой к простейшей консервативной:

$$\ddot{x} + x = \mu f(\dot{x}, x), \quad (1)$$

где $0 < \mu \ll 1$ – безразмерный малый положительный параметр.

Запишем уравнение (1) в нормальной форме Коши:

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu f(x, y)\}. \quad (2)$$

Чтобы исследовать систему (2) при достаточно малых значениях параметра μ , можно воспользоваться приближенным методом исследования нелинейных систем, который называется «метод медленно меняющихся амплитуд» или метод Ван-дер-Поля. Для этого необходимо составить укороченные уравнения Ван-дер-Поля, которые позволяют получить приближенные решения исходных уравнений.

Прежде всего заметим, что при $\mu = 0$ уравнение (1) превращается в линейное уравнение $\ddot{x} + x = 0$, решение которого имеет вид:

$$\{x = a \cos t + b \sin t, y = -a \sin t + b \cos t, \} \quad (3)$$

или

$$\{x = K \cos(t + \Theta), y = -K \sin(t + \Theta)\}. \quad (4)$$

Здесь a и b , K и Θ – произвольные постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. K связано с a и b соотношением $K = \sqrt{a^2 + b^2}$. В дальнейшем постоянному K придаются только неотрицательные значения. Угол Θ определяется из соотношений:

$$\left\{ \cos \Theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \Theta = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}$$

При $0 < \mu \ll 1$ будем искать решение системы (2) в виде (4), но K и Θ будем считать неизвестными функциями времени. Другими словами, величины K и Θ – новые зависимые переменные, которые называются переменными Ван-дер-Поля.

Стоит отметить, что плоскость (a, b) переменных Ван-дер-Поля вращается с постоянной угловой скоростью, равной единице, по отношению к фазовой плоскости (x, y) вокруг общего начала координат. Неподвижная на плоскости (a, b) точка, для которой $K = K_0 = \text{const}$, $\Theta = \Theta_0 = \text{const}$, очерчивает окружность в плоскости (x, y) . Центр этой окружности – начало координат, а радиус ее равен K_0 .

Далее будем рассматривать уравнения в переменных K и Θ . Подставим (4) в систему (2):

$$\begin{cases} \dot{K} \cos(t + \Theta) - K \dot{\Theta} \sin(t + \Theta) = 0, \\ -\dot{K} \sin(t + \Theta) - K \dot{\Theta} \cos(t + \Theta) = \mu f[K \cos(t + \Theta), -K \sin(t + \Theta)]. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu f[K \cos(t + \Theta), -K \sin(t + \Theta)] \sin(t + \Theta), \\ \dot{\Theta} = -\frac{\mu}{K} f[K \cos(t + \Theta), -K \sin(t + \Theta)] \cos(t + \Theta). \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) следует, что $\dot{K} \sim \mu$ и $\dot{\Theta} \sim \mu$, то есть K и Θ – медленно меняющиеся функции времени. Это обстоятельство позволяет усреднить правые части в (5) по входящему явно времени. Для этого разложим периодические правые части в (5) ряд Фурье по времени:

$$\begin{cases} \dot{K} = \mu(\Phi + \Phi_1 \sin t + \varphi_1 \cos t + \dots), \\ \dot{\Theta} = \mu(\Psi + \Psi_1 \sin t + \psi_1 \cos t + \dots). \end{cases}$$

Здесь $\Phi, \Phi_1, \varphi_1, \Psi, \Psi_1, \psi_1$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье, зависящие от K .

После замены времени $\tau = \mu t$ получим:

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\tau} = \Phi + \Phi_1 \sin \frac{\tau}{\mu} + \varphi_1 \cos \frac{\tau}{\mu} + \dots, \\ \frac{d\Theta}{d\tau} = \Psi + \Psi_1 \sin \frac{\tau}{\mu} + \psi_1 \cos \frac{\tau}{\mu} + \dots. \end{cases} \quad (6)$$

При малых значениях μ все слагаемые, за исключением Φ и Ψ , — быстро осциллирующие величины. Переменные K и Θ не успевают реагировать на эти высокочастотные воздействия и ведут себя приблизительно так, как если бы этих членов не было совсем. Поэтому при $0 < \mu \ll 1$ быстро осциллирующие члены в (8) можно отбросить. Тогда система (6) заменится укороченной системой (7):

$$\{\dot{K} = \mu\Phi, \dot{\Theta} = \mu\Psi.\} \quad (7)$$

Функции $\mu\Phi$ и $\mu\Psi$ – первые члены разложения в ряд Фурье правых частей системы (5). Полагая, что $t + \Theta = u$, получим:

$$\begin{cases} \Phi = \Phi(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du, \\ \Psi = \Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du. \end{cases} \quad (8)$$

При интегрировании K и Θ считаются постоянными.

Итак, исходная система (2) заменена тоже нелинейной, но существенно более простой – укороченной системой (7), в которой функции Φ и Ψ зависят только от K и определяются согласно (8).

Проанализируем укороченную систему (7). Первое уравнение содержит только K .

$$\dot{K} = \mu\Phi(K). \quad (9)$$

Корни уравнения $\Phi(K) = 0$ обозначим K_i . Они являются состояниями равновесия динамической системы первого порядка (9). Если $\Phi'(K_i) < 0$, то состояние равновесия устойчиво. Если $\Phi'(K_i) > 0$, то состояние равновесия неустойчиво.

Состояние равновесия $K = K_i$ – окружность радиуса K_i на плоскости (a, b) . Любое другое движение $K = K(t)$ определяется непосредственным интегрированием уравнения (9).

Перейдем ко второму уравнению системы (7):

$$\dot{\Theta} = \mu\Psi(K).$$

Возможны два случая:

1. $\Psi(K) \equiv 0$. Следовательно, $\Theta = \Theta_0 = \text{const}$. Тогда решение укороченной системы таково:

$$K = K(t), \Theta = \Theta_0 = \text{const}.$$

Все интегральные кривые – прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под различными углами $\Theta = \text{const}$. Корни уравнения $\Phi(K) = 0$ – радиусы окружностей, каждая точка которых является состоянием равновесия укороченной системы (7). На рис.1 приведен случай трех состояний равновесия. Для всех точек любой окружности с радиусом K_i имеем:

$$K = K_i = \text{const}, \Theta = \Theta_0 = \text{const}.$$

Согласно формулам (4) получим:

$$\{x(t) = K_i \cos(t + \Theta_0), y(t) = -K_i \sin(t + \Theta_0)\}. \quad (10)$$

Состояниям равновесия на плоскости переменных Ван-дер-Поля соответствуют предельные циклы на плоскости (x, y) . Устойчивым состояниям равновесия соответствуют орбитно-устойчивые предельные циклы, а неустойчивым – неустойчивые предельные циклы (рис. 2).

2. $\Psi(K) \neq 0$. В этом случае корням уравнения $\Phi(K) = 0$ также отвечают предельные циклы на плоскости (x, y) . Действительно, при $K = K_i = \text{const}$ и $\Theta = \mu\Psi(K_i)t + \Theta_0$ переменные $x(t)$ и $y(t)$, согласно (4), будут равны:

$$\begin{cases} x(t) = K_i \cos([1 + \mu\Psi(K_i)]t + \Theta_0), \\ y(t) = -K_i \sin([1 + \mu\Psi(K_i)]t + \Theta_0). \end{cases} \quad (11)$$

Фазовые траектории искривляются, но в остальном качественный вид их сохраняется. При этом появляется поправка на частоту, равная $\mu\Psi(K_i)$.

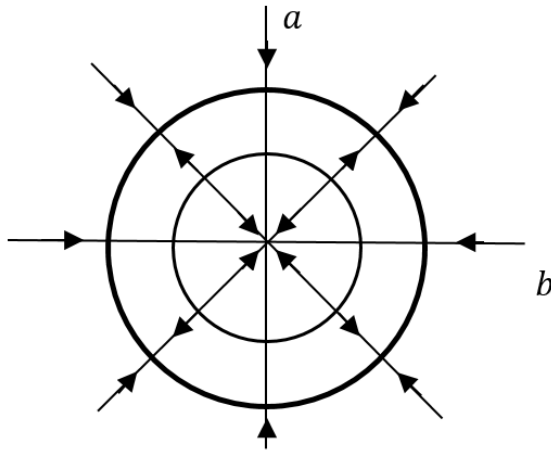


Рис. 1

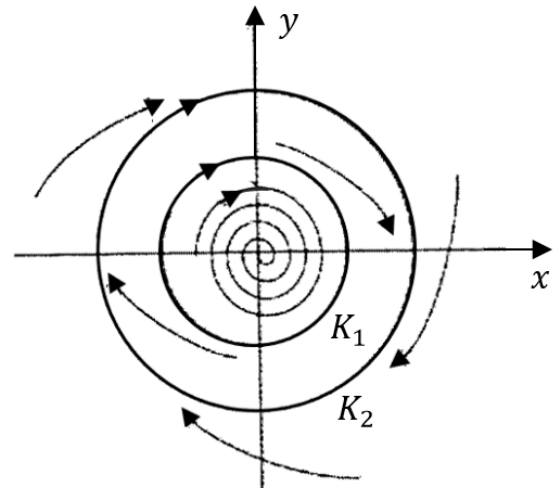


Рис. 2

Правомерность перехода к укороченной системе

1. При достаточно малых значениях параметра μ уравнение (1) действительно имеет предельные циклы, если уравнение $\Phi(K) = 0$ имеет простые корни K_i . Негрубый случай кратных корней K_i здесь не рассматривается.

2. Эти предельные циклы близки к окружностям радиуса K_i с центром в начале координат (и притом тем ближе, чем меньше μ).
3. Эти предельные циклы устойчивы, если $\Phi'(K_i) < 0$, и неустойчивы, если $\Phi'(K_i) > 0$.
4. В системе (1) других предельных циклов нет.
5. Укороченные уравнения остаются нелинейными.

1.2. План решения задач методом Ван-дер-Поля

1. Представляем уравнение динамической системы в форме Коши:

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu f(x, y).\}$$

2. Составляем систему укороченных уравнений Ван-дер-Поля:

$$\{\dot{K} = \mu\Phi, \dot{\Theta} = \mu\Psi,\}$$

в которых функции Φ и Ψ определяются по следующим формулам:

$$\left[\begin{array}{l} \Phi = \Phi(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du, \\ \Psi = \Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du. \end{array} \right.$$

3. Определяем состояния равновесия уравнения $\dot{K} = \mu\Phi$. Если $\Phi'(K_i) < 0$, то состояние равновесия устойчиво, а если $\Phi'(K_i) > 0$ – неустойчиво. При $\Phi'(K_i) = 0$ вопрос об устойчивости остается открытым. Состояние равновесия – окружность радиуса K_i на плоскости (a, b) .

4. Анализируем уравнение $\dot{\Theta} = \mu\Psi$. Возможны два случая:

а) $\Psi(K) \equiv 0$. Следовательно, $\Theta = \Theta_0 = \text{const}$, то есть фазовая траектория движется по лучу $\Theta = \text{const}$. Состояниям равновесия на плоскости переменных Ван-дер-Поля соответствуют предельные циклы на плоскости (x, y) . Устойчивым состояниям равновесия соответствуют орбитно-устойчивые предельные циклы, а неустойчивым – неустойчивые предельные циклы.

б) $\Psi(K) \not\equiv 0$. В этом случае корням уравнения $\Phi(K) = 0$ также отвечают предельные циклы на плоскости (x, y) .

Фазовые траектории искривлены, но качественно система не изменилась. Появляется поправка на частоту, равная $\mu\Psi(K_i)$.

5. Определяем бифуркации.

6. В задачах на вычисление поправки частоты используем формулу:

$$\Delta\omega = \mu\Psi(K_i),$$

где K_i – корень уравнения $\Phi(K) = 0$.

7. Для определения автоколебаний системы необходимо найти корни K_i и исследовать устойчивость режима автоколебаний.

1.3. Примеры решения задач

1.3.1. Задача 1

Найти зависимость амплитуды колебаний от параметра α . Построить бифуркационную диаграмму по α и фазовый портрет.

$$x + \ddot{x} = -\mu \frac{d}{dt} [x - 2\{(x - \alpha) - (x - \alpha)^3\}], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Решение

Перепишем систему в следующем виде:

$$x + \ddot{x} = \mu[\dot{x} - 6\dot{x}(x - \alpha)^2].$$

Обозначим:

$$f(x, \dot{x}) = \dot{x} - 6\dot{x}(x - \alpha)^2.$$

Приводим систему к форме Коши:

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu f(x, y).\}$$

Составляем систему укороченных уравнений, для которых находим функции Φ и Ψ :

$$\{\dot{K} = \mu\Phi, \dot{\Theta} = \mu\Psi.\}$$

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-K \sin u + 6K \sin u (K \cos u - \alpha)^2) \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{2} K(1 - 6\alpha^2) - \frac{3}{4} K^3. \end{aligned}$$

$\Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \equiv 0$, так как берется интеграл от нечетной функции по периоду.

Определяем состояния равновесия:

$$\Phi(K) = 0 \Rightarrow K_1 = 0, K_2 = \sqrt{\frac{2}{3}(1 - 6\alpha^2)}.$$

Состояние равновесия K_2 существует только при $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{6}}$.

При $|\alpha| \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$ существует только одно состояние равновесия.

Исследуем состояния равновесия на устойчивость. Для этого вычислим $\Phi'(K)$.

$$\Phi'(K) = \frac{1}{2}(1 - 6\alpha^2) - \frac{9}{4}K^2.$$

Исследуем состояние равновесия (СР) K_1 :

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2} - 3\alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 > \frac{1}{6} - \text{СР устойчиво,} \\ \alpha^2 < \frac{1}{6} - \text{СР неустойчиво.} \end{cases}$$

Исследуем СР K_2 :

$$\Phi'(K_2) = 6\alpha^2 - 1 \Rightarrow \text{при } \alpha^2 < \frac{1}{6} - \text{устойчиво.}$$

Построим бифуркационную диаграмму.

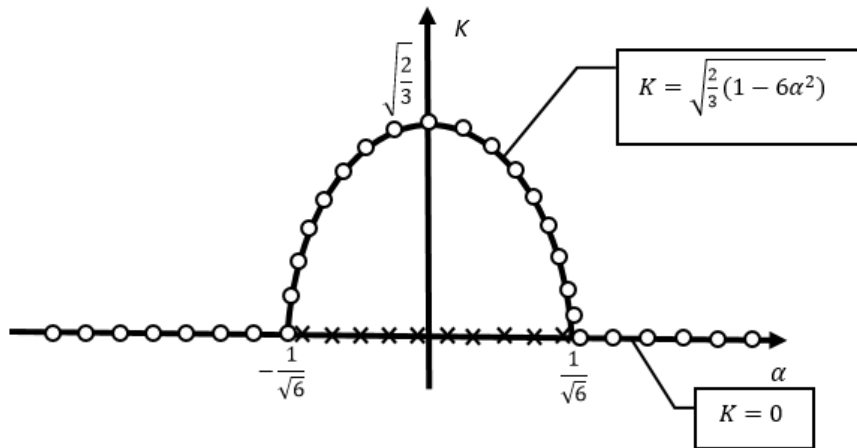


Рис. 3

Обозначения: \circ — устойчивость, \times — неустойчивость.
 Построим фазовые портреты системы в зависимости от параметра α .

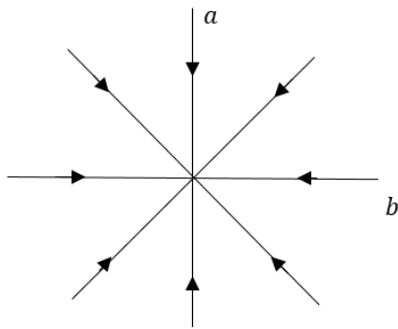


Рис. 4

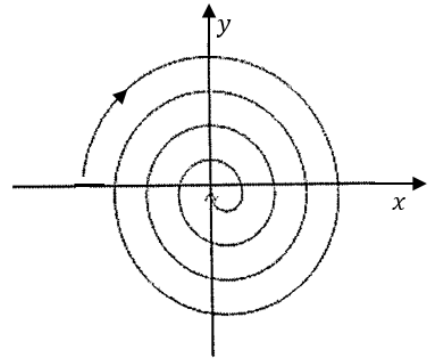


Рис. 5

$$|\alpha| > \frac{1}{\sqrt{6}}$$

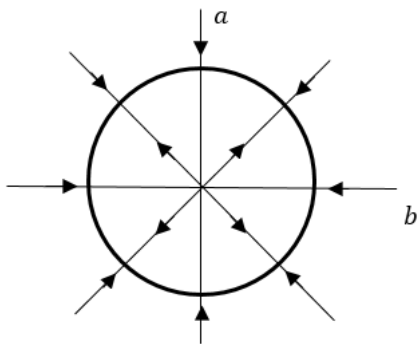


Рис. 6

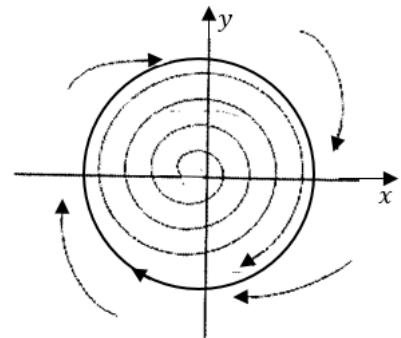


Рис. 7

$$|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{6}}$$

1.3.2. Задача 2

Построить фазовый портрет системы, дать характеристику, построить бифуркационную диаграмму.

$$\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} (x - \alpha x^3 + \beta x^4 + x^5), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Решение

Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \mu f(\dot{x}, x), \\ f(\dot{x}, x) &= -(1 - 3\alpha x^2 + 4\beta x^3 + 5x^4)\dot{x}. \end{aligned}$$

Приводим систему к форме Коши:

$$\{\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu f(x, y).\}$$

Составляем систему укороченных уравнений, для которых находим функции Φ и Ψ :

$$\{\dot{K} = \mu\Phi, \dot{\Theta} = \mu\Psi.\}$$

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 3\alpha K^2 \cos^2 u + 4\beta K^3 \cos^3 u + 5K^4 \cos^4 u)(-K \sin^2 u) \, du \\ &= -\frac{K}{2} + \frac{3\alpha K^3}{8} - \frac{5K^5}{16}, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получили следующую укороченную систему:

$$\left\{ \dot{K} = \mu \left(-\frac{K}{2} + \frac{3\alpha K^3}{8} - \frac{5K^5}{16} \right), \dot{\Theta} = 0. \right\}$$

Из второго уравнения системы получаем:

$$\Theta_0 = \Theta = \text{const.}$$

Находим состояния равновесия:

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= 0, \\ 5K^5 - 6\alpha K^3 + 8K &= 0. \end{aligned}$$

Первое состояние равновесия: $K_1 = 0$.

Остальные состояния равновесия будут меняться в зависимости от параметра α : $5K^4 - 6\alpha K^2 + 8 = 0$ (действительных положительных корней данного уравнения не более двух).

Для того, чтобы установить зависимость между параметром α и состояниями равновесия K_i , построим бифуркационную диаграмму $\alpha(K^2)$.

$$\alpha(K^2) = \frac{5K^4 + 8}{6K^2} = \frac{5}{6}K^2 + \frac{4}{3K^2}.$$

Найдем точку минимума функции $\alpha(K^2)$:

$$\alpha' = \frac{5}{3} - \frac{4}{3K^2} = 0;$$

$$K_{min}^2 = 2\sqrt{\frac{2}{5}}; \quad \alpha(K_{min}^2) = \frac{2\sqrt{10}}{3}.$$

График функции $\alpha(K^2)$ назовем кривой γ (см. рис. 8).

Каждая точка кривой γ и оси ординат – состояние равновесия укороченной системы. Выясним их устойчивость.

$$\Phi'(K) = -\frac{25}{16}K^4 + \frac{9}{8}\alpha K^2 - \frac{1}{2}.$$

Все состояния равновесия оси ординат ($K = 0$) являются устойчивыми, так как:

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Для определения устойчивости состояний равновесия, расположенных на кривой γ , построим кривую γ_1 , которая на плоскости (K^2, α) отделяет область, где $\Phi'(K) > 0$, от области, где $\Phi'(K) < 0$.

$$\Phi'(K) = 0 \Rightarrow 25K^4 - 18\alpha K^2 + 8 = 0.$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{25}{18}K^2 + \frac{4}{9K^2}.$$

Найдем точку минимума кривой γ_1 :

$$\alpha' = \frac{25}{18} - \frac{4}{9K^4} = 0.$$

$$K_{min}^2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}; \quad \alpha(K_{min}^2) = \frac{10\sqrt{2}}{9}.$$

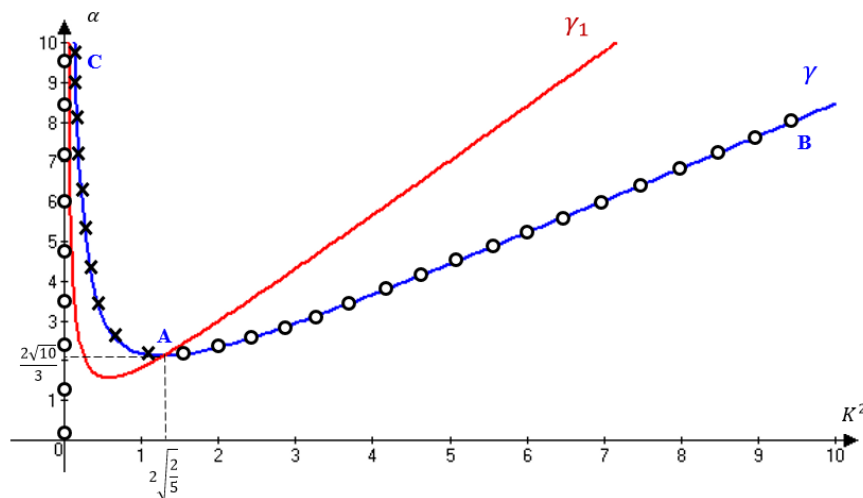


Рис. 8

Выше кривой γ_1 производная $\Phi'(K) > 0$, следовательно, все состояния равновесия неустойчивы; ниже кривой γ_1 производная $\Phi'(K) < 0$, следовательно, все состояния равновесия устойчивы.

Все точки ветви AC кривой γ – неустойчивые состояния равновесия. Все точки ветви AB кривой γ – устойчивые состояния равновесия.

Таким образом:

1. При $\alpha < \frac{2\sqrt{10}}{3}$ существует единственное состояние равновесия $K = 0$. Следовательно, фазовый портрет примет вид, показанный на рис. 5.

2. При $\alpha > \frac{2\sqrt{10}}{3}$ существует два предельных цикла радиусов K_1 и K_2 , где K_1 и K_2 – действительные положительные корни уравнения $5K^4 - 6\alpha K^2 + 8 = 0$. Предельный цикл (ПЦ) радиуса K_1 неустойчив, а радиуса K_2 – устойчив. При любых начальных условиях колебания внутри неустойчивого предельного цикла затухают. При нормальных условиях вне его устанавливается автоколебание с амплитудой K_2 – жесткий режим возбуждения автоколебаний. Фазовый портрет представлен на рис. 9.

3. $\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ – бифуркационное значение параметра. ПЦ полуустойчив.

Бифуркация: рождение предельных циклов из сложного предельного цикла. Фазовый портрет см. на рис. 10.

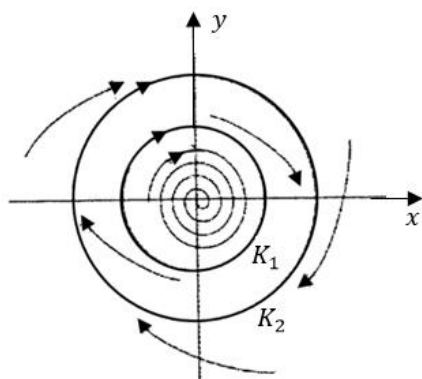


Рис. 9

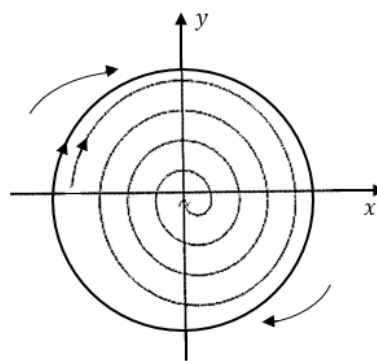


Рис. 10

Характеристика системы:

1. При $\alpha < \frac{2\sqrt{10}}{3}$ система нелинейная, грубая, не автоколебательная, диссипативная, неконсервативная, предельно ограниченная (ПО), автономная.

2. При $\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ система нелинейная, негрубая, не автоколебательная, диссипативная, неконсервативная, ПО, автономная.

3. При $\alpha > \frac{2\sqrt{10}}{3}$ система нелинейная, грубая, автоколебательная, не-диссипативная, неконсервативная, ПО, автономная.

1.4. Контрольные вопросы

1. Что позволяют получать асимптотические методы?
2. В чем состоит основная идея метода Ван-дер-Поля?
3. Кто провел математическое обоснование метода Ван-дер-Поля?
4. Уравнение какого вида позволяет исследовать метод Ван-дер-Поля?
5. Перед какими членами данного уравнения должен находиться малый параметр μ ?
6. Как связаны фазовые переменные x и y с переменными Ван-дер-Поля?
7. Какую систему называют укороченной?
8. Почему при переходе к укороченной системе рассматриваются лишь первые члены разложения в ряд Фурье правых частей системы (7)?
9. Как найти состояния равновесия укороченной системы?
10. При каком условии найденное состояние равновесия укороченной системы устойчиво? Неустойчиво?
11. Чему на плоскости (x, y) соответствуют состояния равновесия на плоскости переменных Ван-дер-Поля?
12. Как вычислить функции $\Phi(K)$ и $\Psi(K)$ из укороченной системы?
13. Как вычислить поправку на частоту колебаний?
14. Чем отличается мягкий режим возбуждения автоколебаний от жесткого?

2. Метод Пуанкаре

2.1. Основные положения метода Пуанкаре

Метод Пуанкаре служит для отыскания периодических решений нелинейных динамических систем, содержащих малый параметр μ и имеющих периодическое решение при $\mu = 0$. Характерным примером такой системы является следующее уравнение:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (12)$$

в котором μ – малый положительный параметр ($0 < \mu \ll 1$).

Согласно теореме Пуанкаре [4], решение $x(t)$ этого уравнения можно искать в виде:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (13)$$

Цель дальнейших действий – нахождение периодических решений уравнения (12). Из (12) и (13) ясно, что $x_0(t)$ – решение уравнения (12) при $\mu = 0$. Это решение называют порождающим.

Так как решение $x(t)$ имеет частоту, зависящую от μ , а $x_0(t)$ имеет частоту, равную единице, то функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ и т.д. не будут периодическими функциями времени.

Чтобы обойти возникшие затруднения, введем новое время $\tau = \omega t$, где ω – искомая частота периодического решения $x(t)$ уравнения (12). В новом масштабе времени частота и период искомых колебаний не зависят от μ (частота равна 1, а период – 2π).

Частоту ω будем искать в виде ряда:

$$\omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \omega_n. \quad (14)$$

Представим ω^2 также рядом по μ :

$$\omega^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \Omega_n. \quad (15)$$

После перехода к новому времени уравнение (12) примет следующий вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right). \quad (16)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда:

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots \quad (17)$$

Теперь период функции $x(\tau)$ равен 2π , т.е. периоды функций $x_0(\tau)$ и $x(\tau)$ равны. Это значит, что коэффициенты $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, ... можно искать как периодические функции τ с периодом 2π .

Представим в виде ряда по μ и нелинейную функцию f :

$$f\left(x, \omega \frac{dx}{d\tau}\right) = f_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n(\tau), \quad (18)$$

где

$$f_0(\tau) = f\left[x_0(\tau), \frac{dx_0(\tau)}{d\tau}\right].$$

Теперь подставим (14), (15), (17) и (18) в уравнение (16). Получим:

$$(1 + \mu\Omega_1 + \mu^2\Omega_2 + \dots) \left(\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + \mu \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \mu^2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \dots \right) + x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = \mu f_0 + \mu^2 f_1 + \dots$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях μ , получим систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \\ \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -\Omega_1 \frac{d^2x_0}{d\tau^2} + f_0 = F_1(\tau), \\ \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = -\Omega_2 \frac{d^2x_0}{d\tau^2} - \Omega_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + f_1 = F_2(\tau), \\ \dots \end{cases} \quad (19)$$

Решение первого уравнения:

$$x_0(\tau) = A \cos \tau, \quad (20)$$

где постоянная A подлежит определению.

Подставим (20) во второе уравнение системы (19). Получим:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \Omega_1 A \cos \tau + f(A \cos \tau, -A \sin \tau) = F_1(\tau).$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x_1(\tau) = A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau + \Omega_1 A \int_0^{\tau} \sin(\tau - u) \cos u \, du + \int_0^{\tau} f(A \cos u, -A \sin u) \sin(\tau - u) \, du. \quad (21)$$

Воспользуемся условиями периодичности:

$$x_1(2\pi) = x_1(0); \quad \frac{d}{d\tau} x_1(2\pi) = \frac{d}{d\tau} x_1(0).$$

После подстановки в эти равенства выражения (21) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(A \cos u, -A \sin u) \sin u \, du &= 0, \\ \Omega_1 &= -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos u, -A \sin u) \cos u \, du. \end{aligned} \quad (22)$$

Первое уравнение системы (22) позволяет найти значения A и тем самым определить решение $x_0 = A \cos \tau$, около которых возникают периодические решения в исходной системе при малых значениях μ . С точностью до членов порядка μ значение A , найденное из (22), дает амплитуду колебаний в нелинейной системе (12). Второе уравнение системы (22) дает поправку на частоту колебаний, так что в первом приближении

$$\omega^2 \approx 1 + \mu\Omega_1.$$

Изложенный процесс можно продолжить для получения приближений более высокого порядка, но вычисления становятся более трудоемкими.

2.2. Примеры решения задач методом Пуанкаре

Задача 1

Методом Пуанкаре исследовать уравнение Ван-дер-Поля: показать, что ПЦ единственный, и определить его радиус.

$$\ddot{x} + \mu(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

Решение

В рассматриваемой задаче

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x},$$

$$f(A\cos\tau, -A\sin\tau) = (1 - A^2\cos^2\tau)(-A\sin\tau).$$

Воспользовавшись первым равенством системы (22), получаем:

$$\int_0^{2\pi} (1 - A^2\cos^2 u)A\sin^2 u du = 0,$$

отсюда $\pi A \left(1 - \frac{A^2}{4}\right) = 0$ и $A = 2$. Из второго равенства системы (22) получаем $\Omega_1 = 0$.

Таким образом, при малых значениях параметра μ уравнение Ван-дер-Поля с точностью до членов порядка μ имеет один ПЦ, радиус которого $A = 2$, а частота соответствующих колебаний равна частоте собственных колебаний системы при $\mu = 0$ (так как $\Omega_1 = 0$).

Если получить второе приближение, то можно убедиться, что $\omega^2 \approx 1 - \mu^2/8$, т. е. имеется поправка на значение частоты порядка μ^2 , а амплитуда колебаний остается прежней: $A = 2$.

Задача 2

Методом Пуанкаре исследовать уравнение колебаний маятника без трения: найти зависимость частоты колебаний ω от амплитуды A .

Решение

Уравнение колебаний математического маятника в пренебрежении трением будет следующим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0.$$

где l – длина маятника, x – угол отклонения от вертикали, g – ускорение свободного падения.

Имея ввиду небольшие конечные амплитуды, примем $\sin x \approx x - x^3/6$.
 Перейдем к новому времени: $t_n = t \sqrt{g/l}$ и положим $\mu = 1/6$. Тогда уравнение колебаний математического маятника примет следующий вид:

$$\ddot{x} + x = \mu x^3,$$

т.е. в данном случае $f(x, \dot{x}) = x^3$.

Воспользовавшись вторым уравнением системы (22), получим:

$$\Omega_1 = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^4 u du = -\frac{3}{4} A^2.$$

Таким образом, частота колебаний маятника в первом приближении определяется равенством:

$$\omega_n^2 \approx 1 - \mu^2 \frac{3}{4} A^2.$$

Вернемся к старому масштабу времени и учтем, что $\mu = 1/6$. Тогда окончательно получим приближенную зависимость частоты колебаний ω от амплитуды A :

$$\omega^2 \approx \frac{g}{l} \left(1 - \frac{A^2}{8} \right).$$

2.3. Сравнение практических возможностей метода Ван-дер-Поля и метода Пуанкаре

Метод Пуанкаре позволяет найти периодическое решение исследуемой системы с любой точностью, тогда как метод Ван-дер-Поля ограничивается только первым приближением. Однако с помощью метода Ван-дер-Поля не только определяются периодические решения, но и сразу же решается вопрос об их устойчивости. В этом заключается значительное практическое преимущество метода Ван-дер-Поля перед методом Пуанкаре.

Другим преимуществом метода Ван-дер-Поля перед методом Пуанкаре является применимость его к системам с неаналитическими (например, разрывными) правыми частями, тогда как метод Пуанкаре пригоден только для систем с аналитическими правыми частями.

2.4. Контрольные вопросы

1. Для чего служит метод Пуанкаре?
2. Что называют порождающим решением?
3. Для чего осуществляется переход к новому времени?
4. Каким образом можно найти амплитуду колебаний рассматриваемой системы (с точностью до членов порядка μ)?
5. Как вычислить частоту в первом приближении?
6. В чем состоит преимущество метода Пуанкаре перед методом Ван-дер-Поля?

7. В чем состоит преимущество метода Ван-дер-Поля перед методом Пуанкаре?

3. Задачи, ответы и указания к решению

3.1. Задачи для самостоятельной работы

3.1.1. Исследование методом Ван-дер-Поля

1. Построить фазовый портрет и бифуркационную диаграмму по α_2 . Определить тип бифуркации. Дать характеристику динамической системы.

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\dot{x}, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

2. Найти зависимость амплитуды автоколебаний от α . Построить бифуркационную диаграмму по α и указать бифуркационное значение α . Каковы типы бифуркаций?

$$\ddot{x} + x = -\mu[\dot{x} - \alpha(\dot{x} - \dot{x}^3)], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

3. Построить бифуркационную диаграмму по α и фазовый портрет системы. Каков будет вид фазового портрета при $\mu = 0$?

$$\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} [x - \alpha x^3 + x^5], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

4. Исследовать динамическую систему. Построить бифуркационную диаграмму по $\alpha \in \mathbb{R}$. Дать характеристику динамической системы. Выяснить тип бифуркаций.

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu[(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

5. Построить фазовый портрет системы.

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x}(p - qx^2), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

6. Построить фазовый портрет и бифуркационные диаграммы системы.

$$\ddot{x} + x = \mu(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)\dot{x}, \quad \alpha_2 < 0 \quad 0 < \mu \ll 1.$$

7. Построить фазовый портрет динамической системы и бифуркацию по α . Что изменится, если в правой части появится член βx ? Опишите бифуркации. Каков режим возбуждения автоколебаний?

$$\ddot{x} + x = \mu[\alpha(\dot{x}^3 + \dot{x} - \dot{x}^5) - \dot{x}], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

8. Найти зависимость частоты колебаний от амплитуды для динамической системы. Будут ли автоколебания?

$$\ddot{x} + x = \mu y, \quad \text{где } y = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x - 1, & x > 1, \end{cases} \quad 0 < \mu \ll 1.$$

9. Построить бифуркационную диаграмму по α . Каков тип бифуркации? Дать характеристику динамической системы.

$$\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} \left[-\alpha \dot{x} + \frac{4}{3} \dot{x}^3 + \gamma \dot{x}^5 \right], \quad 0 < \mu \ll 1.$$

10. Исследовать уравнение, описывающее поведение маятника Фроуда: построить фазовый портрет и бифуркационную диаграмму по a , определить тип бифуркации. Рассмотреть два случая: $b > 0$ и $b < 0$.

$$\ddot{x} + x = \mu(-a\dot{x} - b\dot{x}^3), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

11. Исследовать уравнение Ван-дер-Поля на устойчивость.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

12. Исследовать уравнение Рэля на устойчивость.

$$\ddot{x} + \mu(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

13. Исследовать динамическую систему, описываемую уравнением

$$\dot{x} + x = -\mu[-\dot{x} + \beta f(\dot{x})],$$

в котором $\beta = \text{const} > 0$, $0 < \mu \ll 1$, $f(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$

14. Уравнение динамики лампового генератора при аппроксимации характеристики лампы полиномом третьей степени имеет вид:

$$\ddot{x} + x = \mu(-1 + \alpha s(x))\dot{x}, \quad (23)$$

где $s(x) = 1 + \beta x - x^2$. Построить фазовый портрет системы и бифуркационную диаграмму по параметру α при $0 < \mu \ll 1$.

15. Рассмотреть уравнение (23) при $\alpha > 0$ и аппроксимации характеристики лампы полиномом пятой степени:

$$s(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 - x^4.$$

Построить фазовый портрет системы. Составить бифуркационную диаграмму по параметру $\gamma = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Рассмотреть два случая: $\beta_2 > 0$ и $\beta_2 < 0$.

3.1.2. Исследование методом Пуанкаре

16. Исследовать уравнение Рэля: показать, что ПЦ единственный, и определить его радиус (с точностью до членов порядка μ). Сравнить с результатом, полученным при решении методом Ван-дер-Поля (см. задачу 12).

$$\ddot{x} + \mu(\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

17. Исследовать (с точностью до членов порядка μ) уравнение колебаний в ламповом генераторе с мягким режимом:

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha - 3\gamma x^2)\dot{x}, \quad 0 < \mu \ll 1,$$

где параметры α и γ – действительные положительные числа.

18. Исследовать (с точностью до членов порядка μ) уравнение, описывающее поведение маятника Фроуда:

$$\ddot{x} + x = \mu(-a\dot{x} - b\dot{x}^3), \quad 0 < \mu \ll 1.$$

При каких значениях параметров a и b существует ПЦ? Определить его радиус. Сравнить с результатами, полученными при решении методом Ван-дер-Поля (см. задачу 10).

19. Исследовать (с точностью до членов порядка μ) систему:

$$\dot{x} + x = \mu(1 - x^4)\dot{x}, \quad 0 < \mu \ll 1.$$

20. Исследовать (с точностью до членов порядка μ) систему:

$$\dot{x} + x = \mu((\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3), \quad 0 < \mu \ll 1,$$

где α и γ – действительные параметры. Определить радиус предельного цикла и поправку на значение частоты.

3.2. Ответы и указания

1. Состояния равновесия: $K_1 = 0$, $K_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha_2}}$.

K_2 существует только при $\alpha_2 < 0$. K_1 – неустойчивое СР. K_2 – устойчивое СР, если существует. Тип бифуркации: рождение из бесконечности (и исчезновение в бесконечности) предельного цикла. При $\alpha_2 < 0$ система автоколебательна.

2. СР: $K_1 = 0$, $\begin{cases} \alpha < 1, & K_1 \text{ – устойчивое СР} \\ \alpha > 1, & K_1 \text{ – неустойчивое СР} \end{cases}$;
 $K_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$. $\begin{cases} \alpha > 1, & K_2 \text{ – устойчивое СР} \\ \alpha < 0, & K_2 \text{ – неустойчивое СР} \\ 0 < \alpha < 1, & K_2 \text{ – СР не существует} \end{cases}$.

Бифуркационные параметры: $\alpha^* = 0$ и $\alpha^* = 1$ ($\alpha^* = 1$ – бифуркация Андронова).

3. Решение аналогично задаче 2 из раздела «Примеры решения задач».

4. Замена: $t_n = kt$, $\mu_n = \frac{\mu}{k}$; $\ddot{x} + x = \mu_n \left[(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \frac{\gamma}{k} x^3 \right]$.

Состояния равновесия: $A_1 = 0$, $A_2 = 2|\alpha|$.

A_1 – неустойчивое СР $\forall \alpha \neq 0$. A_2 – устойчивое СР $\forall \alpha \neq 0$.

$\Psi(A_2) = \frac{3\gamma\alpha^2}{2k}$. Если $\alpha \neq 0$, то в системе устанавливаются автоколебания с амплитудой $A_2 = 2|\alpha|$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где $\omega = 1 + \mu_n \Psi(A_2)$.

Если $\alpha = 0$, то $A_1 = A_2 = 0$ и метод Ван-дер-Поля не дает периодических колебаний. Следовательно, $\alpha^* = 0$ – бифуркационное значение.

5. Состояния равновесия: $K_1 = 0$, $K_2 = 2\sqrt{\frac{p}{q}} \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ при } pq > 0 \\ \nexists \text{ при } pq < 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} \text{при } p > 0 \text{ СР } K_1 \text{ неустойчиво} \\ \text{при } p < 0 \text{ СР } K_1 \text{ устойчиво} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{при } p > 0 \text{ СР } K_2 \text{ устойчиво} \\ \text{при } p < 0 \text{ СР } K_2 \text{ неустойчиво} \end{cases}$.

6. Состояния равновесия: $K_1 = 0$, $K_2 = \frac{2}{\sqrt{-\alpha_2}}$. K_1 – неустойчивое СР. K_2 – устойчивое СР. По условию задачи $\alpha_2 < 0$, следовательно, бифуркаций нет.

7. Состояние равновесия: $K_1 = 0$. Остальные состояния равновесия находятся из уравнения: $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{3}{8}\alpha K^2 - \frac{5}{16}\alpha K^4 = 0$ (действительных положительных корней данного уравнения не более двух).

$$\alpha(K^2) = -\frac{8}{5K^4 - 6K^2 - 8}, \quad \Phi'(K) = \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{9}{8}\alpha K^2 - \frac{25}{16}\alpha K^4 \Rightarrow$$

$$\alpha(K^2) = \frac{8}{-25K^4 + 18K^2 + 8}. \text{ Бифуркационные значения параметра } \alpha: \alpha^* = 0,$$

$$\alpha^* = \frac{40}{49}, \alpha^* = 1. \text{ Жесткий режим возбуждения автоколебаний. Член } \beta x$$

ничего не изменит.

8. Согласно методу Ван-дер-Поля, частота периодических колебаний равна: $\omega = 1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega = \mu\Psi(A)$, $\Psi(A) = -\frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(A\cos u)\cos u du$.

При $A < 1$ $\Psi(A) \equiv 0$, так как $f(A\cos u) = 0$.

При $A \geq 1$ $\Psi(A) = -\frac{1}{2\pi A} (Au_1 + A\sin u_1 \cos u_1 - 2\sin u_1)$.

$$A\cos u_1 = 1, \quad \cos u_1 = \frac{1}{A}, \quad \sin u_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}}, \quad u_1 = \arccos\left(\frac{1}{A}\right).$$

С учетом приведенных выше формул $\Psi(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\Psi(A) = -\frac{1}{2\pi A} (Au_1 - \sin u_1) = -\frac{1}{2\pi A} \left(A \arccos\left(\frac{1}{A}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right).$$

$$\Delta\omega = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi A} \left(A \arccos\left(\frac{1}{A}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right) & \text{при } A \geq 1, \\ 0 & \text{при } A < 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы узнать, есть ли автоколебания, вычислим $\Phi(A)$ и $\Phi'(A)$: $\Phi(A) = 0$, $\Phi'(A) = 0$. Так как $\Phi'(A) = 0$, то автоколебаний не существует.

9. Состояние равновесия $K_1 = 0$ устойчиво при $\alpha > 0$, неустойчиво при $\alpha < 0$. Состояние равновесия $K_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{2}\gamma\alpha - 1}{\frac{5}{4}\gamma}}$ существует и неустойчиво при $\alpha > 0$.

10. Состояние равновесия $K_1 = 0$ устойчиво при $a > 0$, неустойчиво при $a < 0$. Состояние равновесия $K_2 = \sqrt{-\frac{4a}{3b}}$ существует при $ab < 0$. Неустойчиво при $\alpha > 0$, устойчиво при $\alpha < 0$.

11. Состояние равновесия $K_1 = 0$ неустойчиво, $K_2 = 2$ - устойчиво.

12. Состояние равновесия $K_1 = 0$ устойчиво, $K_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ - неустойчиво.

13. Состояние равновесия $K = \frac{2\beta}{\pi}$ устойчиво. Таким образом, существует единственный устойчивый ПЦ и, соответственно, автоколебания с амплитудой $\frac{2\beta}{\pi}$.

14. Решение аналогично решению задачи 2.

15. См. [4, стр. 402-404].

$$16. \quad A = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \Omega_1 = 0.$$

$$17. \quad A = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma}}. \quad \Omega_1 = 0. \quad \text{Так как } \alpha > 0 \text{ и } \gamma > 0, \text{ предельный цикл радиуса}$$

$A = \sqrt{\frac{4\alpha}{3\gamma}}$ всегда существует.

$$18. \quad A = \sqrt{-\frac{4a}{3b}}. \quad \Omega_1 = 0. \quad \text{ПЦ существует при условии: } ab < 0.$$

$$19. \quad A = \sqrt[4]{8}. \quad \Omega_1 = 0.$$

$$20. \quad A = 2|\alpha|. \quad \Omega_1 = \frac{3}{4}A^2\gamma. \quad \text{Поправка на частоту порядка } \mu: \Delta\omega = 3\gamma\alpha^2\mu.$$

Список литературы

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин, С. Э. Теория колебаний. Второе издание, переработанное и дополненное Н. А. Железцовым. - М.: Физматлит, 1959. – 915 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. – 408 с.
3. Вибрации в технике. Справочник. Т.2. Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. – Красноярск: изд-во Красноярского ун-та, 1995. – 429 с.
5. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. Журнал экспериментальной и теоретической физики, IV, 1934. – 117 с.
6. Матросов В.В. Вынужденная синхронизация: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 41 с.
7. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1971. – 440 с.
8. Некоркин, В. И. Лекции по основам теории колебаний: Учебное пособие. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета, 2012. – 311с.
9. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации: Монография. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 366 с.
10. Vladimir I. Nekorkin. Introduction to Nonlinear Oscillations. WILEY – VCH HIGHER EDUCATION Press, 2015.

Александр Леонидович Пригоровский
Владимир Михайлович Сандалов
Екатерина Сергеевна Москова

**ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ
И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Часть 4. Метод Ван-дер-Поля. Метод Пуанкаре.

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.