

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет**

В.Д. Горяченко, А.Л. Пригоровский, В.М. Сандалов

**ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ
И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Часть 3. Построение фазовых портретов динамических систем первого порядка.
Бифуркации. Бифуркационные кривые.**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
механико-математического факультета для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика»
010800 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород

2014

УДК 517.925+517.938
ББК В232
Г71

Г71 Горяченко В.Д., Пригоровский А.Л., Сандалов В. М.

Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 3. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 25 с.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук М. М. Коган, доктор физ.-мат. наук Д. В. Баландин

Представлены методика и примеры построения фазовых портретов автономных динамических систем первого порядка. Для систем с параметрами приведены решения задач по нахождению бифуркационных значений параметров и построению бифуркационных диаграмм. Даны контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике, и специалистов, занимающихся проблемами динамики систем.

Содержание

Введение	4
1. Автономные динамические системы первого порядка.....	5
1.1. Построение фазовых портретов динамических систем	5
1.2. Примеры решения задач.....	7
1.3. Контрольные вопросы	8
1.4. Задачи для самостоятельной работы.....	9
2. Автономные динамические системы первого порядка с параметрами.	
Бифуркации и бифуркационные кривые.....	11
2.1. Построение фазовых портретов систем с параметром. Бифуркационные значения параметра. Бифуркационная диаграмма.....	11
2.1.1. Примеры решения задач	11
2.2. Бифуркационные границы при наличии нескольких параметров	18
2.3. Контрольные вопросы	22
2.4. Задачи для самостоятельной работы.....	23
Список литературы	25

«Теория колебаний сегодня – это широкая всеобъемлющая наука об эволюционных процессах в природе, технике и обществе, в механике, физике, астрономии, химии, биологии, экономике... и во всем, что нас окружает, и в нас самих...»

Ю.И. Неймарк

Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения основоположника теории нелинейных колебаний академика А.А. Андропова.
Нижний Новгород, 2001 г.

«В простых моделях много смысла...»

Ю.И. Неймарк

Введение

Качественная теория дифференциальных уравнений изучает свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений без нахождения самих решений. Основы ее были заложены в конце XIX века в классических работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. В настоящее время ее методы широко применяются и в дальнейшем, несомненно, будут использоваться для исследования эволюционных систем, описывающих динамические процессы не только в механике и физике, но и в экономике, экологии, химии, медицине и других областях естествознания.

В течение ряда лет на механико-математическом факультете Нижегородского государственного университета профессор В.Д. Горяченко совместно с одним из авторов предлагаемой работы читал классический курс «Теория нелинейных колебаний» (основоположником данной теории является А.А. Андронов). Читая курс, Горяченко В.Д. обратил особое внимание на то, что теория колебаний есть ветвь прикладной математики и может существовать как отдельное направление в науке. Значительный интерес широкого круга исследователей к изучению динамических систем (ДС) подтвердил справедливость данного утверждения.

Основная задача исследования ДС, описываемой эволюционными уравнениями, заключается в анализе структуры разбиения пространства состояний на фазовые траектории и влияния параметров ДС на изменения фазового портрета. Картина расположения фазовых траекторий и составляет фазовый портрет системы. В случае автономных ДС первого порядка фазовый портрет полностью определяется состояниями равновесия (СР) и их устойчивостью, а также бифуркационными значениями параметра или бифуркационными границами при наличии нескольких параметров.

1. Автономные динамические системы первого порядка

1.1. Построение фазовых портретов динамических систем

1.1.1. Автономным ДС первого порядка (системам с полустепенью свободы) посвящена целая глава во всемирно известной монографии [1]. Кроме радиофизики ДС первого порядка встречаются в биологии, экономике, механике и других областях естествознания, где рассматриваются процессы различной природы.

Так, например, в литературе по экологии известно уравнение Ферхюльста – Перла(1845г.) [2]:

$$\dot{x} = \varepsilon x - \delta x^2, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) изначально появилось при рассмотрении модели роста численности населения. Здесь $x(t)$ – численность популяции в момент времени t ; ε – коэффициент врожденной скорости размножения популяции, δ – коэффициент внутривидовой конкуренции.

Также можно упомянуть модель демографического прогнозирования с обратной связью, которая описывается уравнением [3]:

$$\dot{N} = (B(N) - D(N))N, \quad (2)$$

где $B(N) = \frac{B_{max}}{1+aNY}$, $D(N) = \frac{D_{max}}{1+bNY}$, все другие параметры – положительные постоянные.

В методе Ван-дер-Поля для переменных K и θ составляется «укороченная» система [4]:

$$\{\dot{K} = \mu\Phi(K); \dot{\theta} = \mu\Psi(K)\}. \quad (3)$$

И первое, и второе уравнения этой системы представляют собой ДС первого порядка.

Еще один пример подобной динамической системы – уравнение динамики вращающегося вала:

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi), \quad (4)$$

где I – момент инерции ротора, $M(\varphi)$ – момент силы, действующей на вал. Здесь угол φ является циклической координатой. После замены $\dot{\varphi} = \omega$ получим ДС первого порядка. При этом изолированное СР $\omega = \omega_0$ отвечает стационарному режиму $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ в исходном уравнении.

При наличии в ДС малого параметра при старшей производной и выполнении условия устойчивости по «быстрым» движениям также можно исследовать систему уравнений более низкого порядка [1]. Имеются и другие случаи, когда для исследования динамических свойств системы ограничиваются уравнением первого порядка.

1.1.2. Автономная ДС первого порядка в общем виде записывается следующим образом:

$$\dot{x} = f(x), \quad (5)$$

где переменная x характеризует состояние системы, а функция $f(x)$ считается аналитической на всей прямой x за исключением, быть может, конечного числа точек. Для этой системы фазовым пространством является ось x (или фазовая прямая) или ее часть в зависимости от области определения функции $f(x)$ (так, например, если $f(x) = 2\lg x - 3$, то рассматриваются только $x > 0$).

Замечание. Если по своему физическому смыслу переменная x является периодической, например, с периодом 2π , то есть значения x и $x+2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) соответствуют одному и тому же состоянию системы, то функция $f(x)$ также будет периодической с периодом 2π . Фазовым пространством такой системы будет отрезок длины 2π с отождествлёнными концами или окружность с единичным радиусом.

Равновесные значения $x = x_k$, обращающие функцию $f(x)$ в нуль, представляют собой самостоятельные фазовые траектории. Остальные траектории состоят из отрезков фазовой прямой, заключенных между корнями уравнения $f(x) = 0$, или из интервалов между одним из корней и бесконечностью. Направление движения изображающей точки по этим траекториям определяет знак функции $f(x)$: при $f(x) > 0$ фазовая точка движется вправо, так как $\dot{x} > 0$, а при $f(x) < 0$ – влево.

Зная вид кривой $y = f(x)$, несложно установить разбиение фазовой прямой на траектории. Пусть $f(x)$ имеет график, изображенный на рис. 1. Здесь стрелками указано направление движения изображающей точки. Система (5) имеет 7 состояний равновесия $x = x_i, i = \overline{1,7}$. Состояния равновесия x_7, x_5, x_2 – устойчивы, а x_6, x_4, x_3, x_1 – неустойчивы. Из рис. 1 видно, что в устойчивых состояниях равновесия производная $f'(x_i) < 0$, а в неустойчивых $f'(x_i) > 0$.

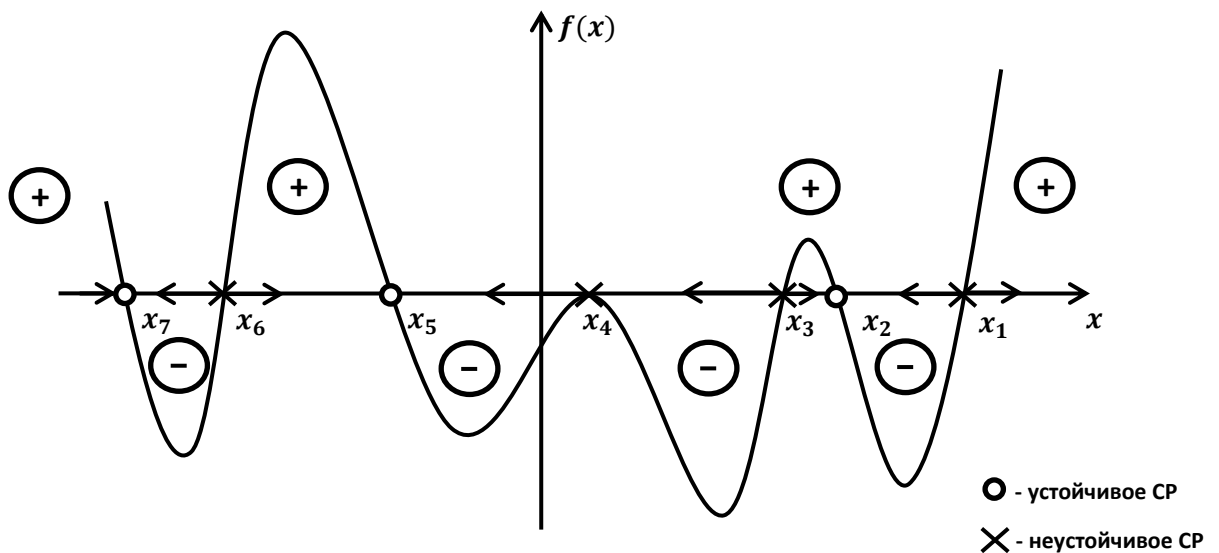


рис. 1

Замечание. Из вышесказанного можно сделать вывод, что построение графика $f(x)$ имеет лишь вспомогательный характер. Для решения подобной задачи достаточно определить состояния равновесия из уравнения $f(x) = 0$ и знаки функции в образовавшихся интервалах.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Построить фазовый портрет динамической системы, заданной уравнением:

$$\dot{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} - 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right). \quad (6)$$

Решение. Область определения данной ДС – вся ось x за исключением точки $x=0$. Для определения состояний равновесия приравняем правую часть уравнения (6) к нулю.

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} - 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) = 0 \quad (7)$$

Замечание. Нахождение состояний равновесия в каждой отдельной задаче требует индивидуального подхода, возможно применение различных приемов или замен, которые справедливы для подобных уравнений.

В данном случае введем замену:

$$t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}. \quad (8)$$

Из нее следует, что $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3t^2 + 8$. Получим систему из двух уравнений:

$$\left\{ t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}; 3t^2 - 10t + 8 = 0 \right\}. \quad (9)$$

Решая второе уравнение системы (9), получаем: $t_1 = 2; t_2 = \frac{4}{3}$. Подставив сначала t_1 , а затем t_2 в первое уравнение системы (9), получим координаты состояний равновесия динамической системы (6):

$$x_1 = 3 + \sqrt{21}; x_2 = 3 - \sqrt{21}; x_3 = 6; x_4 = -2 (\sqrt{21} \approx 4,6).$$

Расположим все состояния равновесия на оси x и определим знаки правой части уравнения (6) в получившихся интервалах. Из рис. 2 видно, что состояния равновесия x_1, x_2 – неустойчивы, а x_3, x_4 – устойчивы. В закрашенной точке 0 правая часть уравнения(6) не существует.

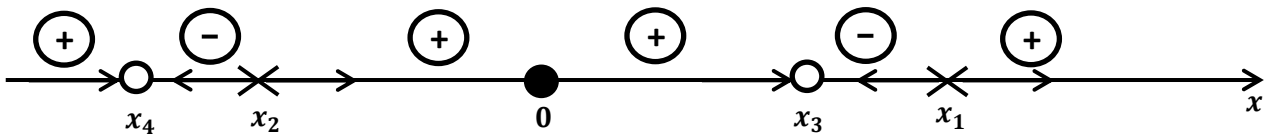


рис. 2

Дадим характеристику ДС (6): система первого порядка, нелинейная, грубая, не предельно ограниченная, автономная с четырьмя СР.

Задача 2. Построить фазовый портрет системы

$$\dot{\varphi} = tg\varphi + tg2\varphi - tg3\varphi, \quad (10)$$

где φ – угол.

Решение. Правая часть системы (10) характерна тем, что она имеет период, равный π . Поэтому достаточно рассмотреть фазовый портрет на полуинтервале $[0, \pi)$ (или на окружности радиуса 0,5), учитывая область определения правой части системы (10).

Также из отрезка $[0, \pi)$ необходимо изъять точки, в которых $\cos\varphi, \cos 2\varphi$ и $\cos 3\varphi$ обращаются в нуль.

Решая уравнения $\cos\varphi = 0, \cos 2\varphi = 0, \cos 3\varphi = 0$ ($\varphi \in [0, \pi)$), получим значения:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{4}, \varphi = \frac{5\pi}{6}. \quad (11)$$

Найдем СР системы (10). Для этого решим уравнение:

$$tg\varphi + tg2\varphi - tg3\varphi = 0 \quad (12)$$

Переносим $tg3\varphi$ в правую часть уравнения (12) и, выразив тангенс через синус и косинус, получим:

$$\frac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi \cdot \cos 2\varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что возможны два случая, когда выполняется (12):

1) $\sin 3\varphi = 0$, т.е. $\varphi_1 = \frac{\pi n}{3}, n = 0, 1, 2$;

2) $\cos 3\varphi = \cos\varphi \cdot \cos 2\varphi$.

Заменив во втором случае $\cos 3\varphi$ на $\cos(\varphi + 2\varphi)$, получим, что $\sin\varphi \cdot \sin 2\varphi = 0$, или $2\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi_2 = 0$ (значения φ , удовлетворяющие уравнению $\cos\varphi = 0$, не входят в область определения правой части (10)). Но решение $\varphi_2 = 0$ содержится в $\varphi_1 = \frac{\pi n}{3}, n = 0, 1, 2$.

Таким образом, состояния равновесия на интервале $[0, \pi)$ имеют следующие значения:

$$\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{2\pi}{3} \quad (14)$$

Отметив найденные решения (14) и изъятые точки (11) на фазовой прямой (интервале $[0, \pi)$) и определив знак функции $f(\varphi) = tg\varphi + tg2\varphi - tg3\varphi$ на полученных интервалах, можно указать направление движения изображающей точки и построить фазовый портрет системы (10). В данном случае точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ отождествляются.

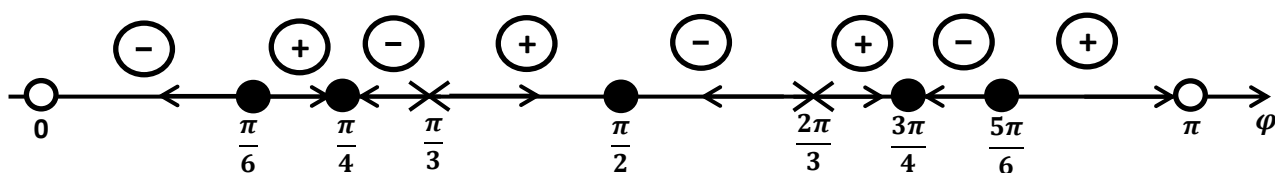


рис. 3

Закрашенными кружками на рис. 3 отмечены точки, в которых правая часть уравнения (10) не определена. Таким образом, видно, что состояние равновесия $\varphi = 0$ устойчиво, а $\varphi = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{2\pi}{3}$ неустойчивы.

1.3. Контрольные вопросы

1. Какие ДС называются автономными?
2. Какие типы СР возможны в ДС первого порядка?
3. Приведите примеры автономных ДС с полустепенью свободы.

4. Каков тип СР $x = 0$ в ДС:
 - а) $\dot{x} = \sin^2 x$;
 - б) $\dot{x} = \sin^3 x$?
5. Каким может быть фазовое пространство ДС первого порядка? Приведите примеры.
6. В чем заключается общий подход к построению фазового портрета автономной ДС первого порядка?
7. Является ли нулевое СР ДС $\dot{x} = tg^2 x$ грубым? Каков его тип?
8. Является ли нулевое СР ДС $\dot{x} = \sin x + \sin^2 x$ грубым? Каков его тип?
9. Дайте характеристики ДС, приведенных выше.
10. Каково фазовое пространство ДС $\dot{\varphi} = \cos \varphi + \sin^2 \varphi + \sin^3 \varphi$ (φ – угол)?
11. Является ли СР $x = 0$ ДС $\dot{x} = \sin^2 x + \sin^3 x$ грубым? Будут ли все остальные СР грубыми? Является ли эта ДС грубой?

1.4. Задачи для самостоятельной работы

Построить фазовые портреты ДС первого порядка (φ и ψ – углы).

- 1) $\dot{x} = 2x^6 - x^4 - 5x^2 - 2$.
- 2) $\dot{x} = (x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x - 1)(x^2 - 3x + 1) - 4(x - 1)^2$.
- 3) $\dot{x} = (x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x - 1)(x^2 + 3x - 2) - 2 - x$.
- 4) $\dot{x} = (x - 1)^4 + (x - 3)^4 - 82$.
- 5) $\dot{x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{40}{9}$.
- 6) $\dot{x} = (12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) - 5$.
- 7) $\dot{x} = \sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.
- 8) $\dot{x} = \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} + 2x - 35$.
- 9) $\dot{x} = x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13$.
- 10) $\dot{x} = x^{\lg x} + 10^{\lg^2 x} - 200$.
- 11) $\dot{x} = \frac{x}{x^2+x+3} + \frac{3x}{x^2-x+3} + 1$.
- 12) $\dot{x} = x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3}$.
- 13) $\dot{x} = x^2 - 3x - 6\sqrt{3}x + 18$.
- 14) $\dot{\varphi} = \sin \varphi + \cos \varphi$.
- 15) $\dot{\psi} = \operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} 2\psi + \operatorname{tg} 3\psi$.
- 16) $\dot{\varphi} = \sin \varphi + \sin^2 \varphi$.
- 17) $\dot{\psi} = \sin \psi + \sin^2 \psi + \cos^3 \psi$.
- 18) $\dot{\varphi} = \cos \varphi - \cos 3\varphi$. Каково здесь фазовое пространство?
- 19) $\dot{x} = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
- 20) $\dot{x} = (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) - 6(x - 1)^2$.
- 21) $\dot{x} = \sqrt{2x - 2} - x - 1$.
- 22) $\dot{x} = (1 - x)\sqrt{x^2 - x - 2}$.
- 23) $\dot{x} = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.
- 24) $\dot{x} = \sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} - 1$.
- 25) $\dot{x} = (3 - x)^4 + (2 - x)^4 - (5 - 2x)^4$.
- 26) $\dot{\varphi} = \cos 2\varphi - \sin 5\varphi$.

- 27) $\dot{\psi} = (\cos 4\psi - \cos 2\psi)^2 - \sin^2 2\psi - 5$. Каково здесь фазовое пространство?
- 28) $\dot{\psi} = \sin^6 \psi + \cos^6 \psi - \frac{7}{16}$.
- 29) $\dot{\varphi} = \sqrt{\sin \varphi} + \sqrt{\cos \varphi} - 1$.
- 30) $\dot{\psi} = 3 \sin 2\psi + 2(\sin \psi - \cos \psi) - 2$.
- 31) $\dot{\varphi} = 1 + \sin \varphi + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$.
- 32) $\dot{x} = 5 + x^3 - (x^2 - x - 1)^2$.
- 33) $\dot{x} = 25x^4 - 9x^2 + 75 - \frac{27}{x^2}$.
- 34) $\dot{x} = x - x^3 - x^5$.
- 35) $\dot{x} = (x^2 - x - 2)^2 + 3x(x^2 - x - 2) - 4x^2$.
- 36) $\dot{x} = (x - 1)^3 + (2x + 3)^3 - 27x^3 - 8$.
- 37) $\dot{x} = x^4 + 1$.
- 38) $\dot{x} = x^6 - 8x^4 + 16x^2 - 12$.
- 39) $\dot{x} = (6x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 9x - 3) - 20x^4$.
- 40) $\dot{x} = x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4$.
- 41) $\dot{x} = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} - 1$.
- 42) $\dot{x} = -2 \sin \frac{5\pi}{2} x + 5x^2 - 2x - 2,2$.
- 43) $\dot{x} = -\log_2^2 x - (x - 1) \log_2 x + 6 - 2x$.
- 44) $\dot{x} = -\cos \sqrt{x - 4} \cos \pi \sqrt{x} + 1$.
- 45) $\dot{x} = (x - 2)(x - 4) + 5(x - 2) \sqrt{\frac{x-4}{x-2}} - 6$.
- 46) $\dot{\varphi} = 2 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi$.
- 47) $\dot{x} = -(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) - 30$.
- 48) $\dot{x} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.
- 49) $\dot{\varphi} = \sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi$.
- 50) $\dot{x} = \frac{1}{7} \arcsin(\cos 3x - \sin 7x)$.

2. Автономные динамические системы первого порядка с параметрами. Бифуркации и бифуркационные кривые

2.1. Построение фазовых портретов систем с параметром. Бифуркационные значения параметра. Бифуркационная диаграмма

Обычно уравнение, описывающее динамику системы, содержит один или несколько параметров. Поэтому полное исследование динамической системы первого порядка предполагает изучение ее фазового портрета и изменение качественной структуры его при переходе через бифуркационное значение параметра.

Замечание. *Бифуркация — приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении её параметров. Иначе говоря, это изменение фазового портрета динамической системы при изменении входящего в уравнение параметра.*

Каковы же возможные бифуркации динамической системы первого порядка? В таких системах бифуркация характеризуется рождением или исчезновением состояния равновесия и/или сменой их устойчивости.

2.1.1. Примеры решения задач

Задача 3. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные значения параметра, если таковые существуют.

$$\dot{x} = (x^2 - 2x)^2 - (a + 2)(x^2 - 2x) + 3a + 3. \quad (15)$$

Решение. Фазовым пространством является вся ось x . Определим СР. Для этого введем замену:

$$x^2 - 2x = y \quad (16)$$

и приравняем нулю правую часть (15):

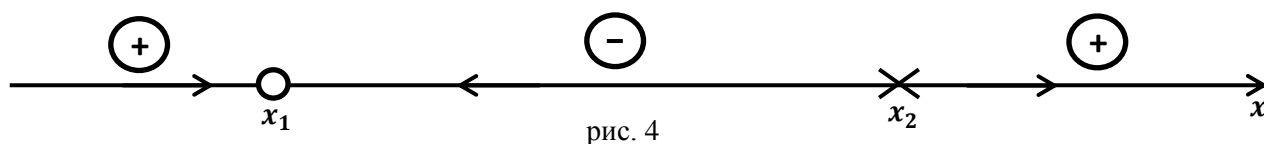
$$y^2 - (a + 2)y + 3a - 3 = 0. \quad (17)$$

Найдем корни уравнения (17): $y_1 = 3, y_2 = a - 1$. Подставив эти значения в (16), получим четыре корня:

$$x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1 - \sqrt{a}, x_4 = 1 + \sqrt{a}.$$

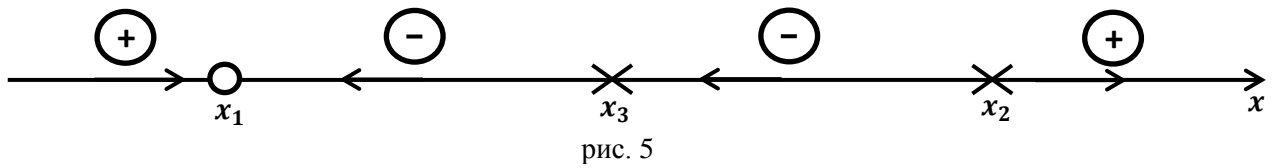
Корни x_3, x_4 зависят от параметра, и поэтому возможны следующие случаи.

1) При $a < 0$ система (15) имеет два СР $x_1 = -1, x_2 = 3$, и фазовый портрет будет следующий:



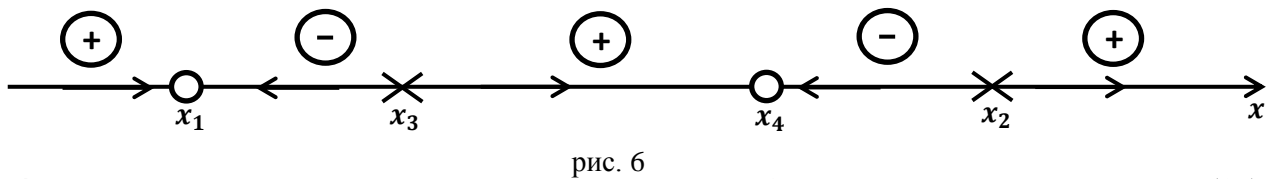
Из фазового портрета видно, что СР $x_1 = -1$ устойчиво, а $x_2 = 3$ неустойчиво.

2) При $a = 0$ $x_{3,4} = 1$ и система (15) имеет три СР: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Фазовый портрет будет следующий:

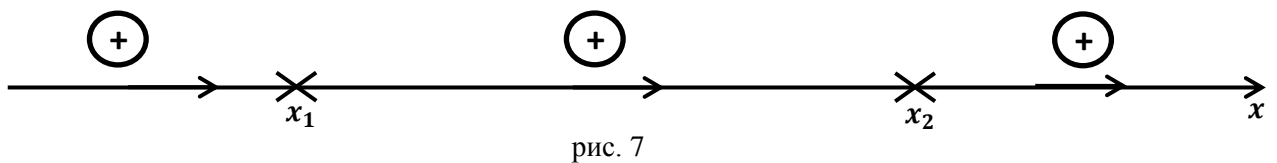


То есть $x_1 = -1$ устойчивое состояние равновесия, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ – неустойчивые СР, значение $a = 0$ является бифуркационным. Динамическая система негрубая.

3) При $0 < a < 4$ система имеет четыре различных СР: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1 - \sqrt{a}$, $x_4 = 1 + \sqrt{a}$, и фазовый портрет будет такой:

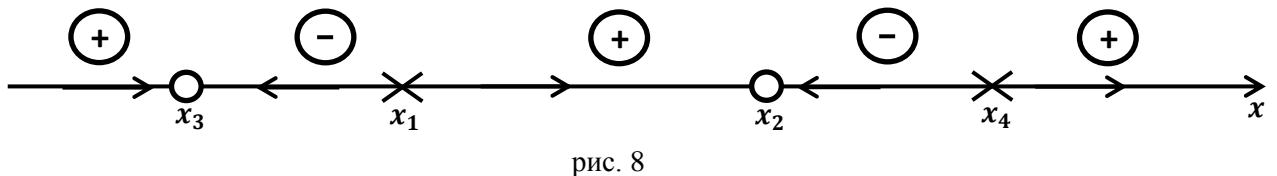


4) При $a = 4$ корни попарно сливаются: $x_1 = x_3 = -1$, $x_2 = x_4 = 3$, то есть система (15) имеет два состояния равновесия. Фазовый портрет будет в этом случае иметь вид:



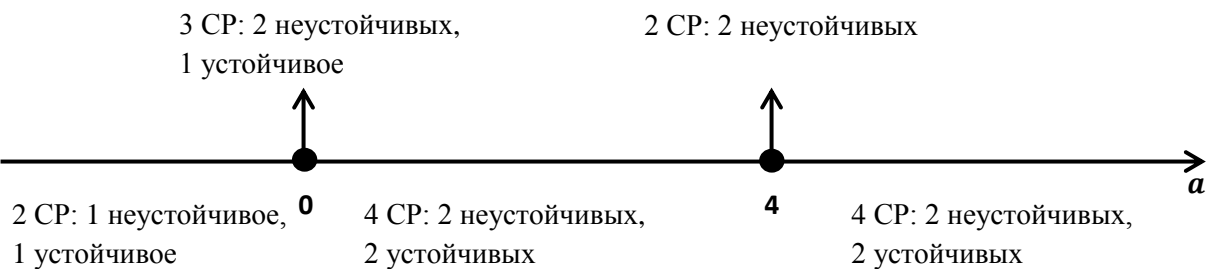
Оба СР неустойчивы. ДС негрубая.

5) При $a > 4$ система (15) имеет четыре различных СР: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1 - \sqrt{a}$, $x_4 = 1 + \sqrt{a}$, и фазовый портрет будет таков:



Как видно из фазового портрета, СР x_2, x_3 – устойчивые, а x_1, x_4 – неустойчивые. Значение параметра $a = 4$ не является бифуркационным, так как при $0 < a < 4$ и при $a > 4$ фазовые портреты системы одинаковы. Можно считать, что при значении $a = 4$ ДС имеет бифуркацию в точке (всего два неустойчивых СР).

Таким образом, на оси параметра a возможны следующие ситуации, связанные количеством и устойчивостью СР исследуемого уравнения:



Задача 4. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные значения параметра a :

$$\dot{x} = -x^4 + 2x^2 - 1 + a, a \in R. \quad (18)$$

Решение. Возможны два способа решения задачи: графический и аналитический.

Графический способ

Способ заключается в построении кривой $f(x, a) = 0$. Анализируя точки пересечения прямой $a = const$ с данной кривой, можно получить ответ о количестве состояний равновесия и их устойчивости при конкретном значении параметра a . Устойчивость в данном случае определяется, как и в случае динамической системы без параметра.

Приравнивая правую часть (18) нулю, получим:

$$a = x^4 - 2 * x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2. \quad (19)$$

Необходимо построить кривую (19). Для этого найдем точки пересечения (касания) её с осями координат.

Точки касания с осью Ox ($a = 0$) находятся из уравнения: $(x^2 - 1)^2 = 0$, решением которого являются 2 значения $x_{1,2} = \pm 1$, при которых производная $\frac{da}{dx} = 0$. Пересечение оси Oa ($x = 0$) происходит при $a = 1$ (см. (19)).

Найдя точки экстремумов функции $a(x)$, определяемой равенством (19), нетрудно построить график, приведенный на рис. 10.

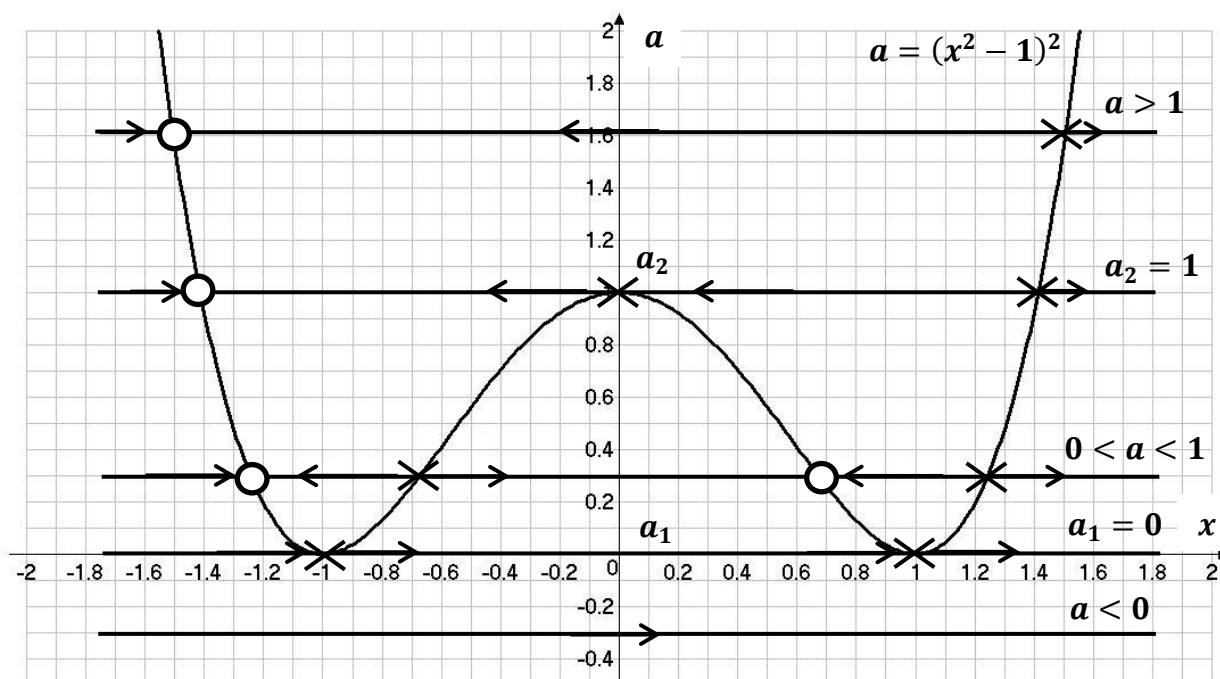


рис. 10

Имея кривую СР $a = (x^2 - 1)^2$, определяем знаки \dot{x} в образовавшихся областях, устойчивость СР и строим фазовые портреты исследуемой ДС. Значения $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$ являются бифуркационными. На рис. 10 приведены фазовые портреты при $a < 0, a = 0, 0 < a < 1, a = 1, a > 1$.

Используя предыдущие результаты, на плоскости ax_0 , где x_0 – координаты СР, построим так называемую бифуркационную диаграмму, на которой расположены устойчивые и неустойчивые СР (рис.11).

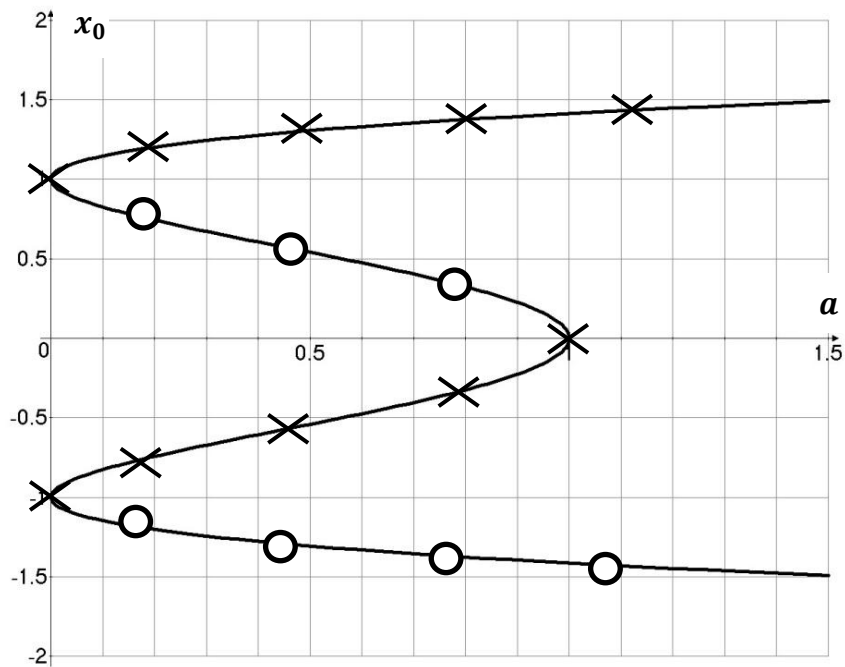


рис. 11

Аналитический способ

Данный способ заключается в непосредственном нахождении корней уравнения $f(x, a) = 0$ и бифуркационных значений. Далее строятся фазовые портреты при различных значениях параметров.

В рассматриваемой задаче фазовым пространством системы является вся ось x . Для определения состояний равновесия решим уравнение (19) относительно x , введя замену $y = x^2 \geq 0$:

$$y^2 - 2y + 1 - a = 0. \quad (20)$$

Решая уравнение (20), получаем два корня, зависящие от параметра a :

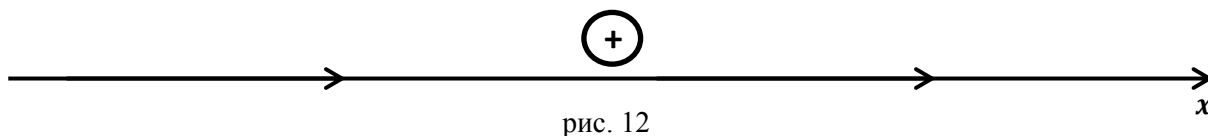
$$y_1 = 1 - \sqrt{a}, y_2 = 1 + \sqrt{a}, a \geq 0. \quad (21)$$

Совершая обратную замену, получаем четыре состояния равновесия, зависящие от параметра a :

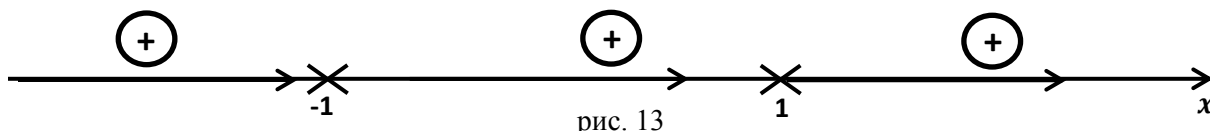
$$x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{a}}, x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{a}}, x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{a}}, a \geq 0.$$

Следовательно, в зависимости от значения параметра a система (18) будет иметь различные фазовые портреты.

При $a < 0$ система (18) не имеет состояний равновесия. Фазовый портрет:

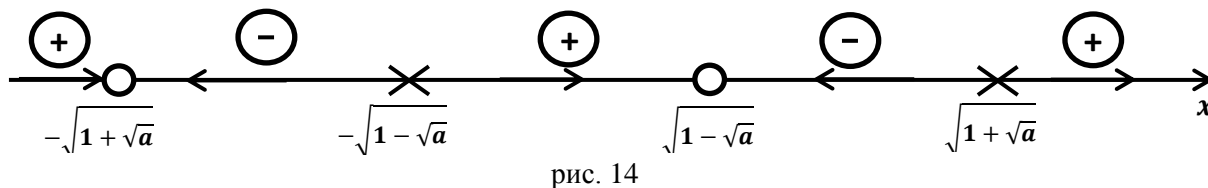


При $a = 0$, корни попарно сливаются: $x_1 = x_2 = -1$, а $x_3 = x_4 = 1$ – то есть ДС имеет 2 состояния равновесия: $x_1 = -1, x_2 = 1$, и фазовый портрет будет иметь вид:



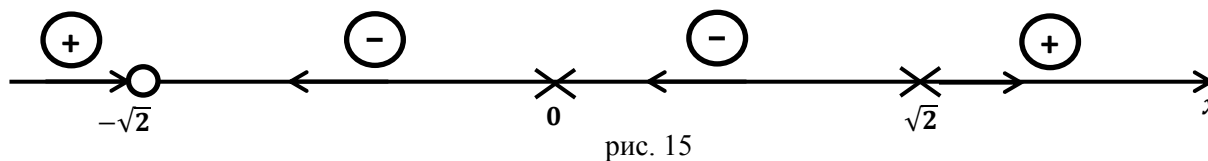
Следовательно, состояния равновесия x_1 и x_2 – неустойчивы, а значение $a = 0$ является бифуркационным. Система негрубая.

При $0 < a < 1$ система имеет четыре различных состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{a}}, x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{a}}, x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{a}}$. Фазовый портрет таков:



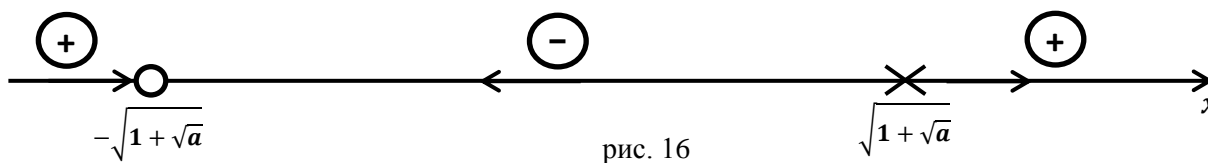
Состояния равновесия x_1 и x_3 – устойчивы, а x_2 и x_4 – неустойчивы.

При $a = 1$ корни $x_2 = x_3 = 0$, система (18) имеет три состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}$. Фазовый портрет в этом случае имеет вид:



Следовательно, состояния равновесия x_2 и x_3 – неустойчивы, x_1 – устойчиво, а значение $a = 1$ является бифуркационным. ДС негрубая.

При $a > 1$ система (18) имеет два состояния равновесия: $x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{a}}, x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{a}}$. Фазовый портрет таков:



Состояние равновесия x_1 – устойчиво, а x_2 – неустойчиво.

Таким образом, на оси параметра a возможны следующие ситуации, связанные с количеством и устойчивостью состояний равновесия исследуемого уравнения:

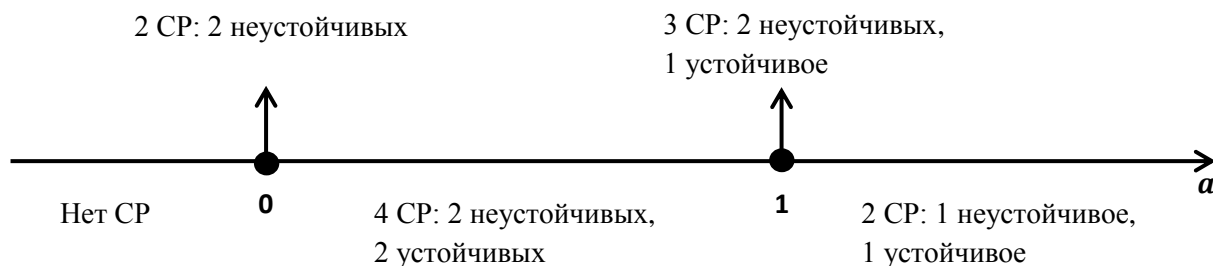


рис. 17

Задача 5. Динамическая система, описывающая количество рыбы в озере, подчиняется уравнению (обобщение модели В. И. Арнольда[5]):

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2 - c, \quad \alpha, \beta, c > 0, \quad (22)$$

где x – количество рыбы в водоеме в момент времени t ; α – скорость размножения рыбы, пропорциональная её текущей численности; слагаемое $-\beta x^2$ – отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции рыбы; c – квота вылова, отпущенная рыболовецкой бригаде. Найти бифуркационное значение c^* , при котором рыбы в водоеме не останется, и вылов прекратится.

Решение. Очевидно, что при некоторых значениях параметра c равновесие количества рыбы в водоеме будет конечным числом, зависящим от размножения и гибели, или, другими словами, количество рыбы будет стремиться к некоторому числу в результате совокупного действия вылова, гибели и рождаемости рыбы.

Найдем состояния равновесия уравнения (22), приравняв правую часть к нулю:

$$\beta x^2 - \alpha x + c = 0. \quad (23)$$

Корни уравнения (23) имеют вид:

$$x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4c\beta}}{2\beta}. \quad (24)$$

Из смысла задачи следует, что фазовым пространством является полупрямая $x > 0$. При $\alpha^2 > 4c\beta$ фазовый портрет будет следующим:

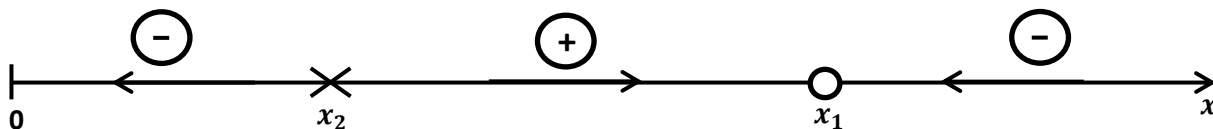


рис. 18

Таким образом, состояние равновесия $x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4c\beta}}{2\beta}$ – устойчиво.

Построим график зависимости $c(x)$, соответствующий состояниям равновесия: $c = \alpha x - \beta x^2$.

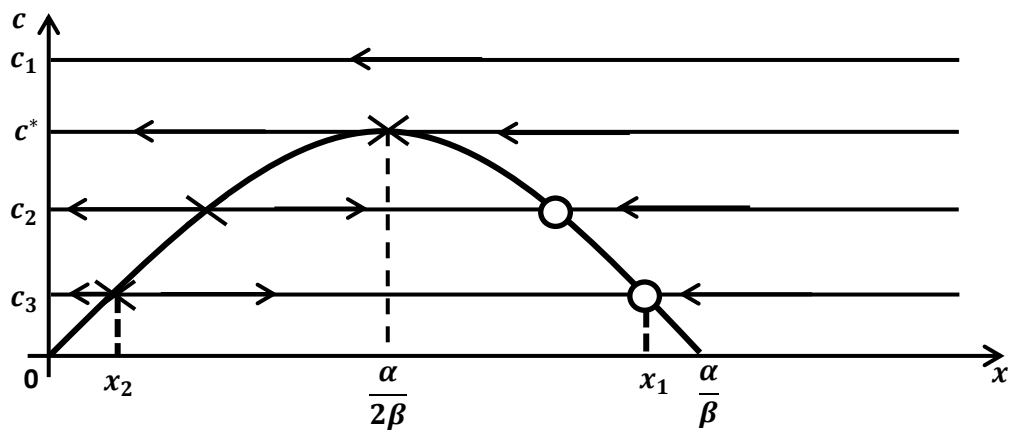


рис. 19

Вершина построенной части параболы (рис. 19) имеет координаты: $x = \frac{\alpha}{2\beta}$, $c = c^* = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, где c^* – бифуркационное значение параметра. Левая ветвь параболы соответствует неустойчивым СР x_2 , правая – устойчивым x_1 .

Из рис. 19 видно, что при любом значении параметра c от 0 до c^* , количество рыбы будет стремиться к $x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4c\beta}}{2\beta}$ (или к нулю, в зависимости от начального состояния системы). С ростом параметра наблюдается сближение двух СР, и при $c = c^*$ они сливаются в одно сложное неустойчивое СР $x = \frac{\alpha}{2\beta}$. Это означает, что при $c = c^*$ количество рыбы стремится к нулю (так же, как и при $c > c^*$), и вылов прекратится.

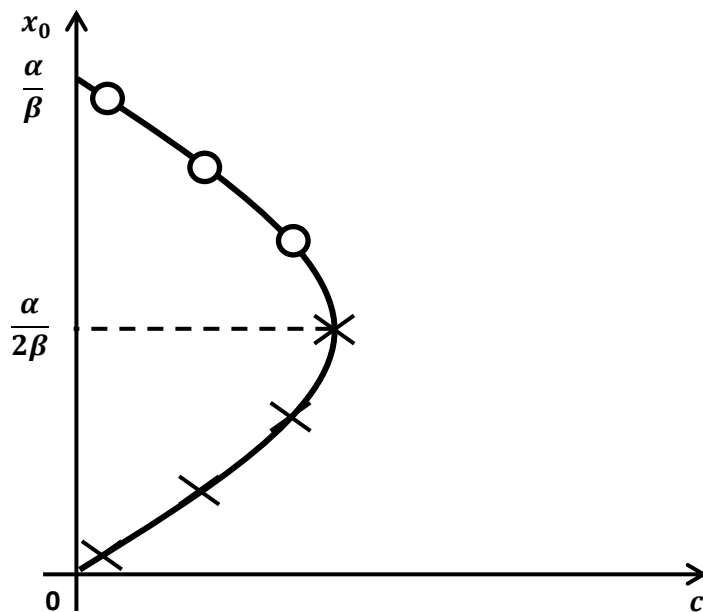


рис. 20

Так же как и в предыдущей задаче можно построить бифуркационную диаграмму в плоскости cx_0 (рис.20).

2.2. Бифуркационные границы при наличии нескольких параметров

Если у ДС первого порядка имеется несколько параметров, то полное исследование ее предполагает также изучение изменений фазового портрета от входящих параметров. Т.е. в пространстве параметров должны быть выделены бифуркационные границы, которые разделяют фазовую прямую на области с качественно различным поведением фазовых траекторий.

Задача 6. Построить фазовый портрет системы и определить бифуркационные соотношения между параметрами, если таковые существуют:

$$\dot{x} = ax^2 + bx + 1. \quad (25)$$

Решение. Состояния равновесия системы (25) находятся из уравнения

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 = 0. \quad (26)$$

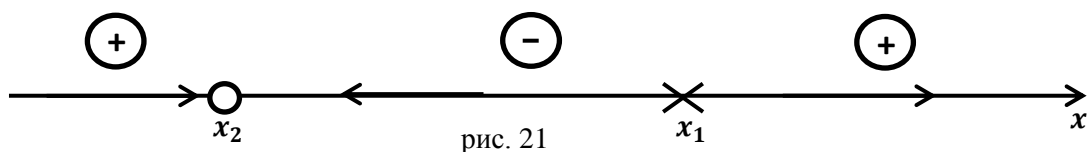
Дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4a. \quad (27)$$

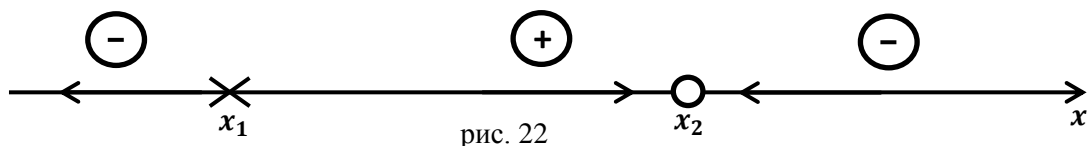
В зависимости от знака D возможны следующие ситуации на фазовой прямой.

1) $b^2 - 4a > 0$. Уравнение (26) имеет два действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$, и фазовые портреты в зависимости от знака a имеют вид:

a) При $a > 0$:

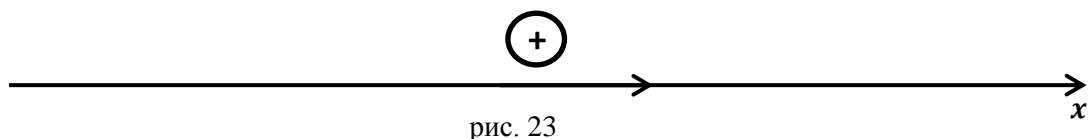


b) При $a < 0$:

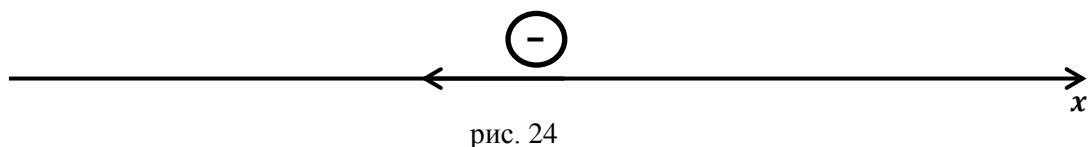


2) $b^2 - 4a < 0$. Уравнение (26) действительных корней не имеет.

a) При $a > 0$:



b) При $a < 0$:



3) $b^2 - 4a = 0$ – негрубый случай. Состояния равновесия x_1 и x_2 сливаются в одно $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

a) При $> 0 f(x) \geq 0$, и фазовый портрет имеет вид:

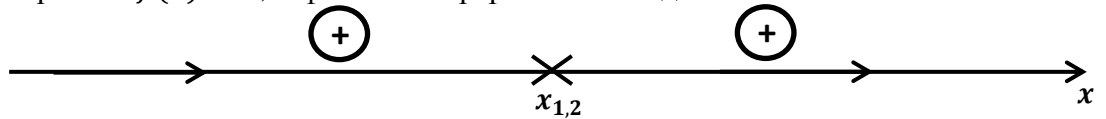


рис. 25

b) При $< 0 f(x) \leq 0$, и фазовый портрет таков:

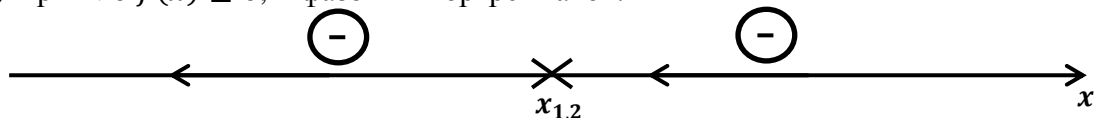


рис. 26

4) Для случая $a = 0$ в зависимости от знака параметра b фазовые портреты таковы:

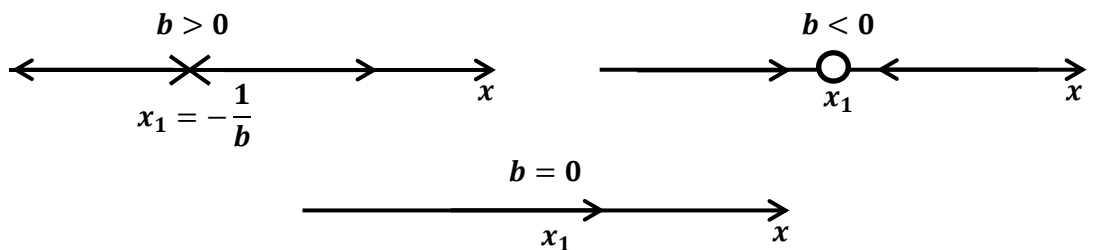


рис. 27

Из приведенных портретов следует, что зависимости $a = \frac{b^2}{4}$ и $a = 0$ являются бифуркационными, они разбивают плоскость параметров (a, b) на три области с качественно различными фазовыми портретами. На рис. 28 жирными линиями отмечены бифуркационные границы, и в образовавшихся областях приведены фазовые портреты.

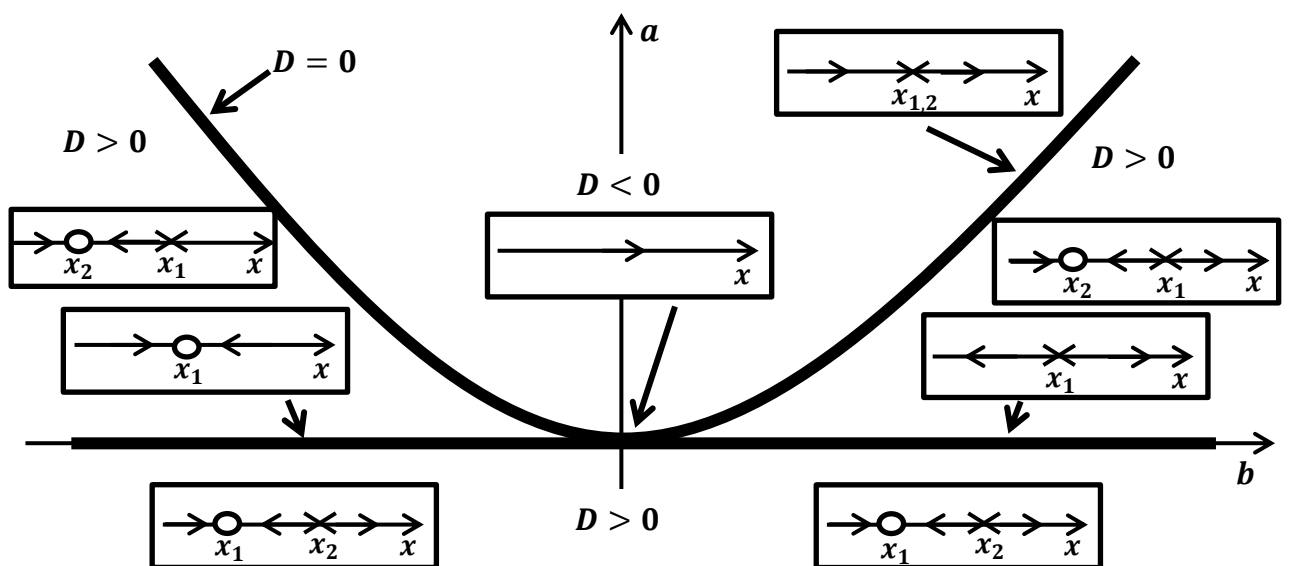


рис. 28

Задача 7. Построить бифуркационные кривые и фазовые портреты ДС:

$$\dot{x} = x^3 - x^2(a + b) + abx. \quad (28)$$

Решение. Состояния равновесия находятся из уравнения

$$x^3 - x^2(a + b) + abx = 0. \quad (29)$$

Путем разложения на множители левой части приходим к уравнению:

$$x(x - a)(x - b) = 0. \quad (30)$$

Из (30) получаем, что состояния равновесия имеют следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = a, x_3 = b$. В зависимости от значений a и b возможен ряд различных фазовых портретов.

При $a > 0, b < 0$ фазовый портрет имеет вид:

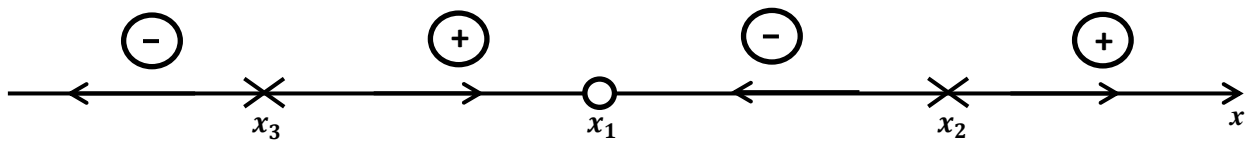


рис. 29

При $a > 0, b > 0, a > b$ фазовый портрет имеет вид:

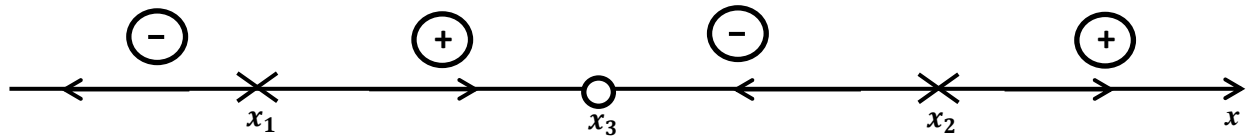


рис. 30

При $a < 0, b < 0, |b| > |a|$ фазовый портрет имеет вид:

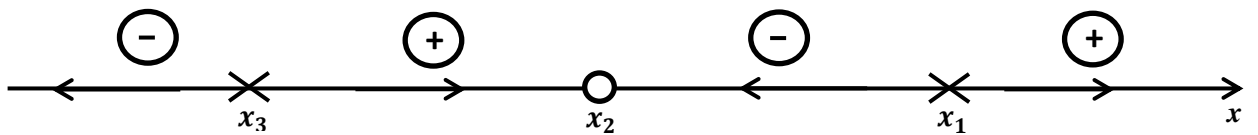


рис. 31

Можно привести еще несколько фазовых портретов с другими неравенствами относительно a и b , но качественных изменений не будет, будет меняться только нумерация состояний равновесия ($a \neq 0, b \neq 0$).

При $a = b$ $x_1 = 0, x_2 = x_3 = a$, имеем два неустойчивых состояния равновесия.

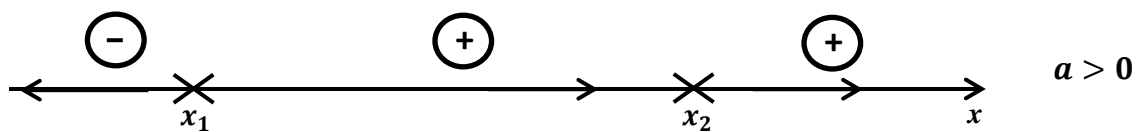


рис. 32

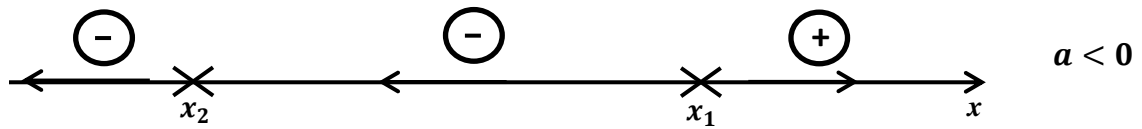


рис. 33

При $a = 0$ $x_1 = x_2 = 0, x_3 = b$, имеем два неустойчивых состояния равновесия.

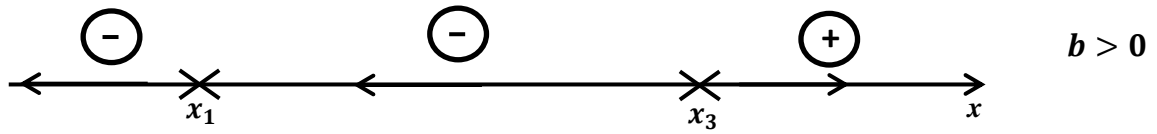


рис. 34

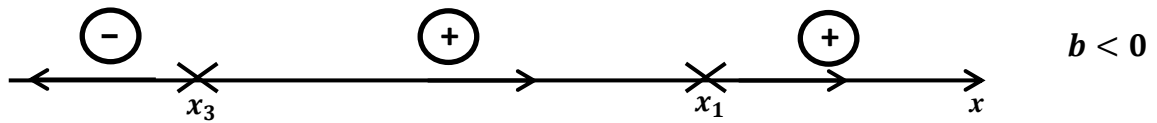


рис. 35

При $b = 0$ $x_1 = x_3 = 0, x_2 = a$, имеем два неустойчивых состояния равновесия.

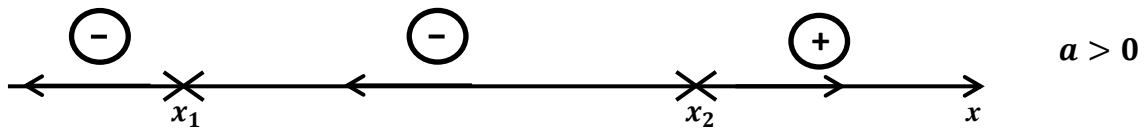


рис. 36

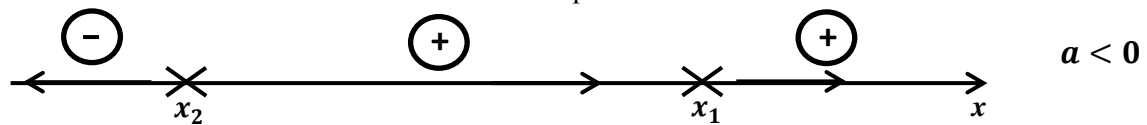


рис. 37

При $a = 0, b = 0$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, имеем одно неустойчивое состояния равновесия.

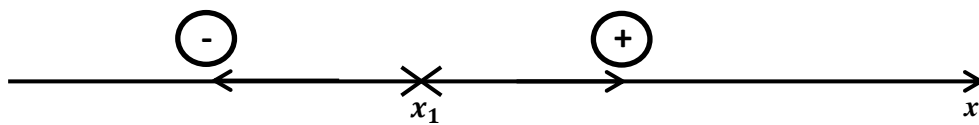


рис. 38

Проанализируем построенные фазовые портреты. На трех прямых $a = 0, b = 0$ и $a = b$, наблюдаются бифуркации в виде исчезновения одного из состояний равновесия. При $a = b = 0$ имеем одно неустойчивое состояние равновесия. Но прямые $a = 0, b = 0$ и $a = b$ не являются бифуркационными, так как области, на которые они разбивают фазовое пространство, имеют одинаковую качественную структуру. В данном случае можно говорить о бифуркациях на прямых, а при $a^2 + b^2 = 0$ – о бифуркации в точке.

На основании изложенного на плоскости параметров вместе с фазовыми портретами имеем следующую картину, представленную на рис. 39.

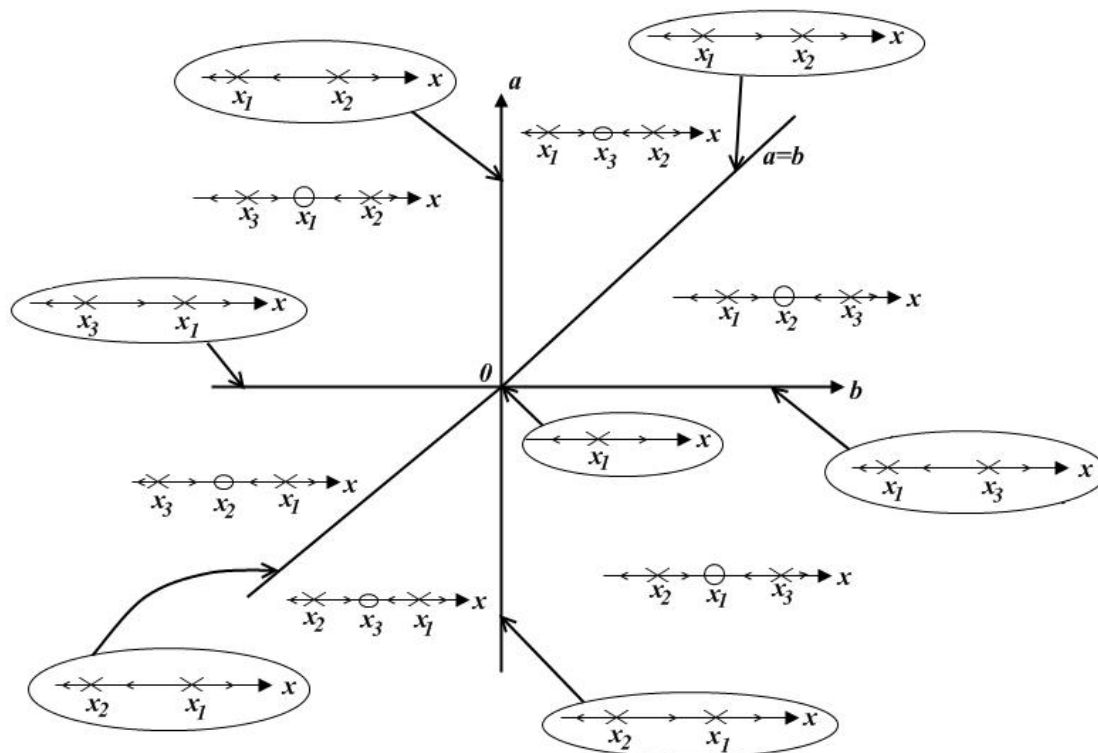


рис. 39

При наличии трех и более параметров в динамических системах нужно строить уже бифуркационные поверхности и гиперповерхности, что значительно усложняет исследование. Можно также фиксировать один из параметров, а другие менять.

2.3. Контрольные вопросы

12. Дайте определение бифуркационного значения параметра.
13. Какие бифуркации возможны в автономных системах с полустепенью свободы?
14. Какое значение параметра называется обыкновенным? Бифуркационным? Поясните это для случая ДС первого порядка.
15. Приведите пример автономной ДС первого порядка с одним параметром и постройте ее фазовый портрет. Укажите бифуркационные значения параметра, если они существуют.
16. Возможно ли в системах с полустепенью свободы наличие бифуркационных кривых? Бифуркационных поверхностей? В каких случаях?
17. Что такое бифуркация в точке?
18. Какие два смысла вкладываются в термин «полное исследование ДС»?
19. Что такое бифуркация на прямой? Бифуркация на кривой?

2.4. Задачи для самостоятельной работы

Построить фазовые портреты ДС с параметрами. Указать бифуркационные значения параметров (φ и ψ - углы). Все параметры действительны. Построить бифуркационные кривые.

51) $\dot{x} = x^3 - ax^2 - 2a^2x$.

52) $\dot{x} = \cos x - a \sin 2x$.

53) $\dot{x} = ax^2 + x^3, a \geq 0$.

54) $\dot{x} = \sqrt{x} - x - \sqrt{a}$.

55) $\dot{\varphi} = a \sin \varphi + b \sin^2 \varphi$.

56) $\dot{\varphi} = a \cos \varphi + b \cos^2 \varphi$.

57) $\dot{x} = ax^2 + \beta x^3$.

58) $\dot{x} = ax + bx^3, a \geq 0, b < 0$.

59) $\dot{\psi} = \operatorname{tg} \psi + a \operatorname{tg}^2 \psi$.

60) $\dot{\psi} = \sin 2\psi + a \sin \psi, a \geq 0$.

61) $\dot{\varphi} = a \sin \varphi + b \cos \varphi, a \neq 0, b \neq 0$.

62) $\dot{x} = a \sin x + a \cos x$.

63) $\dot{x} = ax^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

64) $\dot{x} = -14x^3 + 7ax^2 + 4$.

65) $\dot{x} = x^8 + ax^4 + b, b < 0$.

66) $\dot{x} = |x^2 - 4| + |x^2 - 9| - a$.

67) $\dot{x} = (1 + (2x - 2a - 3)^2)(1 + (x^2 + 2a + b)^2) - 4x + 4a + 6$.

68) $\dot{x} = |x + 1| + a|x - 2| - 3, a \leq 0$.

69) $\dot{\varphi} = 3 \sin \varphi + 4 \cos \varphi + a$.

70) $\dot{x} = x^4 + 2x^2 + 1 - b$.

71) $\dot{x} = ax^4 - x^3 + a^2x - a$.

72) $\dot{\varphi} = 6 \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi - a$.

73) Построить фазовый портрет ДС, описываемой уравнением (1) Ферхюльста–Перла.

74) Построить фазовые портреты ДС, описываемой обобщением Ферхюльста–Перла: $\dot{x} = \varepsilon x - \delta x^2 + N - M$, где N – число особей, поступающих в данную популяцию (например, из соседнего ареала), M – численность особей, покидающих популяцию, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, N и M – постоянны.

75) При каких a ДС $\dot{x} = \sqrt{8x - x^2 - 15} - ax + 1$ имеет единственное СР? Каков будет при этом фазовый портрет?

76) Найти все значения параметра β , при которых ДС $\dot{x} = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) - \beta$ имеет ровно три СР и построить фазовый портрет в этом случае.

77) Построить фазовый портрет ДС $\dot{x} = 3 \sin 3x - 4a + 7$.

78) При каких значениях параметра a ДС $\dot{x} = -(2x^2 - a)^2 + 13x^2 + 6x - 2a$ имеет три СР? Будут ли эти значения бифуркационными? Построить фазовые портреты в этих случаях.

79) При каких a у ДС $\dot{x} = \alpha x^2 - 2(\alpha + 1)x + 3\alpha - 1$ больше одного СР? Построить фазовые портреты в этих случаях.

80) При каких значениях a ДС $\dot{x} = (a - 1)9^x - 2a3^x + 2a + 2$ имеет единственное СР? Устойчиво ли оно? Построить фазовые портреты.

- 81) При всех значениях параметра a найти СР ДС $\dot{x} = (\alpha + 4x - x^2 - 1)(\alpha + 1 - |x - 2|)$. Устойчивы они или нет? Построить фазовые портреты.
- 82) При всех β найти СР ДС $\dot{x} = 1 + x^2 + x^4 - \beta(1 + x + x^2)$. Построить фазовые портреты.
- 83) Построить фазовый портрет динамической системы:
- $\dot{x} = \log_2(4^x - a) - x$.
 - $\dot{x} = \sqrt{x - \sqrt{x - a}} - a$.
 - $\dot{x} = x^2 - \alpha + \sqrt{x + \alpha}$. Сколько СР может иметь данная ДС?
 - $\dot{x} = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} - a$.
 - $\dot{\varphi} = (\cos 4\varphi - \cos 2\varphi)^2 - \sin^2 3\varphi - 5$.
 - $\dot{x} = \sin^6 x + \cos^6 x - a$.
 - $\dot{\varphi} = \sin^8 \varphi + \cos^8 \varphi + b$.
- 84) $\dot{x} = \mu - x^2 - x^3$.
- 85) $\dot{x} = \mu + x^2 - x^4$.
- 86) $\dot{x} = \mu x^2 + x^3$.
- 87) $\dot{x} = x - \mu x^3$.
- 88) $\mu x = x^2 + x^3$.
- 89) $\dot{x} = x^3 - \mu x^4$.
- 90) $\dot{x} = \mu x - x^2$.
- 91) Построить бифуркационные границы и фазовый портрет ДС с параметрами. Все параметры действительны.
- $\dot{x} = ax + b$.
 - $\dot{x} = ax^2 + b$.
 - $\dot{x} = ax^2 - bx$.
 - $\dot{x} = ax^4 - bx^2$.
 - $\dot{x} = x^2 + bx + c$.
 - $\dot{x} = bx^4 + a$.
 - $\dot{x} = ax^3 - bx$.
 - $\dot{x} = x^3 + ax^2 + bx$.
 - $\dot{x} = \sqrt{x} + ax + \sqrt{b}$.
 - $\dot{x} = |x + a| + |x - a| - b$.
 - $\dot{x} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} - \sqrt{x^2 - 2bx + b^2}, a > 0, b > 0, a > b$.
- 92) Построить портрет ДС, описывающей модель демографического прогнозирования при $\gamma = 2$ (стр. 5).
- 93) Динамика ротора описывается уравнением $I\ddot{\varphi} = M(\varphi)$, где φ – угол, а $M(\varphi)$ – момент сил действующих на вал, I – момент инерции. Построить фазовые портреты и определить бифуркационные соотношения параметров, если:
- $M = M_0 + \alpha\varphi$.
 - $M = \beta\omega - \omega^2, \omega = \dot{\varphi}$ здесь и далее.
 - $M = \beta\omega - \gamma\omega^2, \beta > 0, \gamma > 0$.
 - $M = \omega - \omega^2 - \omega^3$.
 - $M = \alpha\omega + \beta\omega^3$.
 - $M = \alpha\omega + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3$.
 - $M = M_0 + \alpha\omega + \beta\omega^2$.

Список литературы

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 916 с.
2. Ю. И. Гильдерман. Лекции по высшей математике для биологов. – Новосибирск: Наука, 1974. – 412 с.
3. А. Я. Моничев, В. М. Афонин. Особенности глобального демографического прогнозирования с учетом зависимости рождаемости и смертности от численности населения планеты. Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского (серия биологическая), Т.1 (в. 5), 2002.
4. В. Д. Горяченко. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.
5. В. И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 344 с.