

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

А.В. Якимов

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ

Электронное учебное пособие

Рекомендовано Учёным советом радиофизического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.03 и 03.04.03 “Радиофизика” (бакалавриат и магистратура),
02.03.02 “Фундаментальная информатика
и информационные технологии” (бакалавриат),
а также специальности 10.05.02 “Информационная безопасность
телекоммуникационных систем”

Нижний Новгород
2016

УДК 621.391.822
ББК 32.841
Я45

Рецензенты: д.т.н., профессор **И.Я. Орлов**, д.т.н., профессор **В.Р. Фидельман**.

Я45 Якимов А.В. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: ННГУ, 2016. – 107 с.

Целью курса является ознакомление с физическими механизмами возникновения, методами учёта и описания электрических шумов и флуктуаций параметров в радиоэлектронных приборах (в основном, твердотельных).

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 и 03.04.03 “Радиофизика” (бакалавриат и магистратура), 02.03.02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии” (бакалавриат), а также специальности 10.05.02 “Информационная безопасность телекоммуникационных систем”. Оно также будет полезно для студентов ВУЗов, изучающих физику полупроводниковых приборов. В основу пособия легли курсы лекций, читавшиеся автором студентам старших курсов радиофизического факультета ННГУ на протяжении более 20 лет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России: государственное задание образовательным организациям высшего образования, подведомственным Минобрнауки России, в сфере научной деятельности, «Проведение научно-исследовательских работ (фундаментальных научных исследований, прикладных научных исследований и экспериментальных разработок)», код проекта 2183. Работа поддержана грантом (соглашение от 27 августа 2013г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Ответственный за выпуск:

заместитель председателя методической комиссии радиофизического факультета ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**.

УДК 621.391.822
ББК 32.841

© **А.В. Якимов, 2016**
© **Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Классификация и описание шумов	7
1.1. Классификация шумов	7
1.2. Функция корреляции и спектры	9
1.3. Мощность шума в полосе частот	10
2. Тепловой шум	13
2.1. Формула Найквиста	13
2.2. Учёт квантовомеханических эффектов	15
2.3. Шум комплексного двухполосника	16
2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка	17
2.3.2. Последовательная RC–цепочка	22
2.3.3. Высокодобротный колебательный контур	25
3. Дробовой шум	29
3.1. Дробовой шум как пуассоновский случайный процесс	31
3.2. Формула Шотки для спектра дробового шума	33
3.2.1. Эффект депрессии дробового шума	34
3.2.2. Учёт конечности времени пролёта носителей	34
3.2.3. Нестационарный дробовой шум	36
4. Генерационно–рекомбинационный шум	38
4.1. Общие сведения	38
4.2. Уравнение Ланжевена для ГРШ	39
4.3. Спектр генерационно–рекомбинационного шума	41
4.4. Мультипликативный характер ГРШ	43
4.5. Вывод уравнения Ланжевена	46
5. Шум лавинообразования	49
5.1. Введение	49
5.2. Спектр стационарного шума. Формула А.С. Тагера	52
5.3. Статистический анализ процесса лавинообразования	54
5.3.1. Элементы теории “горячих” носителей тока	54
5.3.2. Шум развитого лавинного пробоя	56
5.3.3. Шум частичного лавинного пробоя	58
6. Взрывной шум	60
7. Фликкерный шум	63
7.1. Введение	63
7.2. Форма спектра фликкерного шума	65
7.3. Спектрально-корреляционный анализ фликкерного шума	67
7.4. Нестационарность фликкерного шума	69
7.5. Мультипликативность фликкерного шума	70
7.5.1. Эксперимент 1	70

7.5.2. Эксперимент 2	71
8. Основные модели фликкерного шума	74
8.1. Модель Дю Пре – Ван дер Зила	74
8.1.1. Спектр фликкерного шума как суперпозиция лоренцевых спектров	74
8.1.2. Термоактивированные процессы, как причина фликкерного шума	78
8.2. Модель Мак Уортера – Ван дер Зила	80
8.3. Фликкерные импульсные последовательности	82
8.3.1. Общий подход	82
8.3.2. Модель Шенфельда – Малахова	84
8.3.3. Модель Халфорда	86
8.3.4. Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа	88
8.4. Модель двухуровневых систем	90
8.5. Эмпирическая формула Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме	91
9. Методы эквивалентного представления шумов	93
9.1. Коэффициент шума двухполюсника	94
9.2. Эквивалентная шумовая температура	95
9.3. Эквивалентное шумовое сопротивление	96
9.4. Эквивалентная шумовая проводимость	97
9.5. Взаимосвязь шумовых параметров формулы Найквиста	97
9.6. Эквивалентный шумовой ток (насыщенного диода)	99
9.7. Взаимосвязь описаний по Найквисту и Шотки	100
Контрольные вопросы	102
Библиография	106

Введение

Цель курса – ознакомление с физическими механизмами шумообразования, методами учета и описания шумов и флуктуаций параметров в радиоэлектронных приборах (в основном, твердотельных).

В основу излагаемого курса легло учебное пособие автора [1], изданное на основе ранее разработанных оригинальных курсов.

Термины “шум” и “флуктуации” можно рассматривать как синонимы. Однако, как правило, под шумами подразумеваются электрические шумы, например, шумы напряжения и тока. Термин “флуктуации” ассоциируется с флуктуациями параметров, например, сопротивления, либо ёмкости радиоэлектронного элемента.

Шумы являются фактором, ограничивающим функциональные возможности практически всех радиоэлектронных устройств. В качестве примера можно привести следующие важные для нас приложения:

- радиосвязь;
- измерительные устройства (прецизионные);
- стандарты частоты и времени.

Рассмотрим, например, радиосвязь, условная структура которой приведена на Рис. В.1.

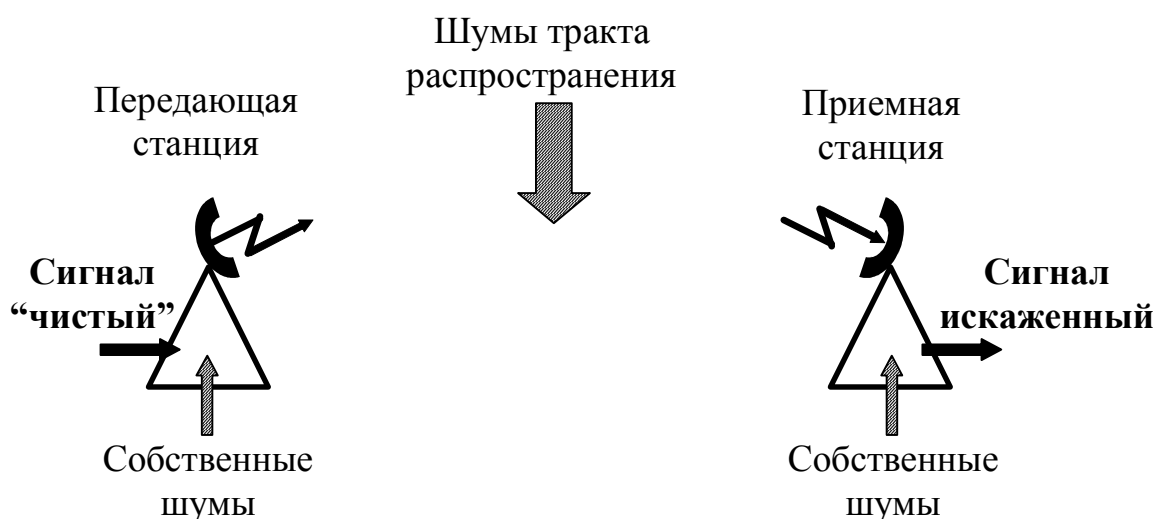


Рис. В.1. Условная структура системы радиосвязи с выделенными источниками шумов

Здесь выделены источники действующих шумов, которые присутствуют не только в передающей и приёмной станциях, но и в тракте распространения сигнала (например, радиоволны). Эти шумы (а также флуктуации параметров) ограничивают как дальность, так и надёжность передачи полезного сигнала.

Другим примером являются шумы и флуктуации параметров в стандартах частоты и времени.

На сегодняшний день долговременная относительная стабильность частоты стандарта, составляющая $\delta f = 10^{-14}$, является пройденным этапом. Не вдаваясь в детали приведенного термина, отметим, что точность хода часов, основанных на таком стандарте, составляет 1 мкс за 3 года (примерно 10^8 с).

Однако для ряда задач такая точность не является достаточной.

В частности, для проверки основных положений общей теории относительности требуется стабильность частоты порядка 10^{-15} (см., например, [2], разд. 8), кстати, уже достигнутая.

Заметим, что шумы могут нести полезную информацию. Например, объектом исследования в радиоастрономии является шумовое излучение планет и звёзд. Однако эта тема выходит за рамки настоящего курса.

1. Классификация и описание шумов

Этот раздел носит условный характер. Поскольку шумы существуют, их надо классифицировать.

1.1. Классификация шумов

Существуют разные, сложившиеся исторически, методы классификации шумов:

- естественные и технические;
- аддитивные и мультипликативные.

Естественными называют шумы, вызванные фундаментальными физическими причинами, например,

- диссипацией энергии, характеризующейся постоянной Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;
- дискретностью заряда электрона, $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

К **техническим** относят шумы, вызванные несовершенством технологии изготовления прибора. Исторически техническим называли фликкерный шум – весьма специфический тип шума, о котором, как и об остальных шумах, речь пойдет ниже. В настоящее время термин “технический шум” практически не используется.

Аддитивным называют шум, обычно в токе, либо напряжении, статистические характеристики которого не зависят ни от напряжения, приложенного к прибору, ни от протекающего через прибор тока.

Например, аддитивным является тепловой шум, выделяющийся на резисторе, см. Рис. 1.1.

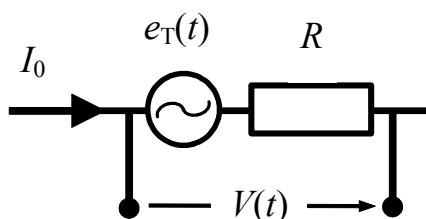


Рис. 1.1. Резистор с учетом эдс теплового шума

Полное напряжение V , выделяющееся на резисторе, содержит две компоненты:

$$V(t) = V_0 + e_T(t).$$

Здесь $V_0 = I_0 \cdot R$ – падение напряжения на резисторе, $e_T(t)$ – эдс теплового шума, генерируемого резистором.

Тепловой шум моделируется на представленном рисунке эквивалентным генератором напряжения. Этот шум всегда присутствует на выводах резистора. Его статистические характеристики не зависят от величины тока I_0 , протекающего через резистор (разумеется, при достаточно малом токе, не приводящем к заметному нагреву резистора).

Под **мультипликативным** понимается шум, вызванный флуктуациями параметров элемента и проявляющийся при приложении напряжения к этому элементу, либо пропускании через него электрического тока.

Например, мультипликативную природу имеет шум $v(t)$, выделяющийся на резисторе, обладающем флуктуациями сопротивления, см. Рис. 1.2.

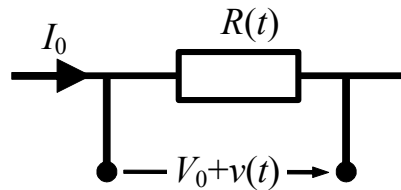


Рис. 1.2. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления

Допустим, что сопротивление R резистора подвержено флуктуациям:

$$R = R(t) = R_0 + \Delta R = R_0 \cdot (1 + \delta R) .$$

Здесь R_0 – невозмущенное сопротивление резистора, $\Delta R = \Delta R(t)$ – абсолютные флуктуации, $\delta R = \delta R(t) = \Delta R(t)/R_0$ – относительные флуктуации сопротивления.

При пропускании через резистор фиксированного тока I_0 на его выводах выделяется напряжение

$$V(t) = V_0 + v(t) .$$

Здесь $V_0 = I_0 \cdot R_0$ – невозмущенное значение падения напряжения на резисторе. Шумовое напряжение $v(t)$ обусловлено наличием флуктуаций сопротивления:

$$v(t) = I_0 \cdot \Delta R(t) = V_0 \cdot \delta R(t) .$$

Видим, что шумовое напряжение является лишь отображением флуктуаций сопротивления резистора. В данном примере эти флуктуации являются первичным источником. Они имеют мультипликативный характер. То есть для наблюдения флуктуаций сопротивления необходимо пропустить через резистор электрический ток, либо приложить напряжение.

При этом подразумевается, что статистические характеристики флуктуаций сопротивления не зависят ни от приложенного напряжения V_0 , ни от протекающего тока I_0 .

Перейдём к описанию статистических характеристик случайных процессов (см. например, [3], [4], [5], [6]).

1.2. Функция корреляции и спектры

Функция корреляции $\Phi_x(\tau)$, если она существует, определяется для случайного процесса $x(t)$ следующим образом:

$$\Phi_x(\tau) = \overline{\langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle}. \quad (1.1)$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по полному ансамблю реализаций, а черта сверху – усреднение по времени. Из приведенного определения, в частности, следует, что полная мощность случайного процесса $x(t)$ определяется значением функции корреляции при нулевом аргументе:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \Phi_x(0). \quad (1.2)$$

Перейдем к спектрам.

В теоретическом анализе удобно использовать понятие **математического** (двухстороннего) спектра $S_x(\omega)$, определенного для отрицательных и положительных угловых частот $\omega \in (-\infty; +\infty)$. Этот спектр и функция корреляции $\Phi_x(\tau)$ являются парой Фурье–сопряжённых функций:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(j\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Соотношения (1.3) известны как формулы Винера–Хинчина, см., например, [4], [7].

Обе эти функции обладают свойством чётности:

$$S_x(-\omega) = S_x(\omega),$$

$$\Phi_x(-\tau) = \Phi_x(\tau). \quad (1.4)$$

Примем во втором соотношении системы (1.3) $\tau = 0$ и учтём, что $\exp(0) = 1$. Учтём затем определение полной мощности случайного процесса через функцию корреляции, представленное соотношением (1.2). В результате получим соотношение, разъясняющее смысл спектра процесса:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \int_0^{\infty} 2S_x(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.5)$$

– спектр есть разложение полной мощности процесса по частоте. Здесь учтено свойство чётности спектра, позволившее перейти к интегрированию только по положительным частотам.

В измерениях используется так называемый **физический спектр** $\langle x^2 \rangle_f$. Он является односторонним и определён для циклической частоты $f = \omega/2\pi$, $f \geq 0$. Учитывая смысл спектра, представленный соотношением (1.5), для физического спектра имеем:

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \int_0^{\infty} \langle x^2 \rangle_f df. \quad (1.6)$$

Сравним разложения (1.5) и (1.6) полной мощности процесса по частоте. Отсюда найдём связь между физическим (односторонним) и математическим (двухсторонним) спектрами:

$$\langle x^2 \rangle_f = 2S_x(2\pi f), f \geq 0. \quad (1.7)$$

То есть физический спектр равен удвоенному математическому спектру.

1.3. Мощность шума в полосе частот

В соответствии со смыслом спектра, как разложения полной мощности, определим мощность процесса $\langle x^2(\Delta f) \rangle$, сосредоточенную в диапазоне частот $[f_1; f_2]$:

$$\langle x^2(\Delta f) \rangle = \int_{f_1}^{f_2} \langle x^2 \rangle_f df, \Delta f = f_2 - f_1. \quad (1.8)$$

Примечание

Здесь в обозначении мощности опущена черта сверху, означающая усреднение по времени. Это усреднение, если оно было необходимо, уже выполнено при определении спектра $\langle x^2 \rangle_f$ анализируемого процесса $x(t)$.

Если шум является белым, либо полоса анализируемых частот достаточно мала, так что $\langle x^2 \rangle_f = \text{const}$ при $f \in [f_1; f_2]$, то

$$\langle x^2(\Delta f) \rangle = \langle x^2 \rangle_f \cdot \Delta f. \quad (1.9)$$

– полная мощность шума равна произведению его спектра на ширину диапазона анализируемых частот.

Определим понятие **эффективного значения** шума $x_{\text{эфф}}(\Delta f)$ в заданной полосе $\Delta f = f_2 - f_1$ анализируемых частот. Под этой величиной принято понимать квадратный корень из мощности шума:

$$x_{\text{эфф}}(\Delta f) = \sqrt{\langle x^2(\Delta f) \rangle}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.9) и (1.10) иногда используются для описания источников шумов в радиоэлектронных схемах, см., например, [6]. Пример такого описания приведён на Рис. 1.3.

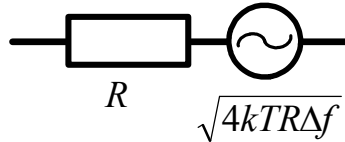


Рис. 1.3. Резистор с источником теплового шума

На рисунке изображён резистор и источник напряжения генерируемого им теплового шума. Надпись рядом с генератором напряжения, моделирующим тепловой шум, характеризует эффективное напряжение шума $v_{эфф}$ в полосе Δf .

Из соотношения (1.9) можно определить **размерность спектра**. Для этого преобразуем указанное соотношение следующим образом:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{\langle x^2(\Delta f) \rangle}{\Delta f}.$$

Отсюда получим выражение для определения размерности спектра:

$$[\langle x^2 \rangle_f] = \frac{[x]^2}{[f]} = \frac{[x]^2}{\Gamma_{ц}}. \quad (1.11)$$

Например, для спектра шумового напряжения, $[x] = В$, получим

$$[\langle x^2 \rangle_f] = В^2/\Gamma_{ц}. \quad (1.12)$$

Если же в роли анализируемого случайного процесса $x(t)$ рассматриваются флуктуации частоты какого-либо сигнала (например, выходного сигнала стандарта частоты и времени), то для спектра получаем размерность $[\Gamma_{ц}^2/\Gamma_{ц}]$. Здесь “сокращать” герцы не рекомендуется, иначе может сложиться впечатление, что речь идёт о частоте, а не спектре.

Пример 1.1

Имеется белый шум $v(t)$ со спектром $\langle v^2 \rangle_f = 2 \cdot 10^{-20} В^2/\Gamma_{ц}$.

Надо найти эффективное напряжение шума $v_{эфф}(\Delta f)$ в полосе частот усилителя низкой частоты (УНЧ), $0 \div 20$ кГц.

Решение

Используя соотношение (1.9), найдём выражение для мощности шума в заданной полосе частот:

$$\langle v^2(\Delta f) \rangle = \int_0^{f_B} \langle v^2 \rangle_f \cdot df = \langle v^2 \rangle_f \cdot f_B. \quad (1.13)$$

Здесь диапазон анализируемых частот совпадает со значением верхней частоты анализа, $\Delta f = f_B = 20$ кГц = $2 \cdot 10^4$ Гц. Для полной мощности шума имеем:

$$\langle v^2(\Delta f) \rangle = 2 \cdot 10^{-20} [В^2/\Gamma_{ц}] \cdot 2 \cdot 10^4 [\Gamma_{ц}] = 4 \cdot 10^{-16} [В^2]. \quad (1.14)$$

Отсюда, согласно (1.10), находим эффективное напряжение шума:

$$v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = \sqrt{\langle v^2(\Delta f) \rangle} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ В} = 20 \text{ нВ}. \quad (1.15)$$

В этом примере рассмотрен тепловой шум резистора с сопротивлением $R = 1 \text{ Ом}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$.

Если $R = 10^6 \text{ Ом} = 1 \text{ МОм}$, то $v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = 20 \text{ мкВ}$.

Иногда встречается описание эффективного напряжения шума v_f на заданной частоте анализа f с указанием размерности $[\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}]$. Эта величина определяет эффективное напряжение, действующее в полосе 1 Гц .

Если вернуться к примеру, приведённому выше, то вместо спектра $\langle v^2 \rangle_f = 2 \cdot 10^{-20} \text{ В}^2/\text{Гц}$ следует привести значение

$$v_f = \sqrt{\langle v^2 \rangle_f} = \sqrt{2 \cdot 10^{-20} [\text{В}^2/\text{Гц}]} \approx 1.4 \cdot 10^{-10} [\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}]. \quad (1.16)$$

Таким образом, в полосе $\Delta f = 1 \text{ Гц}$ эффективное напряжение шума есть

$$\begin{aligned} v_{\text{эфф}}(1 \text{ Гц}) &= v_f \cdot \sqrt{\Delta f} \approx \\ &\approx 1.4 \cdot 10^{-10} [\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}] \cdot \sqrt{1 [\text{Гц}]} = 1.4 \cdot 10^{-10} [\text{В}]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Соответственно, в полосе $\Delta f = 20 \text{ кГц}$ получим:

$$v_{\text{эфф}}(20 \text{ кГц}) = 1.4 \cdot 10^{-10} [\text{В}/\sqrt{\text{Гц}}] \cdot \sqrt{2 \cdot 10^4 [\text{Гц}]} = 2 \cdot 10^{-8} [\text{В}]. \quad (1.18)$$

Аналогичное описание встречается и в описании токового шума, но, естественно, с использованием размерности $[\text{А}/\sqrt{\text{Гц}}]$.

2. Тепловой шум

Англоязычное название теплового шума – thermal noise.

Условием существования теплового шума является наличие диссипации энергии.

Рассмотрим идеальный резистор (Рис. 2.1), имеющий сопротивление R и находящийся в термостате при абсолютной температуре T . Иначе говоря, резистор находится в **термодинамическом равновесии** с окружающей средой.

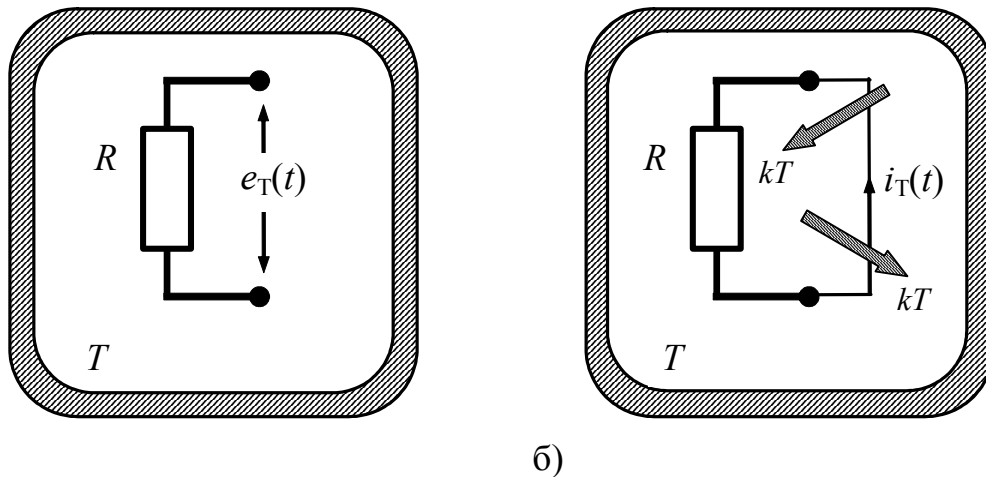


Рис. 2.1. Идеальный резистор в термостате:
(а) разомкнутые выводы; (б) короткозамкнутые выводы

На выводах разомкнутого резистора (Рис. 2.1–а) проявляется эдс теплового шума $e_T(t)$, возникающая из-за хаотического (теплового) движения носителей тока внутри его.

При замыкании выводов резистора (Рис. 2.1–б) образуется контур, через который протекает случайный ток $i_T(t)$.

2.1. Формула Найквиста

Для определения спектра теплового шума обратимся к теореме Кирхгофа. Согласно этой теореме **излучательная** способность тела на определённой частоте прямо пропорциональна его **поглощательной** способности на той же частоте.

Излучательная способность резистора определяется его абсолютной температурой T . Соответственно, по определению, поглощательная способность определяется сопротивлением R .

Таким образом, спектр теплового шума должен быть пропорционален произведению температуры и сопротивления, $\langle e_T^2 \rangle_f \sim TR$.

Кроме того, в выражение для спектра теплового шума должна входить постоянная Больцмана k .

В используемой нами системе единиц СИ спектр теплового шума определяется формулой Найквиста:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR \text{ [В}^2\text{/Гц]} . \quad (2.1)$$

При замыкании выводов резистора (Рис. 2.1–б), как уже отмечалось выше, через переключку потечёт шумовой ток $i_T(t)$. Этот ток обусловлен тепловым движением носителей в резисторе.

Можно также считать, что ток $i_T(t)$ обусловлен обменом квантами энергии между короткозамкнутым резистором и термостатом.

Энергия отдельного кванта составляет $kT/2$, где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Именно такой подход используется в ФДТ (флуктуационно–диссипационной теореме).

Формула Найквиста для спектра тока теплового шума выглядит следующим образом:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kTG \text{ [А}^2\text{/Гц]} . \quad (2.2)$$

Здесь $G = 1/R$ – проводимость резистора, выражаемая в Сименсах [См].

Приведем две эквивалентные схемы идеального резистора (Рис. 2.2), в которых тепловой шум учитывается либо генератором напряжения $e_T(t)$, либо генератором тока $i_T(t)$.

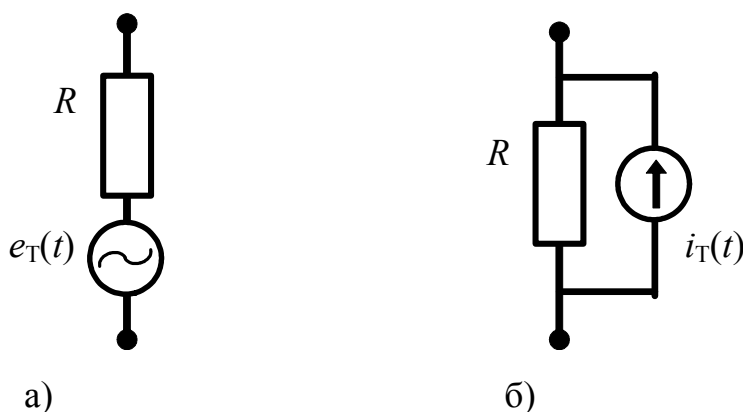


Рис. 2.2. Эквивалентные схемы для учета теплового шума:
(а) генератором напряжения, (б) генератором тока.

Представленные схемы полностью эквивалентны друг другу.

Напомним, что внутреннее сопротивление идеального генератора напряжения равно нулю, $R_{eT} = 0$, а идеального генератора тока – бесконечности, $R_{iT} = \infty$.

Если резистор **разомкнут**, на его выводах действует эдс теплового шума $e_T(t)$. Генератор тока $i_T(t)$, в случае разомкнутого резистора, приводит к тому, что на резисторе выделяется напряжение

$$e_T(t) = i_T(t) \cdot R.$$

При коротком замыкании резистор “отдает” во внешнюю цепь ток

$$i_T(t) = e_T(t)/R .$$

Спектр этого тока равен

$$\langle i_T^2 \rangle_f = \langle e_T^2 \rangle_f / R^2 = 4kTR / R^2 = 4kTG.$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (2.2).

Вышеприведенные варианты формулы Найквиста получены в рамках “классической” ФДТ, не учитывающей квантовомеханические эффекты. Именно поэтому полученный спектр не зависит от частоты, то есть тепловой шум имеет характер белого шума.

Этот результат, разумеется, не верен.

2.2. Учёт квантовомеханических эффектов

При $f \rightarrow \infty$ спектр должен достаточно быстро стремиться к нулю, так, чтобы на высоких частотах не было неинтегрируемой особенности:

$$\langle e_T^2 \rangle = \int_0^{\infty} \langle e_T^2 \rangle_f df < \infty.$$

Иначе говоря, тепловой шум должен иметь конечную мощность, удовлетворяя требованию недопустимости так называемой “ультрафиолетовой катастрофы”.

Учет квантовомеханических эффектов приводит к следующей модификации формулы Найквиста для спектра эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR \frac{(hf/kT)}{\exp(hf/kT) - 1} \quad [\text{В}^2 / \text{Гц}]. \quad (2.3)$$

Здесь $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Вид спектра, полученного в рамках квантовой ФДТ, приведён на Рис. 2.3.

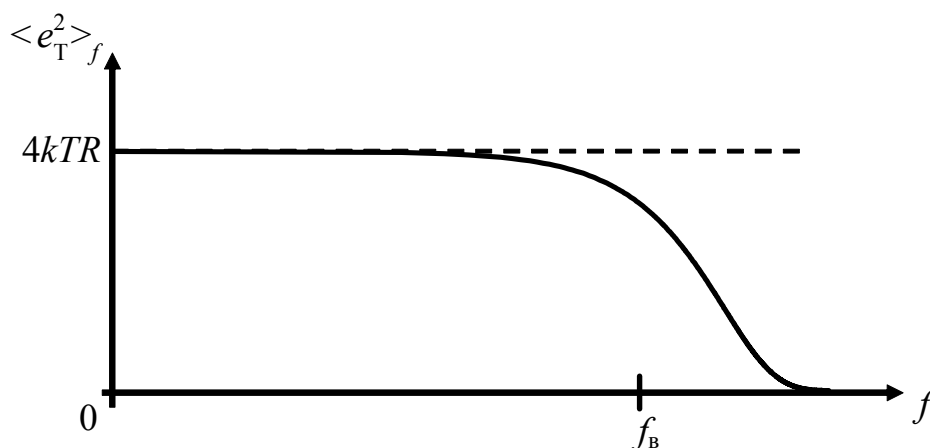


Рис. 2.3. Спектр эдс теплового шума согласно квантовой ФДТ

Верхняя частота этого спектра, называемая также частотой среза, равна

$$f_b = kT/h. \quad (2.4)$$

При $T = 300$ К данная частота равна $6.2 \cdot 10^{12}$ Гц = 6.2 ТГц. Это соответствует длине волны, составляющей 0.05 мм. Таким образом, вплоть до миллиметрового диапазона тепловой шум можно считать “белым”, то есть не учитывать зависимость его спектра от частоты. Однако для криогенной радиотехники, а также в диапазоне терагерц и выше зависимость спектра теплового шума от частоты может оказаться существенной.

Заметим, что в рамках квантовой ФДТ мощность теплового шума имеет конечное значение. Эту мощность можно оценить как произведение высоты спектра (на нулевой частоте) и верхней частоты (2.4):

$$\langle e_T^2 \rangle \approx \langle e_T^2 \rangle_{f=0} \cdot f_b = 4(kT)^2 R/h.$$

Точное вычисление мощности теплового шума путём интегрирования его спектра (2.3) в пределах от нуля до бесконечности даёт результат примерно в полтора раза больше. Однако данные оценки представляют только теоретический интерес. В природе идеальных резисторов не существует. Все резистивные элементы обладают инерционностью, которая приводит к трансформации спектра теплового шума.

2.3. Шум комплексного двухполюсника

Приведённая выше формула Найквиста справедлива только для **идеального резистора**. Реальные резисторы обладают инерционностью. Поэтому формулу Найквиста следует модифицировать для комплексного линейного двухполюсника.

Импеданс Z такого двухполюсника зависит от частоты и состоит из вещественной и мнимой компонент:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega), \quad \omega = 2\pi f.$$

Здесь $R(\omega) = \text{Re } Z(\omega)$ – активное сопротивление двухполюсника, характеризующее диссипацию энергии, ответственную за возникновение теплового шума.

Заметим, что понятие импеданса, называемого также комплексным сопротивлением, ввёл **Хевисайд** (Oliver Heaviside) в 1888 году.

Таким образом, формула Найквиста (2.1) для спектра эдс теплового шума, характеризующего напряжение на выводах **разомкнутого** двухполюсника, принимает следующий вид:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot \text{Re} Z(2\pi f) \text{ [В}^2\text{/Гц]}. \quad (2.5)$$

Для спектра тока теплового шума **короткозамкнутого** двухполюсника, соответственно, имеем:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot \operatorname{Re} Y(2\pi f) \text{ [A}^2/\text{Гц]}. \quad (2.6)$$

Здесь

$$Y(2\pi f) = G(2\pi f) + jB(2\pi f)$$

– комплексная проводимость (адмитанс) двухполюсника. Связь **активных** компонент проводимости и импеданса имеет следующий вид:

$$G = R / |Z|^2, R = G / |Y|^2.$$

В случае идеального резистора получаем известную связь: $G = 1/R$.

2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка

Задание 1. Шумовое напряжение

Найдём спектр $\langle e_T^2 \rangle_f$ и полную мощность $\langle e_T^2 \rangle$ эдс $e_T(t)$, описывающей тепловой шум на **разомкнутых** выводах интегрирующей RC – цепочки (см. Рис. 2.4).

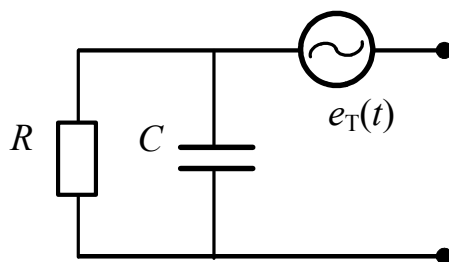


Рис. 2.4. Эквивалентная схема интегрирующей RC – цепочки с генератором напряжения (эдс) теплового шума

Комплексная проводимость цепочки есть сумма проводимостей резистора и конденсатора:

$$Y(\omega) = Z^{-1}(\omega) = R^{-1} + j\omega C, \quad \omega = 2\pi f. \quad (2.7)$$

Отсюда находим вещественную часть импеданса:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z(\omega) &= \operatorname{Re} \frac{1}{R^{-1} + j\omega C} = \operatorname{Re} \frac{R}{1 + j\omega CR} \cdot \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} \\ &= \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} \cdot \operatorname{Re}(1 - j\omega CR) = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}. \end{aligned}$$

Затем, в соответствии с (2.5), определяем спектр эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = \frac{4kTR}{1 + (f/f_c)^2} \text{ [B}^2/\text{Гц]}. \quad (2.8)$$

Здесь

$$f_c = 1/(2\pi \tau_c)$$

– частота среза, определяемая постоянной времени цепочки $\tau_c = RC$.

Спектр, имеющий подобную зависимость от частоты, называется лоренцевым; его вид изображен на Рис. 2.5.

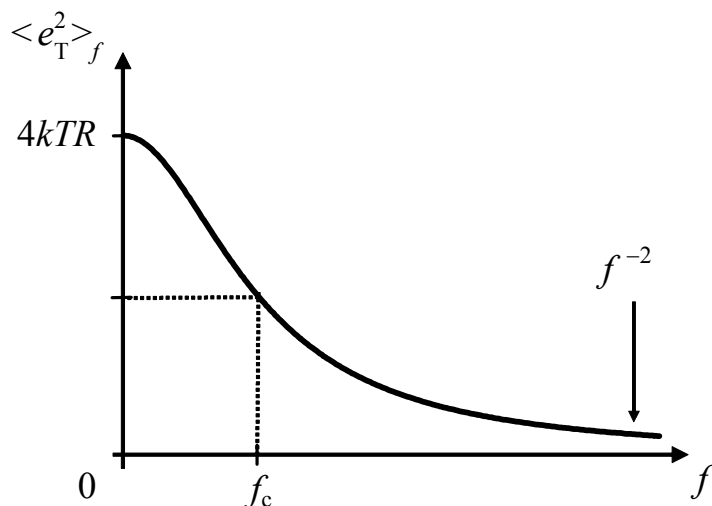


Рис. 2.5. Спектр эдс теплового шума интегрирующей RC – цепочки

На нулевой частоте, $f=0$, высота спектра максимальна и составляет $4kTR$, как у идеального резистора. Действительно, тепловой шум генерируется резистором R , а шунтирующее влияние конденсатора на этой частоте не проявляется.

При повышении частоты анализа f начинает проявляться шунтирующее влияние конденсатора C . В результате, при $f \rightarrow \infty$ спектр убывает по закону f^{-2} .

Обсудим полученный результат подробнее, учитывая, что в рассматриваемой цепочке источником теплового шума является резистор. Для этого преобразуем эквивалентную схему, изображённую на Рис. 2.4, в схему, содержащую эквивалентный генератор напряжения $e_R(t)$, моделирующий тепловой шум резистора R , см. Рис. 2.6.

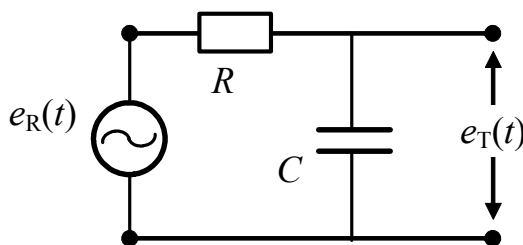


Рис. 2.6. Интегрирующая RC – цепочка как линейный четырёхполюсник

Рассматриваемая цепочка представляет собой линейный четырёхполюсник. Её комплексный коэффициент передачи $K_H(f)$ определяется следующим соотношением:

$$K_{и}(f) = \frac{1/(j \cdot 2\pi f C)}{R + 1/(j \cdot 2\pi f C)} = \frac{1}{1 + j \cdot (f / f_c)} \quad (2.9)$$

К входу цепочки приложено шумовое напряжение $e_R(t)$. Спектр $\langle e_R^2 \rangle_f$ этого напряжения определяется формулой Найквиста (2.1):

$$\langle e_R^2 \rangle_f = 4kTR \text{ [В}^2\text{/Гц]} . \quad (2.10)$$

На выходе наблюдается шумовое напряжение $e_T(t)$.

Связь между спектрами входного и выходного шумов определяется известным соотношением, см., например, Раздел 1.5 в монографии [7]:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = |K_{и}(f)|^2 \cdot \langle e_R^2 \rangle_f. \quad (2.11)$$

Примечание

В соотношениях типа (2.11), определяющих преобразование спектра линейной системой, следует использовать $|K_{и}(f)|^2$, но не $|K_{и}^2(f)|$. Входящий сюда модуль коэффициента передачи $|K_{и}(f)|$ имеет смысл амплитудно–частотной характеристики системы. Использование в (2.11) модуля квадрата коэффициента передачи $|K_{и}^2(f)|$ даст тот же правильный результат, но без пояснения его физического смысла.

Вычисляем квадрат модуля коэффициента передачи (2.9) и учитываем выражение (2.10) для спектра входного шума. В результате обнаружим, что соотношение (2.11) трансформируется в найденное выше выражение (2.8) для спектра теплового шума на выходе цепочки.

На достаточно низких частотах, $f \ll f_c$, импеданс Z_c конденсатора достаточно велик, $|Z_c| = 1/(2\pi f C) \gg R$. Поэтому конденсатор не шунтирует шум на выходе цепочки.

При увеличении частоты анализа импеданс конденсатора убывает пропорционально частоте. Поэтому на достаточно высоких частотах, при $f \gg f_c$, конденсатор шунтирует выход цепочки. В результате при росте частоты анализа спектр выходного шума $\langle e_T^2 \rangle_f$ начинает убывать как f^{-2} .

Из полученного результата следует важный вывод, касающийся выражений (2.5) и (2.6) для спектра теплового шума комплексного линейного двухполюсника.

Как уже отмечалось, тепловой шум генерируется только диссипативными элементами. Таким образом, указанные выражения просто описывают линейное преобразование спектров первичных источников шума на выход рассматриваемого двухполюсника.

Вычислим полную мощность $\langle e_T^2 \rangle$ шума на выходе RC – цепочки:

$$\langle e_T^2 \rangle = 4kTR \cdot \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (f \cdot 2\pi\tau_c)^2}.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной:

$$x = f \cdot 2\pi\tau_c.$$

Затем используем табличный несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.12)$$

В результате получаем удивительный результат:

$$\langle e_T^2 \rangle = kT/C. \quad (2.13)$$

Видим, что полная мощность шума не зависит от сопротивления R , а определяется только величиной ёмкости C . Качественно этот результат можно объяснить следующим образом.

- Высота спектра, $\langle e_T^2 \rangle_{f=0} = 4kTR$, пропорциональна R^1 , сопротивлению в первой степени.
- Ширина спектра, $f_c = 1/(2\pi RC)$, обратно пропорциональна сопротивлению R .

В результате, полная мощность шума, определяемая площадью под графиком его спектра, не зависит от сопротивления R .

Данное объяснение, однако, не проясняет физической сути полученного результата, имеющего **фундаментальный характер**.

Действительно, устремим сопротивление к нулю, $R \rightarrow 0$.

Обнаружим, что диссипация, как необходимое условие существования теплового шума, исчезла, а полная мощность шума осталась прежней.

Вопрос

В чём допущена ошибка, либо в чём заключается фундаментальность полученного результата?

Ответ

Преобразуем результат (2.13) для полной мощности теплового шума:

$$\frac{C \langle e_T^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (2.14)$$

Здесь в левой части представлена средняя энергия, накопленная конденсатором. Правая часть – энергия, приходящаяся на одну степень свободы.

Таким образом, мы просто вычислили энергию, которой конденсатор обменивается с термостатом.

Задание 2. Шумовой ток

Найдём спектр $\langle i_T^2 \rangle_f$ тока $i_T(t)$, описывающего тепловой шум **короткозамкнутой** интегрирующей RC – цепочки (см. Рис. 2.7).

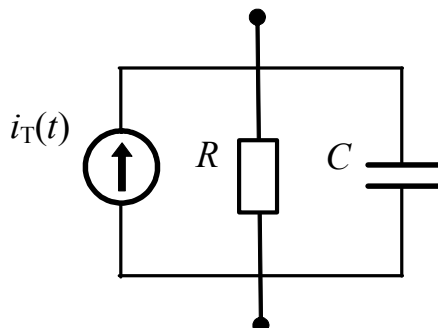


Рис. 2.7. Эквивалентная схема интегрирующей RC – цепочки с генератором тока теплового шума

Спектр указанного тока описывается соотношением (2.6):

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot \operatorname{Re} Y(2\pi f) \text{ [A}^2/\text{Гц]}.$$

Входящая сюда комплексная проводимость определена соотношением (2.7). Учитывая эти два соотношения, сразу находим требуемый спектр:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot R^{-1} \text{ [A}^2/\text{Гц]}. \quad (2.15)$$

Видим, что в выражение для спектра тока теплового шума интегрирующей RC – цепочки не входит ёмкость C . Ничего удивительного в полученном результате нет.

Генератор тока $i_T(t)$ описывает тепловой шум **короткозамкнутой** цепочки. То есть конденсатор C оказывается замкнутым накоротко, поэтому он не влияет на спектр токового шума.

Для лучшего понимания полученного результата снова обратимся к анализу цепочки как линейного четырёхполюсника (см. выше Раздел “Задание 1. Шумовое напряжение”).

Теперь вместо Рис. 2.7 имеем эквивалентную схему, изображённую на Рис. 2.8.

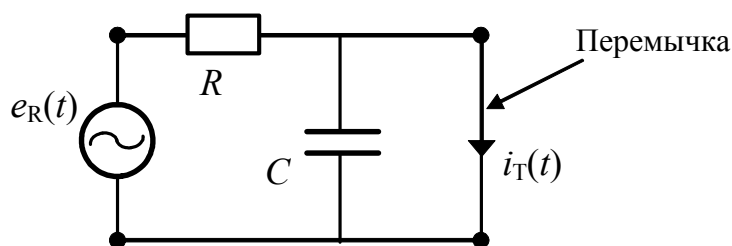


Рис. 2.8. Короткозамкнутая интегрирующая RC – цепочка

Из представленной схемы видно, что конденсатор зашунтирован переключкой. Поэтому токовый шум на выходе цепочки определяется только эдс теплового шума резистора и сопротивлением этого резистора, $i_T = e_R/R$.

2.3.2. Последовательная RC-цепочка

Задание 1. Шумовое напряжение

Найдём спектр $\langle e_T^2 \rangle_f$ эдс $e_T(t)$, описывающей тепловой шум на **разомкнутых** выводах последовательной RC – цепочки (см. Рис. 2.9).

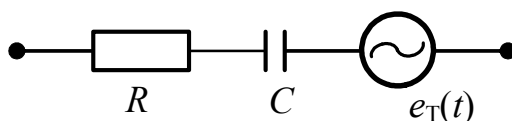


Рис. 2.9. Эквивалентная схема последовательной RC – цепочки с генератором напряжения теплового шума

Комплексный импеданс цепочки есть:

$$Z(2\pi f) = R - \frac{j}{2\pi f C}. \quad (2.16)$$

Отсюда, согласно (2.5), находим спектр эдс теплового шума, проявляющегося на разомкнутых выводах цепочки:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kTR \text{ [В}^2\text{/Гц]}. \quad (2.17)$$

Видим, что последовательно включенный конденсатор не влияет на спектр шума. Так как цепочка разомкнута, ток, протекающий через конденсатор, равен нулю. Поэтому падение напряжения на нём тоже равно нулю.

Задание 2. Шумовой ток

Найдём спектр $\langle i_T^2 \rangle_f$ тока $i_T(t)$, описывающего тепловой шум **короткозамкнутой** последовательной RC – цепочки (см. Рис. 2.10).

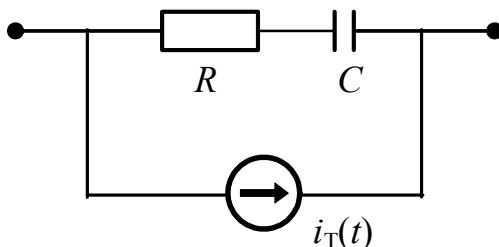


Рис. 2.10. Эквивалентная схема последовательной RC – цепочки с генератором тока теплового шума

Спектр указанного тока описывается соотношением (2.6):

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot \operatorname{Re} Y(2\pi f) \text{ [A}^2/\text{Гц]}.$$

Входящую сюда комплексную проводимость находим из соотношения (2.16):

$$Y(2\pi f) = Z^{-1}(2\pi f) = \frac{1}{R} \cdot \frac{2\pi f RC \cdot (2\pi f RC + j)}{1 + (2\pi f RC)^2}. \quad (2.18)$$

В результате находим требуемый спектр:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = \frac{4kT}{R} \cdot \frac{(f/f_c)^2}{1 + (f/f_c)^2} \text{ [A}^2/\text{Гц]}. \quad (2.19)$$

Здесь $f_c = 1/(2\pi \tau_c)$ – характерная частота, определяемая постоянной времени цепочки $\tau_c = RC$. Найденный спектр изображён на Рис. 2.11.

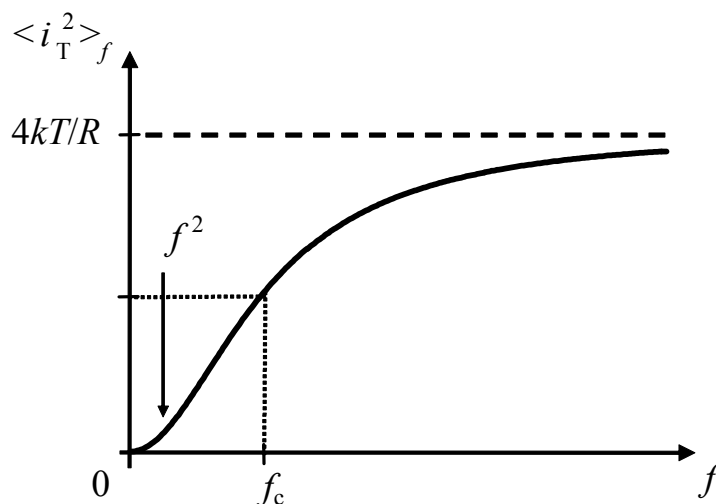
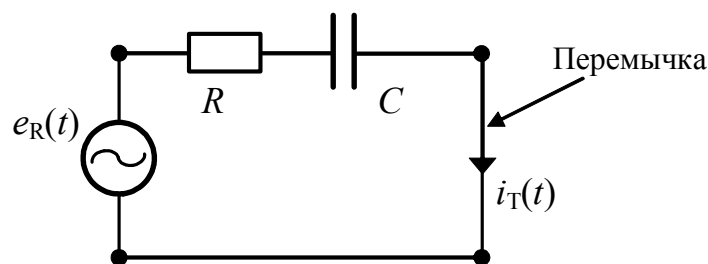


Рис. 2.11. Спектр теплового шума тока последовательной RC – цепочки

Чтобы понять полученный результат, надо учесть, что указанный спектр описывает токовый шум короткозамкнутой цепочки.

Как и в Разделе “2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка” учтём, что источником теплового шума является резистор. Для этого преобразуем эквивалентную схему, изображённую на Рис. 2.10, в схему, содержащую эквивалентный генератор напряжения $e_R(t)$, моделирующий тепловой шум резистора R , см. Рис. 2.12.

Рис. 2.12. Короткозамкнутая последовательная RC – цепочка

Рассматриваемая цепочка представляет собой линейный четырёхполюсник. Её коэффициент передачи, имеющий смысл комплексного импеданса, определяется соотношением (2.16):

$$Z(2\pi f) = R - \frac{j}{2\pi f C}.$$

При стремлении частоты анализа к нулю, $f \rightarrow 0$, модуль импеданса конденсатора C стремится к бесконечности. Соответственно, ток через цепочку стремится к нулю. Именно поэтому спектр $\langle i_T^2 \rangle_f$ на достаточно низких частотах, $f \ll f_c$ имеет вид $\langle i_T^2 \rangle_f \sim f^2$.

На достаточно высоких частотах, $f \gg f_c$, модуль импеданса конденсатора C стремится к нулю. Поэтому значение спектра $\langle i_T^2 \rangle_f$ стремится к значению, определяемому тепловым шумом резистора R , см. соотношение (2.2).

2.3.3. Высокочастотный колебательный контур

Рассмотрим колебательный контур, содержащий ёмкость C , индуктивность L и сопротивление потерь R (см. Рис. 2.13).

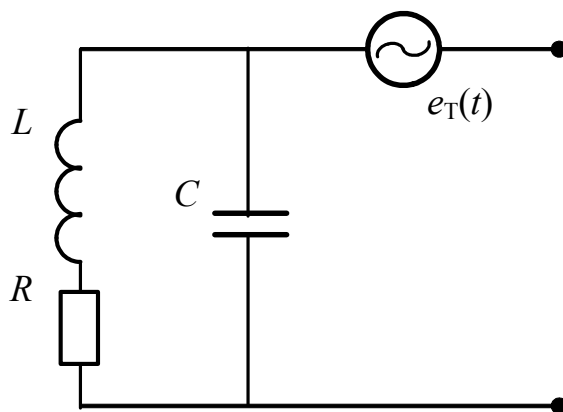


Рис. 2.13. Эквивалентная схема колебательного контура с генератором напряжения теплового шума

Найдём спектр $\langle e_T^2 \rangle_f$ и полную мощность $\langle e_T^2 \rangle$ ЭДС $e_T(t)$, описывающей тепловой шум на **разомкнутых** выводах контура.

Вместо “первичных” трёх параметров (L , C , R) часто используются параметры, описывающие селективные свойства колебательного контура:

а) резонансная частота

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (2.20)$$

б) добротность

$$Q = \frac{2\pi f_1 L}{R}, \quad (2.21)$$

в) полуполоса пропускания

$$B = \frac{f_1}{2Q}. \quad (2.22)$$

При описании колебательного контура также используются дополнительные параметры:

а) волновое сопротивление

$$\rho = 2\pi f_1 L = 1 / (2\pi f_1 C), \quad (2.23)$$

б) резонансное сопротивление

$$R_{\text{оe}} = Q^2 R. \quad (2.24)$$

Для определения спектра $\langle e_T^2 \rangle_f$ теплового шума надо проанализировать выражение для комплексного импеданса контура:

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C + 1/(R + j\omega L)}, \omega = 2\pi f. \quad (2.25)$$

Этот импеданс, отражая селективные свойства контура, имеет максимальное (вещественное) значение на резонансной частоте, $Z(2\pi f_1) = R_{\text{ое}}$. При отстройке от резонанса наблюдается быстрое убывание модуля импеданса.

Полагая для простоты, что контур имеет **высокую добротность**, $Q \gg 1$, получим следующее выражение для спектра эдс теплового шума:

$$\langle e_T^2 \rangle_f = \frac{4kTR_{\text{ое}}}{1 + (F/B)^2}, F = f - f_1. \quad (2.26)$$

Здесь F – частота отстройки от резонанса. Вид спектра приведен на Рис. 2.14.

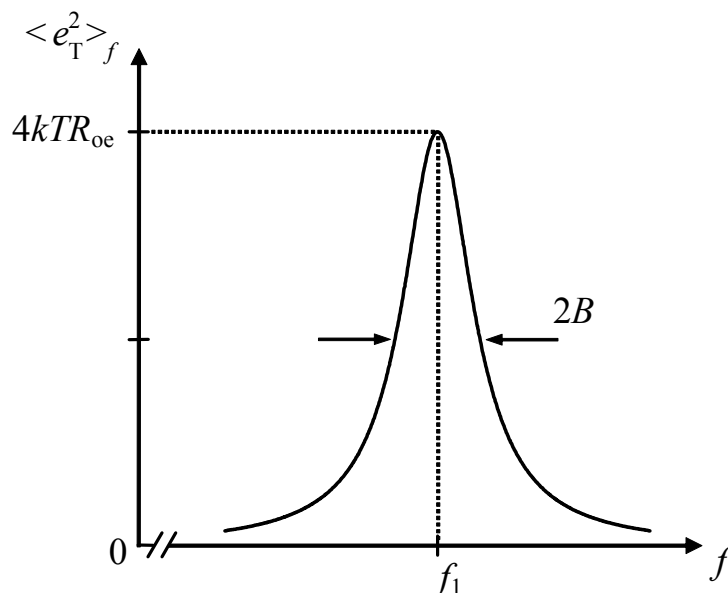


Рис. 2.14. Спектр эдс теплового шума высокодобротного колебательного контура

На резонансной частоте f_1 контур “шумит” как идеальный резистор, обладающий сопротивлением $R_{\text{ое}}$. Форма спектра повторяет резонансную кривую контура, характеризующуюся шириной (на уровне 0.5), равной $2B$ – удвоенной полуполосе пропускания.

Определим полную мощность $\langle e_T^2 \rangle$ эдс теплового шума как площадь под графиком его спектра. Проводя необходимое интегрирование и осуществляя ряд преобразований, получим уже знакомый результат:

$$\langle e_T^2 \rangle = kT/C. \quad (2.27)$$

Эта мощность не зависит от величины сопротивления потерь R даже при $R \rightarrow 0$ (идеальный осциллятор) и имеет то же значение, что и для интегрирующей RC – цепочки, рассмотренной в Разделе 2.3.1, см. соотношение (2.13).

Качественно этот результат можно объяснить так же, как и в случае интегрирующей RC – цепочки.

- Высота спектра, $\langle e_T^2 \rangle_{f=f_1} = 4kTR_{\text{ое}}$, пропорциональна R^1 , сопротивлению потерь в первой степени.
- Ширина спектра $2B$ обратно пропорциональна сопротивлению R .

В результате, мощность шума, определяемая полной площадью под графиком спектра, не зависит от сопротивления R .

Данное объяснение, однако, не проясняет физической сути полученного результата, имеющего **фундаментальный характер**.

Действительно, устремим сопротивление к нулю, $R \rightarrow 0$. Обнаружим, что диссипация, как необходимое условие существования теплового шума, исчезла, а полная мощность шума осталась прежней.

Вопрос. В чем заключается фундаментальность полученного результата?

Ответ

Ситуация идентична рассмотренной в Разделе 2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка (Задание 1. Шумовое напряжение), но с некоторой спецификой.

При $R \rightarrow 0$ колебательный контур превращается в идеальный осциллятор, а спектр (2.26) трансформируется в дельта-функцию на частоте f_1 (см. Рис. 2.15).

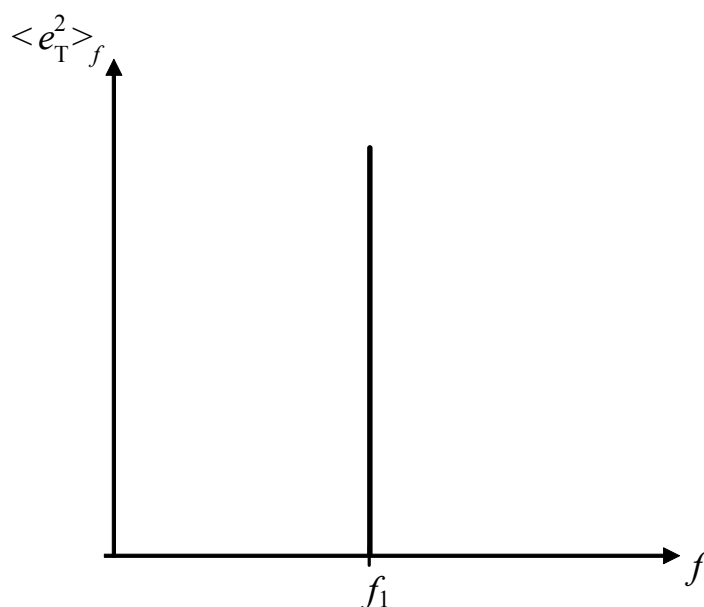


Рис. 2.15. Спектр эдс теплового шума идеального осциллятора

Как и в случае с интегрирующей RC – цепочкой преобразуем результат (2.27) для полной мощности теплового шума колебательного контура:

$$\frac{C\langle e_{\Gamma}^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (2.28)$$

Здесь в левой части представлена средняя энергия, накопленная конденсатором идеального осциллятора. Правая часть – энергия, приходящаяся на одну степень свободы.

Таким образом, мы вычислили энергию, которой осциллятор обменивается с термостатом.

3. Дробовой шум

Англоязычное название дробового шума – shot noise.

Условия существования дробового шума:

- 1) дискретность заряда электрона, $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл;
- 2) наличие выделенного направления движения электронов, то есть скорость \vec{v} у каждого электрона имеет среднее значение, отличное от нуля, $\langle \vec{v} \rangle \neq 0$;
- 3) стохастичность моментов инжекции электронов в выделенном направлении.

По поводу второго условия заметим, что при отсутствии выделенного направления движения генерируется тепловой шум. Среднее значение тепловой компоненты \vec{v}_T скорости электрона всегда равно нулю, $\langle \vec{v}_T \rangle = 0$.

Рассмотрим, для начала достаточно простой вопрос: **почему дробовой шум не наблюдается в металлах?**

Электрон при наличии внешнего электрического поля имеет две компоненты скорости, см. Рис. 3.1.

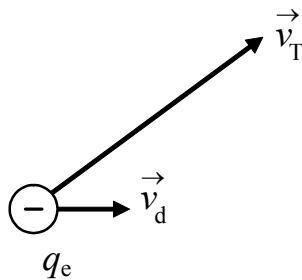


Рис. 3.1. Компоненты скорости электрона во внешнем электрическом поле

Таким образом, полная скорость электрона равна

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_d.$$

Здесь \vec{v}_T – тепловая скорость, обусловленная взаимодействием электрона с тепловыми колебаниями решётки. Эта скорость не имеет выделенного направления, $\langle \vec{v}_T \rangle = 0$. Через \vec{v}_d обозначена скорость дрейфа, имеющая направление, определяемое внешним электрическим полем.

Дробовой шум проявляется, когда скорость дрейфа сравнима со среднеквадратической тепловой скоростью, $v_d \sim v_T$. При комнатной температуре имеем $v_T \sim 70$ км/с.

В металлических проводниках дробовой шум не виден, так как в них дрейфовая скорость относительно мала, $v_d \ll v_T$. Говоря конкретнее, отметим, что при $v_d \sim 1$ см/с любой металлический проводник расплавится.

В полупроводниках дробовой шум может быть виден. В них величина v_d принимает существенно бóльшие значения из-за того, что соударения носителей с решеткой относительно редки.

В инжекционных приборах (электровакуумных приборах, полупроводниковых диодах и биполярных транзисторах) дробовой шум есть всегда.

Чтобы понять, как проявляется дробовой шум, рассмотрим некоторый инжекционный прибор, изображённый на Рис. 3.2.

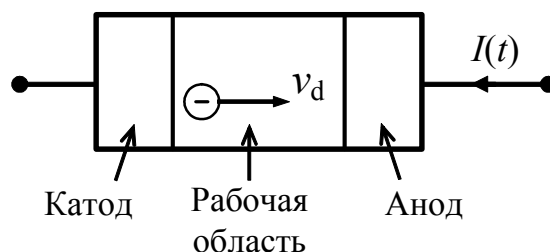


Рис. 3.2. Условное изображение инжекционного прибора

Здесь условно выделены три области: “Катод” (эмиттер) – область, из которой инжектируются носители тока; “Рабочая область”, в которой происходит взаимодействие носителей тока с внешним с электрическим полем; “Анод” (коллектор) – область сбора носителей тока.

В рабочей области всегда есть объёмный заряд Q_{vol} инжектированных носителей тока.

Пусть этот заряд мал настолько, что его влиянием на движение носителей можно пренебречь. Тогда все носители тока пролетают через рабочую область **независимо** друг от друга.

При этом каждый носитель наводит во внешней цепи импульс тока $i_k(t)$, где k – номер носителя тока, пролетевшего через рабочую область прибора. Длительность этого импульса, $\tau_{пр}$ равна времени пролёта носителя тока через рабочую область.

Полный ток $I(t)$, наводимый во внешней цепи, имеет случайный характер, обусловленный случайностью времён возникновения отдельных импульсов тока. Его можно разделить на две компоненты:

$$I(t) = I_0 + i_{др}(t). \quad (3.1)$$

Здесь $I_0 = \langle I(t) \rangle$ – среднее (по полному ансамблю реализаций) значение тока; $i_{др}(t)$ – дробовой шум. Предполагается, что среднее значение дробового шума равно нулю, $\langle i_{др}(t) \rangle = 0$.

Для определения среднего значения тока I_0 и спектра $\langle i_{др}^2 \rangle_f$ дробового шума воспользуемся теорией пуассоновских случайных процессов.

3.1. Дробовой шум как пуассоновский случайный процесс

Общая теория пуассоновских случайных процессов хорошо развита, см., например, [3], [4], [5]. Здесь анализируется специфика дробового шума.

Рассмотрим пуассоновскую последовательность импульсов тока:

$$I(t) = \sum_k i_k(t - t_k). \quad (3.2)$$

Здесь t_k – момент возникновения импульса, имеющего номер k . Каждый импульс тока $i_k(t)$ имеет длительность $\tau_{\text{пр}}$, которая может различаться от импульса к импульсу, то есть быть случайной.

Все импульсы возникают независимо друг от друга.

Обозначим через ν **среднюю частоту** их появления.

Вычислим **среднее значение** тока I_0 , наводимого во внешней цепи.

Каждый носитель, вне зависимости от момента его инжекции в рабочую область t_k , а также длительности $\tau_{\text{пр}}$ и формы $i_k(t)$ соответствующего импульса тока, переносит заряд, равный заряду электрона q_e . То есть выполняется следующее условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_k(t - t_k) dt = q_e. \quad (3.3)$$

Это означает, что площадь каждого импульса тока равна заряду электрона. Геометрическая трактовка приведённого условия приведена на Рис. 3.3.

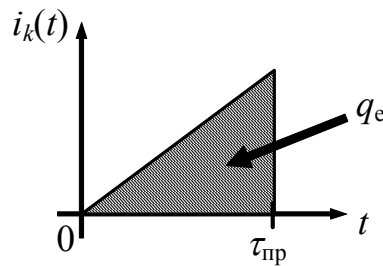


Рис. 3.3. Возможный вид импульса тока и его площадь

Поскольку за единицу времени через внешнюю цепь, в среднем, проходит ν импульсов, и каждый из них переносит заряд q_e , получаем очевидное выражение для среднего тока:

$$I_0 = \nu q_e. \quad (3.4)$$

Это есть полный заряд, переносимый за единицу времени.

Перейдём к вычислению **спектра дробового шума** $\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f$.

Для этого сначала определим **спектр энергии** $E(\omega)$ отдельного импульса:

$$E(\omega) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\rangle. \quad (3.5)$$

Этот спектр представляет собой среднее значение от фурье–образа импульса тока, взятого по модулю и возведённому во вторую степень.

Модуль фурье–образа имеет смысл амплитудного спектра импульса. Возведение этого модуля во вторую степень даёт спектр энергии, то есть распределение энергии импульса по частоте.

Как правило, отдельный импульс тока характеризуется случайными параметрами, например, длительностью $\tau_{\text{пр}}$. Поэтому полученный спектр энергии надо усреднить по всем случайным параметрам, характеризующим отдельные импульсы тока $i_k(t)$.

Найдём $E(0)$ – значение спектра энергии на нулевой частоте.

Для этого учтём соотношение (3.3), согласно которому площадь каждого импульса тока равна заряду электрона q_e . В результате получим:

$$E(0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) dt \right|^2 = q_e^2. \quad (3.6)$$

Здесь учтено, что $\exp(0) = 1$.

Теперь выражение для спектра энергии можно представить в виде, явно учитывающем его зависимость от частоты:

$$E(\omega) = q_e^2 \cdot M(\theta). \quad (3.7)$$

Здесь

$$M(\theta) = \frac{1}{q_e^2} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} i_k(t) \exp(-j\omega t) dt \right|^2 \right\rangle. \quad (3.8)$$

– нормированный спектр энергии импульса тока, $M(0) = 1$;

$$\theta = \omega \tau_{\text{пр}} = 2\pi f \tau_{\text{пр}} \quad (3.9)$$

– угол пролета носителя тока через рабочую область прибора.

Учитывая, что за единицу времени через внешнюю цепь, в среднем, проходит ν импульсов, находим выражение для **математического** (двухстороннего) спектра дробового шума:

$$S_{\text{др}}(\omega) = \nu \cdot E(\omega). \quad (3.10)$$

Это соотношение представляет собой модифицированную теорему Карсона (см., например, [6]). Его смысл достаточно прост. Мощность процесса есть энергия, выделяющаяся за единицу времени, даже если речь идёт о спектральном разложении.

Учитывая соотношение (3.7) для спектра энергии отдельного импульса, получим:

$$S_{\text{др}}(\omega) = \nu q_e^2 \cdot M(\theta). \quad (3.11)$$

Учтём теперь выражение (3.4) для среднего тока, $I_0 = \nu q_e$. В результате получим следующее выражение для **математического** (двухстороннего) спектра дробового шума:

$$S_{\text{др}}(\omega) = q_e I_0 \cdot M(\theta). \quad (3.12)$$

Переходя теперь, согласно соотношению (1.7), к **физическому** (одностороннему) спектру, получим:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2S_{\text{др}}(2\pi f) = 2q_e I_0 \cdot M(\theta). \quad (3.13)$$

Перейдём к анализу спектра (3.13) дробового шума, и его модификаций (см., например, [3], [4], [5], [6], [8]).

3.2. Формула Шотки для спектра дробового шума

Для простоты ограничимся достаточно низкими частотами анализа, $f \ll 1/(2\pi\tau_{\text{пр}})$, то есть примем $M(\theta) = 1$.

В этом случае получим известную формулу Шотки, описывающую спектр недепрессированного дробового шума:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 \text{ [A}^2/\text{Гц]}, \quad (3.14)$$

Уточним условия применимости формулы Шотки.

1. Все носители тока в рабочей области считаются независимыми, то есть влиянием объёмного заряда Q_{vol} можно пренебречь.
2. Время пролёта $\tau_{\text{пр}}$ носителей через рабочую область считается пренебрежимо малым.
3. Дробовой шум считается стационарным, то есть средний ток через прибор не модулирован, $I_0 = \text{const}$.

Определим, к чему приводит нарушение вышеприведённых условий.

3.2.1. Эффект депрессии дробового шума

Рассмотрим, к чему приводит нарушение указанного выше Условия 1 применимости формулы Шотки.

Если объёмный заряд Q_{vol} заметно влияет на носители, то происходит депрессия (сглаживание) дробового шума:

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 \Gamma^2 \text{ [A}^2/\text{Гц]}. \quad (3.15)$$

Здесь $\Gamma^2 = 0.01 \dots 1.0$ – коэффициент депрессии. Чем больше объёмный заряд, тем сильнее депрессия дробового шума.

Эффект депрессии может целенаправленно использоваться для снижения дробового шума.

Например, в электровакуумных приборах для усиления этого эффекта используется режим микротоков. Этот режим характеризуется тем, что ток анода имеет величину, существенно меньшую, чем эмиссионная способность катода. В результате происходит накопление большого объёмного заряда в рабочей области прибора.

3.2.2. Учёт конечности времени пролёта носителей

Рассмотрим теперь следствие нарушения Условия 2, то есть учтём время пролёта носителей тока через рабочую область прибора.

Соотношения (3.14) и (3.15) верны только на относительно низких частотах:

$$f \ll f_v = 1/(2\pi\tau_{\text{пр}}). \quad (3.16)$$

Здесь f_v – верхняя частота среза, определяемая временем $\tau_{\text{пр}}$ пролёта носителей через рабочую область.

Для типичных полупроводниковых приборов $f_v \sim 10^4 \div 10^{10}$ Гц; для типичных электровакуумных ламп $f_v \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Гц.

Вид спектра дробового шума определяется формой фурье–образа элементарного импульса тока $i_k(t)$, наводимого во внешней цепи отдельным носителем, пролетающим через рабочую область.

Для учета частотной зависимости спектра дробового шума возвращаемся к соотношению (3.13):

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 M(\theta) \text{ [A}^2/\text{Гц]}. \quad (3.17)$$

Здесь $M(\theta)$ – нормированный спектр энергии импульса тока, определённый выше соотношением (3.8); $\theta = 2\pi f \tau_{\text{пр}}$ – угол пролёта носителя через рабочую область прибора, см. (3.9).

На Рис. 3.4, в качестве примера, изображен вид функции $M(\theta)$ для элементарного импульса, имеющего треугольную форму, см., например, § 3.2 в [4]. Вид импульса тока $i_k(t)$ изображен на врезке к рисунку (см. также Рис. 3.3). Заштрихованная площадь под импульсом, представляющая его фурье-образ на нулевой частоте, $f=0$, равна заряду электрона q_e .

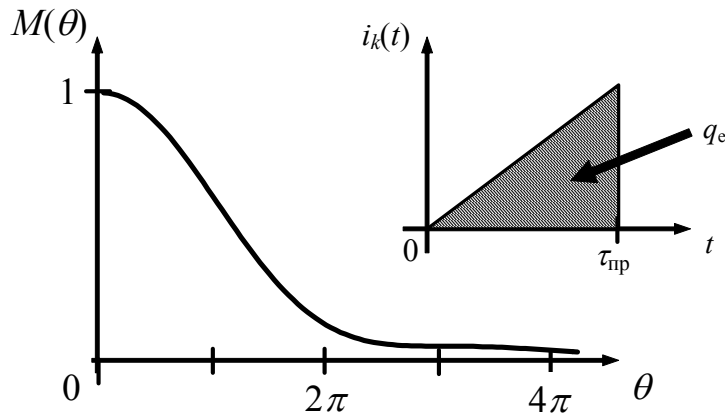


Рис. 3.4. Пример нормированного спектра энергии $M(\theta)$ треугольного импульса тока $i_k(t)$, приведённого на врезке к рисунку

Пример 3.1

Оценим эффективное напряжение $v_{эфф}(\Delta f)$ дробового шума, выделяющегося на резисторе анодной нагрузки $R_a = 10$ кОм электровакуумной лампы с анодным током $I_{a0} = 10$ мА в полосе $\Delta f = 20$ кГц при коэффициенте депрессии дробового шума $\Gamma^2 = 0.1$ (см. Рис. 3.5).

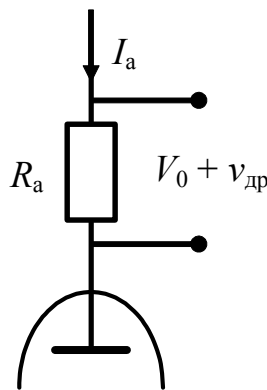


Рис. 3.5. Анодная цепь электровакуумной лампы

Полный ток анода содержит постоянную составляющую и дробовой шум:

$$I_a = I_{a0} + i_{др}(t).$$

В соответствии с (3.15) вычисляем спектр дробового шума:

$$\begin{aligned} \langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f &= 2q_e I_0 \Gamma^2 = \\ &= 3.2 \cdot 10^{-19} [\text{Кл}] \cdot 0.01 [\text{А}] \cdot 0.1 = 3.2 \cdot 10^{-22} [\text{А}^2/\text{Гц}]. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно соотношению (1.9), мощность дробового шума в полосе $\Delta f = 2 \cdot 10^4$ Гц составляет

$$\langle i_{\text{др}}^2(\Delta f) \rangle = \langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f \cdot \Delta f = 6.4 \cdot 10^{-18} [\text{А}^2].$$

Извлекая, согласно (1.10), квадратный корень из полученного результата, найдём эффективное значение шумового тока:

$$I_{\text{эфф}}(\Delta f) \approx 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ А} = 2.5 \text{ нА}.$$

Напряжение, обусловленное указанным током, выделяется на резисторе анодной нагрузки, $v_{\text{эфф}} = R_a \cdot i_{\text{эфф}}$. Отсюда находим:

$$v_{\text{эфф}}(\Delta f) = 25 \text{ мкВ}$$

– эффективное напряжение дробового шума, выделяющегося на резисторе анодной нагрузки.

3.2.3. Нестационарный дробовой шум

Рассмотрим теперь следствие нарушения Условия 3, то есть учтём возможную нестационарность дробового шума.

Приведённые выше соотношения для спектра дробового шума справедливы, когда постоянная составляющая тока не модулируется сигналом, либо модуляция ничтожно мала, то есть $I_0 = \text{const}$. Во многих радиоэлектронных приборах это не так, то есть:

$$I_0 = \langle I(t) \rangle = I_0(t).$$

В этом случае (без учета эффекта депрессии) следует использовать флуктуационное уравнение дробового шума [24]:

$$i_{\text{др}}(t) = \sqrt{2q_e \langle I(t) \rangle} \cdot \zeta_s(t). \quad (3.18)$$

Здесь $\zeta_s(t)$ – стационарный случайный процесс, нормированный по спектру при $f = 0$ к единице:

$$\langle \zeta_s^2 \rangle_{f=0} = 1 \text{ Гц}/\text{Гц}. \quad (3.19)$$

Заметим, что этот процесс имеет размерность $[\zeta_s] = \text{Гц}^{1/2}$.

Спектр $\langle \zeta_s^2 \rangle_f$ по форме повторяет спектр стационарного дробового шума. Точнее говоря, $\langle \zeta_s^2 \rangle_f = M(\theta)$, см. соотношение (3.8).

Пример 3.2

Найдем спектр дробового шума, обладающего слабой периодической нестационарностью. Это означает, что ток через прибор содержит малую сигнальную (гармоническую) компоненту:

$$\langle I(t) \rangle = I_0 + I_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi_0), \quad I_1 \ll I_0. \quad (3.20)$$

Для упрощения задачи пренебрежем эффектом депрессии шума. Кроме того, считаем, что шум является белым, то есть дельта-коррелированным.

Введем глубину модуляции полного тока сигнальной компонентой:

$$m = I_1/I_0, \quad m \ll 1. \quad (3.21)$$

Сначала вычислим функцию корреляции (1.1) периодически нестационарного дробового шума:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{др}}(\tau) &= \overline{\langle i_{\text{др}}(t) i_{\text{др}}(t + \tau) \rangle} = \\ &= 2q_e I_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} m^2 \cos(2\pi f_1 \tau) \right) \Phi_{\zeta_s}(\tau). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь $\Phi_{\zeta_s}(\tau)$ – корреляционная функция процесса $\zeta_s(t)$.

Преобразуя полученный результат по Фурье, найдем

$$\langle i_{\text{др}}^2 \rangle_f = 2q_e I_0 \cdot (1 + m^2 / 4). \quad (3.23)$$

Видим, что поправка, вызванная слабой сигнальной компонентой, мала. Но если $I_1 \sim I_0$, то наличие сигнала существенно влияет на спектральные характеристики дробового шума.

Периодическая нестационарность дробового шума может целенаправленно использоваться в системах генерации (и обработки) прецизионных сигналов для уменьшения шумовой модуляции фазы (частоты).

4. Генерационно–рекомбинационный шум

4.1. Общие сведения

Сокращённое название – ГРШ. Англоязычное название дробового шума – generation-recombination noise (сокращённо – GRN).

Генерационно–рекомбинационный шум наблюдается в полупроводниках и обусловлен случайностью процессов рождения и рекомбинации (и захвата на ловушки) носителей тока.

Схемы генерационно–рекомбинационных (ГР) процессов изображены на Рис. 4.1–а,б.

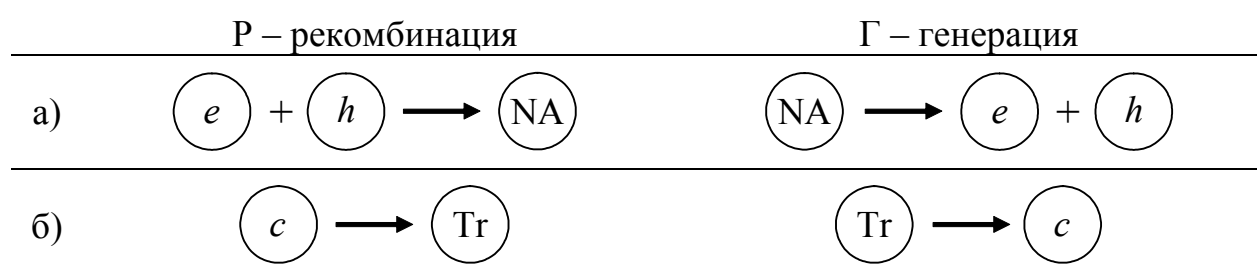


Рис. 4.1. Генерационно–рекомбинационные процессы:
 (а) одноступенчатая (прямая) генерация–рекомбинация;
 (б) процесс с участием ловушки.

На Рис. 4.1–а показана одноступенчатая генерация–рекомбинация. Здесь e – электрон, h – дырка (hole – англ.), NA – нейтральный атом. Электрон и дырка могут рекомбинировать, образуя нейтральный атом. Вследствие термической (или иной) ионизации нейтральный атом генерирует электронно–дырочную пару.

Процессы захвата и освобождения носителя тока ловушкой представлены на Рис. 4.1–б. Здесь c – носитель (электрон или дырка, carrier – англ.), Tr – ловушка (trap – англ.), то есть примесный атом, который может захватывать электрон или дырку.

Зонная диаграмма генерационно–рекомбинационных (ГР) процессов условно изображена на Рис. 4.2. Здесь указаны следующие энергетические уровни:

- E_{σ} – дно зоны проводимости,
- E_v – потолок валентной зоны,
- E_{te} – уровень ловушки для электронов,
- E_{th} – уровень ловушки для дырок.

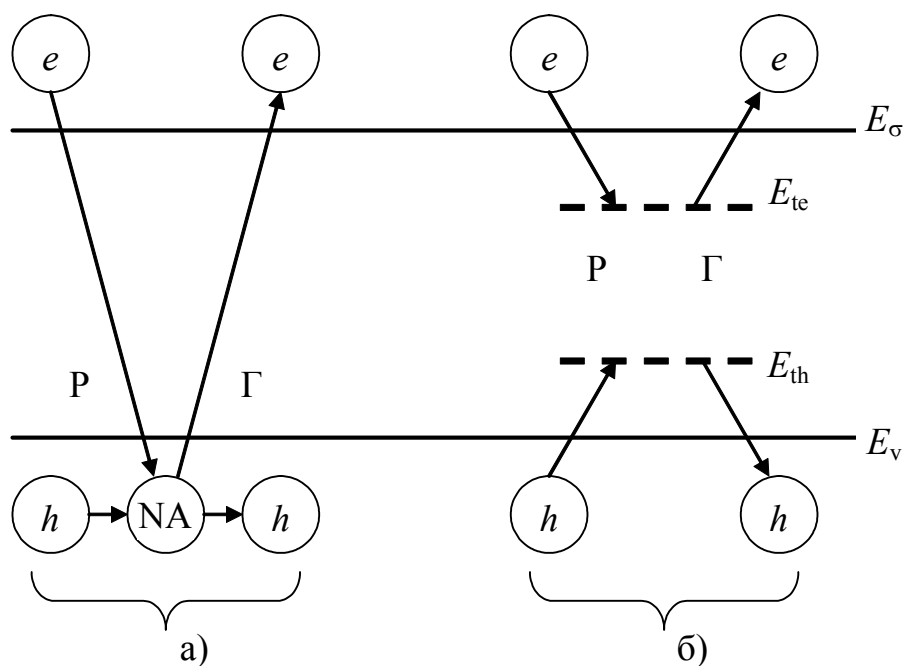


Рис. 4.2. Зонная диаграмма генерационно–рекомбинационных процессов

Таким образом, ГР процессы приводят к случайному изменению полного числа носителей в полупроводниковом образце $N=N(t)$.

4.2. Уравнение Ланжевена для ГРШ

Рассмотрим стационарный генерационно–рекомбинационный шум. Это означает, что в образце установилась равновесное число носителей тока:

$$\langle N(t) \rangle = N_0. \quad (4.1)$$

Введем в рассмотрение относительные флуктуации числа носителей тока $\delta N = \delta N(t)$:

$$N = (1 + \delta N) \cdot N_0. \quad (4.2)$$

Полагаем флуктуации достаточно малыми, то есть

$$\langle \delta N^2 \rangle \ll 1. \quad (4.3)$$

Для определения спектра ГРШ воспользуемся **методом Ланжевена**, широко используемым при анализе флуктуационных процессов.

Допустим, что имеется некоторая динамическая переменная, описываемая дифференциальным уравнением первого порядка, разумеется, без учёта случайных процессов. В нашем случае таковой переменной является N – число носителей тока в образце. В случае достаточно малого отклонения от равновесного значения N_0 относительное возмущение числа носителей δN описывается известным уравнением:

$$\frac{d}{dt} \delta N = -\frac{1}{\tau_0} \delta N. \quad (4.4)$$

Здесь τ_0 – время жизни носителей тока.

Решение этого уравнения показывает, что начальное возмущение числа носителей тока $(\delta N)_0 = \delta N(t=0)$ затухает по экспоненциальному закону:

$$\delta N(t) = (\delta N)_0 \cdot \exp(-t/\tau_0), \quad t \geq 0. \quad (4.5)$$

Вид этой зависимости изображен на Рис. 4.3.

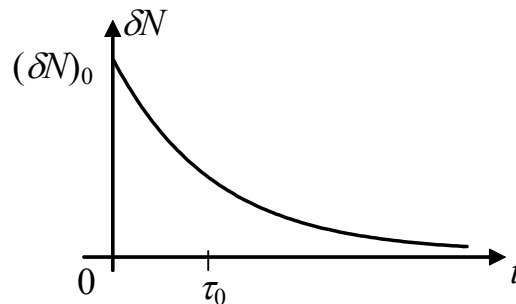


Рис. 4.3. Релаксация начального возмущения числа носителей тока

Суть метода Ланжевена заключается в следующем (см., например, раздел 2.3 в [6]).

Берется “динамическое” (без учета шумов) уравнение типа (4.4).

Для учета флуктуаций в правую часть уравнения добавляется дельта–коррелированный шумовой источник:

$$\frac{d}{dt} \delta N = -\frac{1}{\tau_0} \delta N + \sqrt{A_N} \cdot \zeta(t). \quad (4.6)$$

Здесь A_N – параметр, характеризующий мощность шумового источника; $\zeta(t)$ – стационарный дельта–коррелированный случайный процесс, обладающий единичным спектром мощности

$$\langle \zeta^2 \rangle_f = 1 \text{ [Гц/Гц]}. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.6) позволяет определить спектр генерационно–рекомбинационного шума.

4.3. Спектр генерационно–рекомбинационного шума

Вычислим спектр ГРШ с помощью так называемого “операторного метода”.

Для этого преобразуем соотношение (4.6) по Фурье. Следует иметь в виду, что фурье–образы случайных процессов, входящих в данное уравнение, существуют только в классе обобщенных функций. Однако эта проблема уже решена в рамках современной статистической радиофизики.

Суть преобразования по Фурье состоит во введении следующих замен:

$$d/dt \rightarrow j\omega, \delta N(t) \rightarrow \delta N, \zeta(t) \rightarrow \zeta. \quad (4.8)$$

То есть оператор дифференцирования заменяется операторным множителем $j\omega$, а случайные процессы – их (обобщенными) фурье–образами.

В результате исходное соотношение (4.6) принимает следующий вид:

$$(1 + j\omega\tau_0)\delta N = \tau_0\sqrt{A_N} \cdot \zeta. \quad (4.9)$$

Переводя это соотношение на язык преобразования случайного процесса линейной системой, получим:

$$\delta N = K(\omega) \cdot \zeta, \quad (4.10)$$

где

$$K(\omega) = \frac{\tau_0\sqrt{A_N}}{1 + j\omega\tau_0} \quad (4.11)$$

– комплексный коэффициент преобразования “первичного” шумового источника ζ в относительные флуктуации числа носителей.

Отсюда, используя теорию линейных систем, найдем связь между спектрами рассматриваемых случайных процессов:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = |K(2\pi f)|^2 \cdot \langle \zeta^2 \rangle_f. \quad (4.12)$$

Это соотношение имеет следующий смысл.

Модуль $|K(2\pi f)|$ комплексного коэффициента преобразования представляет амплитудно–частотную характеристику (АЧХ) рассматриваемой линейной системы. Эта характеристика описывает преобразование **амплитудного спектра** процесса.

Выражения для АЧХ возведённое во вторую степень, $|K(2\pi f)|^2$, описывает преобразование **спектра мощности** процесса, называемого здесь просто спектром.

Примечание

Отметим, что подобный подход для вычисления спектра “выходной” переменной уже использовался нами в 2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка. Интегрирующая RC – цепочка. С его помощью было получено выражение (2.11) для спектра теплового шума на выходе цепочки.

Учитывая соотношение (4.11), найдём требуемую характеристику:

$$|K(\omega)|^2 = \frac{\tau_0^2 A_N}{1 + (\omega\tau_0)^2}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Дополнительно учтём соотношение (4.7), согласно которому спектр $\langle \zeta^2 \rangle_f$ шумового источника равен единице.

В итоге получим выражение для спектра относительных флуктуаций числа носителей тока:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = \frac{\tau_0^2 A_N}{1 + (2\pi f\tau_0)^2}. \quad (4.13)$$

Определим параметр A_N , входящий в соотношение (4.13) и характеризующий мощность шума. Для этого сначала вычислим полную мощность ГРШ, как интеграл от спектра по всем частотам:

$$\langle \delta N^2 \rangle = \int_0^\infty \langle \delta N^2 \rangle_f df = \frac{1}{4} A_N \tau_0. \quad (4.14)$$

Найдём теперь эту мощность, анализируя механизм генерационно–рекомбинационного процесса.

В случае действия только одного механизма: “а” (прямая генерация–рекомбинация), либо “б” (процесс с участием ловушки, см. Рис. 4.1), – имеем

$$\langle \delta N^2 \rangle = 1/N. \quad (4.15)$$

Если одновременно действуют оба механизма (“а” и “б”), получим

$$\langle \delta N^2 \rangle = \alpha_T/N, \quad 0 < \alpha_T \leq 1. \quad (4.16)$$

Таким образом, величину $\langle \delta N^2 \rangle$ можно считать известной. Она не зависит от значения времени жизни носителей тока τ_0 .

В результате, учитывая (4.13), найдём окончательное выражение для спектра относительных флуктуаций числа носителей тока в образце:

$$\langle \delta N^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \cdot \langle \delta N^2 \rangle. \quad (4.17)$$

Исследуем зависимость этого спектра от величины времени жизни носителей тока τ_0 (см. Рис. 4.4). При этом полагаем, что мощность шума является фиксированной, $\langle \delta N^2 \rangle = \text{const}$.

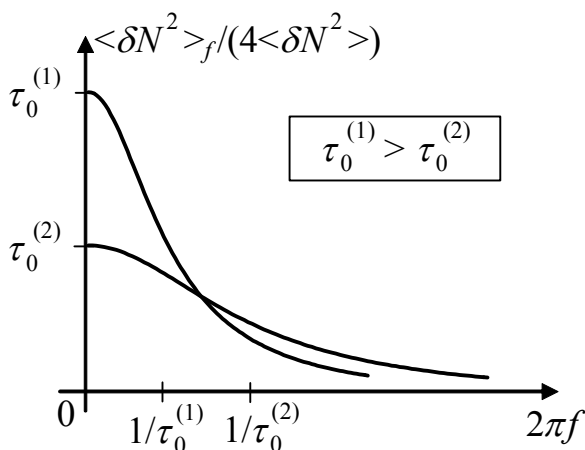


Рис. 4.4. Зависимость формы спектра ГРШ от величины времени жизни носителей тока

При росте τ_0 высота спектра растет пропорционально τ_0 , а ширина убывает как τ_0^{-1} . Полная площадь, определяемая мощностью шума $\langle \delta N^2 \rangle$, остается постоянной.

Другими словами, получен очевидный результат: увеличение времени жизни носителей тока τ_0 приводит к усилению низкочастотных компонент ГРШ и ослаблению его высокочастотных компонент.

Напомним, что спектр, имеющий зависимость от частоты, представленную соотношением (4.17), называется лоренцевым. Такой же вид имеет спектр (2.8) эдс теплового шума интегрирующей RC – цепочки, см. Рис. 2.5.

Для лоренцева спектра вводится понятие частоты среза:

$$f_c = 1/(2\pi\tau_0). \quad (4.18)$$

Это – частота, на которой величина спектра убывает вдвое по сравнению с его высотой (на нулевой частоте).

4.4. Мультипликативный характер ГРШ

Покажем, что генерационно–рекомбинационный шум имеет мультипликативный характер. Это, в частности, проявляется через соответствующие флуктуации сопротивления полупроводникового образца.

Выше уже отмечалось, что ГРШ представляет собой флуктуации полного числа носителей тока в образце, см. соотношение (4.2):

$$N = (1 + \delta N) \cdot N_0.$$

Здесь $\delta N = \delta N(t)$ – относительные флуктуации числа носителей.

Рассмотрим полупроводниковый образец, обладающий длиной l и сечением A , изображённый на Рис. 4.5.

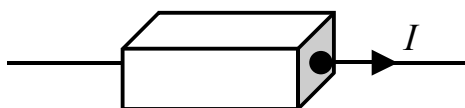


Рис. 4.5. Полупроводниковый образец, через который пропускается электрический ток I

Через образец пропускается фиксированный ток $I = \text{const}$. Для расчёта флуктуаций $u(t)$ полного напряжения $U = I \cdot R$, выделяющегося на образце, найдём относительные флуктуации δR сопротивления образца:

$$R = (1 + \delta R) \cdot R_0. \quad (4.19)$$

С этой целью воспользуемся известной связью между сопротивлением и полным числом носителей тока в образце:

$$R = l^2 / (q_e \mu N). \quad (4.20)$$

Здесь μ – подвижность носителей тока, определяемая из характеристики “скорость – поле”, $v_d = \mu E$ (см., например, [9]).

Подставляя в (4.20) невозмущенное число носителей N_0 , найдём невозмущенное сопротивление образца:

$$R_0 = l^2 / (q_e \mu N_0).$$

Линеаризуя затем соотношение (4.20) в окрестности N_0 , получим следующую связь между относительными флуктуациями сопротивления и числа носителей:

$$\delta R(t) = -\delta N(t). \quad (4.21)$$

Как отсюда видно, указанные флуктуации различаются только знаком. Следовательно, они обладают одинаковым спектром. Учитывая это обстоятельство, можно найденный ранее спектр ГРШ (4.17) рассматривать как спектр относительных флуктуаций сопротивления полупроводникового образца:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \cdot \langle \delta N^2 \rangle. \quad (4.22)$$

Перейдем к определению спектра $\langle u^2 \rangle_f$ шумового напряжения, обусловленного флуктуациями сопротивления образца. Для этого обратимся к электрической схеме, изображенной на Рис. 4.6. Здесь изображен резистор, его роль играет рассматриваемый полупроводниковый образец.

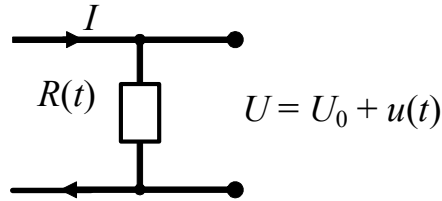


Рис. 4.6. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления, через который пропускается электрический ток

Через резистор, как уже отмечалось выше, пропускается фиксированный ток $I = \text{const}$. Поскольку сопротивление резистора подвержено флуктуациям, $R = R(t)$, полное падение напряжения на резисторе U содержит шумовую компоненту $u(t)$.

Используя закон Ома, найдем невозмущенное напряжение на образце:

$$U_0 = I \cdot R_0 .$$

Кроме того, вычислим шумовую компоненту напряжения:

$$u(t) = I \cdot R_0 \cdot \delta R(t) = U_0 \cdot \delta R(t) \quad (4.23)$$

Найдем спектр этого шумового напряжения:

$$\langle u^2 \rangle_f = (I \cdot R_0)^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f = U_0^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f . \quad (4.24)$$

Учтем, что, согласно (4.22), спектр относительных флуктуаций сопротивления не зависит ни от напряжения U_0 , ни от тока I .

В результате видим, что величина спектра шумового напряжения пропорциональна квадрату падения напряжения на образце U_0^2 , либо квадрату протекающего тока I^2 .

Примечание

Такие квадратичные зависимости типичны для всех линейных флуктуирующих резисторов. При этом форма спектра флуктуаций сопротивления не играет никакой роли, она лишь определяет форму спектра шумового напряжения.

4.5. Вывод уравнения Ланжевена

Данный раздел является дополнением к Разделу 4.2 и при начальном изучении материала может быть опущен.

Исследуем флуктуации числа носителей тока в полупроводниковом образце, вызванные случайностью процессов генерации и рекомбинации. За основу возьмем подход, предложенный А. Ван дер Зилом [6].

Обозначим через $P(N, t)$ вероятность застать N носителей тока в момент времени t .

В течение достаточно малого интервала времени dt рассматриваемая вероятность может измениться на величину $d_t P$ вследствие следующих переходов:

$$\begin{aligned} N &\xrightarrow{g} (N+1); N \xrightarrow{r} (N-1); \\ (N-1) &\xrightarrow{g} N; (N+1) \xrightarrow{r} N. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь переходы, указанные в первой строке, приводят к уменьшению вероятности $P(N, t)$, то есть $d_t P < 0$. Оставшиеся два перехода, наоборот, дают $d_t P > 0$. Символом “g” над стрелкой отмечены переходы, вызванные генерацией носителя тока, соответственно, символ “r” означает рекомбинацию носителя.

Указанные переходы характеризуются скоростями генерации g и рекомбинации r носителей тока. Эти скорости определяют вероятность $g \cdot dt$ генерации и $r \cdot dt$ рекомбинации одного носителя тока за сколь угодно малое время dt .

В результате анализ переходов (4.25) приводит к следующему дифференциально–разностному уравнению для вероятности $P(N, t)$:

$$\begin{aligned} d_t P = & -P(N, t) \cdot g(N) \cdot dt - P(N, t) \cdot r(N) \cdot dt \\ & + P(N-1, t) \cdot g(N-1) \cdot dt + P(N+1, t) \cdot r(N+1) \cdot dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Проанализируем полученное уравнение, воспользовавшись методами статистической радиофизики (см., например, Гл.1 в [4]).

Прежде всего, заметим, что $N = N(t)$ – случайный марковский процесс, поскольку изменение вероятности определяется состоянием лишь в рассматриваемый момент времени t .

Обсудим теперь зависимость вероятности $P(N, t)$ от координаты N , то есть от числа носителей в образце.

Из (4.26) видим, что изменение вероятности определяется координатами лишь в трех соседних точках:

$$(N-1), N, (N+1).$$

При этом следует иметь в виду, что переменная N является дискретной. Полагая $N \gg 1$, можно рассматривать изменение $(+1)$ как дифференциал $dN = 1$. Таким образом, рассматриваемые три соседние точки есть

$$(N - dN), N, (N + dN).$$

На языке дифференциального исчисления данное обстоятельство означает, что в правую часть соотношения (4.26) входят производные по переменной N до 2-го порядка включительно. Это дает возможность использовать разложение для последних двух членов правой части в степенной ряд (в окрестности точки N) с учетом слагаемых, содержащих производные не выше второго порядка:

$$\begin{aligned}
 & P(N-1, t) \cdot g(N-1) = \\
 & = P(N, t) \cdot g(N) + [P(N, t) \cdot g(N)]'_N \cdot (-1) + (1/2)[P(N, t) \cdot g(N)]''_{NN} \cdot (-1)^2, \\
 & P(N+1, t) \cdot r(N+1) = \\
 & = P(N, t) \cdot r(N) + [P(N, t) \cdot r(N)]'_N \cdot (+1) + (1/2)[P(N, t) \cdot r(N)]''_{NN} \cdot (+1)^2.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Используя полученные разложения для преобразования соотношения (4.26), получим известное уравнение Эйнштейна – Фоккера – Планка (ЭФП) для вероятности $P(N, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} [K_1(N) \cdot P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} [K_2(N) \cdot P]. \tag{4.28}$$

Входящие сюда кинетические коэффициенты K_1 и K_2 определяются через скорости генерации и рекомбинации носителей тока:

$$\begin{aligned}
 K_1(N) &= g(N) - r(N), \\
 K_2(N) &= g(N) + r(N).
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Уравнение (4.28) позволяет найти все статистические характеристики флуктуаций полного числа носителей $N(t)$ в образце. Однако здесь будет использована иная трактовка этого уравнения.

Уравнению ЭФП соответствует, как можно показать [4], следующее уравнение для флуктуаций $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = K_1(N) + \sqrt{K_2(N)} \cdot \zeta(t). \tag{4.30}$$

Здесь использован дельта–коррелированный стационарный источник $\zeta(t)$, обладающий, как отмечено в соотношении (4.7), единичным спектром:

$$\langle \zeta^2 \rangle_f = 1 \text{ [Гц/Гц]}.$$

Уравнение (4.30) имеет довольно универсальный характер.

Оно применимо ко всем флуктуационным процессам, для которых можно определить скорости генерации и рекомбинации носителей тока, необходимые для определения кинетических коэффициентов (4.29).

Ограничимся анализом стационарного генерационно–рекомбинационного шума. Условие стационарности ГРШ можно представить следующим образом:

$$K_1(N_0) = 0. \quad (4.31)$$

Это означает, что в образце установилось стационарное (среднее) число носителей тока $\langle N(t) \rangle = N_0$, определяемое, согласно первому соотношению в (4.29), равенством скоростей их генерации и рекомбинации:

$$g(N_0) = r(N_0). \quad (4.32)$$

Воспользуемся соотношениями (4.2) и (4.3), где введены в рассмотрение относительные флуктуации числа носителей тока, считающиеся достаточно малыми:

$$N = (1 + \delta N) \cdot N_0; \quad \delta N = \delta N(t); \quad \langle \delta N^2 \rangle \ll 1.$$

Преобразуем правую часть соотношения (4.30). Для этого линеаризуем первый член в окрестности N_0 , а в предшумовом множителе второго слагаемого ограничимся нулевым приближением, то есть примем $N = N_0$.

В результате получим следующее уравнение для относительных флуктуаций числа носителей тока:

$$\frac{d}{dt} \delta N = -\frac{1}{\tau_0} \delta N + \sqrt{A_N} \cdot \zeta(t). \quad (4.33)$$

Здесь

$$\tau_0 = \left[\frac{d(r - g)}{dN} \Big|_{N_0} \right]^{-1} \quad (4.34)$$

– время релаксации, определяемое через производную от разности между скоростей рекомбинации и генерации, взятую в стационарной точке N_0 ;

$$A_N = 2g(N_0)/N_0^2 \quad (4.35)$$

– параметр, характеризующий мощность шумов; $\zeta(t)$ – стационарный дельта–коррелированный случайный процесс, обладающий единичным спектром мощности $\langle \zeta^2 \rangle_f = 1$ [Гц/Гц].

Уравнение (4.33) относится к классу уравнений Ланжевена.

5. Шум лавинообразования

5.1. Введение

Англоязычное название шума лавинообразования – avalanche noise.

Впервые явление лавинного размножения тока нашло практическое применение в специально разработанных электровакуумных приборах – **фотоэлектронных умножителях** (ФЭУ). Схематическое устройство ФЭУ изображено на Рис. 5.1.

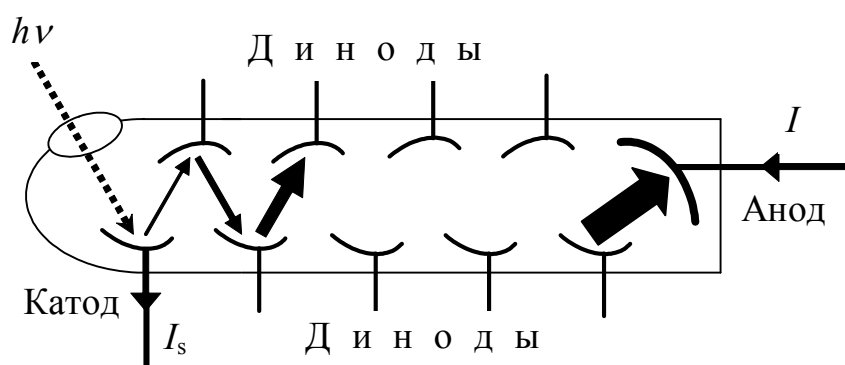


Рис. 5.1. Фотоэлектронный умножитель

Луч света, попадая на катод, приводит к эмиссии фотоэлектронов. Эти электроны, под действием электрического поля, устремляются к первому диноду (промежуточному аноду). Величина поля достаточно велика для того, чтобы электрон, достигнув динода, выбил из него дополнительные (вторичные) электроны. Увеличившийся поток электронов направляется к следующему диноду, из которого также выбиваются вторичные электроны.

В конечном итоге, поток электронов достигает анода.

Обозначим через I_s ток катода, I – ток анода. В этом случае имеем:

$$I = M \cdot I_s. \quad (5.1)$$

Здесь M – коэффициент размножения электронов, характеризующий эффективность работы ФЭУ; его величина может достигать $10^5 - 10^6$. В результате, возникает возможность работы ФЭУ в так называемом “режиме счета фотонов”.

Разумеется, выявить единичный фотон не удастся. Этому мешает шум лавинообразования, обусловленный случайным характером эмиссии и размножения электронов.

Шум лавинообразования $i_n(t)$ проявляется аналогично дробовому шуму $i_{др}(t)$, рассмотренному в Разделе 3, см. соотношение (3.1):

$$I(t) = \langle I(t) \rangle + i_n(t). \quad (5.2)$$

Этот шум присутствует и в других электронных приборах, в которых имеет место лавинное размножение носителей тока.

С учётом шума лавинообразования соотношение (5.1), определяющее коэффициент лавинного размножения носителей, определяется токами, усреднёнными по ансамблю реализаций:

$$M = \langle I(t) \rangle / \langle I_s(t) \rangle . \quad (5.3)$$

Здесь ток I_s надо рассматривать как ток инжекции носителей (в рабочую область прибора). Этот ток подвержен влиянию дробового шума.

Рассмотрим кратко некоторые из приборов, основанных на эффекте лавинного размножения носителей тока.

Стабилитрон (стабилизаторный диод) – обратно-смещённый диод с $p-n$ переходом. При определённом (обратном) напряжении $V_{пр}$ возникает лавинный пробой $p-n$ перехода. В результате, ток через диод контролируется только внешней цепью, а напряжение V на диоде остаётся практически неизменным, $V \approx V_{пр}$.

Это явление используется для создания стабилизаторов напряжения, см. Рис. 5.2.

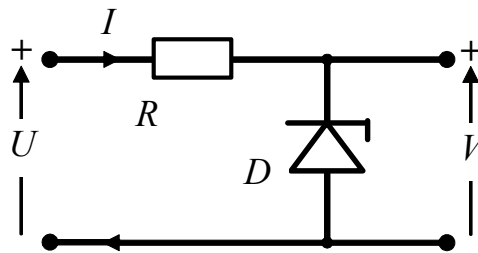


Рис. 5.2. Упрощенная схема стабилизатора напряжения

На Рис. 5.3 поясняется принцип работы стабилизатора.

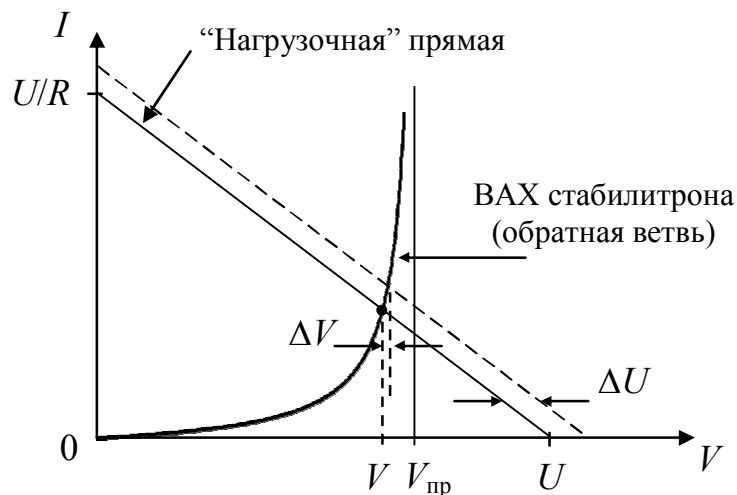


Рис. 5.3. Обратная ветвь ВАХ стабилитрона и “нагрузочная” прямая

Здесь изображена обратная ветвь вольтамперной характеристики стабилитрона D , поскольку он включён в обратном направлении. Выделено напряжение пробоя $V_{пр}$, при приближении к которому ток через стабилитрон неограниченно нарастает.

Кроме того, приведена так называемая “нагрузочная” прямая, определяемая, в соответствии с Рис. 5.2, уравнением

$$I = (U - V)/R .$$

Эта прямая определяется двумя характерными точками на координатных осях (V ; U):

- Ось I (то есть $V = 0$). Характерная точка $I = U/R$.
- Ось V (то есть $I = 0$). Характерная точка $V = U$.

Напряжение V на выходе стабилизатора напряжения определяется точкой пересечения ВАХ стабилитрона и нагрузочной прямой (так называемой “рабочей точкой”).

Увеличение ΔU входного напряжения приводит к смещению нагрузочной прямой (наклонная штриховая линия на рисунке). Из-за лавинного пробоя стабилитрона график его ВАХ имеет сильно нарастающий характер. Поэтому смещение ΔV рабочей точки по оси напряжения относительно мало.

Иначе говоря, происходит стабилизация выходного напряжения V .

Лавинно-пролётный диод (ЛПД) – диод с обратно-смещённым переходом (в простейшем случае, типа $p-n$). К переходу примыкают относительно “толстые” области, в которых носители тока дрейфуют под действием приложенного электрического поля. В простейшем случае областей дрейфа может быть не две, а одна.

Упрощенная структура ЛПД приведена на Рис. 5.4.

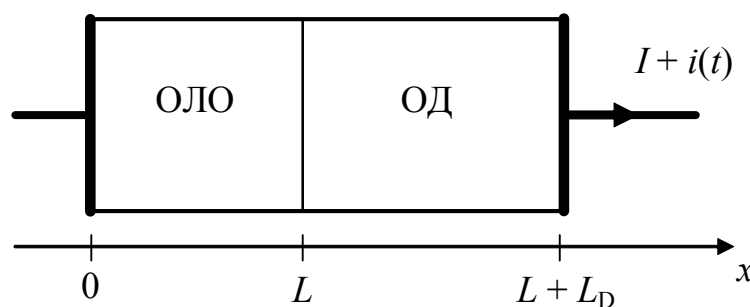


Рис. 5.4. Упрощенная структура ЛПД с выделенными областями лавинообразования (ОЛО) и дрейфа (ОД)

В области лавинообразования (ОЛО) напряжённость электрического поля весьма велика. Здесь происходит лавинное размножение носителей тока.

Процесс лавинного размножения имеет индуктивный характер. Иначе говоря, между **малосигнальной** компонентой напряжения, приложенной к области лавинообразования, и **малосигнальной** компонентой тока лавины возникает сдвиг фазы

$$\varphi_{\text{л}} = \pi/2 .$$

В области дрейфа (ОД) напряжённость электрического поля несколько ниже, чем в области лавинообразования. Здесь лавинное размножение отсутствуют. Однако носители тока преодолевают область дрейфа за некоторое конечное время $\tau_{\text{д}}$. Из-за этого возникает дополнительный сдвиг фазы между мало-сигнальными компонентами тока и напряжения.

В результате на достаточно высоких частотах ЛПД имеет отрицательное динамическое сопротивление. Это явление используется для создания усилителей и генераторов сигналов СВЧ.

Примечание.

Возможность создания диода с отрицательным динамическим сопротивлением теоретически показана в 1958 году Ридом [10]. Была предложена специальная структура, названная диодом Рида. Экспериментально, практически одновременно и независимо от Рида, ЛПД был реализован Александром Семёновичем Тагером с соавторами [11].

Явление лавинного размножения (пробоя) используется и в других полупроводниковых приборах: варакторах (параметрических диодах), фотодиодах, а также в транзисторах.

5.2. Спектр стационарного шума. Формула А.С. Тагера

Рассмотрим стационарный шум неполного лавинного пробоя. Это означает, что коэффициент лавинного размножения (5.3) имеет ограниченное фиксированное значение,

$$M = \text{const.}$$

Введем в анализ характерную частоту лавинообразования

$$f_{\text{л}} = 1/[2\pi(M-1)\tau_{\text{л}}]. \tag{5.4}$$

Здесь $\tau_{\text{л}} = \tau_1/2$ – характерное время лавинообразования, τ_1 – время пролёта носителей тока через область лавинообразования.

Спектр шума лавинообразования определяется **формулой А.С. Тагера** (см. гл. 6 в [12]):

$$\langle i_{\text{л}}^2 \rangle_f = \frac{2q_e M^2 I}{1 + (f/f_{\text{л}})^2}. \tag{5.5}$$

Исследуем зависимость формы спектра (5.5) от величины коэффициента лавинного размножения M , приняв $I = \text{const.}$

На Рис. 5.5 изображен исследуемый спектр $\langle i_{\text{л}}^2 \rangle_f$, нормированный на спектр дробового шума, соответствующего тому же току I . На горизонтальной оси отложена частота, нормированная на величину $f_1 = 1/(2\pi\tau_{\text{л}})$.

Из рисунка видим, что при $M \gg 1$ спадающая часть спектра имеет вид $1/f^2$ и не зависит от величины коэффициента размножения носителей.

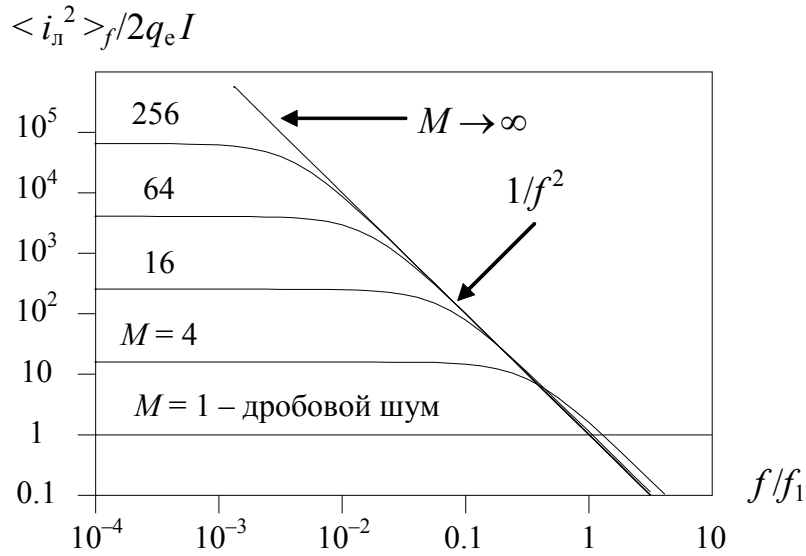
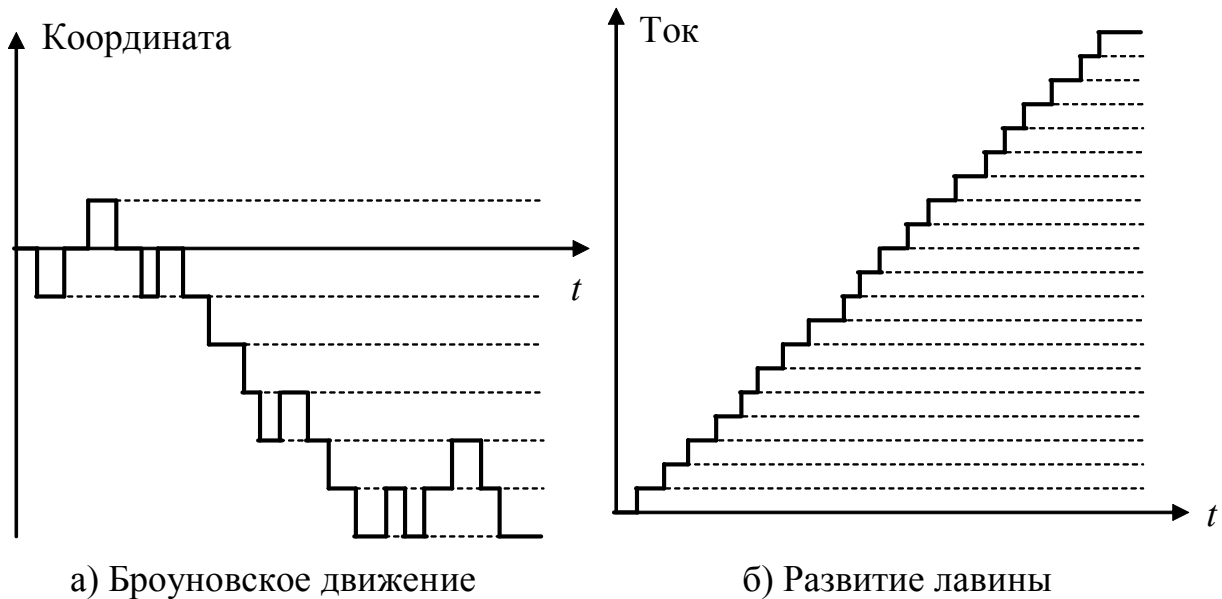


Рис. 5.5. Нормированный спектр шума лавинообразования

В предельном случае, при $M \rightarrow \infty$, спектр зависит от частоты по закону $1/f^2$, типичному для броуновского движения (прямая линия на рисунке). Однако шум лавинообразования отличается от броуновского движения.

Соответствующая иллюстрация представлена на Рис. 5.6.



а) Броуновское движение

б) Развитие лавины

Рис. 5.6. Примеры реализаций случайных процессов

Броуновское движение можно представить суперпозицией импульсов-ступенек с нулевой средней амплитудой (Рис. 5.6-а).

Шум развитого лавинного пробоя можно представить суперпозицией импульсов-ступенек. Каждый импульс соответствует единичному акту ионизационного размножения носителей. Поэтому, в отличие от броуновского движения, все импульсы являются однополярными, что приводит к неограниченному росту тока лавины во времени (Рис. 5.6-б).

5.3. Статистический анализ процесса лавинообразования

Данный раздел является дополнением к Разделу 5.2 и при начальном изучении материала может быть опущен.

5.3.1. Элементы теории “горячих” носителей тока

Для правильного понимания механизма ударной ионизации в полупроводниках рассмотрим некоторые элементы теории “горячих” носителей тока.

Дрейфовая скорость v_d носителей тока, находящихся в электрическом поле E , описывается уравнением: $v_d = \mu E$. Множитель μ называется **подвижностью** носителей.

При больших электрических полях носители успевают между соударениями с решёткой существенно увеличить свою кинетическую энергию. В результате, соударения теряют упругий характер, а решётка становится своего рода термостатом для носителей тока. Этот эффект приводит к насыщению скорости: $v_d \rightarrow v_s$ при росте поля E . Для насыщенной скорости электронов в кремнии имеем $v_s \approx 7 \cdot 10^6$ см/с.

На Рис. 5.7 изображена зависимость скорости электронов в кремнии (Si) от величины приложенного поля. Видно, что эффект насыщения скорости проявляется при полях, превышающих 10 кВ/см.

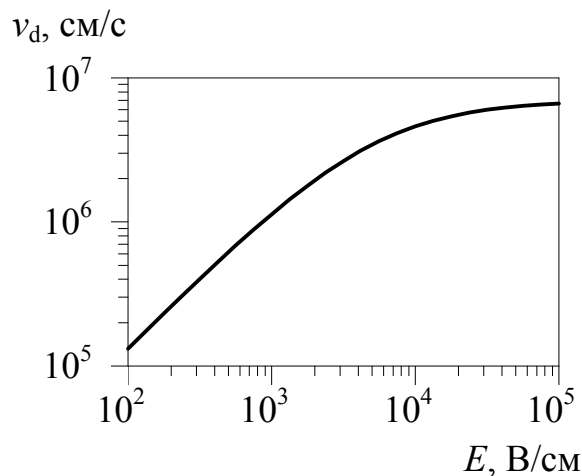


Рис. 5.7. Характеристика “скорость – поле” для кремния

Столь большие поля, помимо насыщения скорости, приводят к **ударной ионизации** атомов решётки носителями тока.

Рассмотрим последний эффект подробнее.

Обозначим через α коэффициент ионизации. Этот коэффициент определяет среднее количество носителей, генерируемых при пролёте отдельным носителем бесконечно малого расстояния dx :

$$dN = \alpha \cdot dx.$$

Коэффициенты ионизации электронов и дырок имеют разные значения. Однако в настоящем рассмотрении это различие учитываться не будет.

Допустим, имеется однородный полупроводниковый образец длиной L , к которому приложено достаточно большое напряжение (см. Рис. 5.8).

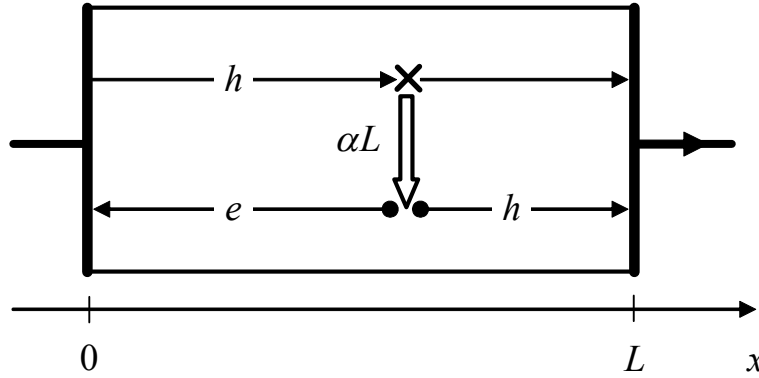


Рис. 5.8. Иллюстрация к единичному акту размножения носителей тока в однородном образце

Инжектированный носитель тока, дрейфуя через образец, приводит к генерации αL электронно-дырочных пар.

Каждый новый электрон и дырка начинают дрейфовать в разные стороны, проходя общий путь L и генерируя, в свою очередь, дополнительно αL пар.

Иначе говоря, происходит лавинное размножение носителей тока, в результате которого один носитель, инжектированный в образец, порождает M новых носителей тока. Параметр M называется коэффициентом лавинного размножения. Для его нахождения опишем вышеприведенный процесс в виде геометрической прогрессии:

$$M = 1 + \alpha L(1 + \alpha L(1 + \alpha L(1 + \dots))) = \frac{1}{1 - \alpha L}. \quad (5.6)$$

Отсюда видим, что при условии $\alpha L < 1$ лавинное размножение является ограниченным, $1 \leq M < \infty$. При $\alpha L \rightarrow 1$ имеем $M \rightarrow \infty$, что означает полный пробой образца. В режиме полного пробоя ток через образец контролируется только внешней цепью.

5.3.2. Шум развитого лавинного пробоя

Проведём анализ стохастических процессов, сопровождающих лавинное размножение носителей тока в полупроводнике.

На Рис. 5.9 приведены распределения концентраций (на единицу длины) дырок p и электронов n в однородной области лавинообразования длиной L , к которой приложено достаточно большое электрическое поле E . Индексом “о” отмечены концентрации электронов и дырок на выходе из области, “s” – те же концентрации на входе.

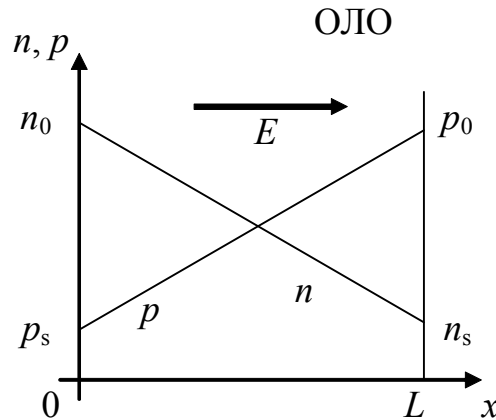


Рис. 5.9. Распределение концентраций дырок и электронов

Для простоты принято, что электроны и дырки обладают одинаковым коэффициентом ионизации α и двигаются с насыщенной скоростью v_s .

Поскольку электроны и дырки генерируются парами, градиенты их концентрации различаются только знаком. Из-за линейного характера изменения концентраций, обусловленного однородностью рассматриваемой области, сумма концентраций электронов и дырок фиксирована в любой точке x :

$$n(x) + p(x) = n_0 + p_s = n_s + p_0 = N/L . \quad (5.7)$$

Здесь N – полное число носителей тока в области лавинообразования, определяющее значение тока I через прибор:

$$I = q_e v_s N/L . \quad (5.8)$$

Определим также число N_s инжектированных носителей

$$N_s = (n_s + p_s)L , \quad (5.9)$$

и инжектированный ток

$$I_s = q_e v_s N_s/L . \quad (5.10)$$

Соотношения (5.8) и (5.10) позволяют нагляднее представить смысл коэффициента лавинного размножения (5.1):

$$M = I/I_s , \quad (5.11)$$

как отношение полного тока через область лавинообразования к току инжекции.

Воспользуемся теперь методом уравнения Эйнштейна – Фоккера – Планка (ЭФП), с помощью которого в Разделе 4.5 выполнен анализ генерационно–рекомбинационного шума.

Вычислим скорости генерации g и рекомбинации r (точнее, удаления) носителей.

Генерация носителей определяется механизмом лавинного размножения. Её скорость равна

$$g = [2\alpha LN] / \tau_1 . \quad (5.12)$$

Здесь учтено, что каждый носитель тока пребывает в области лавинообразования в течение времени пролета $\tau_1 = L/v_s$. Кроме того, каждый акт ионизации приводит к появлению двух носителей – электрона и дырки.

Рекомбинация (точнее, удаление) носителей происходит за счёт пересечения границ области дрейфующими носителями. Учитывая этот механизм, получим:

$$r = (n_0 + p_0) \cdot v_s = [(n_0 + p_s) + (p_0 + n_s) - (p_s + n_s)] \cdot v_s .$$

Принимая во внимание соотношения (5.7) и (5.9), придём к следующему выражению для скорости рекомбинации:

$$r = (2N - N_s) / \tau_1 .$$

Здесь член N_s учитывает дробовой эффект тока инжекции, уже опущенный выше из рассмотрения. Поэтому для учёта шумов лавины им следует пренебречь. В результате получим:

$$r = 2N / \tau_1 . \quad (5.13)$$

Таким образом, кинетические коэффициенты для уравнения Эйнштейна – Фоккера – Планка (4.28) есть:

$$\begin{aligned} K_1(N) &= g - r = \frac{2}{\tau_1} (\alpha L - 1) \cdot N , \\ K_2(N) &= g + r = \frac{2}{\tau_1} (\alpha L + 1) \cdot N . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Данные коэффициенты позволяют, по аналогии с (4.30), найти уравнение для флуктуаций тока через образец. Учёт соотношения (5.8), определяющего связь между полным числом N носителей тока в образце и током I , приводит к следующему результату:

$$\tau_n \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1) \cdot I + \sqrt{(\alpha L + 1) q_n I} \cdot \zeta_n(t) . \quad (5.15)$$

Здесь $\tau_n = \tau_1/2$ – характерное время лавинообразования, сомножитель “1/2” обусловлен рождением во время ионизационного акта сразу двух носителей – электрона и дырки.

Случайный источник $\zeta_n(t)$ обладает спектрально-корреляционными характеристиками, аналогичными источнику $\zeta_s(t)$ во флуктуационном уравнении (3.18) для дробового шума.

Отметим, что при выводе уравнения (5.14) не принимался во внимание ток инжекции I_s , то есть оно справедливо только для развитой лавины, при условии $\alpha L \approx 1$. Поэтому представим уравнение в следующем окончательном виде:

$$\tau_n \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1) \cdot I + \sqrt{2q_e I} \cdot \zeta_n(t). \quad (5.16)$$

Данный результат есть известное **уравнение Рида**, дополненное слагаемым, учитывающим шум лавинообразования (последнее слагаемое в правой части).

5.3.3. Шум частичного лавинного пробоя

Преобразуем соотношение (5.16) с целью его обобщения на случай частичного лавинного пробоя. Учтём, что при отсутствии лавинного размножения носителей, $\alpha L = 0$, оно должно перейти в уже известный результат, определённый соотношением (3.18) для дробового шума:

$$I = \langle I_s \rangle + \sqrt{2q_e \langle I_s \rangle} \cdot \zeta_s(t).$$

Здесь под знаком радикала использован оператор статистического усреднения $\langle \dots \rangle$, который отсутствовал в вышеприведённых формулах для шума лавинообразования.

Строго говоря, этот оператор в сомножителях, стоящих перед шумовым источником, не является обязательным. Учёт флуктуаций в таких сомножителях приводит к эффектам высшего порядка малости, которыми во флуктуационном анализе принято пренебрегать.

Другими словами, пусть первичный флуктуационный источник входит в какое-либо соотношение вместе с сомножителем, зависящим от динамической переменной. Иначе говоря, величина “предшумового” сомножителя описывается состоянием рассматриваемой системы. В этом случае оператор статистического усреднения в таком сомножителе будет опускаться, как, например, это уже было сделано в уравнении (5.16).

Возвратимся к уравнению для развитого лавинного пробоя (5.16). Отметим, что производная в его левой части характеризует эффект лавинного размножения носителей. При отсутствии ударной ионизации эта производная исчезает. Поскольку интенсивность ионизации описывается сомножителем αL ,

дополним этим сомножителем левую часть уравнения. Кроме того, в левую часть добавим слагаемое $\langle I_s \rangle$, необходимое для корректного учёта дробового шума и несущественное для шума лавинообразования. В результате получим следующее флуктуационное уравнение для тока через образец:

$$\alpha L \tau_n \frac{dI}{dt} = (\alpha L - 1) \cdot I + \langle I_s \rangle + \sqrt{2q_e I} \cdot \zeta(t). \quad (5.17)$$

Сюда входит стационарный случайный источник $\zeta(t)$, представляющий собой суперпозицию источников $\zeta_n(t)$ и $\zeta_s(t)$, обладающий теми же спектрально-корреляционными характеристиками.

Уравнение (5.17) справедливо для любой степени развития лавинного пробоя. Его можно использовать для анализа нестационарных шумов лавинообразования, то есть в случае, когда полный ток через образец модулируется внешним сигналом.

Вернёмся к Разделу 5.2, где рассмотрен спектр стационарного шума $i_n(t)$ неполного лавинного пробоя $i_n(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$.

Напомним, что коэффициент лавинного размножения (5.3) имеет фиксированное значение, $M = \text{const}$. Учитывая определение данного коэффициента, приведенное в соотношении (5.6), $M = 1/(1 - \alpha L)$, преобразуем флуктуационное уравнение (5.17) к следующему виду:

$$(M - 1) \tau_n \cdot \frac{di_n}{dt} + i_n = \sqrt{2q_e M^2 I} \cdot \zeta(t). \quad (5.18)$$

Вычислим спектр $\langle i_n^2 \rangle_f$ шумового тока через образец.

Имея целью анализ эффекта лавинообразования, пренебрежем частотной зависимостью спектра первичного шумового источника, то есть примем

$$\langle \zeta^2 \rangle_f = 1 \text{ Гц/Гц.}$$

Введем в анализ $f_n = 1/[2\pi(M-1)\tau_n]$ – характерную частоту лавинообразования, см. соотношение (5.4).

В результате получим следующее выражение для спектра шумового тока:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = \frac{2q_e M^2 I}{1 + (f / f_n)^2}.$$

Таким образом, мы пришли к формуле А.С. Тагера (5.5).

6. Взрывной шум

В англоязычной литературе этот шум называется “burst noise”.

Взрывной шум наблюдается чаще всего в мощных приборах с p - n переходами. Он вызывается локальными обратимыми микропробоями в областях, где присутствуют дефекты структуры.

Чаще всего взрывной шум имеет характер дихотомического случайного процесса, говоря проще, – случайного телеграфного процесса (СТП). Однако иногда встречается и “многоуровневый” взрывной шум, который считается суперпозицией нескольких СТП.

На Рис. 6.1 приведён пример реализации взрывного шума, наблюдающегося в светодиодах на квантовых точках [13].

Отсюда видна отличительная особенность этого шума, как случайного телеграфного процесса, – он отчётливо проявляется на фоне других шумов, действующих в приборе.

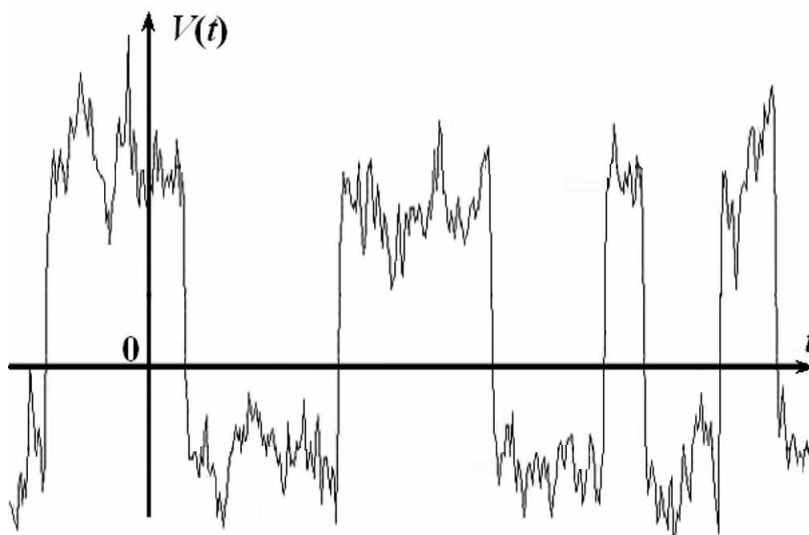


Рис. 6.1. Осциллограмма взрывного шума на фоне других шумов диода

Взрывной шум можно описать эквивалентной электрической схемой, содержащей два резистора, R_1 и R_2 , и ключ “Кл”, см. Рис. 6.2.

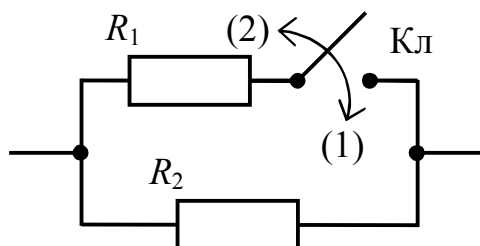


Рис. 6.2. Двухрезисторная модель взрывного шума

Ключ замыкает, состояние “(1)”, и размыкает, состояние “(2)”, цепь в случайные моменты времени. В результате, полное сопротивление цепи представляет собой случайный телеграфный процесс.

При разомкнутом ключе, характеризующимся состоянием “(2)”, сопротивление цепи определяется нижним резистором R_2 :

$$R^{(2)} = R_2.$$

При замыкании ключа, состояние “(1)”, сопротивление цепи равно

$$R^{(1)} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, размах СТП, имеющий смысл изменения величины сопротивления, равен

$$r = R^{(2)} - R^{(1)} = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}. \quad (6.1)$$

Обозначим через τ_1 и τ_2 средние время пребывания ключа в замкнутом “(1)” и разомкнутом “(2)” состояниях. Тогда вероятности времён пребывания ключа в этих состояниях есть:

$$p = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}, q = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 1 - p. \quad (6.2)$$

Это позволяет определить среднее значение $\langle R \rangle$ и дисперсию $\langle \Delta R^2 \rangle$ абсолютных флуктуаций сопротивления:

$$\langle R \rangle = R_2 - pr. \quad (6.3)$$

$$\langle \Delta R^2 \rangle = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2 = pqr^2. \quad (6.4)$$

Для определения спектра взрывного шума, как спектра флуктуаций сопротивления цепочки, надо знать статистику времён пребывания процесса в каждом (из двух возможных) состоянии.

Допустим для простоты, что эти времена определяются законом Больцмана:

$$W_{1,2}(\tau) = \frac{1}{\tau_{1,2}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{1,2}}\right), \tau \geq 0. \quad (6.5)$$

В этом случае спектр флуктуаций сопротивления, моделирующих взрывной шум, равен

$$\langle \Delta R^2 \rangle_f = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \cdot \langle \Delta R^2 \rangle. \quad (6.6)$$

Здесь

$$\tau_0 = (\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1})^{-1} \quad (6.7)$$

– время релаксации взрывного шума, как случайного телеграфного процесса.

Отметим, что спектр (6.6) взрывного шума совпадает, с точностью до обозначений, со спектром (4.22) генерационно–рекомбинационного шума. Это совпадение не случайно.

Генерационно–рекомбинационный шум $N(t)$ представляет собой суперпозицию случайных телеграфных процессов $\xi_i(t)$:

$$N(t) = \sum_i \xi_i(t), \quad i = \overline{1, N_{\text{tot}}}. \quad (6.8)$$

Здесь N_{tot} – полное число носителей тока в образце.

Каждому носителю ставится в соответствие процесс $\xi_i(t)$, принимающий два значения: ноль и единица. Если $\xi_i(t) = 1$, носитель свободен, то есть находится в зоне проводимости; $\xi_i(t) = 0$ означает, что носитель захвачен, например, ловушкой.

Поскольку число носителей в образце очень велико, $N_{\text{tot}} \gg 1$, эффект от случайного телеграфного процесса, генерируемого отдельным носителем, в осциллограмме ГРШ не заметен.

7. Фликкерный шум

7.1. Введение

Фликкерный шум обнаружен Джонсоном в 1925 году [14] при исследовании дробового шума электровакуумных ламп.

Примерная схема эксперимента изображена на Рис. 7.1.

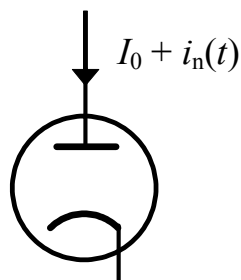


Рис. 7.1. Схема эксперимента по обнаружению фликкерного шума

Измерялся спектр $\langle i_n^2 \rangle_f$ шумового тока $i_n(t)$, возникающего в лампе. Предполагалось, что этот спектр будет описываться формулой Шотки (3.14) для дробового шума.

Действительно, на частотах порядка 10 кГц и выше измеренный спектр совпал с ожидаемым значением, см. Рис. 7.2.

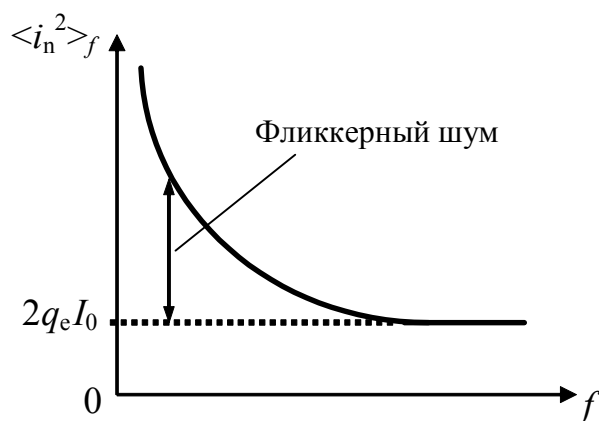


Рис. 7.2. Спектр измеренного шума

Однако при понижении частоты анализа спектр начал практически неограниченно нарастать.

Первую теорию, равно как и название шума, предложил Шотки в 1926 году [15]. Было замечено, что причиной этого шума является “мерцательное” изменение эмиссионной способности отдельных областей катода. Отсюда и возникло название “фликкерный шум” (flicker – мерцание, англ.).

Примечание.

Среди многочисленных исследователей фликкерного шума следует особо отметить Аскольда Николаевича Малахова, создателя и первого заведующего кафедрой “Бионика и статистическая радиофизика” радиофизического факультета ННГУ (см., например, [4]). Из отечественных исследователей, внесших существенный вклад в понимание физических механизмов возникновения фликкерного шума, отметим Шулима Мееровича Когана (см., например, [16]).

Отличительной чертой фликкерного шума является форма его спектра.

Обозначим, для общности, через $x(t)$ фликкерный случайный процесс. Многочисленные экспериментальные исследования приводят к следующему (эмпирическому) выражению для спектра этого процесса:

$$\langle x^2 \rangle_f = A/f^\gamma. \quad (7.1)$$

Параметр A в этом выражении специального названия не имеет. Обычно говорят, что он численно равен высоте спектра на частоте 1 Гц.

Параметр γ называется “параметром формы спектра”. Обычно его величина близка к единице, $\gamma \sim 1$, однако встречаются значения из более широкого диапазона, $\gamma \in (0.6; 2)$.

Из-за того, что параметр формы спектра часто принимает значения, близкие к единице, то есть спектр (7.1) имеет частотную зависимость вида $1/f$, фликкерный шум иногда называют “1/f шумом”.

Последующие исследования привели к выявлению фликкерного шума во всех без исключения радиоэлектронных приборах.

Фликкерные флуктуации обнаружены в длительности периода обращения Земли вокруг своей оси, в колебаниях уровня рек (в частности, реки Нил), в электрическом потенциале нервных волокон, во многих других явлениях природы.

Обнаружено, что акустические колебания, производимые наиболее приятной для нашего слуха музыкой, тоже имеют фликкерный характер с параметром формы спектра, близким к единице.

При всём многообразии проявления фликкерного шума его природа до сих пор окончательно не выявлена. Поэтому ограничимся здесь анализом фликкерных шумов только в радиоэлектронных приборах, отделяя хорошо изученные аспекты от моделей и гипотез.

7.2. Форма спектра фликкерного шума

Рассмотрим гипотетическую форму спектра фликкерного шума, изображённую на Рис. 7.3.

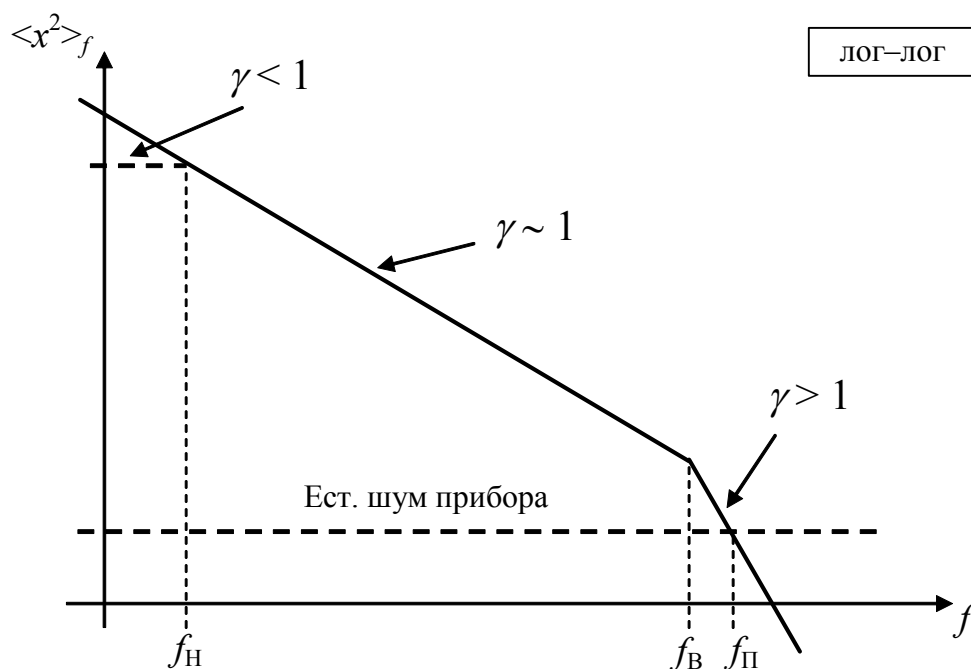


Рис. 7.3. Спектр фликкерного шума

Здесь использован двойной логарифмический масштаб, благодаря чему степенные зависимости типа (7.1) трансформируются в линейные зависимости.

Фликкерный шум всегда наблюдается на фоне других шумов прибора. На рисунке условно изображён спектр естественных шумов прибора, предположительно, имеющих характер белого шума (горизонтальная штриховая линия).

Здесь же введены частоты, характеризующие спектр шума.

Нижняя частота перегиба (НЧП) f_H . Предполагается, что на более низких частотах, $f < f_H$, параметр формы спектра принимает значение меньше единицы, $\gamma < 1$, например, спектр переходит в плато, $\gamma = 0$.

Верхняя частота перегиба (ВЧП) f_B . На более высоких частотах, $f > f_B$, параметр γ принимает значение больше единицы, $\gamma > 1$, например, $\gamma = 2$.

Частота перегиба f_{Π} . Эту частоту также называют “угловой частотой” и “частотой фликкерного спектра”. На более высоких частотах, $f > f_{\Pi}$, фликкерный шум маскируется естественными шумами прибора. Возможна ситуация, когда $f_{\Pi} < f_B$; в этом случае высокочастотный “перегиб” спектра фликкерного шума выявить не удаётся из-за маскирующего влияния естественных шумов.

Обсудим детальнее смысл верхней и нижней частот перегиба.

Введение верхней частоты перегиба f_B означает запрет на ультрафиолетовую катастрофу.

Если на относительно низких частотах параметр формы спектра не превышает единицу, $\gamma \leq 1$, то в области сколь угодно высоких частот, $f \rightarrow \infty$, спектр

не должен иметь неинтегрируемую особенность. То есть, при $f > f_B$, параметр формы спектра должен превышать единицу, $\gamma > 1$.

В разных приборах верхняя частота перегиба f_B принимает значения от сотен герц до нескольких сотен килогерц.

Нижняя частота перегиба f_H имеет гипотетический характер. Её введение обусловлено предположением об ограниченности полной мощности фликкерного шума. Иначе говоря, спектр не должен иметь неинтегрируемой расходимости в окрестности нулевой частоты анализа, то есть при $f \rightarrow 0$.

Поясним эту проблему примером, полагая $\gamma = 1$ и $f_H = 0$. В этом случае спектр фликкерного шума принято описывать следующим соотношением [4]:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{A \cdot f_B}{f \cdot (f + f_B)}. \quad (7.2)$$

Вычислим, в соответствии с соотношением (1.6), полную мощность шума, учитывая расходимость спектра (7.2) в окрестности нулевой частоты:

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{F \rightarrow 0} \int_F^{\infty} \langle x^2 \rangle_f df = A \cdot \lim_{F \rightarrow 0} [\ln(1 + f_B/F)] = \infty. \quad (7.3)$$

Видим, что при стремлении нижней границы F диапазона анализируемых частот к нулю наблюдается логарифмическая расходимость мощности шума. Однако эта расходимость имеет лишь математический характер. В эксперименте нельзя достичь нулевой частоты анализа (точно также недостижима и бесконечно большая частота).

Для достижения $F = 0$ необходимо бесконечно большое время измерения, $T_{\text{изм}} = \infty$. Все эксперименты выполняются конечное время. На сегодняшний день нижнюю частоту перегиба f_H обнаружить не удалось.

В этой связи возможны два варианта анализа фликкерного шума, обладающего неинтегрируемым спектром в окрестности нулевой частоты, то есть $\gamma \geq 1$.

В основе **первого варианта** стоит предположение о стационарности шума. Это означает наличие нижней частоты перегиба. Можно, например, выбрать значение f_H равным обратному времени существования Вселенной, либо, что более реально, равным обратному времени жизни исследуемого прибора.

Во **втором варианте** гипотеза о существовании нижней частоты перегиба не используется. При $\gamma \geq 1$ такой подход приводит к нестационарности исследуемого фликкерного шума. В этом случае для анализа спектрально-корреляционных характеристик шума требуется специальный математический аппарат.

7.3. Спектрально-корреляционный анализ фликкерного шума

В случае $\gamma < 1$ фликкерный шум может быть стационарным и, как следствие, обладать функцией корреляции $\Phi_x(\tau)$, определённой соотношением (1.1).

Если $\gamma \geq 1$ и нижняя частота перегиба отсутствует, $f_H = 0$, фликкерный шум нестационарен. Однако, если $\gamma < 3$, шум может обладать стационарными приращениями $\Delta x(t, \tau)$, которые определяются следующим образом:

$$\Delta x(t, \tau) = x(t + \tau) - x(t). \quad (7.4)$$

Смысл рассматриваемых приращений иллюстрируется на Рис. 7.4.

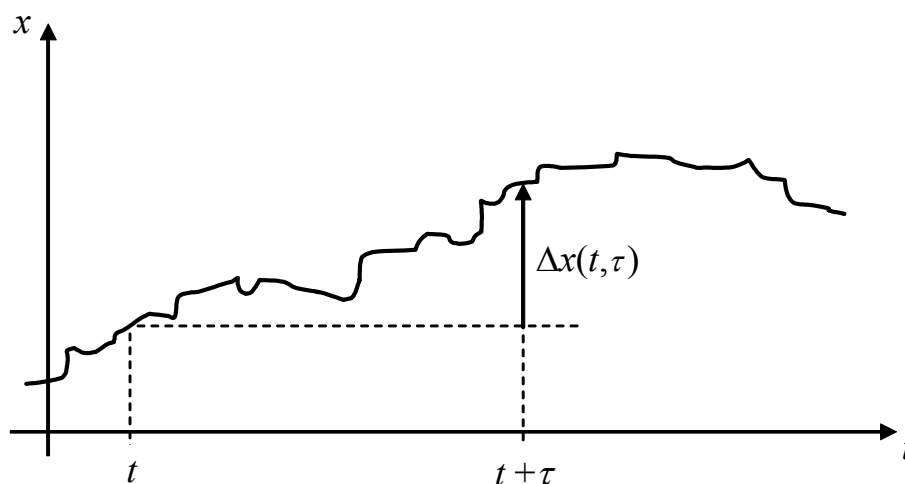


Рис. 7.4. Пример реализации $x(t)$ фликкерного шума

Приращения являются стационарными, если их статистические характеристики зависят только от интервала наблюдения τ , но не зависят от текущего времени t .

Полагая, что приращения стационарны, введём в рассмотрение структурную функцию процесса $x(t)$:

$$D_x[\tau] = \langle [x(t + \tau) - x(t)]^2 \rangle. \quad (7.5)$$

Эта функция представляет собой дисперсию приращений случайного процесса, она обладает следующими свойствами [4].

1^o. $D_x[0] = 0$ – дисперсия приращений на нулевом интервале равна нулю.

2^o. $D_x[-\tau] = D_x[+\tau]$ – свойство чётности.

3^o. Если $|\tau_2| > |\tau_1|$, то $D_x[\tau_2] \geq D_x[\tau_1]$ – дисперсия приращений не убывает при увеличении интервала наблюдения.

4^o. Если известен математический (двухсторонний) спектр $S_x(\omega)$, то структурная функция (7.5) есть

$$D_x[\tau] = 4 \int_0^{\infty} S_x(\omega) [1 - \cos(\omega\tau)] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (7.6)$$

Перейдём к анализу структурных функций фликкерных шумов, характеризующихся различными значениями параметра формы спектра.

В случае $\gamma = 1$ спектр моделируется соотношением (7.2).

Опуская несущественные детали, структурную функцию такого шума можно представить в следующем виде:

$$D_x[\tau] = 2A \cdot \ln(1 + 2\pi f_B |\tau|). \quad (7.7)$$

То есть дисперсия приращений нарастает по логарифмическому закону.

При $\gamma > 1$ спектр шума можно представить в виде (7.1), не учитывая существование верхней частоты перегиба f_B . Если при этом $\gamma < 3$, то можно считать, что шум обладает стационарными приращениями. Структурная функция имеет степенную зависимость от длительности интервала наблюдения τ :

$$D_x[\tau] = B \cdot |\tau|^{\gamma-1}, \quad 1 < \gamma < 3, \quad (7.8)$$

где

$$B = \frac{(2\pi)^\gamma A}{2\Gamma(\gamma) \sin\left[\frac{\pi}{2}(\gamma-1)\right]}. \quad (7.9)$$

Здесь $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция.

В частном случае $\gamma = 2$ имеем дело с броуновским случайным процессом, спектр которого имеет вид:

$$\langle x^2 \rangle_f = A/f^2. \quad (7.10)$$

Структурная функция броуновского случайного процесса пропорциональна длительности интервала наблюдения в первой степени:

$$D_x[\tau] = 2\pi A \cdot |\tau|. \quad (7.11)$$

Соответствующий график изображён на Рис. 7.5.

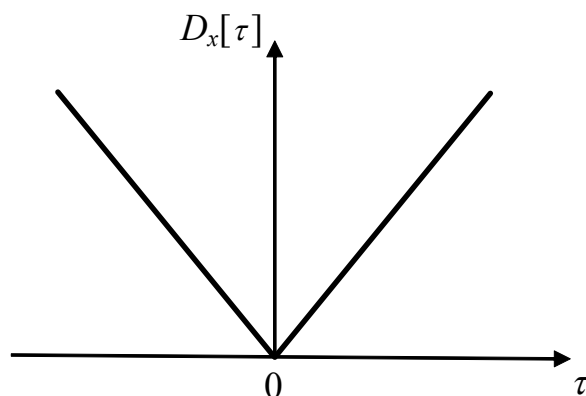


Рис. 7.5. Структурная функция броуновского случайного процесса

Эта структурная функция представляет известный закон диффузии броуновской частицы.

7.4. Нестационарность фликкерного шума

Обсудим подробнее проблему нестационарности фликкерного шума, положив, для конкретности, $\gamma = 1$, то есть приняв спектр (7.2).

Допустим, что флуктурует сопротивление резистора, спектр относительных флуктуаций которого равен:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{A_R f_B}{f \cdot (f + f_B)} \quad [1/\text{Гц}]. \quad (7.12)$$

В качестве типовых значений примем $A_R = 10^{-10}$, $f_B = 10 \text{ кГц} = 10^4 \text{ Гц}$. Отметим, что резистор, обладающий такими флуктуациями, считается “сильно шумящим”. В современных резисторах фликкерный шум проявляется гораздо слабее.

Определим, согласно (7.5) и (7.7), дисперсию приращения относительных флуктуаций сопротивления за время наблюдения τ :

$$D_{\delta R}[\tau] = \langle [\delta R(t + \tau) - \delta R(t)]^2 \rangle = 2A_R \cdot \ln(1 + 2\pi f_B |\tau|). \quad (7.13)$$

Ниже приводятся отдельные численные значения.

При $\tau = 0$ имеем $D_{\delta R} = 0$.

При $\tau = 100 \text{ с}$ — $D_{\delta R} \approx 30 \cdot 10^{-10}$.

При $\tau = 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ часа}$ — $D_{\delta R} \approx 40 \cdot 10^{-10}$.

При $\tau = 10^6 \text{ с} \approx 11 \text{ суток}$ — $D_{\delta R} \approx 50 \cdot 10^{-10}$.

При $\tau = 10^8 \text{ с} \approx 3 \text{ года}$ — $D_{\delta R} \approx 60 \cdot 10^{-10}$.

При $\tau = 10^{10} \text{ с} \approx 320 \text{ лет}$ — $D_{\delta R} \approx 68 \cdot 10^{-10}$.

Видим, что дисперсия растет очень медленно. Экспериментально такой рост выявить очень трудно. Поэтому до сих пор не ясно, стационарен фликкерный шум или нет.

7.5. Мультипликативность фликкерного шума

Обсудим теперь мультипликативность фликкерного шума. Для этого спланируем серию экспериментов и исследуем, насколько они подтверждают гипотезу о мультипликативности фликкерного шума.

7.5.1. Эксперимент 1

Рассмотрим флуктуирующий резистор, $R = R(t)$, через который пропускается фиксированный ток $I = I_0$, см. Рис. 7.6.

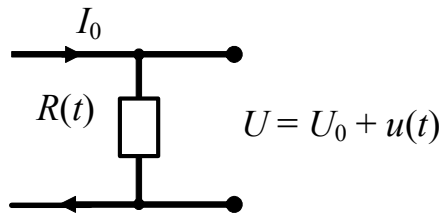


Рис. 7.6. Резистор, обладающий флуктуациями сопротивления, через который пропускается электрический ток

Как и в случае с генерационно–рекомбинационным шумом, см. соотношение (4.19), выделим относительные флуктуации $\delta R = \delta R(t)$ сопротивления резистора:

$$R = (1 + \delta R) \cdot R_0. \quad (7.14)$$

В результате найдем:

$U_0 = I_0 R_0$ – невозмущенное напряжение на резисторе,

$u(t) = U_0 \cdot \delta R(t)$ – шумовое напряжение на резисторе.

Спектр шумового напряжения равен

$$\langle u^2 \rangle_f = (I_0 R_0)^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f = U_0^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f, \quad (7.15)$$

см. также (4.24). Но теперь, в отличие от генерационно–рекомбинационного шума, спектр имеет фликкерный характер, так как рассматриваются фликкерные флуктуации сопротивления. Тем не менее, квадратичные зависимости величины этого спектра от тока I_0 и напряжения U_0 остаются в силе.

Именно такие зависимости наблюдаются в эксперименте. То есть гипотеза о мультипликативности фликкерного шума подтверждается. Дополнительное подтверждение этой гипотезы даёт следующий эксперимент.

7.5.2. Эксперимент 2

Пусть ток через образец содержит гармоническую компоненту:

$$I = I_0 + I_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi). \quad (7.16)$$

Разумеется, соответствующие компоненты полного напряжения U , выделяющегося на резисторе, будут флуктуировать:

$$U = U_0 + u(t) + V_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + v(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi). \quad (7.17)$$

Здесь U_0 и $u(t)$ имеют прежний смысл, но появились дополнительные компоненты:

$V_0 = I_1 R_0$ – амплитуда гармонической компоненты напряжения;

$v(t) = V_0 \cdot \delta R(t)$ – флуктуации амплитуды этой компоненты.

Спектр $\langle U^2 \rangle_f$ полного напряжения U имеет вид, изображённый на Рис. 7.7 в линейном масштабе.

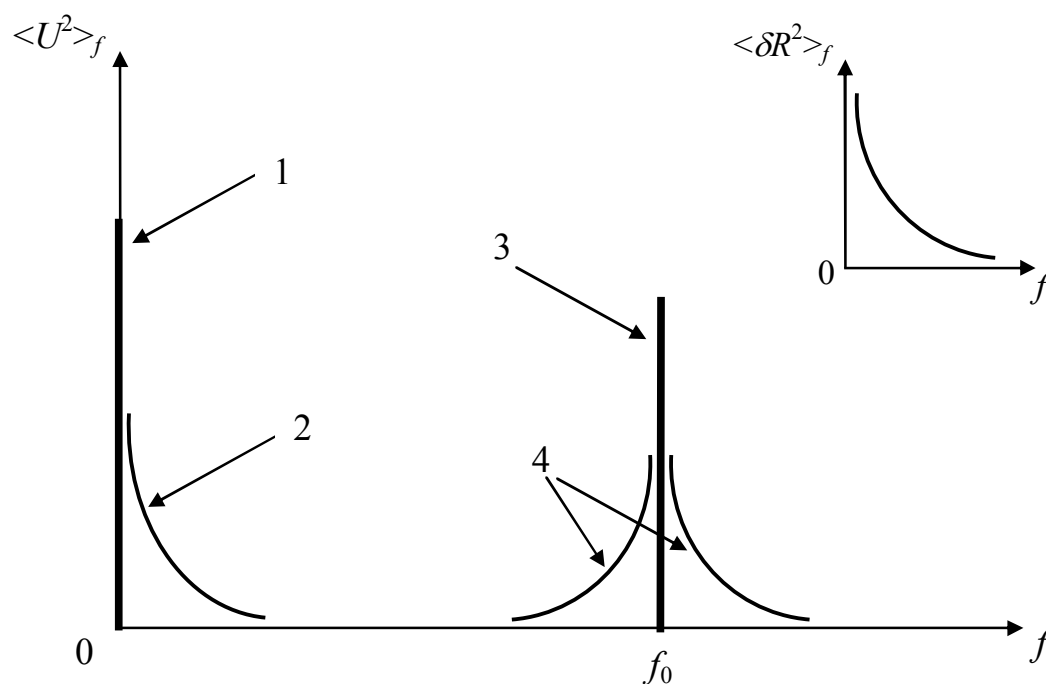


Рис. 7.7. Спектр напряжения, выделяющегося на резисторе, ток через который содержит постоянную составляющую и гармоническую компоненту.

На врезке изображён вид спектра флуктуаций сопротивления резистора.

Здесь отмечены компоненты, соответствующие четырём слагаемым в правой части соотношения (7.17).

- 1 – постоянная составляющая, имеющая спектр $U_0^2 \cdot \delta(f)$, то есть описываемая дельта-функцией Дирака на нулевой частоте; на экране анализатора спектра эта составляющая не видна.
- 2 – НЧ пьедестал, он же $1/f$ шум, соответствует шуму $u(t)$; его спектр описывается соотношением (7.15).

- 3 – монохроматическая линия, $(V_0^2/2) \cdot \delta(f - f_0)$, представляющая спектр невозмущённой гармонической компоненты напряжения, описываемый дельта-функцией Дирака на частоте f_0 .
- 4 – АМ шум, называемый также “ $1/\Delta f$ шумом”, представляющий спектр флуктуаций амплитуды гармонической компоненты напряжения.

Таким образом, спектр полного напряжения U , выделяющегося на резисторе, равен:

$$\langle U^2 \rangle_f = U_0^2 \cdot \delta(f) + \langle u^2 \rangle_f + (V_0^2/2) \cdot \delta(f - f_0) + (1/4) \langle v^2 \rangle_F. \quad (7.18)$$

Здесь $F = |f - f_0|$ – модуль частоты отстройки от “несущей” f_0 .

Возникает вопрос: как по данному спектру проверить мультипликативный характер фликкерного шума?

Способ первый

АМ шум $v(t)$ определяется амплитудой $V_0 = I_1 R_0$ переменной составляющей напряжения $v(t) = V_0 \cdot \delta R(t)$. Поэтому его спектр пропорционален квадрату амплитуды напряжения V_0 , либо тока I_1 , независимо от величины постоянных составляющих напряжения U_0 и тока I_0 :

$$\langle v^2 \rangle_f = (I_1 \cdot R_0)^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f = V_0^2 \cdot \langle \delta R^2 \rangle_f. \quad (7.19)$$

С другой стороны, спектр $1/f$ шума, см. соотношение (7.15), пропорционален квадрату постоянных составляющих напряжения U_0 и постоянного тока I_0 , но не зависит от амплитуды напряжения V_0 , либо тока I_1 .

Таким образом, имеется возможность изменять независимо величину как $1/f$ шума, так и $1/\Delta f$ шума, варьируя постоянную и переменную составляющие тока, пропускаемого через резистор.

Эксперименты дают именно такой результат.

Способ второй

Проведём двухканальную обработку напряжения U , используя схему, изображённую на Рис. 7.8.

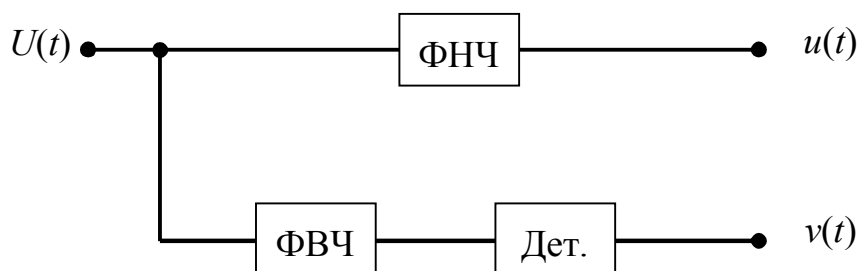


Рис. 7.8. Блок-схема установки для исследования корреляции между $1/f$ и $1/\Delta f$ шумами

Здесь первый канал представлен фильтром низких частот (ФНЧ). На его выходе выделяется низкочастотная компонента ($1/f$ шум) $u(t)$, причиной появления которой, согласно нашей гипотезе, являются флуктуации сопротивления:

$$u(t) = U_0 \cdot \delta R(t).$$

Второй канал содержит фильтр высоких частот (ФВЧ) и детектор (Дет.). Здесь выделяется напряжение $v(t)$, модулирующее амплитуду переменной составляющей ($1/\Delta f$ шум). Это напряжение, согласно принятой гипотезе, также обусловлено флуктуациями сопротивления:

$$v(t) = V_0 \cdot \delta R(t).$$

Отсюда следует, что $1/f$ шум и $1/\Delta f$ шум должны быть полностью коррелированы, как обусловленные общим источником – флуктуациями сопротивления резистора.

Именно такой результат и наблюдается в эксперименте, разумеется, в пределах допустимой погрешности.

Аналогичным образом мультипликативность фликкерного шума доказана и для других радиоэлектронных элементов: электровакуумных ламп, полупроводниковых приборах, и проч.

Таким образом, фликкерный шум есть следствие фликкерных флуктуаций параметров, проявляющихся при пропускании через прибор тока, либо приложении напряжения.

8. Основные модели фликкерного шума

Поскольку природа фликкерного шума до сих пор окончательно не выяснена, здесь будут рассмотрены только некоторые модели.

8.1. Модель Дю Пре – Ван дер Зила

8.1.1. Спектр фликкерного шума как суперпозиция лоренцевых спектров

Рассматриваемая модель была предложена в 1950 году Дю Пре [17] и А. Ван дер Зилом [18] практически одновременно.

Идея модели состоит в следующем.

Спектр вида $1/f$ в ограниченном (хотя и сколь угодно широком) диапазоне частот $[f_H, f_B]$ есть суперпозиция спектров лоренцева типа, см., например, (4.22), различающихся временем релаксации τ_0 и, как следствие, частотой среза $f_c = 1/(2\pi\tau_0)$, см. (4.18). Вид такой суперпозиции качественно изображён на Рис. 8.1.

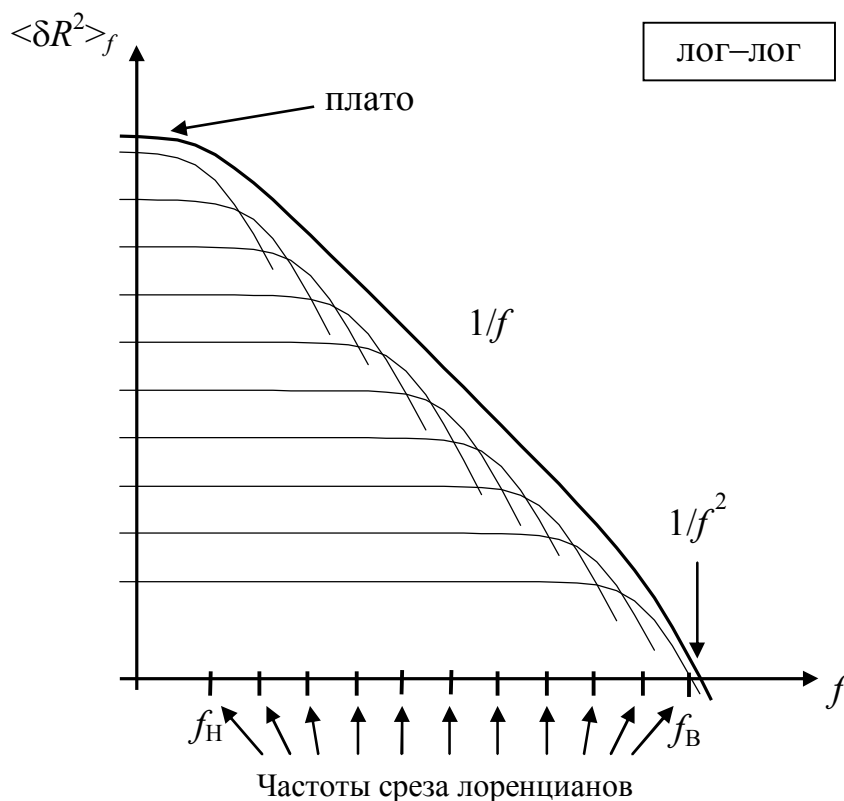


Рис. 8.1. Синтез спектра $1/f$ шума в модели Дю Пре – Ван дер Зила

Рассмотрим спектр (4.22) относительных флуктуаций сопротивления образца, вызванных некоторым (гипотетическим) процессом генерационно-рекомбинационного типа:

$$\langle \delta R^2 | \tau_{0i} \rangle_f = \frac{4\tau_{0i}}{1 + (2\pi f\tau_{0i})^2} \cdot \langle \delta R_i^2 \rangle. \quad (8.1)$$

Здесь $\langle \delta R_i^2 \rangle$ – дисперсия (полная мощность) относительных флуктуаций сопротивления, вызванных i -м процессом, характеризующимся временем релаксации τ_{0i} .

Считается, что в образце действуют N_G генерационно–рекомбинационных процессов, то есть $i \in [1, N_G]$. Для простоты анализа допустим, что все эти процессы обладают одинаковой мощностью:

$$\langle \delta R_i^2 \rangle = \langle \delta R_1^2 \rangle, \quad i \in [1, N_G]. \quad (8.2)$$

Однако процессы различаются временами релаксации τ_{0i} принимающими значения в хотя и ограниченном, но сколь угодно широком диапазоне:

$$\tau_{0i} \in [\tau_H, \tau_B]; \quad \tau_H \ll \tau_B. \quad (8.3)$$

Здесь τ_H и τ_B – нижнее (минимальное) и верхнее (максимальное) значения времён релаксации.

Найдём распределение $W_{\tau_0}(\tau_{0i})$ времён релаксации τ_{0i} , приводящее к спектру полных флуктуаций сопротивления $\langle \delta R^2 \rangle_f$, имеющему вид $1/f$ пусть в ограниченном, но сколь угодно широком диапазоне частот $[f_H, f_B]$.

Полагая, что все процессы являются статистически взаимно независимыми, в соответствии с правилами теории вероятности имеем:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = N_G \cdot \int_{(\tau_0)} \langle \delta R^2 | \tau_{0i} \rangle_f W_{\tau_0}(\tau_{0i}) d\tau_{0i}. \quad (8.4)$$

Здесь интегрирование ведётся по всем возможным значениям времён релаксации τ_{0i} .

Принимая во внимание соотношение (8.1) для “условного” спектра относительных флуктуаций сопротивления, получим:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = N_G \cdot \int_{(\tau_0)} \frac{4\tau_{0i} \cdot \langle \delta R_1^2 \rangle}{1 + (2\pi f\tau_{0i})^2} W_{\tau_0}(\tau_{0i}) d\tau_{0i}.$$

Производим замену переменной интегрирования,

$$\tau_{0i} \rightarrow 2\pi f\tau_{0i}.$$

В результате получим:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \langle \delta R^2 \rangle \cdot \left[\frac{2}{\pi} \int_a^b \tau_{0i} W_{\tau_0}(\tau_{0i}) \frac{d(2\pi f\tau_{0i})}{1 + (2\pi f\tau_{0i})^2} \right] \cdot \frac{1}{f}. \quad (8.5)$$

Здесь используются следующие пределы интегрирования:

$$a = 2\pi f\tau_H, \quad b = 2\pi f\tau_B. \quad (8.6)$$

Кроме того, введена мощность полных относительных флуктуаций сопротивления:

$$\langle \delta R^2 \rangle = N_G \cdot \langle \delta R_1^2 \rangle. \quad (8.7)$$

Видим, что если вычисление интеграла в (8.5) приводит к некоторому фиксированному значению, то спектр имеет вид $1/f$.

Для получения требуемого результата используем табличный несобственный интеграл (2.12):

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (8.8)$$

Таким образом, для приведения подынтегральной функции в (8.5) к виду (8.8) необходимо, чтобы распределение времён релаксации $W_{\tau_0}(\tau_0)$ было обратно пропорционально своему аргументу τ_0 . С учётом условия нормировки этот результат выглядит следующим образом:

$$W_{\tau_0}(\tau_0) = \begin{cases} A_0 / \tau_0, & \tau_0 \in [\tau_H; \tau_B] \\ 0, & \tau_0 \notin [\tau_H; \tau_B] \end{cases}; \quad A_0 = \frac{1}{\ln(\tau_B / \tau_H)}. \quad (8.9)$$

Качественно вид распределения представлен на Рис. 8.2.

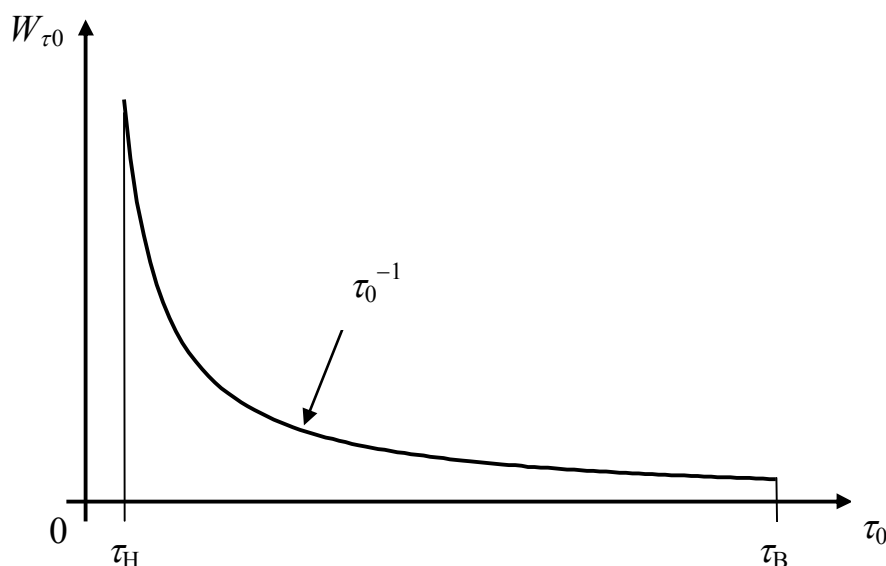


Рис. 8.2. Качественный вид распределения времён релаксации в модели Дю Пре – Ван дер Зила [17], [18]

На рисунке изображена степенная зависимость $W_{\tau_0} \sim 1/\tau_0^\chi$, где $\chi = 1$. Величина χ называется параметром формы распределения.

Использование распределения (8.9) приводит к следующему преобразованию соотношения (8.5) для спектра полных относительных флуктуаций сопротивления:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\ln(\tau_B / \tau_H)} \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \right] \cdot \frac{1}{f}. \quad (8.10)$$

Примем теперь $a \approx 0$ и $b \gg 1$. Это означает, что рассматриваются “промежуточные” частоты:

$$1/(2\pi\tau_B) \ll f \ll 1/(2\pi\tau_H). \quad (8.11)$$

В этом случае спектр (8.10) принимает вид $1/f$:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{A}{f}; \quad A = \frac{\langle \delta R^2 \rangle}{\ln(f_B / f_H)}; \quad f_H \ll f \ll f_B. \quad (8.12)$$

Здесь, на основании условия (8.11), введены нижняя и верхняя частоты перегиба:

$$f_H = 1/(2\pi\tau_B), \quad f_B = 1/(2\pi\tau_H). \quad (8.13)$$

На более низких частотах (в эксперименте не выявленных), $f \ll f_H$, спектр переходит в плато (см. Рис. 8.1). При превышении верхней частоты перегиба, $f \gg f_B$, спектр начинает спадать по закону $1/f^2$.

Итак, согласно модели Дю Пре – Ван дер Зила, фликкерный шум есть суперпозиция неких процессов, обладающих лоренцевой формой спектра. Чем ниже частота анализа, на которой наблюдается спектр типа $1/f$, тем большие значения должно принимать время релаксации процесса. Количество таких процессов должно быть обратно пропорциональным их времени релаксации τ_0 .

Используя приведённый выше подход, можно показать, что для синтеза спектра фликкерного шума, имеющего параметр формы γ , отличающийся от единицы, необходимо распределение времён релаксации W_{τ_0} , обладающее параметром формы $\chi = 2 - \gamma$.

Например, если $\chi < 1$, то есть увеличен удельный вес процессов, обладающих большими временами релаксации, то $\gamma > 1$ – скорость нарастания спектра увеличивается при стремлении частоты анализа к нулю. Иначе говоря, низкочастотные компоненты фликкерного шума становятся мощнее.

Таким образом, для объяснения фликкерного шума, наблюдающегося до сколь угодно низких (наблюдаемых экспериментально) частот анализа, необходимо выявление флуктуационных процессов, обладающих временами релаксации, достигающими сколь угодно больших значений.

8.1.2. Термоактивированные процессы, как причина фликкерного шума

Следуя Ван дер Зилу, для решения сформулированной выше проблемы допустим, что время релаксации τ_0 характеризует некоторый термоактивированный процесс, которому соответствует энергия активации E , то есть [18]:

$$\tau_0 = \tau_T \cdot \exp\left(\frac{E}{kT}\right). \quad (8.14)$$

Здесь τ_T – так называемый предэкспоненциальный множитель. Его значение определяется физическим механизмом исследуемого процесса.

Требуется найти распределение $W_E(E)$ энергий активации, приводящее к распределению (8.9) времён релаксации и, как следствие, к спектру вида $1/f$ для исследуемых флуктуаций.

Рассматриваемые величины E и τ_0 связаны между собой безынерционным нелинейным соотношением (8.14). Поэтому, согласно известному правилу теории вероятностей, имеем:

$$W_E(E) = W_{\tau_0}(\tau_0(E)) \cdot \left| \frac{d\tau_0(E)}{dE} \right|. \quad (8.15)$$

Учтём, что в рассматриваемой модели диапазон значений времён релаксации ограничен, $\tau_0 \in [\tau_H, \tau_B]$, см. соотношение (8.3). Поэтому, согласно (8.14), энергии активации могут принимать значения из ограниченного диапазона $E \in [E_1, E_2]$. Граничные значения рассматриваемых величин находим из соотношения (8.14):

$$\tau_H = \tau_T \cdot \exp\left(\frac{E_1}{kT}\right), \quad \tau_B = \tau_T \cdot \exp\left(\frac{E_2}{kT}\right). \quad (8.16)$$

Проводя необходимые вычисления, находим требуемое распределение энергий активации:

$$W_E(E) = \frac{1}{E_2 - E_1}, \quad E \in [E_1, E_2]. \quad (8.17)$$

Видим, что энергии активации должны быть распределены равномерно в диапазоне $[E_1, E_2]$. Говоря иначе, приведённое в (8.3) условие сколь угодно широкого диапазона значений времён релаксации трансформируется в условие широкого набора энергий активации в масштабе kT , то есть $(E_2 - E_1) \gg kT$.

Вид распределения энергий активации $W_E(E)$ приведён на Рис. 8.3.

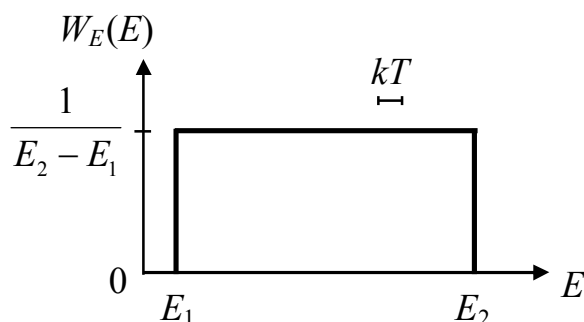


Рис. 8.3. Распределение энергий активации в модели Ван дер Зила

Таким образом, проблема выявления флуктуационных процессов, обладающих временами релаксации, достигающими сколь угодно больших значений, трансформировалась в поиск термоактивированных случайных процессов, обладающих требуемым широким набором энергий активации.

Завершая анализ модели Дю Пре – Ван дер Зила отметим, что использование финитных распределений (8.9) и (8.17) является непринципиальным математическим упрощением. Главная идея состоит в том, чтобы распределение времён релаксации имело вид $W_{\tau_0} \sim 1/\tau_0$, либо, соответственно, распределение энергий активации W_E было примерно постоянным в диапазоне многих kT .

Это замечание особенно актуально в связи с тем, что “идеальная” степенная зависимость у спектра фликкерного шума не наблюдается никогда. Чаше всего спектр имеет “волнистый” характер, аппроксимируемый зависимостью вида $1/f^\gamma$.

8.2. Модель Мак Уортера – Ван дер Зила

Данная модель является примером физической реализации рассмотренной выше модели Дю Пре – Ван дер Зила [6].

Рассмотрим полупроводниковый образец (Рис. 8.4), покрытый слоем окисла толщиной h .

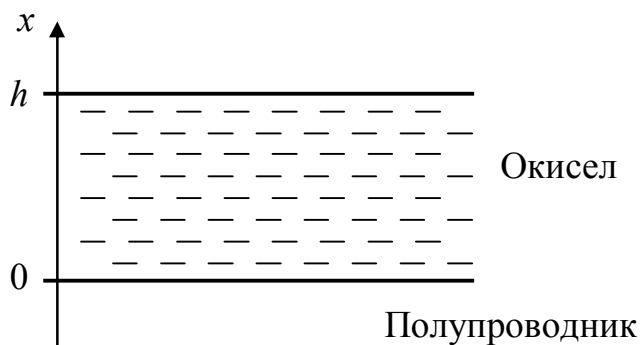


Рис. 8.4. К модели Мак Уортера – Ван дер Зила

В окисле имеется множество свободных состояний (ловушек). Эти ловушки равномерно распределены по толщине окисла. То есть для плотности вероятности $W_x(x)$ распределения числа ловушек по глубине имеет место соотношение, аналогичное распределению (8.17) энергий активации в модели термоактивированных процессов:

$$W_x(x) = \frac{1}{h}, x \in [0, h]. \quad (8.18)$$

Вид распределения $W_x(x)$ числа ловушек по глубине окисла приведён на Рис. 8.5.

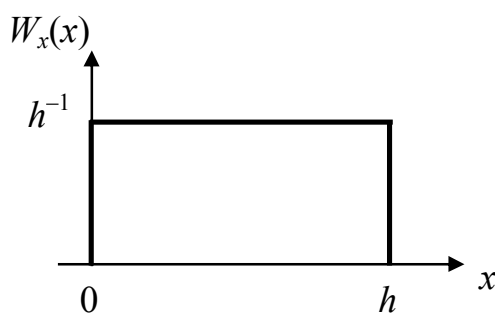


Рис. 8.5. Распределение числа ловушек по глубине окисла в модели Мак Уортера – Ван дер Зила

Обозначим через τ_H время жизни носителя в ловушке на границе раздела ($x = 0$). Более глубокие ($x > 0$) ловушки обмениваются носителями с объёмом полупроводника за счёт туннельного эффекта.

Захват носителей на ловушки, и их последующее освобождение, приводит к флуктуациям числа носителей в объёме полупроводника, $N = N(t)$, имеющим характер генерационно–рекомбинационного шума (см. Раздел 4).

Время жизни τ_0 носителей тока на ловушках, залегающих на глубине x (имеющее смысл времени релаксации соответствующего генерационно–рекомбинационного шума), определяется следующим соотношением:

$$\tau_0 = \tau_H \cdot \exp(a_T \cdot x). \quad (8.19)$$

Здесь a_T – параметр, характеризующий туннельный эффект.

Сравним это соотношение с зависимостью (8.14) времени релаксации τ_0 от величины энергии активации E . Кроме того, отметим, что распределение $W_x(x)$ числа ловушек по глубине окисла имеет такой же равномерный вид, как и распределение $W_E(E)$ энергий активации (см. (8.17) и Рис. 8.3).

Отсюда следует, что рассматриваемые две модели полностью идентичны друг другу. Просто распределение энергий активации E теперь заменилось на распределение числа ловушек по глубине окисла x .

Максимальное время релаксации определяется толщиной окисла:

$$\tau_B = \tau_H \cdot \exp(a_T \cdot h). \quad (8.20)$$

Если, в качестве примера, принять $\tau_H \sim 10^{-4}$ с, то при $h = 40 \text{ \AA}$ имеем $\tau_B \sim 10^6$ с. Иначе говоря, получаем спектр вида $1/f$ в диапазоне частот примерно от 10^4 Гц до 10^{-6} Гц, то есть в пределах десяти частотных декад. Заметим, что в приведённом примере рассмотрен очень тонкий слой окисла, составляющий всего 8–10 молекулярных слоёв.

Рассмотренный механизм возникновения фликкерного шума имеет место во всех полупроводниковых приборах и, особенно, в полевых транзисторах, где окисел является обязательным конструктивным элементом.

Однако фликкерный шум наблюдается и в металлических плёнках, в том числе, из благородных металлов: золото (Au), серебро (Ag). Для объяснения фликкерных шумов таких плёнок модель Мак Уортера – Ван дер Зила не применима. Поэтому требуется разработка других моделей фликкерного шума.

Для решения этой проблемы рассмотрим некоторые математические модели случайных процессов фликкерного типа.

8.3. Фликкерные импульсные последовательности

Идея заключается в моделировании фликкерного случайного процесса $x(t)$ последовательностью импульсов, обладающей спектром мощности вида $1/f^\gamma$ с параметром формы спектра, близким к единице, $\gamma \sim 1$.

8.3.1. Общий подход

Рассмотрим пуассоновскую последовательность импульсов:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} (x)_k \cdot F(t - t_k; \tau_k). \quad (8.21)$$

Здесь $F(t; \tau)$ – элементарный импульс, k – номер импульса, $(x)_k$ – его амплитуда, t_k – момент возникновения, τ_k – длительность импульса, $K(t)$ – полное число импульсов за время существования процесса t .

Среднее число импульсов, возникающих на отрезке времени $[0, t]$, определяется средней частотой их появления ν :

$$\langle K(t) \rangle = \nu \cdot t.$$

Вычислим спектр на частотах, достаточно больших по сравнению с обратным временем существования процесса, $f \gg 1/(2\pi t)$.

Используя теорию пуассоновских случайных процессов, найдём сначала фурье-образ элементарного импульса, переходя для этого к угловым частотам $\omega = 2\pi f$:

$$\hat{F}(\omega; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T F(t; \tau) \exp(-j\omega t) dt. \quad (8.22)$$

Здесь использован предельный переход, $T \rightarrow \infty$, поскольку для моделирования процесса со спектром, расходящимся в окрестности нулевой частоты, могут потребоваться бесконечно длинные элементарные импульсы.

Вычислим теперь спектр энергии $E_F(f)$ элементарного импульса:

$$E_F(f) = \left\langle \left| \hat{F}(2\pi f; \tau) \right|^2 \right\rangle_\tau = \int \left| \hat{F}(2\pi f; \tau) \right|^2 W_\tau(\tau) d\tau. \quad (8.23)$$

Поскольку длительность τ элементарного импульса может быть случайной, здесь используется распределение $W_\tau(\tau)$ этих длительностей. Усреднение осуществляется по всем возможным длительностям τ .

Знание спектра энергии элементарного импульса $E_F(f)$ и средней частоты ν возникновения этих импульсов позволяет найти спектр мощности импульсного пуассоновского процесса $x(t)$:

$$\langle x^2 \rangle_f = \nu \cdot \langle (x)_k^2 \rangle \cdot E_F(f), f \gg 1/(2\pi t). \quad (8.24)$$

Напомним, что здесь анализируются частоты, достаточно большие по сравнению с обратным временем существования процесса. Это обусловлено тем, что полная мощность процесса может оказаться неограниченной из-за расходимости его спектра в окрестности нулевой частоты.

Однако эта проблема имеет чисто математический характер, поскольку для достижения нулевой частоты анализа, $f \rightarrow 0$, требуется бесконечное время наблюдения. В эксперименте это условие не реализуется никогда. Все измерения осуществляются на временах, достаточно малых по сравнению со временем существования исследуемого процесса.

Таким образом, как следует из соотношения (8.24), спектр моделируемого процесса имеет вид $1/f^\gamma$, если таким же видом обладает спектр энергии элементарного импульса (8.23). Поэтому идея моделирования фликкерного случайного процесса может быть решена двумя способами:

- поиск элементарного импульса $F(t)$, имеющего бесконечную длительность и обладающего спектром энергии вида $1/f^\gamma$;
- использование элементарных импульсов $F(t; \tau)$, обладающих длительностью, принимающей конечные, хотя и сколь угодно большие значения.

Подобные две модели рассматриваются ниже.

8.3.2. Модель Шенфельда – Малахова

Рассмотрим пуассоновскую последовательность (8.21) импульсов $F(t)$, убывающих по степенному закону:

$$F(t) = (t_0/t)^\chi, \quad t \geq t_0. \quad (8.25)$$

Здесь t_0 – время начала импульса, χ – параметр его формы. Импульс имеет единичную высоту, его вид изображён на Рис. 8.6.

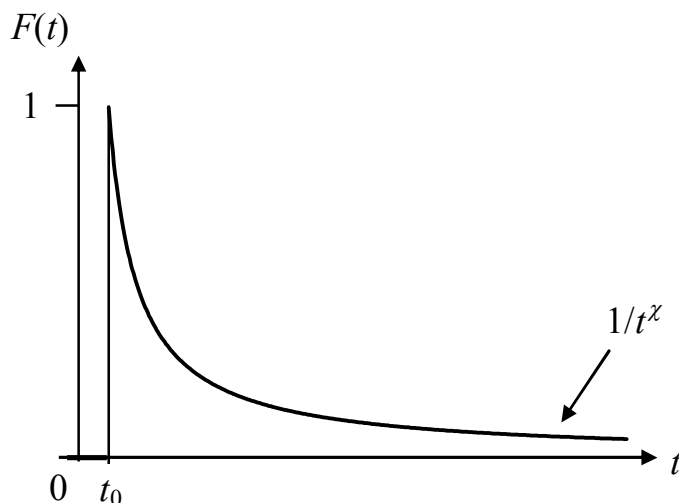


Рис. 8.6. Элементарный импульс Шенфельда – Малахова

Параметр формы импульса в этой модели может принимать значения в диапазоне: $0 \leq \chi < 1$. Случай $\chi = 1/2$, когда импульс убывает по закону \sqrt{t} , рассмотрен Шенфельдом. Расширение модели на более широкий диапазон значений этого параметра выполнено А.Н. Малаховым [4].

Спектр рассматриваемого процесса на относительно низких частотах имеет вид $1/f^\gamma$:

$$\langle x^2 \rangle_f = \frac{2vt_0^2 \langle (x)_k^2 \rangle \Gamma^2(\gamma/2)}{(2\pi t_0)^\gamma} \cdot \frac{1}{f^\gamma}, \quad f \ll f_B. \quad (8.26)$$

Здесь $\Gamma(\dots)$ – Гамма-функция.

Верхняя частота перегиба спектра равна

$$f_B = 1/(2\pi t_0). \quad (8.27)$$

Параметр формы спектра определяется параметром формы элементарного импульса:

$$\gamma = 2 \cdot (1 - \chi). \quad (8.28)$$

Примечание

Определить параметр формы спектра, то есть вывести соотношение (8.28), можно осуществить, не вычисляя сложные интегралы, выражающиеся через специальные функции. Для этого можно воспользоваться методом размерности. Рассмотрим суть метода.

Элементарный импульс, согласно (8.25), имеет степенную зависимость от времени вида $F(t) \sim t^{-\chi}$. Следуя (8.22), находим качественный вид фурье-образа импульса:

$$\hat{F}(\omega) \sim \int t^{-\chi} \exp(-j\omega t) dt \cdot \frac{\omega^{-\chi}}{\omega^{-\chi}} \cdot \frac{\omega}{\omega}.$$

В этом соотношении умышленно не указаны пределы интегрирования, поскольку нас интересует только размерность рассматриваемых функций. Кроме того, в правой части (после интеграла) введены дополнительные множители в виде дробей. Числители этих дробей предназначены для введения под символ интегрирования, так, чтобы получить интеграл по безразмерной переменной $z = \omega t$. Знаменатели дробей определяют частотную зависимость рассматриваемого фурье-образа:

$$\hat{F}(\omega) \sim \left[\int z^{-\chi} \exp(-jz) dz \right] \cdot \frac{1}{\omega^{1-\chi}} \sim \frac{1}{\omega^{1-\chi}}.$$

Учитывая соотношение (8.23), определяющее спектр **энергии** импульса через квадрат модуля его фурье-образа, найдём:

$$E_F(f) \sim 1/f^{2(1-\chi)}.$$

Форма спектра **мощности** рассматриваемого процесса совпадает с формой спектра **энергии** элементарного импульса, см. соотношение (8.21). В результате приходим к соотношению (8.28), определяющему связь между параметрами формы спектра фликкерного шума и элементарного импульса в модели Шенфельда – Малахова.

Рассмотрим отдельные частные случаи для спектра (8.26).

Модель Шенфельда

При неограниченном нарастании времени, $t \rightarrow \infty$, элементарный импульс убывает пропорционально квадратному корню из времени, $F(t) \sim 1/\sqrt{t}$, то есть $\chi = 1/2$. В результате спектр процесса имеет вид $1/f$, то есть параметр формы спектра равен единице, $\gamma = 1$.

Модель Шенфельда используется в промышленных генераторах так называемого “розового” шума (pink noise – англ.). В подобных генераторах синтез шума со спектром вида $1/f$ осуществляется путём пропускания белого шума через распределённую RC-линию. Однако эта тема не входит в рамки нашего анализа.

Броуновское движение

Элементарный импульс имеет форму “ступеньки”, $F(t) = 1(t)$, то есть $\chi = 0$. В этом случае спектр имеет вид $1/f^2$ во всём диапазоне частот, $\gamma = 2$.

Завершая анализ модели Шенфельда – Малахова, отметим, что её применимость для объяснения фликкерного шума, наблюдающегося в радиоэлектронных приборах, вызывает сомнения.

Дело в том, что фликкерный шум, как и любой другой шум, является проявлением неких элементарных процессов, происходящих в приборе. Эти процессы имеют дискретную природу (например, захват и освобождение носителя тока, перемещение атома в кристаллической решётке, и т.д.).

Элементарный импульс, представленный соотношением (8.25), является результатом усреднения большого количества дискретных элементарных процессов, действующих в радиоэлектронном приборе. Причём эти процессы могут быть статистически независимыми.

Для описания фликкерного шума следует анализировать дискретные элементарные процессы. Пример соответствующей модели приведён ниже.

8.3.3. Модель Халфорда

Возвращаемся к пуассоновской последовательности импульсов (8.21). Полагаем, что элементарные импульсы имеют конечную длительность τ , которая может принимать сколь угодно большие значения.

Для простоты рассмотрим прямоугольные импульсы, предложенные Халфордом [19]. Форма отдельного импульса изображена на Рис. 8.7.

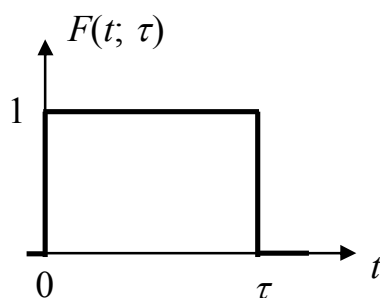


Рис. 8.7. Элементарный импульс Халфорда

Длительности импульсов τ случайны и имеют степенной вид распределения, которое условно можно считать обобщённым распределением Парето – Леви – Коши:

$$W_{\tau}(\tau) = (\chi - 1) \cdot t_0^{\chi - 1} \cdot \tau^{-\chi}, \quad \tau \geq t_0. \quad (8.29)$$

Здесь χ – параметр формы распределения; $\chi > 1$ из условия нормировки. При $\chi > 2$ случайный процесс стационарен, эта ситуация здесь не рассматривается. Вид распределения изображён на Рис. 8.8.

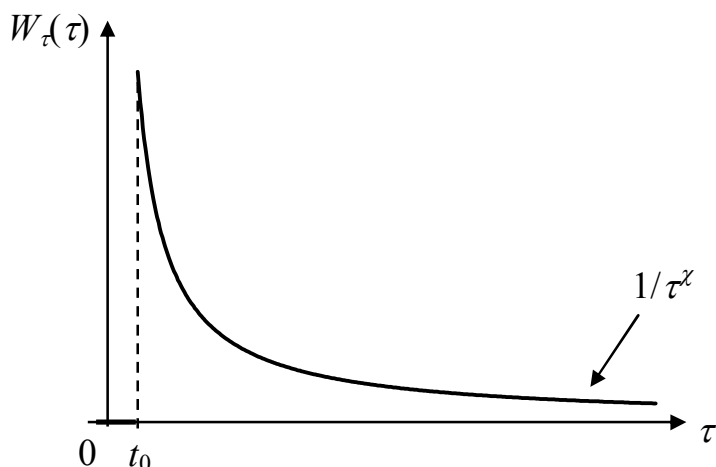


Рис. 8.8. Обобщённое распределение Парето – Леви – Коши

Заметим, что подобное распределение наблюдается в широком классе явлений. Примерами являются: распределение “светимости” населённых пунктов Земли (по наблюдениям из космоса), распределение вкладов в банках.

Поиск механизмов, приводящих к появлению такого распределения в статистических свойствах электрофизических параметров радиоэлектронных приборов – самостоятельная задача, которая здесь не рассматривается.

Пусть $1 < \chi \leq 2$. В этом случае для спектра процесса имеем:

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle (x)_k^2 \rangle \nu t_0 A(\gamma) f^{-\gamma}, \quad f \ll f_B. \quad (8.30)$$

Здесь

$$A(\gamma) = \frac{2 \cdot (2 - \gamma) \cos[(1 - \gamma/2)\pi]}{\Gamma(3 - \gamma) \sin[(2 - \gamma)\pi]} \cdot (2\pi t_0)^{1-\gamma}, \quad (8.31)$$

$$\gamma = 3 - \chi, \quad f_B = 1/(2\pi t_0).$$

В случае $\gamma = 1$ имеем $A(1) = 1$. То есть спектр $1/f$ шума есть

$$\langle x^2 \rangle_f = \langle (x)_k^2 \rangle \nu t_0 f^{-1}, \quad f \ll f_B. \quad (8.32)$$

Перейдём к анализу следующей модели фликкерного шума.

8.3.4. Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа

Рассмотрим моделирование фликкерного шума $x(t)$ суперпозицией случайных телеграфных процессов (СТП):

$$x(t) = \sum_{k=1}^K x_k(t). \quad (8.33)$$

Здесь $x_k(t)$ – есть k -й СТП, K – число случайных телеграфных процессов. Пример реализации отдельного процесса изображён на Рис. 8.9.

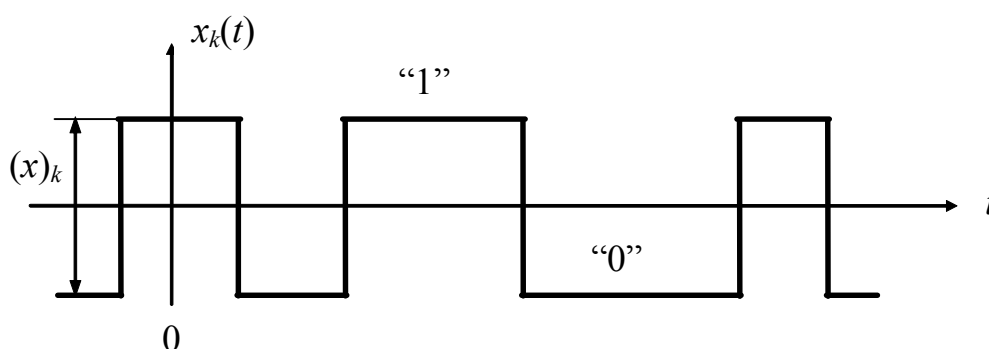


Рис. 8.9. Пример реализации случайного телеграфного процесса

Процесс состоит из прямоугольных импульсов “1”, разделённых паузами “0”. Высота импульса (размах СТП) в процессе номер k составляет $(x)_k$.

Для простоты предполагается, что длительности пауз и импульсов распределены по закону Больцмана:

$$W_{0,1}(\tau) = \frac{1}{\tau_{0,1}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,1}}\right), \tau \geq 0. \quad (8.34)$$

Здесь τ_0 и τ_1 – средние длительности пауз и импульсов.

В этом случае спектр отдельного телеграфного процесса имеет лоренцев вид (как у генерационно–рекомбинационного шума), см., например, главу 11 монографии Б.Р. Левина [5]:

$$\langle x_k^2 | f_k \rangle_f = \frac{A_k f_k}{f_k^2 + f^2}. \quad (8.35)$$

В приведённом соотношении введены следующие обозначения:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \langle (x)_k^2 \rangle \cdot \frac{\tau_1}{\tau_0 + \tau_1} \quad (8.36)$$

– параметр, характеризующий мощность отдельного процесса, определяемый высотами импульсов (размахом СТП), а также вероятностью $\tau_1/(\tau_0 + \tau_1)$ появления импульсов;

$$f_k = \frac{1}{2\pi} (\tau_0^{-1} + \tau_1^{-1}) \quad (8.37)$$

– так называемая “опорная частота” спектра.

Для упрощения анализа примем, что все случайные телеграфные процессы обладают одинаковыми размахами (высотами импульсов),

$$\langle (x)_k^2 \rangle = \langle (x)_1^2 \rangle.$$

При совпадении средних длительностей пауз и импульсов, $\tau_0 = \tau_1$, указанные величины принимают следующие значения:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \langle (x)_1^2 \rangle, \quad f_k = \frac{1}{\pi\tau_1}. \quad (8.38)$$

При этом суммарный спектр определяется следующим образом:

$$\langle x^2 \rangle_f = K \cdot \int \langle x_k^2 | f_k \rangle W_{fk}(f_k) df_k. \quad (8.39)$$

Здесь интегрирование ведётся по всем опорным частотам.

Далее следуем модели Дю Пре – Ван дер Зила, изложенной в Разделе 8.1. Разница заключается в следующем.

Теперь в выражение для условного спектра (8.35) вместо времени релаксации τ_0 , определявшего условный спектр (8.1), входит опорная частота f_k .

Таким образом, вместо распределения времён релаксации, имеющего вид, описываемый соотношением (8.9), требуется следующее распределение $W_{fk}(f_k)$ опорных частот:

$$W_{fk}(f_k) = \begin{cases} B_0 / f_k, & f_k \in [f_H; f_B] \\ 0, & f_k \notin [f_H; f_B] \end{cases}; \quad B_0 = \frac{1}{\ln(f_B / f_H)}. \quad (8.40)$$

Заметим, что в области промежуточных частот вид этого распределения совпадает с видом моделируемого спектра.

Теперь перейдём к наиболее обоснованной, как представляется на данный момент, физической модели фликкерного шума.

8.4. Модель двухуровневых систем

Двухуровневые системы (ДУС) впервые были обнаружены в физических объектах при исследовании свойств, не имевших отношения к фликкерному шуму.

В рассматриваемом образце всегда существуют точечные дефекты, имеющие несколько метастабильных состояний. Дефект может переходить из одного состояния в другое (и обратно) вследствие воздействия на него тепловых колебаний решётки. Разумеется, эти переходы осуществляются в случайные моменты времени.

В результате смены состояний дефекта изменяются его электрофизические параметры, определяющие параметры образца, например, сопротивление. Таким образом, наличие подобных дефектов приводит возникновению флуктуаций параметров образца.

Рассмотрим простейший случай, когда количество состояний у каждого метастабильного дефекта равно двум. Такие дефекты формируют двухуровневые системы.

Энергетическая диаграмма бистабильного дефекта, формирующего ДУС, изображена на Рис. 8.10.

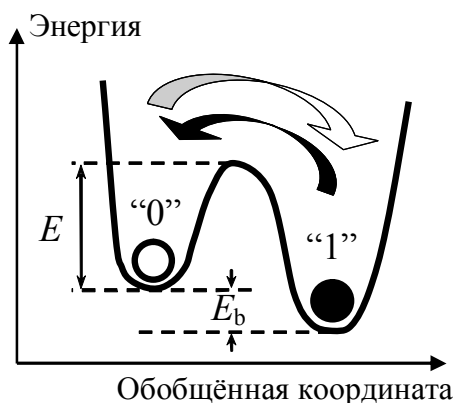


Рис. 8.10 Двухуровневая система

Здесь указаны метастабильные состояния “0” и “1”, между которыми осуществляются переходы дефекта. Эти состояния разделены энергетическим барьером, имеющим высоту E . Величина E_b – разница глубин локальных потенциальных минимумов.

Термоактивированные переходы дефекта между состояниями “0” и “1” имеют характер случайного телеграфного процесса. Соответствующие изменения электрофизических параметров образца, вызванные этими переходами, тоже имеют характер СТП, см., например, Рис. 8.9.

Средние времена пребывания в рассматриваемых состояниях, имеющие смысл средних длительностей “пауз” и “импульсов” СТП, определяются следующими соотношениями:

$$\tau_0 = \frac{1}{f_T} \exp\left(\frac{E}{kT}\right), \tau_1 = \tau_0 \exp\left(\frac{E_b}{kT}\right). \quad (8.41)$$

Здесь f_T – средняя частота тепловых колебаний решётки, $f_T \approx 10^{11}$ Гц.

Далее выполняется анализ, аналогичный изложенному в Разделе 8.3.4 “Фликкерный шум как суперпозиция случайных процессов телеграфного типа”.

При этом для получения спектра вида $1/f$, согласно модели Дю Пре – Ван дер Зила, необходимо наличие широкого набора высот E энергетических барьеров в масштабе kT , см. соотношение (8.17) и Рис. 8.3.

8.5. Эмпирическая формула Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме

В 1969 году Хоухе [20] предложил эмпирическое соотношение для описания спектра относительных флуктуаций сопротивления в однородном резистивном образце с постоянной плотностью тока:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \frac{\alpha_H}{Nf}. \quad (8.42)$$

Здесь N – число носителей тока в образце, f – частота анализа. Параметр α_H теперь принято называть феноменологическим параметром Хоухе. Типичным считается значение $\alpha_H \sim 10^{-3}$.

Примечание

Хоухе (F. N. Hooge) работал профессором в Технологическом университете г. Эйндховен, Нидерланды.

Предложенное соотношение является следствием статистической обработки большого количества экспериментальных данных. Разумеется, встречаются существенные отклонения от считающегося типичным значения параметра Хоухе, $\alpha_H = 10^{-6} \div 1$.

Тем не менее, полезность соотношения Хоухе заключается в возможности грубой оценки спектра флуктуаций сопротивления в образце, измерения $1/f$ шума в котором пока не проводились. Кроме того, это соотношение впервые позволило сравнивать результаты измерений, полученных разными исследователями на разных приборах.

Впоследствии появилась модификация [21] соотношения (8.42), ориентированная на описание спектра относительных флуктуаций сопротивления в полупроводниках:

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = \left(\frac{\mu}{\mu_L}\right)^2 \frac{\alpha_H}{N \cdot f}. \quad (8.43)$$

Это соотношение получило название формулы Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме.

Примечание

Клайнпеннин (T. G. M. Kleinpenning) и Фандамме (L. K. J. Vandamme) – профессора, работавшие в группе Хоухе.

Соотношение (8.43) также имеет эмпирический характер. Сюда входит полная подвижность носителей тока μ , а также её компонента μ_L , обусловленная рассеянием носителей тока на акустической ветви тепловых колебаний решётки (акустических фононах).

Отметим, что полную подвижность можно оценить с помощью приближённого правила Маттиссена:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_N} + \frac{1}{\mu_I} + \dots \quad (8.44)$$

В правой части этого соотношения учитываются все механизмы рассеяния носителей тока: на атомах нейтральных (μ_N) и ионизованных (μ_I) примесей, и так далее.

Из правила Маттиссена видно, что полная подвижность носителей тока всегда меньше компоненты, обусловленной рассеянием на акустических фононах, $\mu < \mu_L$.

Таким образом, формула Хоухе – Клайнпеннина – Фандамме (8.44) свидетельствует о тенденции уменьшения спектра фликкерного шума при повышении степени легирования полупроводника, то есть при увеличении в нём количества примесей.

Этот вывод верен далеко не всегда. Однако соотношение (8.43), равно как и формула Хоухе (8.42) даёт экспериментаторам возможность для сравнения своих данных, полученных на разных проводящих образцах.

9. Методы эквивалентного представления шумов

В большинстве приложений вполне исчерпывающей характеристикой шума является его спектр; например, для шумового напряжения $v_n(t)$ – спектр $\langle v_n^2 \rangle_f$, имеющий размерность $[B^2/Гц]$, а для шумового тока $i_n(t)$ – спектр $\langle i_n^2 \rangle_f$ $[A^2/Гц]$.

Однако иногда бывает удобно выразить спектр шума какого-либо объекта в эквивалентных параметрах. При этом за основу берутся две известные формулы:

- формула Найквиста для спектра теплового шума резистора;
- формула Шотки для спектра дробового шума.

Таким образом, эквивалентное описание шумов можно производить на двух “языках” – формулы Найквиста, либо формулы Шотки.

Рассмотрим сначала представления, основанные на **формуле Найквиста**, определяющей спектр теплового шума пассивного двухполюсника, обладающего импедансом $Z(2\pi f)$ при температуре T .

Спектр эдс $e_T(t)$ теплового шума, характеризующего напряжение на выводах **разомкнутого** двухполюсника, согласно соотношению (2.5), есть

$$\langle e_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot R(2\pi f) [B^2/Гц]. \quad (9.1)$$

Здесь

$$R(2\pi f) = \operatorname{Re} Z(2\pi f)$$

– активная часть импеданса двухполюсника.

Для спектра тока $i_T(t)$, описывающего тепловой шум **короткозамкнутого** двухполюсника, согласно (2.6), имеем:

$$\langle i_T^2 \rangle_f = 4kT \cdot G(2\pi f) [A^2/Гц]. \quad (9.2)$$

Здесь

$$G(2\pi f) = R(2\pi f) / |Z(2\pi f)|^2$$

– активная часть проводимости двухполюсника.

Из соотношений (9.1) и (9.2) видны следующие **четыре** способа эквивалентного представления шумов, основанные на языке формулы Найквиста.

- 1) В единицах спектра теплового шума.
- 2) Через эффективную (шумовую) температуру объекта.
- 3) Через эффективное шумовое сопротивление (для шумового напряжения).
- 4) Через эффективную шумовую проводимость (для шумового тока).

Рассмотрим последовательно указанные способы.

9.1. Коэффициент шума двухполюсника

Пусть имеется некий двухполюсник (“черный ящик” – Ч.Я.) на выходе которого наблюдается шумовое напряжение $v_n(t)$.

Двухполюсник обладает (активным) дифференциальным сопротивлением, $R = \operatorname{Re} Z(2\pi f)$, и находится при (абсолютной) температуре T , см. Рис. 9.1.

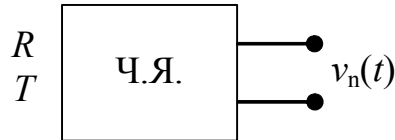


Рис. 9.1. Двухполюсник (черный ящик) с разомкнутыми выводами

Коэффициент шума F_n двухполюсника определяется следующим образом:

$$F_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kTR}. \quad (9.3)$$

Здесь $\langle v_n^2 \rangle_f$ – спектр шумового напряжения, измеренный заранее.

Теперь допустим, что выводы двухполюсника **закорочены**. Через них течёт шумовой ток $i_n(t)$, см. Рис. 9.2.

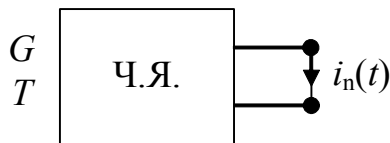


Рис. 9.2. Двухполюсник (черный ящик) с короткозамкнутыми выводами

В этом случае коэффициент шума определяется через спектр $\langle i_n^2 \rangle_f$ шумового тока:

$$F_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kTG}. \quad (9.4)$$

Здесь

$$G = \operatorname{Re} Y(2\pi f)$$

– дифференциальная (активная) проводимость двухполюсника.

Анализируя соотношения (9.3) и (9.4), видим, что коэффициент шума есть **безразмерная** величина. Он определяет спектр шума двухполюсника в единицах спектра теплового шума пассивного элемента, имеющего такое же сопротивление R (либо проводимость G) и находящегося при той же температуре T .

Таким образом, если известен коэффициент шума двухполюсника, то можно найти спектр шумового напряжения на его разомкнутых выводах:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \cdot 4kTR \text{ [В}^2\text{/Гц]}. \quad (9.5)$$

Если двухполюсник закорочен, можно найти спектр шумового тока:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \cdot 4kTG \text{ [A}^2\text{/Гц]}. \quad (9.6)$$

Коэффициент шума **пассивного** двухполюсника всегда равен единице, $F_n = 1$.

Напомним, что пассивный двухполюсник может состоять из любой комбинации линейных элементов – резисторов, конденсаторов, индуктивностей. Если двухполюсник содержит нелинейные элементы (диоды, транзисторы и проч.) к которым не приложено внешнее напряжение, то такой двухполюсник тоже является пассивным.

Чаще всего в двухполюснике действует несколько видов шумов (кроме теплового шума). Поэтому коэффициент шума обладает следующими двумя свойствами.

- 1) Его величина, как правило, зависит от частоты анализа, $F_n = F_n(f)$.
- 2) Обычно коэффициент шума превышает единицу, $F_n > 1$. Однако бывают исключения, обусловленные относительно слабым проявлением теплового шума на фоне других действующих шумов.

Коэффициент шума иногда выражается в децибелах:

$$F_n \text{ [дБ]} = 10 \lg (F_n \text{ [отн. ед.]}) . \quad (9.7)$$

Ниже приведена таблица пересчета относительных значений в децибелы.

Таблица 9.1. Относительные единицы и децибелы

Отн. ед.	1	1.5	2	3	4	6	8	10	10^2	10^3
дБ	0	1.8	3	4.8	6	7.8	9	10	20	30

Рассмотрим другие методы эквивалентного представления шумов, основанные на формуле Найквиста.

9.2. Эквивалентная шумовая температура

Имеем тот же “черный ящик”, обладающий дифференциальным сопротивлением $R = R(2\pi f)$, либо дифференциальной проводимостью $G = G(2\pi f)$. В этом случае эквивалентная шумовая температура определяется следующим образом:

$$T_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kR} \text{ [K]}, \text{ либо } T_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kG} \text{ [K]}. \quad (9.8)$$

Данная величина имеет смысл температуры, до которой надо нагреть пассивный двухполюсник, обладающий тем же сопротивлением R (либо проводимостью G), чтобы получить ту же величину спектра шума на выбранной частоте анализа f .

Таким образом, если известна шумовая температура, то можно вычислить спектр шумового напряжения на разомкнутых выводах двухполюсника:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kT_n R \text{ [В}^2/\text{Гц]}. \quad (9.9)$$

Если двухполюсник закорочен, можно найти спектр шумового тока:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kT_n G \text{ [А}^2/\text{Гц]}. \quad (9.10)$$

Шумовая температура пассивного двухполюсника всегда равна температуре окружающей среды, $T_n = T$.

В двухполюснике может действовать несколько источников шума (кроме теплового). Поэтому шумовая температура обладает следующими двумя свойствами.

- 1) Её величина может зависеть от частоты анализа: $T_n = T_n(f)$.
- 2) Обычно шумовая температура превышает температуру окружающей среды, $T_n > T$, однако возможны исключения.

9.3. Эквивалентное шумовое сопротивление

В данном случае шумы на **разомкнутом** выходе “черного ящика”, Рис. 9.1, моделируются тепловым шумом пассивного двухполюсника, то есть вводится эквивалентное шумовое сопротивление

$$R_n = \frac{\langle v_n^2 \rangle_f}{4kT} \text{ [Ом]}. \quad (9.11)$$

Таким образом, шумы (на заданной частоте анализа f) моделируются резистором, обладающим сопротивлением R_n при той же температуре окружающей среды T .

Если известно шумовое сопротивление, то спектр шумового напряжения на разомкнутых выводах двухполюсника вычисляется следующим образом:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = 4kTR_n \text{ [В}^2/\text{Гц]}. \quad (9.12)$$

Шумовое сопротивление **пассивного** двухполюсника всегда равно его дифференциальному сопротивлению, $R_n = R(2\pi f)$.

По поводу эквивалентного шумового сопротивления можно сделать те же замечания, что и для коэффициента шума и шумовой температуры.

Обычно $R_n = R_n(f)$ и $R_n \geq R$.

Подчеркнём, что зависимость шумового сопротивления от частоты анализа f может быть обусловлена действием двух факторов:

- наличием в двухполюснике инерционных элементов (конденсаторов, индуктивностей),
- присутствием других (кроме теплового) источников шума.

Пример 9.1

Обратимся к Разделу “2.3.1. Интегрирующая RC – цепочка”. Спектр эдс теплового шума, наблюдающегося на разомкнутых выводах, представлен соотношением (2.8). В соответствии с определением (9.11) получим следующее выражение для эквивалентного шумового сопротивления этой цепочки:

$$R_n = \frac{R}{1 + (f/f_c)^2} [\text{Ом}].$$

Здесь зависимость шумового сопротивления цепочки от частоты анализа f обусловлена наличием в ней электрического конденсатора.

9.4. Эквивалентная шумовая проводимость

Данный параметр во многом подобен рассмотренному выше шумовому сопротивлению. Разница лишь в том, что рассматривается токовый шум короткозамкнутого двухполюсника (Рис. 9.2). Эквивалентная шумовая проводимость вводится с учетом соотношения (9.2) следующим образом:

$$G_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{4kT} [\text{См}]. \quad (9.13)$$

Если известна шумовая проводимость, то спектр шумового тока короткозамкнутого двухполюсника есть:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kTG_n [\text{А}^2/\text{Гц}]. \quad (9.14)$$

Разумеется, шумовая проводимость **пассивного** двухполюсника всегда равна его дифференциальной проводимости, $G_n = G(2\pi f)$.

Здесь уместно сделать те же замечания, какие были сделаны для шумового сопротивления.

Обычно $G_n = G_n(f)$ и $G_n > G$.

Зависимость шумовой проводимости от частоты анализа f может быть обусловлена как наличием в двухполюснике реактивных элементов, так и присутствием дополнительных (к тепловому шуму) источников шума.

9.5. Взаимосвязь шумовых параметров формулы Найквиста

Выше были рассмотрены методы представления шумов, основанные на языке формулы Найквиста, представленной соотношениями (9.1) и (9.2). Эта уникальная формула дает возможность описания шумов с помощью следующих четырех эквивалентных параметров:

- Коэффициент шума F_n (безразмерный),
- Шумовая температура T_n (в градусах Кельвина),
- Шумовое сопротивление R_n (в омах),
- Шумовая проводимость G_n (в сименсах).

Все указанные параметры являются равноценными. Их выбор может диктоваться лишь соображениями удобства решаемой задачи.

Например, пусть имеется усилитель, обладающий шумовым сопротивлением $R_n = 100$ Ом. С помощью такого усилителя можно исследовать шумы объектов, обладающих примерно таким же дифференциальным сопротивлением R . В противном случае (если $R \ll R_n$), вероятнее всего, исследуемые шумы будут замаскированы шумом усилителя.

С другой стороны, допустим, что приемник радиотелескопа имеет шумовую температуру $T_n = 1000$ К. Это означает, что для осуществления наблюдений с разрешающей способностью 10 К необходимо применить специальные методы обработки принимаемых сигналов.

Рассмотрим взаимосвязь между рассмотренными эквивалентными параметрами.

Сравним соотношения (9.5) и (9.9),

$$\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \cdot \underline{4kTR} = \underline{4kT_n R},$$

либо (9.6) и (9.10),

$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \cdot \underline{4kTG} = \underline{4kT_n G}.$$

Здесь подчёркнуты одинаковые величины, входящие в сравниваемые соотношения.

В результате найдём связь между коэффициентом шума, эквивалентной шумовой температурой и абсолютной температурой двухполюсника:

$$T_n = F_n \cdot T. \quad (9.15)$$

Сравним теперь соотношения (9.5) и (9.12), опять же подчёркивая одинаковые величины, входящие в сравниваемые соотношения:

$$\langle v_n^2 \rangle_f = F_n \cdot \underline{4kTR} = \underline{4kTR_n}.$$

Отсюда найдём связь между коэффициентом шума, эквивалентным шумовым сопротивлением и дифференциальным сопротивлением двухполюсника:

$$R_n = F_n \cdot R. \quad (9.16)$$

Теперь сравним соотношения (9.6) и (9.14):

$$\langle i_n^2 \rangle_f = F_n \cdot \underline{4kTG} = \underline{4kTG_n}.$$

Это сравнение даёт связь между коэффициентом шума, эквивалентной шумовой проводимостью и дифференциальной проводимостью двухполюсника:

$$G_n = F_n \cdot G. \quad (9.17)$$

Отдельный интерес представляет определение взаимосвязи между шумовым сопротивлением и шумовой проводимостью двухполюсника.

При этом следует понимать, что указанные параметры характеризуют мощность шума двухполюсника. Следовательно, они должны быть связаны между собой прямой пропорцией, $R_n \sim G_n$.

С другой стороны, необходимо учитывать, что шумовое сопротивление характеризует спектр напряжения шумов на выходе **разомкнутого** двухполюсника, в то время как шумовая проводимость определяет спектр шумового тока **короткозамкнутого** двухполюсника.

Для определения взаимосвязи между шумовым сопротивлением и шумовой проводимостью двухполюсника обратимся к соотношениям (9.16) и (9.17). Трансформируя указанные соотношения, выразим коэффициент шума F_n через интересующие нас параметры:

$$F_n = R_n / R = G_n / G.$$

Активные компоненты импеданса и адмитанса связаны между собой:

$$G = R / |Z|^2, R = G / |Y|^2.$$

Отсюда, учитывая, что $|Z|^2 = 1/|Y|^2$ находим необходимые взаимосвязи:

$$R_n = |Z|^2 \cdot G_n, G_n = |Y|^2 \cdot R_n. \quad (9.18)$$

Рассмотрим теперь возможности формулы Шотки для описания шумов короткозамкнутого двухполюсника (Рис. 9.2).

9.6. Эквивалентный шумовой ток (насыщенного диода)

В соответствии с формулой Шотки (3.14), спектр недепрессированного дробового шума есть

$$\langle i_{др}^2 \rangle_f = 2q_e I_0. \quad (9.19)$$

Здесь $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, I_0 – (постоянный) ток через электровакуумный диод.

Обращаясь к “черному ящику” с короткозамкнутым выходом (Рис. 9.2) и опираясь на формулу Шотки, вводим понятие эквивалентного шумового тока:

$$I_n = \frac{\langle i_n^2 \rangle_f}{2q_e} [A]. \quad (9.20)$$

По сути, это есть спектр токового шума, выраженный в амперах.

Другими словами, эквивалентный шумовой ток I_n есть ток, который надо пропустить через электровакуумный диод (работающий в режиме насыщения), чтобы получить ту же величину недепрессированного дробового шума (на той

же частоте анализа f), что и у рассматриваемого короткозамкнутого двухполюсника.

Таким образом, зная эквивалентный шумовой ток I_n двухполюсника можно найти спектр его токового шума:

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 2q_e I_n [\text{A}^2/\text{Гц}] . \quad (9.21)$$

Подчеркнём, что величина эквивалентного шумового тока может зависеть от частоты анализа, $I_n = I_n(f)$, по двум причинам:

- вследствие относительно большого времени пролета $\tau_{\text{пр}}$ носителей тока через (инжекционный) прибор, входящий в состав двухполюсника (по сравнению с обратной частотой анализа f^{-1}),
- из-за наличия иных (кроме дробового) источников шума.

9.7. Взаимосвязь описаний по Найквисту и Шотки

Из вышеприведенного анализа видно, что спектр токового шума короткозамкнутого двухполюсника может быть описан на языке формулы Найквиста (9.14):

$$\langle i_n^2 \rangle_f = 4kTG_n .$$

С другой стороны, этот же спектр описывается формулой Шотки (9.21).

Отсюда находим связь между эквивалентным шумовым током и эквивалентной шумовой проводимостью двухполюсника:

$$I_n = 2V_T G_n . \quad (9.22)$$

Здесь $V_T = kT/q_e$ – тепловой потенциал (примерно 25 мВ при $T = 298$ К).

Пример 9.2

Найдем эквивалентный шумовой ток идеального резистора, обладающего сопротивлением $R = 100$ Ом.

Используя соотношение (9.22), получим:

$$I_n = 2V_T/R = 0.05[\text{В}]/100[\text{Ом}] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ А} = 0.5 \text{ мА} .$$

Таким образом, короткозамкнутый резистор с сопротивлением 100 Ом генерирует такой же токовый шум, как электровакуумный диод (работающий в режиме без депрессии дробового шума), через который пропускается ток 0.5 мА .

Пример 9.3

Определим коэффициент шума полупроводникового диода, к которому приложено большое прямое напряжение $V \gg V_T$.

Таким образом, диод работает в режиме большого прямого тока $I \gg I_s$. Здесь I_s – обратный ток насыщения диода.

Ток через диод и дифференциальная проводимость диода определяются следующими соотношениями:

$$I = I_s \cdot \exp(V/V_T), \quad G = dI/dV = I/V_T.$$

В рассматриваемом режиме диод является источником дробового шума $i(t)$, см., например, [6]. Спектр этого шума описывается формулой Шотки:

$$\langle i^2 \rangle_f = 2q_e I.$$

Вычислим коэффициент шума диода, используя определение (9.4):

$$F_n = \frac{2q_e I}{4kTG} = \frac{I}{2V_T G} = \frac{I}{2V_T} \cdot \frac{V_T}{I} = \frac{1}{2}.$$

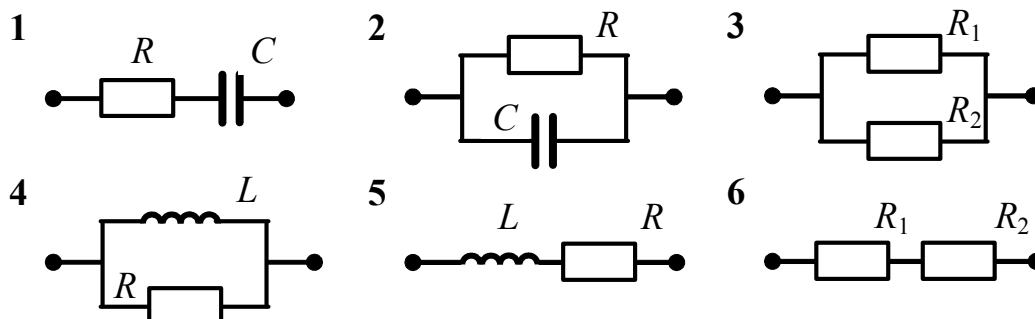
Коэффициент шума в этом режиме $F_n = 0.5$, то есть меньше единицы.

Ничего парадоксального в этом результате нет. Коэффициент шума выражает спектр шума прибора в “единицах спектра теплового шума” идеального эквивалентного резистора. В рассматриваемом случае диод генерирует дробовой шум, а тепловой шум отсутствует.

Дополнительные сведения о методах эквивалентного представления шумов можно найти в монографиях [6], [7], [22], [23].

Контрольные вопросы

1–6. Для описания теплового шума двухполюсника, приведенного на рисунке:



- нарисовать две эквивалентные схемы (с генераторами тока и напряжения);
- вычислить спектр шумового напряжения $\langle v^2 \rangle_f$ и эффективное напряжение шума $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$ в полосе $[0; 20]$ кГц;
- вычислить спектр шумового тока $\langle i^2 \rangle_f$ и эффективный шумовой ток $i_{\text{эфф}}(\Delta f)$ в полосе $[0; 20]$ кГц;
- вычислить коэффициент шума F_n и эквивалентное шумовое сопротивление R_n на частоте 16 кГц.
- объяснить физический смысл полученных результатов.

Использовать следующие параметры:

$$R = 1 \text{ кОм}; R_1 = 900 \text{ Ом}; R_2 = 100 \text{ Ом}; C = 1 \text{ нФ}; L = 1 \text{ нГн}$$

7. Недепрессированный дробовой шум, соответствующий току $I_0 = 1 \text{ мА}$, выделяется на резисторе нагрузки $R = 10 \text{ кОм}$.

Вычислить:

- эквивалентное шумовое сопротивление R_n , соответствующее выделяемому шумовому напряжению;
- эффективное напряжение шума $v_{\text{эфф}}(\Delta f)$ в полосе $[0; 20]$ кГц.

8. Ток лавинно-пролетного диода I составляет 10 мА при коэффициенте размножения $M = 10^5$ и характерном времени лавинообразования $\tau_n = 10^{-9} \text{ с}$.

Найти спектр шума лавинообразования $\langle i_n^2 \rangle_f$ и эффективный шумовой ток $i_{\text{эфф}}$, характеризующий полную мощность шума $\langle i_n^2 \rangle$. Определить эффективную глубину шумовой модуляции тока диода $m = i_{\text{эфф}}/I$.

9. Имеется полупроводниковый образец объемом 1 см^3 с концентрацией носителей $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и временем релаксации $\tau_0 = 10^{-5} \text{ с}$.

Найти спектр $\langle \delta R^2 \rangle_f$ и полную мощность $\langle \delta R^2 \rangle$ относительных флуктуаций сопротивления образца в предположении прямой (одноступенчатой) генерации и рекомбинации носителей тока.

10. В обратно смещенном $p-n$ переходе наблюдаются токовые импульсы взрывного шума $i(t)$. Длительности импульсов распределены по закону Больцмана. Средняя длительность импульса τ_1 совпадает со средней длительностью паузы τ_2 . Размах импульса составляет $i_1 = 1 \text{ нА}$, средняя частота появления импульсов $\nu = 1/(2\tau_1) = 10 \text{ кГц}$.

Найти спектр $\langle \delta i^2 \rangle_f$ и полную мощность $\langle \delta i^2 \rangle$ шума; вычислить эквивалентный шумовой ток $i_{\text{эфф}}$.

11. Спектр напряжения на выходе генератора фликкерного (“розового”) шума есть $\langle u^2 \rangle_f = A/f [\text{В}^2/\text{Гц}]$ во всем диапазоне анализируемых частот.

Найти мощность $\langle u^2(\Delta f) \rangle$ шума в следующих частотных диапазонах:

- (а) $[1; 100] \text{ Гц}$;
- (б) $[0,1; 10] \text{ кГц}$;
- (в) $[10 \text{ кГц}; 1 \text{ МГц}]$.

Объяснить полученные результаты.

Неплохо бы догадаться, как подобный генератор используется при измерении амплитудно–частотной характеристики усилителя низкой частоты.

12. Через резистор, обладающий спектром относительных флуктуаций сопротивления

$$\langle \delta R^2 \rangle_f = A/[1+(f/f_1)^2]$$

и невозмущенным сопротивлением R_0 , пропускается нефлуктуирующий ток

$$I = I_0 + I_1 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi).$$

Найти шумовую компоненту $u(t)$ напряжения, выделяющегося на резисторе; нарисовать качественно спектр $\langle U^2 \rangle_f$ полного напряжения U при $f_1 \ll f_0$.

13. Изложить суть модели Дю Пре – Ван дер Зила, предложенной для объяснения формы спектра фликкерного шума.

Определить параметры распределения времен релаксации, необходимые для получения спектра вида $1/f$ в диапазоне частот от 10^{-6} Гц до 10^5 Гц .

14. Показать, что пуассоновская последовательность импульсов, затухающих во времени по закону $1/\sqrt{t}$ имеет, согласно модели Шенфельда, спектр вида $1/f$ на достаточно низких частотах.

Изложить суть модификации этой модели, предложенной Малаховым для объяснения фликкерного шума со спектром $1/f^\gamma$ для $\gamma \sim 1$.

15. Изложить суть модели фликкерного случайного процесса, основанной на использовании пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов (Халфорда).

16. Определить параметры суперпозиции случайных телеграфных процессов, дающей спектр вида $1/f$ в заданном (сколь угодно широком) диапазоне частот (f_n, f_b) .

17. Коэффициент шума F_n усилителя, обладающего входным сопротивлением $R = 75$ Ом, составляет при комнатной температуре 3 дБ.

Найти спектр $\langle v_n^2 \rangle_f$ шумового напряжения, приведённого к входу усилителя, и эквивалентное шумовое сопротивление R_n .

18. Эквивалентное шумовое сопротивление R_n двухполюсника составляет 3 кОм.

Найти:

(а) спектр шумового напряжения при комнатной температуре;

(б) коэффициент шума и эквивалентную шумовую проводимость, если дифференциальное сопротивление R двухполюсника составляет 1 кОм.

19. Спектр шумового напряжения $\langle v_n^2 \rangle_f$ на выходе двухполюсника, находящегося при комнатной температуре и имеющего сопротивление $R = 1$ кОм, есть $3.2 \cdot 10^{-17} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

Найти коэффициента шума F_n и эквивалентную шумовую температуру T_n двухполюсника.

20. Найти эквивалентный шумовой ток I_n (насыщенного диода) для двухполюсника, имеющего при комнатной температуре сопротивление $R = 1$ кОм и коэффициент шума $F_n = 13$ дБ.

21. Найти эквивалентную шумовую проводимость G_n , описывающую дробовой шум тока $I_0 = 10$ мА при коэффициенте депрессии $\Gamma^2 = 0.1$.

22. Найти коэффициент шума F_n электровакуумной лампы, через которую протекает ток $I_0 = 20$ мА при коэффициенте депрессии $\Gamma^2 = 0.05$, если её выходное сопротивление составляет $R = 5$ кОм.

23. Коэффициент шума двухполюсника, имеющего дифференциальное сопротивление $R = 1$ кОм, при комнатной температуре составляет $F_n = 6$ дБ.

Найти эквивалентные шумовые сопротивление R_n и температуру T_n .

Библиография

- [1] Якимов, А. В. Физика шумов и флуктуаций параметров. Учебное пособие / А. В. Якимов // Фонд образовательных электронных ресурсов. – Н. Новгород, ННГУ. Регистрационный номер 640.13.04. Дата издания 13.12.2013. 85 с. [Электронный ресурс]. URL: http://www.unn.ru/books/met_files/Yakimov_Noise.pdf (дата обращения: 05.04.2016).
- [2] Брагинский, В. Б. Удивительная гравитация (или как измеряют кривизну мира) / В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 160 с.
- [3] Стратонович, Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович – М.: Сов. радио, 1961. 559 с.
- [4] Малахов, А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах / А. Н. Малахов – М.: Наука, 1968. 660 с.
- [5] Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая / Б. Р. Левин – М.: Сов. радио, 1969. 752 с.
- [6] Ван дер Зил, А. Шум (источники, описание, измерение) / А. Ван дер Зил – М.: Сов. радио, 1973 (перевод с английского). 178 с.
- [7] Жалуд, В. Шумы в полупроводниковых устройствах / В. Жалуд, В. Н. Кулешов – М.: Сов. радио, 1977.
- [8] Шумы в электронных приборах / Пер. с англ. – М.-Л.: Энергия, 1964.
- [9] Зеегер, К. Физика полупроводников / К. Зеегер – М.: Мир, 1977 (перевод с английского).
- [10] Read, W. T. A proposed high frequency negative resistance diode / W. T. Read // Bell System Techn. J. 1958. V.37. P.401.
- [11] Тагер, А. С. Генерация и усиление радиоволн сантиметрового и миллиметрового диапазонов с помощью полупроводникового диода в области положительного наклона его статической вольтамперной характеристики / А. С. Тагер, А. И. Мельников, Г. П. Кобельков, А. М. Цебиев // Диплом на открытие №24, приоритет 27.10.1959 г.
- [12] Тагер, А. С. Лавинно-пролетные диоды и их применение в технике СВЧ / А. С. Тагер, В. М. Вальд-Перлов – М.: Сов. радио, 1968.
- [13] Беляков, А. В. Взрывной и 1/f-шум в светоизлучающих диодах на квантовых точках / А. В. Беляков, М. Ю. Перов, А. В. Якимов, Л. К. Дж. Фандамме // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 2006. – Т.49. – №5. – С. 437 – 447.
- [14] Johnson, J. B. The Schottky effect in low frequency circuits / J. B. Johnson // Phys. Rev. – 1925. – Vol. 26. – P. 71.
- [15] Schottky, W. Small-shot effect and flicker effect / W. Schottky // Phys. Rev. – 1926. – V. 28. – P. 74.

- [16] Коган, Ш. М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа $1/f$ в твердых телах / Ш. М. Коган // Успехи физических наук. – 1985. – Т.145. – № 2. – С. 285 – 328.
- [17] Du Pre, F. K. A suggestion regarding the spectral density of flicker noise / F. K. Du Pre // Physical Review. – 1950. – Vol. 78. – № 5. – P. 615.
- [18] Van der Ziel, A. On the noise spectra of semi-conductor noise and of flicker effect / A. Van der Ziel // Physica. – 1950. – Vol. 16. – № 4. – P. 359 – 372.
- [19] Халфорд, Д. Общая механическая модель шумов со спектральной плотностью $|f|^\alpha$ и её применение к частному случаю фликкер-шума вида $1/f$ / Д. Халфорд // ТИИЭР. – 1968. – Т. 56. – № 3. – С. 9 – 16.
- [20] Hooge, F. N. $1/f$ noise is no surface effect / F. N. Hooge // Phys. Letters. – 1969. – V. 29A. – P. 139 – 140.
- [21] Hooge, F. N. Experimental studies on $1/f$ noise / F. N. Hooge, T. G. M. Kleinpenning, L. K. J. Vandamme // Reports on Progress in Physics. – 1981. – V.44. – № 3. – P. 479 – 532.
- [22] Букингем, М. Шумы в электронных приборах и системах / М. Букингем – М.: Мир, 1986.
- [23] Белоусов, А. П. Коэффициент шума / А. П. Белоусов, Ю. А. Каменецкий – М.: Радио и связь, 1981.
- [24] Якимов, А. В. Анализ дробовых шумов и шумов лавинообразования в электронных приборах при больших уровнях сигнала / А. В. Якимов //Радиотехника и электроника. – 1977. – Т.22. – №10. – С. 2186 – 2189.

Аркадий Викторович **Якимов**

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ШУМОВ

Электронное учебное пособие

Компьютерная верстка – А.В. Якимов

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

“Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского”.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.