Министерство образования и науки РФ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В.К. Вильданов

Практикум по линейной алгебре

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2015

УДК 512.64
ББК 22.143
В46

Рецензент А.В. Жидков – к.ф.-м.н., доцент

В46 **Вильданов В.К. Практикум по линейной алгебре**: Учебно-методическое пособие. –Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2015. –24 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» изучающих курс линейной алгебры. В пособии кратко изложены теоретические сведения необходимые для решения задач. Приводятся примеры решений типовых задач, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Пособие может быть использовано для подготовки к практическим занятиям по курсу линейной алгебры.

Отв. за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент С.В. Едемская

УДК 512.64
ББК 22.143

Оглавление

Введение **4**

Глава 1. Матрицы и определители **5**

1.1. Основные понятия 5

1.2. Операции над матрицами 6

1.3. Вычисление определителей 8

1.4. Обратная матрица 10

1.5. Ранг матрицы 12

Глава 2. Системы линейных уравнений **15**

2.1. Основные понятия 15

2.2. Метод решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы 15

2.3. Формулы Крамера 17

2.4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений 19

2.5. Решение однородных систем линейных уравнений 20

Заключение **23**

Список литературы **24**

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.01 «Экономика». В пособии приводятся решения типовых задач и задачи для самостоятельного выполнения по темам «Матрицы и определители» и «Системы линейных уравнений» дисциплины «Линейная алгебра» преподаваемой во втором семестре. В начале каждого параграфа кратко приводятся теоретические сведения необходимые для выполнения практических заданий. В конце глав приводятся вопросы для самоконтроля.

Глава 1.
Матрицы и определители

В данном разделе рассматриваются основные понятия курса линейной алгебы, такие понятия как матрица и ее определитель.

1.1. Основные понятия

Определение. Матрицей A размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, состоящая из m строк и n столбцов. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Здесь и далее $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$. Будем записывать $A_{m \times n}$ имея ввиду, что матрица A содержит m строк и n столбцов.

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа λ на матрицу $A = (a_{ij})$ называтся матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Матрицы одинаковой размерности можно складывать. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $\mathrm{C} = (\mathrm{c}_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением $A_{m\times p} = (a_{ik})$ и $B_{p\times n} = (b_{kj})$ называется матрица $\mathrm{C}_{m\times n} = (\mathrm{c}_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Свойства операций сложения и умножения:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
4. $A(B + C) = AB + AC$,
5. $(A + B)C = AC + BC$,
6. $C(AB) = (CA)B$,
7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка двух строк матрицы,

2. Умножение любой строки матрицы на число отличное от нуля,
3. Прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на одно и то же число.

Аналогичным образом формулируются элементарные преобразования над столбцами матрицы.

1.2. Операции над матрицами

Пример. Выполнить действия: $\alpha A + BC$, где $\alpha = -3$,
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\alpha A + BC = -3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -12 & 6 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ -25 & -14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -15 \\ -37 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

Задачи.

1. Элементами прямоугольной матрицы $A_{3\times 4}$ являются числа $a_{ij} = (i+j)^2$, где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$. Требуется составить матрицы A и A^T.
2. Найти линейные комбинации $C = \alpha A + \beta B$ матриц A и B:

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1, \beta = -2$;

   b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -2$;

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = 2$;

   d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1, \beta = -\lambda$.
3. Решить уравнения:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

   c) $6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
4. Вычислить произведения матриц:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Проверить, являются ли данные матрицы перестановочными:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 13 & 8 \end{pmatrix}$;

6. Найти произведения матриц AB и BA, если они существуют:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

7. Найти все матрицы перестановочные с данной:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

8. Найти AA^T и A^TA:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3. Вычисление определителей

Квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число, которое называется определителем матрицы A и обозначается $\Delta = detA = |A|$.

Определитель матрицы $A = (a)$ первого порядка равен числу a.

Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка равен числу $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы A третьего порядка может быть вычислен следующим образом:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется минор M_{ij} взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $detA = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$.

Следствие. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Свойства определителей:

1. Определитель с нулевой строкой равен нулю,
2. Умножение определителя на число равносильно умножению какой-либо строки на это число,
3. При транспонировании матрицы величина ее определителя не меняется,
4. При перестановке двух строк определитель меняет знак,
5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки умноженные на одно и то же число.

Пример. Вычислить определитель матрицы A разложением по строке или столбцу: $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: $detA = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}(-1)^{1+3}A_{13}+a_{23}(-1)^{2+3}A_{23}+a_{33}(-1)^{3+3}A_{33} = 0A_{13} - 4A_{23} + 2A_{33} = -4\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot(3\cdot(-2) - 5\cdot(-7)) + 2\cdot(3\cdot 1 - 2\cdot(-7)) = -4\cdot(-6+35) + 2\cdot(3+14) = -82$

Задачи.

1. Вычислить:

   a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} xy & x \\ y & 1 \end{vmatrix}$;

   b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$;

   c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 200 & 700 & 50 & 100 \\ 22 & -33 & 43 & 2 \\ 4 & 14 & 1 & 2 \\ -3333 & 4 & -28 & 0 \end{vmatrix}$;

2. Вычислить определители по правилу треугольника. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{21}, a_{13}, a_{22}:

   $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

3. Вычислить определители указанных матриц применяя свойства определителей:

   $\begin{pmatrix} 1 & 30 & 987 \\ 20 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 299 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

4. Доказать, что: $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

5. Решить уравнения: $\begin{vmatrix} 3 & 2x+1 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-1 & x+3 \\ x-1 & 7-x \end{vmatrix} = 0$;

1.4. Обратная матрица

Матрица A называется невырожденной, если $|A| \neq 0$.

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если выполняется равенство $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Теорема. Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденна.

Пример. Найти матрицу обратную данной, если она существует: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

Решение. Найдем сначала определитель матрицы A:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 30 - 27 - 14 = 4 \neq 0,$$

Так как определитель не равен нулю, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -9$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 8$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Составим союзную матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -9 \\ -4 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -9 \\ -4 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix};$$

Пример. Найти матрицу обратную данной, с помощью элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right);$$

Получаем обратную мтарицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задачи.

1. Убедиться, что матрица B является обратной для матрицы A:

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

2. Найти матрицу обратную данной: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

3. Найти матрицу обратную данной с помощью элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

4. Решить матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$;

1.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A_{m\times n}$ выберем в ней некоторые k строк и k столбцов ($k \leq min(m,n)$). Минором k-го порядка называется определитель M_k составленный из элементов исходной матрицы, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов.

Определение. Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначается ранг матрицы следующим образом: $rang(A)$ или $r(A)$. Минор матрицы $A_{m\times n}$ определяющий ранг матрицы называется базисным.

К введенным ранее трем типам элементарных преобразований добавим еще два:

4. Отбрасывание нулевой строки или столбца,
5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы A и указать какой-либо базисный минор:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Сначала с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк матрицы, приведенной к ступенчатому виду, равно рангу матрицы A: $r(A) = 2$.

Найдем один из базисных миноров. Сначала нужно выбрать $r(A)$ ненулевых строк, в каждой строке найти первый отличный от нуля элемент. Составить базисный минор из выбранных строк и столбцов, в которых находятся найденные элементы.

В нашем случае можно выбрать первые 2 строки и 2 столбца: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Задачи.

1. Вычислить все миноры матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Выписать все миноры 3-го порядка матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -9 \\ 5 & 4 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Привести матрицу к ступенчатому виду и выписать все базисные миноры:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -9 & -6 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -1 & -8 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$

$C = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

4. Найти ранг матрицы и указать какой-либо базисный минор:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & 2 & -2 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix},$

c) $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix},$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

Вопросы для самоконтроля

1. Можно ли складывать матрицы разного размера?
2. Как осуществляется операция умножения матрицы на число?
3. По какому правилу производится умножение матриц?
4. Что называется минором элемента квадратной матрицы?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы?
6. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы второго порядка?
7. По какой формуле вычисляется определитель квадратной матрицы третьего порядка?
8. Сформулируйте определение обратной матрицы?
9. Для каких матриц существуют обратные?
10. Что называется рангом матрицы?

Глава 2.
Системы линейных уравнений

В этом разделе рассматриваются частные и общие методы решения систем линейных уравнений.

2.1. Основные понятия

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение. Решением системы называется упорядоченная совокупность чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, которая при подстановке в систему обращает каждое уравнение в тождество.

Система линейных уравнений называется совместной, если имеет хоты бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Определение. Две системы называются равносильными, если имеют одно и то же множество решений.

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в матричной форме: $AX = B$.

2.2. Метод решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Предположим, что в системе линейных уравнений число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и матрица A невырожденная. Тогда решение X системы можно найти с помощью обратной матрицы: $X = A^{-1}B$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \end{array}\right.$$

Решение. Выпишем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Найдем её определитель: $|A| = -9 \neq 0$. Определитель не равен нулю, следовательно система совместна. Найдем матрицу обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем единственное решение системы:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение системы можно получить с помощью элементарных преобразований. Для этого необходимо выписать расширенную матрицу системы $(A|B)$ и с помощью элементарных преобразований строк привести её к виду $(E|A^{-1}B)$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

В последнем столбце матрицы имеем решение системы.

Задачи.Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

1. $\left\{\begin{array}{c} -5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -3, \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{c} 8x_1 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \end{array}\right.$

3. $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=6, \\ -3x_1-x_2-x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2, \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=3, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3=1, \end{cases}$

5. $\begin{cases} -7x_1+7x_2-2x_3=5, \\ 7x_1-8x_2+3x_3=-6, \\ 3x_1-3x_2+x_3=-2, \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=8, \\ 3x_1-2x_2+x_3=3, \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=2, \\ -4x_1-2x_2+3x_3=3, \\ -2x_1-x_2+x_3=-2, \end{cases}$

8. $\begin{cases} -3x_1+4x_2+2x_3=-3, \\ 8x_1-5x_2-3x_3=0, \\ -2x_1+2x_2+x_3=-1, \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=-3, \\ -3x_1-2x_2-3x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=-1, \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+2x_3=9, \\ -x_1+x_2=2, \\ x_1+3x_2+x_3=4, \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x_1+2x_2=3, \\ -3x_1+2x_2-x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=-2, \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1-2x_2=-1, \\ x_1+3x_2+x_3=9, \\ 2x_1+2x_2+x_3=8, \end{cases}$

13. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ -2x_1+2x_2+x_3=3, \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=9, \\ 3x_1-x_2-x_3=0, \\ -2x_1+2x_2+x_3=2, \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_3=1, \\ -x_1+x_2+x_3=1, \end{cases}$

2.3. Формулы Крамера

Если в в системе линейных уравнений число уравнений и неизвестных совпадает $(m=n)$ и матрица A невырожденная, то решение этой системы может быть найдено по формулам Крамера.

Пусть Δ — определитель системы, а Δ_j — определитель полученный из определителя системы заменой столбца с номером j на столбец свободных членов уравнений. Тогда $x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$, где $j=1,2,\ldots,n$.

Пример. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3=-2, \\ x_1+2x_2+x_3=1, \\ -x_1+3x_2+x_3=-2, \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2+1-6-4+1-3=-9;$$

Найдем определители Δ_j:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 6 - 8 + 1 + 6 = -9;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 4 - 2 + 2 + 2 = 9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 - 6 - 4 - 2 - 3 = -18.$$

Получаем $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2$.

Задачи. Решить систему линейных уравнений, используя формулы Крамера:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_+3x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 2, \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3, \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1, \end{cases}$

11. $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$

2.4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса основан на том, что при элементарных преобразованиях строк первых четырех типов системы линейных уравнений остаются равносильными. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = -2, \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right);$$

Получили, что $r(A) = r(A|B) = 2$. Значит система совместная и неопределенная. Число главных перереМенных равно двум, число свободных — $n - r(A) = 2$. Выбрем некоторый базисный минор полученной матрицы. Например, минор составленный из элементов первого и второго столбцов является базисным:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Переменные соответствующие столбцам базисного минора будем считать главными, остальные — свободными. Из второго уравнения системы выразим переменную x_2:

$$x_2 = 2x_3 + 5x_4.$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение системы получим x_1:

$$x_1 = 3x_3 + 7x_4 - 1.$$

Придавая свободным переменным x_3 и x_4 произвольные значения a и b, запишем общее решение системы: $x_1 = 3a + 7b - 1$, $x_2 = 2a + 5b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$.

Задачи. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \\ -4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_3 = 2, \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_+ 3x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 3, \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -1, \end{cases}$

5. $\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2, \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10, \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_3 = 2, \end{cases}$

2.5. Решение однородных систем линейных уравнений

Однородная система линейных уравнений всегда имеет по крайней мере нулевое решение. Ненулевые решения существуют, если определитель матрицы системы равен нулю. Множество решений однородной системы можно структурировать определенным образом. Оно может быть представлено как линейная комбинация некоторой системы векторов, которая называется фундаментальной системой решений или фундаментальным набором решений (ФНР).

Определение. Совокупность линейно независимых решений $a_1, a_2, \ldots, a_k$ однородной системы уравнений называется фундаментальной, если общее решение системы является линейной комбинацией решений $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Теорема. Если ранг r матрицы однородной системы уравнений меньше числа переменных n, то:

1. существует совокупность линейно независимых решений системы;
2. число линейно независимых решений равно $n - r$;
3. любое решение системы можно представить в виде линейной комбинации этих независимых решений.

Пример. Решить однородную систему уравнений, выделив какой-либо ФНР:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ -2x_1+4x_2+2x_3=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

Получили, что решения системы должны удовлетворять единственному уравнению: $x_1-2x_2+x_3=0$.

Общее решение системы будет иметь следующий вид:

$$X=\begin{pmatrix} 2x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_2-1x_3 \\ 1x_2+0x_3 \\ 0x_2+1x_3 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получили, что всякое решение исходной системы является линейной комбинацией линейно независимых решений $X_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Т.е. решения X_1 и X_2 составляют ФНР данной однородной системы уравнений.

Задачи. Решить однородную систему линейных уравнений, выделив какой-либо ФНР:

1. $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3=0, \\ -4x_2+2x_3=0, \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+2x_+3x_3=0, \\ -x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+5x_3=0, \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-x_2=0, \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3x_1+2x_2+2x_3=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+5x_2+4x_3=0, \end{cases}$

5. $\begin{cases} -4x_1-2x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0, \\ -2x_1-6x_2+x_3=0, \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=0, \\ x_1+4x_2+2x_3=0, \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_4=0, \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-x_5=0, \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=0, \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли?

2. Запишите формулы Крамера для решения систем линейных уравнений?
3. Для решения каких систем можно применять формулы Крамера?
4. Какова схема решения систем линейных уравнений методом Гаусса?
5. Что называется базисной переменной?
6. Что называется свободной переменной?
7. Как найти ФНР однородной системы уравнений?

Заключение

В настоящем учебно-методическом пособии были рассмотрены основные типы задач курса линейной алгебры. Основное внимание уделено решению систем линейных уравнений.

Все вопросы, комментарии и найденные опечатки просьба отправлять автору по электронной почте:

Вадим Кадирович Вильданов `vildanov@iee.unn.ru`.

Список литературы

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
2. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 8-е изд, стер. –СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 240 с.
3. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. –М. Эксмо, 2006. – 224 с.