МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.В. Калинин
А.А. Тюхтина

Введение в современные методы математической физики

Учебное пособие

Рекомендовано учёным советом механико-математического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся в академической магистратуре
по направлениям подготовки 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»,
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2014

УДК 517.9
ББК В161.62
К 12

К 12 Калинин А.В., Тюхтина А.А. ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 120 с.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент **О.А. Кузенков**
канд. физ.-мат. наук **А.С. Сергеев**

Учебное пособие содержит сведения, необходимые для освоения современных методов решений уравнений и систем дифференциальных уравнений с частными производными. Обсуждаются обобщенные формулировки основных эллиптических краевых задач математической физики, рассмотрены краевые задачи для уравнений гидродинамики, теории упругости, электростатики. Представлено достаточно полное изложение математических основ решения задач с помощью единого подхода, использующего теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Пособие соответствует программам общего курса «Современные проблемы математической физики» и специальных курсов, читаемых на механико-математическом факультете ННГУ, и согласовано с программами общих курсов «Уравнения математической физики», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

Учебное пособие предназначено для студентов Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по направлениям подготовки магистров 01.04.01 «Математика», 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии механико-математического факультета ННГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент **Н.А. Денисова**

УДК 517.9
ББК В161.62

Содержание

Введение

Широкий класс задач математической физики допускает вариационные формулировки, которым зачастую отводится основополагающая роль в конкретных прикладных областях. При этом дифференциальные уравнения, описывающие различные физические поля, могут интерпретироваться как уравнения Эйлера для соответствующих вариационных принципов и рассматриваться как следствия вариационных формулировок задач. С математической точки зрения вариационные формулировки совпадают с обобщенными формулировками соответствующих задач математической физики и возникающие при обобщенных формулировках интегральные тождества (называемые в литературе также вариационными равенствами) могут рассматриваться как результаты дифференцирования (в смысле Фреше или в смысле Гато) минимизируемых в вариационных постановках функционалов.

С точки зрения численного исследования задач математической физики их вариационные формулировки положены в основу так называемых проекционных методов (метод Ритца) и конкретных реализаций этого метода в рамках метода конечных элементов. Соответствующий теоретический материал является неотъемлемой частью современных руководств по методу конечных элементов, что нашло свое отражение в списке используемых источников в настоящем учебном пособии.

Затронутые вопросы по существу охватывают весьма значительную часть современной математической физики и их всестороннее обсуждение невозможно в рамках одного или нескольких учебных пособий.

В настоящем пособии рассматриваются традиционные краевые задачи для уравнения Пуассона и соответствующие им задачи на собственные значения и собственные функции. Для этих задач обсуждается понятие обобщенного решения, приводится вывод обобщенных формулировок в виде вариационных равенств, доказывается эквивалентность вариационных равенств и соответствующих вариационных принципов, обосновывается метод Фурье для основных краевых задач для уравнения Пуассона.

Помимо этого обсуждаются краевые задачи для линейных уравнений гидродинамики, теории упругости, электродинамики сплошных сред. Исследование обобщённых постановок краевых задач математической физики тесно связано с изучением свойств соответствующих функциональных пространств. В пособии рассматриваются гильбертовы пространства вектор-функций с суммируемыми ротором или дивергенцией. Для доказательства существования обобщенных решений поставленных краевых задач применяются оценки скалярных произведений вектор-функций через нормы их ротора и дивергенции, основанные на представлениях векторных полей.

При изложении материала используются основные понятия и результаты теории гильбертовых пространств, не выходящие за рамки стандартного курса функционального анализа (теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, теорема Гильберта–Шмидта и др.), сводка необходимых результатов приведена в приложении. В рамках необходимого минимума обсуждаются пространства С.Л. Соболева, при этом доказываются некоторые ключевые результаты и формулируются (со ссылками) результаты, имеющие технический характер.

Метод Ритца в пособии обсуждается для абстрактного вариационного принципа для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве. Приведенные и обоснованные результаты носят достаточно общий характер и охватывают все конкретные вариационные принципы для рассматриваемых в пособии краевых задач.

В пособии приводится ряд упражнений, предназначенных для более успешного усвоения концептуальных вопросов современной математической физики, связанных с понятиями обобщенных функций и обобщенных решений краевых и начально-краевых задач.

1. Абстрактная эллиптическая теория

В настоящей главе изучается абстрактная вариационная задача для квадратичного функционала или симметричного оператора в гильбертовом пространстве, обсуждается метод Ритца для нахождения приближенного решения рассматриваемой вариационной задачи. Более полное изложение этого материала можно найти в [1, 6, 8, 9, 22, 26, 28, 29].

1.1. Вариационный принцип для квадратичного функционала в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пространство над полем действительных чисел. Отображение $a(\cdot,\cdot): H\times H \to \mathbb{R}$ называется *билинейной формой*, если при всех $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $u,v,w\in H$ выполнены соотношения

$$a(u,\lambda v+\mu w)=\lambda a(u,v)+\mu a(u,w),$$

$$a(\lambda v+\mu w,u)=\lambda a(v,u)+\mu a(w,u).$$

Билинейная форма $a: H\times H\to\mathbb{R}$ называется *симметричной*, если

$$a(u,v)=a(v,u) \text{ при всех } u,v\in H;$$

ограниченной, если существует такая положительная постоянная $a^*>0$, что

$$|a(u,v)|\le a^*\|u\|_H\|v\|_H \text{ при всех } u,v\in H$$

(a^* не зависит от u и v);

коэрцитивной, если существует такая положительная постоянная $a_*>0$, что

$$a(u,u)\ge a_*\|u\|_H^2 \text{ при всех } u\in H$$

(a_* не зависит от u).

Функционал $l: H\to\mathbb{R}$ называется *линейным*, если при всех $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $u,v\in H$ выполнено

$$l(\lambda u+\mu v)=\lambda l(u)+\mu l(v).$$

Функционал $l: H\to\mathbb{R}$ - ограниченный, если существует такая положительная постоянная $l^*>0$, что при всех $u\in H$

$$|l(u)|\le l^*\|u\|_H$$

(постоянная l^* не зависит от $u\in H$).

Справедлива

Теорема 1.1. ([22]) *Пусть H – гильбертово пространство над полем действительных чисел $a: H\times H\to\mathbb{R}$ – билинейная симметричная ограниченная коэрцитивная форма, $l: H\to\mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда задача*

$$I(u)\to\inf,\ u\in H, \tag{1.1}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - l(u). \quad (1.2)$$

имеет единственное решение.

Доказательство теоремы опирается на следующие утверждения 1.1–1.5.

Утверждение 1.1. *Функционал (1.2) непрерывен.*

Доказательство. Пусть $u_\infty \in H$ и последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ сходится к u_∞, т.е.

$$\| u_\infty - u_k \|_H \to 0 \text{ при } k \to \infty. \quad (1.3)$$

Покажем, что

$$I(u_k) \to I(u_\infty) \text{ при } k \to \infty. \quad (1.4)$$

Действительно, для сходящейся последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует положительная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\| u_k \|_H \le C \text{ при всех } k = 1,2,\dots \quad (1.5)$$

при этом очевидно также, что

$$\| u_\infty \| \le C. \quad (1.6)$$

Используя билинейность формы $a: H \times H \to \mathbb{R}$ и линейность функционала $l: H \to \mathbb{R}$, можно получить

$$I(u_\infty) - I(u_k) = -l(u_\infty - u_k) + \frac{1}{2}a(u_\infty - u_k, u_\infty) + \frac{1}{2}a(u_k, u_\infty - u_k),$$

откуда с учетом условий ограниченности формы $a: H \times H \to \mathbb{R}$, функционала $l: H \to \mathbb{R}$ и последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, получим

$$\left| I(u_\infty) - I(u_k) \right| \le \left| l(u_\infty - u_k) \right| + \frac{1}{2}\left| a(u_\infty - u_k, u_\infty) \right| + \frac{1}{2}\left| a(u_k, u_\infty - u_k) \right| \le$$

$$\le l^* \left\| (u_\infty - u_k) \right\|_H + \frac{a^*}{2} \| u_\infty \|_H \| u_\infty - u_k \|_H + \frac{a^*}{2} \| u_k \|_H \| u_\infty - u_k \|_H.$$

Учитывая (1.5), (1.6), заключаем, что

$$\left| I(u_\infty) - I(u_k) \right| \le (l^* + Ca^*) \| u_\infty - u_k \|_H,$$

откуда в силу (1.3) получаем (1.4).

Утверждение 1.2. *Функционал (1.2) ограничен снизу.*

Доказательство. Используя условие коэрцитивности билинейной формы $a: H \times H \to \mathbb{R}$ и линейности функционала $l: H \to \mathbb{R}$, получим

$$I(u) \ge \frac{1}{2}a(u,u) - | l(u) | \ge \frac{a_*}{2} \| u \|_H^2 - l^* \| u \|_H \ge$$

$$\ge \frac{a_*}{2}\left(\| u \|_H^2 - 2\frac{l^*}{a_*} \| u \|_H^2 + \left(\frac{l^*}{a_*} \right)^2 | \right) - \frac{(l^*)^2}{2a_*} = \frac{a_*}{2}\left(\| u \|_H^2 - \left(\frac{l^*}{a_*} \right)^2 \right) - \frac{(l^*)^2}{2a_*},$$

откуда

$$I(u) \ge -\frac{(l^*)^2}{2a_*},$$

что означает ограниченность снизу функционала $I(u)$.

Поэтому справедливо

Утверждение 1.3. *У функционала* $I(u)$ *существует точная нижняя грань*

$$\inf_{u\in H} I(u) = I_{\inf}.$$

Назовем последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ *минимизирующей последовательностью для функционала* $I(u)$, определенного формулой (1.2), если

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = I_{\inf} = \inf_{u\in H} I(u) \tag{1.7}$$

(из определения точной нижней грани следует, что существует хотя бы одна минимизирующая последовательность).

Утверждение 1.4. *Любая минимизирующая последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится в H.*

Доказательство. Покажем, что любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в *H*. Используя билинейность формы $a: H \to H$, получим

$$\frac{1}{2}a(u_m,u_m) + \frac{1}{2}a(u_n,u_n) = a\left(\frac{u_m+u_n}{2},\frac{u_m+u_n}{2}\right) + a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right),$$

откуда

$$I(u_m)+I(u_n) = \frac{1}{2}a(u_m,u_m) + \frac{1}{2}a(u_n,u_n) - l(u_m) - l(u_n) = a\left(\frac{u_m+u_n}{2},\frac{u_m+u_n}{2}\right) +$$

$$+ a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right) - 2l\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right) = 2I\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right) + a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right)$$

Поскольку $I(u_m) \to I_{\inf}$ при $m \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших *m* и *n* выполнено

$$I(u_m) < I_{\inf} + \varepsilon,\ I(u_n) < I_{\inf} + \varepsilon. \tag{1.8}$$

С другой стороны,

$$I\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right) \ge I_{\inf}, \tag{1.9}$$

т.к. $I_{\inf}$ – точная нижняя грань функционала $I(u)$. Следовательно,

$$2\mu + 2\varepsilon > I(u_m) + I(u_n) = 2I\left(\frac{u_m+u_n}{2}\right) + a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right) \ge$$

$$\ge 2\mu + a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right).$$

Таким образом, при достаточно больших *m* и *n* выполнено

$$a\left(\frac{u_m-u_n}{2},\frac{u_m-u_n}{2}\right) < 2\varepsilon.$$

Используя условие коэрцитивности билинейной формы $a: H \times H \to \mathbb{R}$, получаем, что

$$a_* \frac{\|u_m - u_n\|_H^2}{4} < 2\varepsilon ,$$

или

$$\|u_m - u_n\|_H < \sqrt{\frac{8\varepsilon}{a_*}} .$$

Это означает, что $\| u_m - u_n \|_H \to 0$ при $m, n \to \infty$, т.е. последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна.

В силу полноты пространства H заключаем, что для любой минимизирующей последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует элемент $u_\infty \in H$ такой, что

$$\| u_\infty - u_k \|_H \to 0 \text{ при } k \to \infty . \tag{1.10}$$

Справедливо

Утверждение 1.5. *Любая минимизирующая последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *функционала* $I(u)$ *сходится в* H *к некоторому элементу* $u_\infty \in H$, *т.е. выполняется (1.10) и при этом*

$$I(u_\infty) = I_{\inf} = \inf_{u \in H} I(u) . \tag{1.11}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно убедиться в справедливости (1.11). В силу непрерывности функционала $I(u)$ имеем

$$I(u_k) \to I(u_\infty) \text{ при } k \to \infty ,$$

но так как $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – минимизирующая последовательность, то

$$I(u_k) \to I_{\inf} \text{ при } k \to \infty .$$

В силу единственности предела числовой последовательности заключаем, что справедливо (1.11).

Сопоставляя утверждения 1.1–1.5, убеждаемся в справедливости теоремы 1.1.

1.2. Вариационное равенство и теорема Лакса–Мильграма

Рассмотрим следующие две задачи.

$$I(u) \to \inf, \; u \in H , \tag{1.12}$$

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(u) . \tag{1.13}$$

Задача 1. В гильбертовом пространстве H решить вариационную задачу

Задача 2. В гильбертовом пространстве H определить элемент $u \in H$, удовлетворяющий равенству

$$a(u,v)=l(v) \text{ при всех } v\in H. \tag{1.14}$$

Последнее равенство в дальнейшем будет называться *вариационным равенством*.

Справедлива

Теорема 1.2. *Пусть* $l(v):H\to\mathbb{R}$ *– произвольный линейный функционал,* $a(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbb{R}$ *– билинейная симметричная форма, удовлетворяющая условию неотрицательной определенности*

$$a(v,v)\ge 0 \quad \textit{при всех } v\in H. \tag{1.15}$$

Тогда вариационная задача (1.12), (1.13) и задача для вариационного равенства (1.14) эквивалентны.

Доказательство. Пусть $u_0\in H$ – решение вариационной задачи (1.12), (1.13). Тогда при всех $\lambda\in\mathbb{R}$, $v\in H$ выполнено

$$I(u_0+\lambda v)\ge I(u_0), \tag{1.16}$$

или

$$\frac{1}{2}a(u_0+\lambda v,u_0+\lambda v)-l(u_0+\lambda v)\ge\frac{1}{2}a(u_0,u_0)-l(u_0).$$

Используя линейность функционала $l:H\to\mathbb{R}$ и билинейность формы $a(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbb{R}$, получаем

$$\frac{\lambda^2}{2}a(v,v)+\frac{\lambda}{2}a(v,u_0)+\frac{\lambda}{2}a(u_0,v)-\lambda l(v)\ge 0.$$

Поскольку билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$, симметрична, при всех $v\in H$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{\lambda^2}{2}a(v,v)+\lambda\big(a(v,u^0)-l(v)\big)\ge 0. \tag{1.17}$$

Заметим, что если для некоторых $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\alpha\lambda^2+\beta\lambda\ge 0,$$

то отсюда с необходимостью следует, что $\beta=0$. Поэтому из неравенства (1.17) , выполненного при всех $\lambda\in\mathbb{R}$ вытекает, что

$$a(u_0,v)=l(v) \text{ при всех } v\in H. \tag{1.18}$$

Таким образом, любое решение вариационной задачи (1.12), (1.13) удовлетворяет вариационному равенству (1.14). Отметим, что при доказательстве этого факта не использовалось условие (1.15).

Пусть $u_0\in H$ удовлетворяет вариационному равенству (1.14), т.е. выполнено (1.18). Тогда учитывая (1.15) заключаем, что при всех $v\in H$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство (1.17), и обратив наши рассуждения, получаем неравенство (1.16), которое означает, что $u_0\in H$ – решение вариационной задачи (1.12), (1.13). Теорема доказана.

Справедлива

Теорема 1.3. ([4, 26, 30]) *Пусть H – гильбертово пространство над полем действительных чисел* $a:H\times H\to\mathbb{R}$ *– билинейная симметричная* *ограниченная коэрцитивная форма,* $l: H \to \mathbb{R}$ *– линейный ограниченный функционал. Тогда существует единственный элемент* $u \in H$*, удовлетворяющий равенству*

$$a(u,v) = l(v) \tag{1.19}$$

при всех $v \in H$*.*

Доказательство. Снабдим гильбертово пространство H новым скалярным произведением

$$(u,v)_a = a(u,v).$$

В силу свойств билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ все аксиомы скалярного произведения для $(\cdot,\cdot)_a : H \times H \to \mathbb{R}$ выполнены. Пространство H с новым скалярным произведением обозначим H_a, $\| w \|_a = (w,w)_a^{1/2} = \sqrt{a(w,w)}$.

Покажем, что H_a – гильбертово пространство. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в H_a. Это означает, что

$$\| u_l - u_m \|_a \to 0 \text{ при } l,m \to \infty$$

Учитывая, что из условия коэрцитивности следует, что

$$\| u_l - u_m \|_H \le a_*^{-1/2} \| u_l - u_m \|_a,$$

замечаем, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в исходном пространстве *H*:

$$\| u_l - u_m \|_H \to 0 \text{ при } l,m \to \infty.$$

Так как *H* – гильбертово пространство, то существует элемент $u_\infty \in H$ такой, что

$$\| u_k - u_\infty \|_H \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Учитывая, что из условия ограниченности следует, что

$$\| u_k - u_\aleph \|_a \le \sqrt{a_*} \| u_k - u_\infty \|_H,$$

заключаем, что

$$\| u_k - u_\infty \|_a \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

а это означает, что выбранная фундаментальная в H_a последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предел $u_\infty \in H_a$. Отсюда следует, что H_a – гильбертово пространство.

Покажем, что $l: H_a \to \mathbb{R}$ – ограниченный функционал. Действительно, из условия коэрцитивности вытекает, что

$$|l(u)| \le l^* \| u \|_H \le l^* a_*^{-1/2} \|u\|_a,$$

или

$$| l(u) | \le l_a^* \| u \|_a \text{ при всех } u \in H_a,$$

где $l_a^* = l^* / \sqrt{a_*}$ не зависит от выбора $u \in H_a$.

Таким образом, задача (1.19) может быть сформулирована как задача об определении $u \in H_a$, удовлетворяющей равенству $(u,v)_a = l(v)$ при всех $v \in H_a$, где $l : H_a \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Эта задача по теореме Рисса (п. П3) о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве H_a имеет единственное решение. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Лакса–Мильграма (теорема 1.3) в силу доказанного в теореме 1.2 факта об эквивалентности вариационного равенства (1.14) и вариационной задачи (1.12), (1.13), формально является прямым следствием теоремы 1.1 о существовании и единственности решения вариационной задачи (1.12), (1.14), однако приведенное независимое доказательство теоремы Лакса–Мильграма, позиционирующее ее как теорему Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве имеет самостоятельное методическое значение.

1.3. Обобщенное решение операторного уравнения

Линейный оператор $A : H \to H$, определенный на плотном в гильбертовом пространстве H линейном многообразии $D(A)$, называется *симметричным*, если для любых $u, v \in D(A)$

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H .$$

Симметричный оператор называется *положительным* в $D(A)$, если для всех $u \in D(A)$

$$(Au, u)_H \ge 0,\ (Au, u)_H = 0 \Rightarrow u = 0 .$$

Если, кроме того, существует постоянная $\alpha > 0$, что для всех $u \in D(A)$

$$(Au, u)_H \ge \alpha \|u\|_H^2 ,$$

то оператор A называется *положительно определенным* в $D(A)$.

Любой положительно определенный оператор положителен в $D(A)$. Обратное неверно.

Пусть $f \in H$ – некоторый фиксированный элемент. Рассмотрим уравнение

$$Au = f . \tag{1.20}$$

Лемма 1.1. *Если A – положительный оператор в $D(A)$, то уравнение (1.20) при любом $f \in H$ имеет не более одного решения $u \in D(A)$ в H.*

Доказательство. Пусть u_1, $u_2 \in D(A)$ – решения уравнения (1.20). Тогда $u = u_1 - u_2 \in D(A)$ удовлетворяет равенству $Au = 0$, откуда, в силу положительности оператора следует, что $u = 0$.

Пусть $u \in D(A)$ – решение уравнения (1.20). Тогда при всех $v \in D(A)$

$$(Au, v)_H = (f, v)_H . \tag{1.21}$$

Если A – положительный оператор, то $a(u, v) \equiv (Au, v)_H$ – симметричная билинейная форма, определенная на $D(A)$, она называется энергией элемента u

по отношению к A. Пусть V – пополнение $D(A)$ по норме $\|u\| = (Au,u)_H^{1/2}$. По построению, V – гильбертово пространство, часто его называют энергетическим пространством.

Обобщенным решением уравнения (1.20) называется элемент $u \in V$, удовлетворяющий (1.21) при всех $v \in V$.

Таким образом, обобщенная постановка задачи (1.20) принимает вид (1.14), где $l(v) = (f,v)_H$ – линейный функционал на V. Согласно теореме 1.2, эта задача эквивалентна вариационной задаче

$$\frac{1}{2}(Au,u)_H - (f,u)_H \to \inf, \; u \in V.$$

Теорема 1.4. *Пусть* $A: H \to H$ *– положительно определённый оператор. Тогда при любом* $f \in H$ *задача (1.20) имеет единственное обобщённое решение.*

Доказательство. В силу положительной определенности оператора для всех $u \in D(A)$

$$\|u\|_H \le \alpha^{-1/2}(Au,u)_H^{1/2} = \alpha^{-1/2}\|u\|_V. \qquad (1.22)$$

Отсюда получаем, что любая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $D(A)$ фундаментальна в H, следовательно, существует $u \in H$ такой, что $u_n \to u$ в H при $n \to \infty$. В силу единственности предела, $V \subset H$ и неравенство (1.22) справедливо для $u \in V$.

Из оценки (1.22) вытекает, что функционал $l(v) = (f,v)_H$ непрерывен в V:

$$|l(v)| = |(f,v)|_H \le \|f\|_H \|v\|_H \le \alpha^{-1/2}\|f\|_H \|v\|_V, \; v \in V.$$

Так как $a(u,v) = (u,v)_V$ и $a(u,v) = \|u\|_V^2$, форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивна и непрерывна.

Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы Лакса-Мильграма.

Пусть $u_1 \in V$ – обобщенное решение задачи (1.20) с правой частью $f_1 \in H$, а $u_2 \in V$ – обобщенное решение задачи (1.20) с правой частью $f_2 \in H$, тогда $u = u_1 - u_2 \in V$ – обобщенное решение (1.20) с правой частью $f_1 - f_2 \in H$, следовательно,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_H.$$

Таким образом,

$$\|u_1 - u_2\|_V \le \alpha^{-1/2}\|f_1 - f_2\|_H,$$

что означает непрерывную зависимость обобщенного решения задачи (1.20) от начальных данных.

Если обобщенное решение лежит в $D(A)$, то ввиду плотности $D(A)$ в H, справедливо равенство (1.21). В силу единственности обобщенного решения, если оно не является элементом $D(A)$, уравнение (1.20) классических решений не имеет.

1.4. Метод Ритца

Пусть H – сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство над полем действительных чисел, $a: H \times H \to \mathbb{R}$ – билинейная симметричная коэрцитивная форма, $l: H \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. Определить элемент $u \in H$, являющийся решением вариационной задачи

$$I(u) \to \min, \quad u \in H, \tag{1.23}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - l(u). \tag{1.24}$$

Задача 2. Определить элемент $u \in H$, удовлетворяющий вариационному равенству

$$a(u,v) = l(v) \tag{1.25}$$

при всех $v \in H$.

Как было показано в п. 1.2 эти две задачи эквивалентны, решение этих задач существует и определяется единственным образом.

Рассмотрим один из возможных подходов нахождения приближенного решения этих задач – метод Ритца.

Пусть для некоторого положительного действительного параметра h определено конечномерное подпространства $H_h \subset H$ размерности $N_h \in \mathbb{N}$. *Приближенным решением задачи* (1.23), (1.24) будем называть элемент $u_h \in H_h$, являющийся решением следующей вариационной задачи:

$$I(u_h) \to \min, \quad u_h \in H_h, \tag{1.26}$$

$$I(u_h) = \frac{1}{2}a(u_h,u_h) - l(u_h). \tag{1.27}$$

Очевидно, что на задачу (1.26), (1.27) переносятся все результаты о существовании и единственности решения при сформулированных выше условиях на билинейную форму $a(\cdot,\cdot)$ и линейный функционал $l(\cdot)$.

Пусть $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ – некоторый базис в H_h. Тогда приближенное решение $u_h \in H_h$ можно записать в виде

$$u_h = \sum_{l=1}^{N_h} c_l^h \varphi_l^h, \tag{1.28}$$

и задача об определении приближенного решения $u_h \in H_h$ сводится к задаче об определении коэффициентов c_i^h $(i = 1,\ldots,N_h)$ разложения приближенного решения $u_h \in H_h$ по базису $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$. Эта задача может быть сформулирована как задача конечномерной безусловной оптимизации для квадратичного функционала

$$I^h(c^h) \to \min, \ \ c^h = (c_1^h, ..., c_{N_h}^h) \in \mathbb{R}^{N_h}, \tag{1.29}$$

$$I^h(c^h) = I\left(\sum_{l=1}^{N_h} c_l^h \varphi_l^h\right). \tag{1.30}$$

Рассмотрим подробнее выражение для функционала I^h.

$$I^h(c^h) = \frac{1}{2} a\left(\sum_{l=1}^{N_h} c_l^h \varphi_l^h, \sum_{k=1}^{N_h} c_k^h \varphi_k^h\right) - l\left(\sum_{k=1}^{N_h} c_k^h \varphi_k^h\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_h}\sum_{k=1}^{N_h} a_{ik}^h c_i^h c_k^h - \sum_{k=1}^{N_h} b_k^h c_k^h, \tag{1.31}$$

где

$$a_{ik}^h = a(\varphi_i^h, \varphi_k^h), \ b_k^h = l(\varphi_k^h). \tag{1.32}$$

Опишем формальную схему получения разрешающих соотношений для определения неизвестного вектора $c^h = (c_1^h, ..., c_{N_h}^h) \in \mathbb{R}^{N_h}$. Исходя из того, что решение $c^h \in \mathbb{R}^{N_h}$ задачи конечномерной безусловной оптимизации (1.29), (1.30) существует, и из непрерывной дифференцируемости функционала $I^h(c^h)$ (это следует из вида самого функционала) заключаем, что необходимым условием минимума функционала (1.30) является система уравнений

$$\frac{\partial I^h(c^h)}{\partial c_j^h} = 0, \ j = 1, ..., N_h. \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial I^h(c^h)}{\partial c_j^h} = \frac{\partial}{\partial c_j^h}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_h}\sum_{k=1}^{N_h} a_{ik}^h c_i^h c_k^h - \sum_{k=1}^{N_h} b_k^h c_k^h\right\} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N_h} a_{ik}^h c_k^h - \sum_{i=1}^{N_h} a_{ij}^h c_i^h\right) - b_j^h.$$

Учитывая, что согласно (1.32) $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\frac{\partial I^h(c^h)}{\partial c_j^h} = \sum_{i=1}^{N_h} a_{ij}^h c_j^h - b_j^h. \tag{1.34}$$

Поэтому, согласно (1.34), для определения $c^h = (c_1^h, ..., c_{N_h}^h) \in \mathbb{R}^{N_h}$ получаем линейную систему алгебраических уравнений

$$A^h c^h = b^h, \tag{1.35}$$

где $A = \left(a_{ij}^h\right)_{i,j=1}^{N_h}$, $b = (b_1, ..., b_{N_h})^T$, $c^h = (c_1^h, ..., c_{N_h}^h)^T$, коэффициенты a_{ij} и b_i определены соотношениями (1.32).

Отметим, что система (1.35) невырождена и, следовательно, имеет единственное решение $c^h = (c_1^h, ..., c_{N_h}^h)$.

Действительно, система (1.35) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{N_h} a_{ij}^h c_j^h = b_i^h, \ i = 1, ..., N_h. \tag{1.36}$$

Предположим, что существует нетривиальный вектор $\tilde{c}^h = (\tilde{c}_1^h, ..., \tilde{c}_{N_h}^h)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{N_h} a_{ij}^h \tilde{c}_j^h = 0, \qquad (1.37)$$

тогда

$$\sum_{i=1}^{N_h} a_{ij}^h \tilde{c}_j^h \tilde{c}_i^h = 0. \qquad (1.38)$$

Левая часть последнего равенства может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{N_h} a(\varphi_i^h, \varphi_j^h) \tilde{c}_j^h \tilde{c}_i^h = \sum_{i=1}^{N_h} a(\varphi_j^h, \varphi_i^h) \tilde{c}_i^h \tilde{c}_j^h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_h} a\left(\sum_{i=1}^{N_h} \tilde{c}_j^h \varphi_j^h, \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{c}_i^h \varphi_i^h \right) = \sum_{i=1}^{N_h} a\left(\sum_{i=1}^{N_h} \tilde{c}_i^h \varphi_i^h, \sum_{i=1}^{N_h} \tilde{c}_j^h \varphi_j^h \right).$$

Поэтому для $\tilde{u}^h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i^h \varphi_i^h$ справедливо

$$a(\tilde{u}^h, \tilde{u}^h) = 0.$$

Поскольку билинейная форма $a : H \to H$ удовлетворяет условию коэрцитивности, то для некоторого $a_* > 0$

$$a_* \left\| \tilde{u}^h \right\|^2 \le a(\tilde{u}^h, \tilde{u}^h),$$

откуда следует $\left\| \tilde{u}^h \right\| = 0$, или

$$\bar{u}^h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i^h \varphi_i^h = 0,$$

чего быть не может ни для какого нетривиального вектора c^h в силу линейной независимости семейства базисных функционалов $\left\{\varphi_i^h\right\}_{i=1}^{N_h}$. Таким образом, предположение (1.37) приводит к противоречию.

Отметим, что система (1.36) может быть записана в виде

$$a\left(\varphi_i^h, \sum_{j=1}^{N_h} \tilde{c}_j^h \varphi_j^h \right) = l(\varphi_i^h),$$

или

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_h} \tilde{c}_j^h \varphi_j^h, \varphi_i^h \right) = l(\varphi_i^h), \; i = 1, \ldots, N_h. \qquad (1.39)$$

Поэтому система (1.35) разрешающих уравнений для определения c^h может быть получена исходя из эквивалентного вариационному принципу (1.26), (1.27) вариационного равенства

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad (1.40)$$

в котором требуется определить функцию $u_h \in H_h$, удовлетворяющую (1.40) при всех $v_h \in H_h$.

Действительно, если $u_h \in H_h$ удовлетворяет (1.40) при всех $v_h \in H_h$, то $u_h \in H_h$ удовлетворяет (1.40) при всех $v_h = \varphi_i^h \in H_h$, $i = 1,..., N_h$, что приводит к эквивалентному (1.39) равенству

$$a(u_h, \varphi_i^h) = l(\varphi_i^h)\,,\ i = 1,..., N_h. \tag{1.41}$$

С другой стороны, если (1.41) выполнено при всех $i = 1,..., N_h$, то для любого $v_h = \sum_{i=1}^{N_h} D_i^h \varphi_i \in H_h$ из (1.41) получаем

$$\sum_{i=1}^{N_h} D_i^h a(u_h, \varphi_i^h) = \sum_{i=1}^{N_h} D_i^h l(\varphi_i^h),$$

что эквивалентно (1.40).

Последнее замечание позволяет для получения разрешающих соотношений (1.35) на основе метода Ритца использовать как исходную задачу (1.25) и соответствующую ей дискретную задачу (1.40) (или (1.41)).

Справедливо следующее утверждение, дающее оценку ошибки для каждого *h*.

Лемма 1.2. ([26]) *Существует такая, не зависящая от подпространства* H_h *постоянная* $C > 0$, *что*

$$\| u - u_h \|_H \le C \inf_{u_h \in H_h} \| u - v_h \|_H. \tag{1.42}$$

Доказательство. Рассмотрим некоторый элемент w_h пространства $H_h \subset H$. Подставляя его в качестве *v* или v_h в задачи (1.25) и (1.40), получаем

$$a(u - u_h, w_h) = 0. \tag{1.43}$$

Поскольку w_h – произвольный, то

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) = 0$$

для любого $v_h \in H_h$. Тогда, используя коэрцитивность и ограниченность формы $a(\cdot,\cdot)$, получаем

$$a_* \| u - u_h \|_H^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \le a^* \| u - u_h \|_H \| u - v_h \|_H.$$

Так как элемент $v_h \in H_h$ – произвольный, то неравенство (1.42) справедливо при $C = a^* / a_*$.

Замечание. В случае симметричности формы $a(\cdot,\cdot)$ равенство (1.43), справедливое для любого $w_h \in H_h$, означает, что u_h есть проекция на H_h точного решения $u \in H$ относительно скалярного произведения $a(\cdot,\cdot)$. То есть

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v_h \in H_h} a(u - v_h, u - v_h). \tag{1.44}$$

Используя коэрцитивность и ограниченность формы $a(\cdot,\cdot)$, получаем

$$\|u - u_h\|_H \le \sqrt{\frac{a^*}{a_*}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H .$$

Таким образом, неравенство (1.42) показывает, что оценка ошибки вычислений сводится к задаче аппроксимации, то есть задаче о вычислении расстояния

$$d(u, H_h) = \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

между элементом $u \in H$ и подпространством $H_h \subset H$.

2. Основные функциональные пространства

В главе рассматриваются необходимые для дальнейшего изложения факты из теории пространств С.Л. Соболева. Более полное изложение этого материала можно найти в [4-10, 21, 22, 24-26, 30].

2.1. Пространства гладких функций

Пусть $\mathbb{R}^n$ – *n*-мерное евклидово пространство. Через $\vec{x}=(x_1,...,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,...,y_n)$ обозначаются его точки; для скалярного произведения и евклидовой нормы используются обозначения

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})=x_1y_1+...+x_ny_n\,;\ |\vec{x}|=(\vec{x}\cdot\vec{x})^{1/2},$$

при $n=3$ определено векторное произведение

$$[\vec{x}\times\vec{y}]=(x_2y_3-x_3y_2,\,x_3y_1-x_1y_3,\,x_1y_2-x_2y_1).$$

Всюду предполагается, что $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – непустое открытое связное подмножество. Через $\partial\Omega=\Gamma$ обозначается граница множества Ω, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ – замыкание множества Ω в $\mathbb{R}^n$. Для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ (α_i – целые неотрицательные числа, $i=1,...,n$) через ∂_α обозначается дифференциальная операция

$$\partial_\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot\partial x_1^{\alpha_1}}$$

(здесь $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$)). В частности, $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $\quad i=1,...,n$.

Кроме того, для функций $u:\Omega\to\mathbb{R}$ полагают

$$\operatorname{grad}u=(\partial_1u,...,\partial_nu),\ \Delta u=\partial_1^2u+...+\partial_n^2u.$$

Через $C(\Omega)$ обозначается класс непрерывных определенных в области Ω функций $u:\Omega\to\mathbb{R}$; для любого $k\in N$

$$C^k(\Omega)=\{u\in C(\Omega):\partial_\alpha u\in C(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\le k\},\ C^\infty(\Omega)=\bigcap_{k=1}^{\infty}C^k(\Omega).$$

Через $C(\overline{\Omega})$ обозначается класс функций $u\in C(\Omega)$, допускающих непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$,

$$C^k(\overline{\Omega})=\{u\in C(\overline{\Omega}):\partial_\alpha u\in C(\overline{\Omega}),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\le k\},\ C^\infty(\overline{\Omega})=\bigcap_{k=1}^{\infty}C^k(\overline{\Omega}).$$

Для каждой функции $u:\Omega\to\mathbb{R}$ определим ее носитель $\operatorname{supp}u$ как замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества $\{\vec{x}\in\Omega:u(\vec{x})\ne0\}$. Функцию $u:\Omega\to\mathbb{R}$ будем называть *финитной*, если $\operatorname{supp}u\subset\Omega$ и компактен в $\mathbb{R}^n$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ и $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ определим открытый шар $B_\varepsilon(\vec{y})$ с радиусом ε и центром в точке $\vec{y}$:

$$B_\varepsilon(\vec{y}) = \left\{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : |\vec{z} - \vec{y}| < \varepsilon\right\}.$$

Пусть $\Gamma_\varepsilon = \bigcup\limits_{\vec{y}\in\Gamma} B_\varepsilon(\vec{y})$ – ε-окрестность границы Γ области Ω. Справедлива

Лемма 2.1. *Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ – финитная функция. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\Gamma_\varepsilon \bigcap \operatorname{supp} u = \emptyset$.*

Класс непрерывных финитных функций обозначается $C_0(\Omega)$;

$$\mathcal{D}(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega) \equiv C^\infty(\Omega) \bigcap C_0(\Omega).$$

Множество $\mathcal{D}(\Omega)$ обычно называется *пространством пробных* или *пространством основных функций.*

Через $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ обозначается класс функций из $C^\infty(\Omega)$, допускающих непрерывное продолжение до функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Справедлива

Лемма 2.2. $\mathcal{D}(\Omega)$ *– линейное пространство над полем действительных чисел.*

Следствием леммы 2.2 является

Лемма 2.3. *Пусть $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого мультииндекса α*

$$\partial_\alpha u(\vec{x}) = 0 \text{ при всех } \vec{x} \in \Omega \bigcap \Gamma_\varepsilon.$$

Справедлива

Лемма 2.4. *Существует пробная функция $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям*

(i) $\varphi_0(\vec{x}) \geq 0$ *при всех* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\operatorname{supp} \varphi_0 = \overline{B_1(0)}$.

($\overline{B_1(0)}$ – шар радиуса 1 с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$).

Доказательство. Пусть

$$\chi(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Можно показать, что $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Очевидно, функция $\varphi_0(\vec{x}) = \chi(1 - |\vec{x}|^2)$ удовлетворяет условиям леммы 2.4.

Следствием леммы 2.4 является

Лемма 2.5. *Для любого $\vec{y} \in \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ такого, что $\overline{B_\varepsilon(\vec{y})} \subset \Omega$, существует пробная функция $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям*

(i) $\varphi(\vec{x}) \geq 0$ *при всех* $\vec{x} \in \Omega$;

(ii) $\operatorname{supp} \varphi = \overline{B_\varepsilon(\vec{y})}$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пробная функция, построенная в лемме 2.4. Рассмотрим функцию $\widetilde{\varphi}(\vec{x}) = \varphi_0\left(\dfrac{\vec{x}-\vec{y}}{\varepsilon}\right)$. Очевидно, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\varphi}(\vec{x}) \geq 0$ при всех $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} \widetilde{\varphi} = \overline{B_\varepsilon(\vec{y})}$. Требуемая функция $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ может быть получена как сужение функции $\widetilde{\varphi}$ на область Ω.

Справедлива следующая лемма, называемая обычно *основной леммой вариационного исчисления, или леммой дю Буа–Реймона*.

Лемма 2.6. *Пусть некоторая функция* $h \in C(\Omega)$ *при всех* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *удовлетворяет равенству*

$$\int_\Omega h(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,d\vec{x} = 0.$$

Тогда $h(\vec{x}) \equiv 0$ *в* Ω.

2.2. Пространство $L_2(\Omega)$

Пусть $\mathcal{L}_2(\Omega)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $u: \Omega \to \mathbb{R}$, суммируемых с квадратом:

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}_2(\Omega)$ – векторное пространство над полем действительных чисел, так как для любых $u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\left\{\int_\Omega (u(\vec{x}) + v(\vec{x}))^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \leq \left\{\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x}\right\}^{1/2} + \left\{\int_\Omega v^2(\vec{x})d\vec{x}\right\}^{1/2} < \infty$$

(частный случай неравенства Минковского),

$$\int_\Omega (\lambda u(\vec{x}))^2 d\vec{x} = \lambda^2 \int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} < \infty.$$

Определим отображение $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_2(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$(u,v)_{\mathcal{L}} = \int_\Omega u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}.$$

Это определение корректно, так как при всех $u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ справедливо неравенство Коши–Буняковского

$$(u,v)_{\mathcal{L}}| \leq \left|\int_\Omega u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}\right| \leq \left(\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x}\right)^{1/2}\left(\int_\Omega v^2(\vec{x})d\vec{x}\right)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно, что отображение $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения (п. П1) за исключением аксиомы 4 и поэтому не является скалярным произведением. Действительно,

$$(u,u)_{\mathcal{L}} = \int_{\Omega} u^2(\vec{x})d\vec{x} \ge 0$$

при всех $u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, но из равенства

$$(u,u)_{\mathcal{L}} = \int_{\Omega} u^2(\vec{x})d\vec{x} = 0$$

следует лишь, что $u(\vec{x}) = 0$ при почти всех $\vec{x} \in \Omega$, то есть функция $u(\vec{x})$ может и не быть тождественно равной нулю в Ω.

Обозначим через $N(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$ подпространство функций $u:\Omega \to \mathbb{R}$, равных нулю при почти всех $\vec{x} \in \Omega$. Будем говорить, что функции $u,v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ эквивалентны $(u \sim v)$, если $u - v \in N(\Omega)$. Очевидно, что в данном случае выполнены все аксиомы отношения эквивалентности и это отношение разбивает $\mathcal{L}_2(\Omega)$ на непересекающиеся классы эквивалентностей. Через $L_2(\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентных функций, то есть $L_2(\Omega) = \mathcal{L}_2(\Omega)/N(\Omega)$ – фактор-пространство с нулевым элементом $0 = \{N(\Omega)\}$.

$L_2(\Omega)$ – векторное пространство над полем действительных чисел. При этом над элементами из $L_2(\Omega)$ могут выполняться те же действия, что и над индивидуальными функциями из $\mathcal{L}_2(\Omega)$, если результат этих действий не зависит от выбора конкретных представителей из соответствующих классов эквивалентностей. Например, интеграл Лебега не изменится, если подынтегральную функцию изменить на множестве нулевой меры.

В частности, для любых $u,v \in L_2(\Omega)$ может быть однозначно определено отображение $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega} : L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$(u,v)_{2,\Omega} = \int_{\Omega} u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}, \qquad (*)$$

где в качестве функций $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ в правой части можно взять любые конкретные функции из классов эквивалентностей u и v.

Формула (*) определяет скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, удовлетворяющее всем аксиомам скалярного произведения (п. П1).

Важнейшим свойством пространства $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением (*) является его полнота.

Теорема 2.1. ([14]) $L_2(\Omega)$ – *сепарабельное гильбертово пространство, обладающее счётным ортонормированным базисом.*

Справедлива следующая теорема о плотности.

Теорема 2.2. ([25]) *Пусть* Ω – *открытое ограниченное подмножество в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда пространства* $\mathcal{D}(\Omega)$, $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $C(\overline{\Omega})$ *плотно вложены в* $L_2(\Omega)$.

В дальнейшем элементы $L_2(\Omega)$ будут называться функциями (суммируемыми с квадратом по Лебегу), как это обычно и делается в литературе [18, 20].

Сформулированная в п. 2.1. основная лемма вариационного исчисления (лемма 2.6) допускает обобщение на более широкие классы функций [5] и, в частности, справедлива

Лемма 2.7. *Пусть некоторая функция* $h \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ *при всех* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *удовлетворяет равенству*

$$\int_\Omega h(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,d\vec{x} = 0\,.$$

Тогда $h(\vec{x}) = 0$ *при почти всех* $\vec{x} \in \Omega$.

Очевидно, что эта лемма может быть применена и для элементов $h \in L_2(\Omega)$. При этом из последнего равенства будет следовать $h = 0$, то есть h – нулевой элемент в $L_2(\Omega)$ $(h = N(\Omega))$.

2.3. Пространства С.Л. Соболева $H^k(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$

Пусть ∂_α – некоторая дифференциальная операция, $|\alpha| = k$, $u \in C^k(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Справедлива формула интегрирования по частям (частный случай теоремы Гаусса – Остроградского)

$$\int_\Omega \varphi(\vec{x})\partial_i u(\vec{x})d\vec{x} = -\int_\Omega u(\vec{x})\partial_i \varphi(\vec{x})d\vec{x}\,,$$

применяя которую k раз, получаем, с учетом того, что $\partial_\beta \varphi(\vec{x}) = 0$ для любого мультииндекса β в некоторой ε-окрестности границы ($\vec{x} \in \Gamma_\varepsilon \bigcap \Omega$):

$$\int_\Omega \partial_\alpha u(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(\vec{x})\partial_\alpha \varphi(\vec{x})d\vec{x}\,. \qquad (2.1)$$

Правая часть равенства (2.1) определена для всех локально суммируемых функций u. Локально суммируемая на Ω функция g_α называется *обобщенной производной* функции u порядка α, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_\Omega g_\alpha(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(\vec{x})\partial_\alpha \varphi(\vec{x})d\vec{x}\,, \qquad (2.2)$$

при этом, по определению, полагается $\partial_\alpha u(\vec{x}) \equiv g_\alpha(\vec{x})$. Идея определения обобщенной производной $\partial_\alpha u$ с помощью интегрального тождества вида (2.2) принадлежит С.Л. Соболеву [24].

Рассмотрим некоторые свойства обобщённых производных. Из основной леммы вариационного исчисления (лемма 2.6) следует, что обобщенная производная определяется однозначно. Таким образом, в случае, когда есть классическая производная $\partial_\alpha u \in C(\Omega)$, имеем $g_\alpha = \partial_\alpha u$. В случае, когда классическая производная $\partial_\alpha u$ не может быть определена, функция g_α, удовлетворяющая (2.2) (при условии существования), определяет обобщенную производную. Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 2.8. *Пусть последовательность* $u_k \in L_2(\Omega)$, $k = 1,2,\ldots,$ *такова, что* $\partial_\alpha u_k \in L_2(\Omega)$ *и существуют функции* $u \in L_2(\Omega)$, $g_\alpha \in L_2(\Omega)$ *такие, что для любой функции* $v \in L_2(\Omega)$

$$\int_\Omega u_k(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x} \to \int_\Omega u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x},\ \int_\Omega \partial_\alpha u_k(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x} \to \int_\Omega g_\alpha(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x} \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда $u(\vec{x})$ *имеет обобщенную производную порядка* α *и* $\partial_\alpha u = g_\alpha$.

Таким образом, обобщенные производные по Соболеву можно рассматривать как предельные элементы сходящихся в $L_2(\Omega)$ последовательностей производных от гладких функций.

Определим пространства $H^k(\Omega)$ как класс функций

$$W_2^k(\Omega) \equiv H^k(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial_\alpha u \in L_2(\Omega), |\alpha| \le k\},$$

то есть как множество функций из $L_2(\Omega)$, все частные производные которых до k-го порядка включительно, понимаемые в обобщенном смысле, содержатся в $L_2(\Omega)$.

В настоящем пособии в основном будет использоваться пространство $H^1(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$, которое соответственно определяется как класс функций

$$H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial_i u \in L_2(\Omega),\ i = 1,\ldots,n\},$$

где включение $\partial_i u \in L_2(\Omega)$ также понимается в обобщенном смысле, т.е. считается, что для каждого $i = 1,\ldots,n$ существуют функции $g_i \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\int_\Omega g_i(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = -\int_\Omega u(\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_i}d\vec{x} \tag{2.3}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Пространства $H^k(\Omega)$ наделяются соответствующими скалярными произведениями:

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{\alpha,|\alpha|\le k} \partial_\alpha u(\vec{x})\partial_\alpha v(\vec{x})d\vec{x} \tag{2.4}$$

и, в частности,

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i u(\vec{x})\partial_i v(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}. \tag{2.5}$$

Введенные скалярные произведения порождают соответствующие нормы

$$\| u \|_{H^k(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{\alpha,|\alpha|\le k} |\partial_\alpha u(\vec{x})|^2 d\vec{x} \right\}^{1/2}, \tag{2.6}$$

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |u(\vec{x})|^2\, d\vec{x} + \int_\Omega (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} \right\}^{1/2}. \tag{2.7}$$

Справедлива

Теорема 2.3. $H^k(\Omega)$, $k=1,2,...$ – *гильбертовы пространства над полем действительных чисел.*

Доказательство. Докажем эту теорему в частном случае для $H^1(\Omega)$. Очевидно, что достаточно убедиться в полноте пространства $H^1(\Omega)$. При доказательстве будут использоваться очевидные неравенства, следующие из определения нормы (2.7):

$$\| u \|_{2,\Omega} \le \| u \|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.8}$$

$$\|\partial_i u\|_{2,\Omega} \le \| u \|_{H^1(\Omega)} \text{ при всех } i=1,...,n. \tag{2.9}$$

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ – последовательность, фундаментальная в $H^1(\Omega)$. Из (2.8) следует, что

$$\| u_k - u_l \|_{2,\Omega} \le \| u_k - u_l \|_{H^1(\Omega)}$$

и поэтому последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$. В силу полноты $L_2(\Omega)$ заключаем, что существует элемент $u_\infty \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$\| u_k - u_\infty \|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{2.10}$$

Из (2.9) следует, что

$$\|\partial_i u_k - \partial_i u_l\|_{2,\Omega} \le \| u_k - u_l \|_{H^1(\Omega)},$$

и поэтому для каждого $i=1,...,n$ последовательности $\{\partial_i u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальны в $L_2(\Omega)$. Поэтому для каждого $i=1,...,n$ в силу полноты $L_2(\Omega)$ существуют функции $g_i^\infty \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$\left\|\partial_i u_k - g_i^\infty\right\|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{2.11}$$

Рассмотрим выражение

$$\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x},$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ – произвольно выбранная фиксированная пробная функция. Справедливы оценки

$$\left|\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u_\infty(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| \le \left|\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} - \int_\Omega \partial_i u_k(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| +$$

$$+\left|\int_\Omega \partial_i u_k(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u_k(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| + \left|\int_\Omega u^\infty(\vec{x})\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_i}d\vec{x} - \int_\Omega u^k(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right|.$$

Учитывая, что $u_k \in H^1(\Omega)$ и

$$\int_\Omega \partial_i u_k(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = -\int_\Omega u_k(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x},$$

получаем

$$\left|\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| \le \left|\int_\Omega \left(g_i^\infty(\vec{x}) - \partial_i u_k(\vec{x})\right)\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| +$$

$$+\left|\int_\Omega \left(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\right)\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right|.$$

Применяя к последним интегралам неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\left|\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u_\infty(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| \le \left\|g_i^\infty - \partial_i u_k\right\|_{2,\Omega}\left\|\varphi(\vec{x})\right\|_{2,\Omega} +$$

$$+\left\|u_\infty - u_k\right\|_{2,\Omega}\left\|\partial_i\varphi\right\|_{2,\Omega}.$$

Учитывая (2.10), (2.11), заключаем, что при фиксированном $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ при $k \to \infty$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой положительной величиной, откуда следует, что

$$\left|\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} + \int_\Omega u_\infty(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x}\right| = 0,$$

или

$$\int_\Omega g_i^\infty(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = -\int_\Omega u_\infty(\vec{x})\partial_i\varphi(\vec{x})d\vec{x},$$

что согласно (2.3) означает, что $u_\infty(\vec{x}) \in H^1(\Omega)$, причем $\partial_i u_\infty(\vec{x}) = g_i^\infty \in L_2(\Omega)$, $i = 1,\ldots,n$.

Покажем, что

$$\left\|u_\infty - u_k\right\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Действительно, из (2.10), (2.11) следует, что

$$\left\|u_\infty - u_k\right\|_{H^1(\Omega)} = \left\{\left\|u_\infty - u_k\right\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^n \left\|\partial_i u_k - g_i^\infty\right\|_{2,\Omega}^2\right\}^{1/2} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, фундаментальная последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ имеет в $H^1(\Omega)$ предел $u_\infty \in H^1(\Omega)$, что означает полноту пространства $H^1(\Omega)$.

Теорема Реллиха–Кондрашова ([20, 24, 25, 30]) утверждает, что пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$. Придадим этому утверждению следующую удобную для нас эквивалентную формулировку.

Теорема 2.4. *Для любой ограниченной в $H^1(\Omega)$ последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{u_{ki}\}_{i=1}^\infty$, сходящаяся в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $u_\infty \in L_2(\Omega)$:*

$$\left\|u_{ki} - u_\infty\right\|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } i \to \infty.$$

2.4. Концепция следов функций на границах области

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для каждой точки $\vec{x} \in \partial\Omega$ существуют числа $r > 0$ и $\varepsilon > 0$, зависящие от $\vec{x}$, и декартова система координат $(y_1,...,y_n)$, также зависящая от $\vec{x}$, со следующими свойствами. Если обозначить через $K = K(\vec{x}, r)$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\vec{x}$ и радиусом *r*, через Γ – поверхность $\partial\Omega \bigcap K$, а через Δ – проекцию поверхности Γ на гиперплоскость, задаваемую уравнением $y_n = 0$, то существует функция $a = a(y_1,...,y_{n-1})$, определенная на Δ, такая, что

а) $a \in C^{0,1}(\Delta)$, то есть удовлетворяет условию Липшица;

б) поверхность Γ задается уравнением $y_n = a(y_1,...,y_{n-1})$, то есть

$$\Gamma = \{(y_1,...,y_n) : y_n = a(y_1,...,y_{n-1}), (y_1,...,y_{n-1}) \in \Delta\};$$

в) множество

$$M_1 = \{(y_1,...,y_n) : (y_1,...,y_{n-1}) \in \Delta, a(y_1,...,y_{n-1}) - \varepsilon < y_n < a(y_1,...,y_{n-1})\}$$

является частью области Ω;

г) множество

$$M_2 = \{(y_1,...,y_n) : (y_1,...,y_{n-1}) \in \Delta, a(y_1,...,y_{n-1}) < y_n < a(y_1,...,y_{n-1}) + \varepsilon\}$$

находится вне множества $\overline{\Omega}$.

Множество всех областей вышеупомянутого типа обозначается символом $\mathcal{C}^{0,1}$. Это множество таких областей, границы $\partial\Omega$ которых описываются (локально) с помощью функций, удовлетворяющих условию Липшица, при этом область Ω лежит по одну сторону от $\partial\Omega$, а ее внешность – по другую (см. рис. 1).

Проиллюстрируем различные возможности при $n = 2$.

1) Если Ω – прямоугольник *ABCD* (см. рис. 2), то Ω принадлежит $\mathcal{C}^{0,1}$. Действительно, если точка $\vec{x} \in \partial\Omega$ лежит на любой из сторон, то поверхность Γ всегда будет описываться постоянной функцией, если подходящим образом выбрать систему координат. Для точек, лежащих на *CD*, выберем в качестве системы координат (y_1, y_2) исходную систему (x_1, x_2), для точек интервала *AB* систему координат выберем так, что $y_1 = -x_1$, $y_2 = -x_2$ для точек интервала *BC* – так, что $y_1 = -x_2$, $y_2 = x_1$ и т.д. Естественно, ни одна из упомянутых систем координат неприменима для вершин *A, B, C, D*. Выбор системы координат для точек *C* и *D* показан на рис. 2. Соответствующая поверхность Γ задается кусочно-линейными функциями.

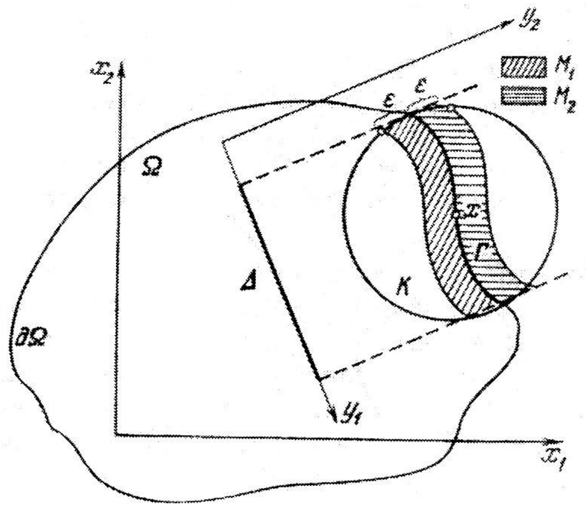

Рис. 1. Область класса $C^{0,1}$

2) Области, показанные на рис. 3, не принадлежат классу $C^{0,1}$. Граница области Ω_1 на самом деле может быть задана в окрестности точки $\vec{x}_0$ некоторой функцией, но эта функция не будет удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим область Ω_2, это круг с выброшенным отрезком *S*. В окрестности x_1 граница вообще не может быть задана функцией, в точках отрезка *S* это сделать можно, но соответствующие множества M_1 и M_2 будут частями области Ω_2.

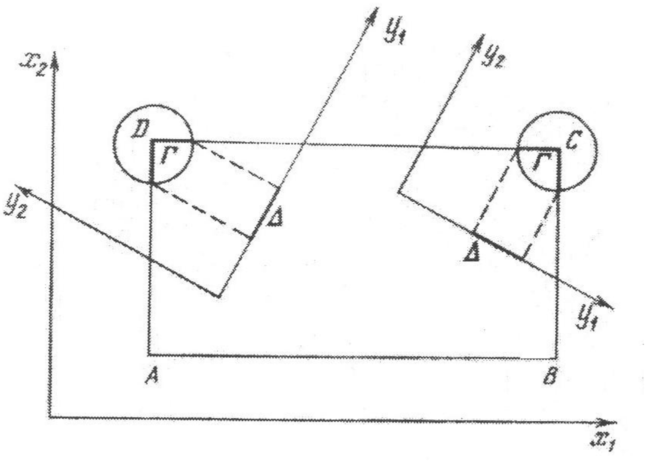

Рис. 2. Пример области класса $C^{0,1}$

Области типа $C^{0,1}$ вводятся среди других причин еще и потому, что для них возможно введение вектора внешней нормали к $\partial\Omega$ и поверхностного интеграла. Фактически функция $a \in C^{0,1}(\Delta)$, задающая часть Г границы $\partial\Omega$ почти всюду в Δ обладает производными $\dfrac{\partial a}{\partial y_j}$, $j = 1,2,...,n-1$. Поэтому внешняя нормаль к $\partial\Omega$ существует почти всюду на Г. Действительно, если $\vec{y} = \left(y_1,...,y_{n-1}, a(y_1,...,y_{n-1})\right)$ – некоторая точка на Г, в которой функция a имеет производные первого порядка, то вектор внешней нормали $\vec{v} = \left(v_1,...,v_n\right)$

к $\partial\Omega$ в точке $\vec{y}\in\Gamma$ имеет следующие компоненты

$$v_i=\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}\right)^2\right)^{-1/2}\frac{\partial a}{\partial y_i},\ \ i=1,...,n-1,\ \ v_n=\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (2.12)$$

Вектор внешней нормали определен не для всех точек $\vec{y}\in\Gamma$, а только для тех, для которых существуют частные производные функции a. Тем не менее, поскольку эти производные существуют почти всюду на Δ, вектор внешней нормали существует почти всюду на Г. Однако можно считать, что вектор $\vec{v}$ существует всюду на Г – достаточно доопределить его на множестве меры ноль, на котором он не задан формулой (2.12).

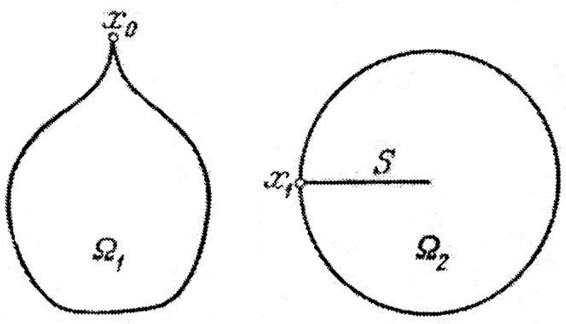

Рис. 3. Примеры областей, не принадлежащих классу $C^{0,1}$

Если u – непрерывная функция, определенная на $\partial\Omega$, то можно ввести поверхностный интеграл. Положим (по определению)

$$\int_\Gamma u(\vec{x})d\gamma=\int_\Delta u(y_1,...,y_{n-1},a(y_1,...,y_{n-1}))\left(1+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial y_j}(y_1,...,y_{n-1})\right)^2\right)^{-1/2}dy_1...dy_{n-1}.$$

Тогда интеграл $\int_\Gamma u(\vec{x})d\gamma$ может быть введен с помощью объединения подходящим образом участков Г, покрывающих границу $\partial\Omega$.

Определения областей класса $C^{0,1}$ присутствуют в различных источниках и могут отличаться по форме [17, 22, 30 и др.] . В настоящем пособии приведено определение, соответствующее [17].

Если функция $a(y_1,...,y_{n-1})$, определяющая поверхность, лежит в классе $C^m(\Delta)$, $m\geq 0$, то говорят о поверхности класса C^m.

При постановке граничных условий для функций $u\in H^1(\Omega)$ необходимо уточнять, в каком смысле понимается функция $u(\vec{x})$, $\vec{x}\in\Gamma$, поскольку для функций из $L_2(\Omega)$ не имеет смысла вопрос о значениях этих функций на множестве нулевой меры. Ответ на этот вопрос для функций из пространств Соболева основывается на концепции следов [17, 20, 30].

В основе этой концепции лежат следующие теоремы

Теорема 2.5. (о плотности [20, 30]). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое ограниченное множество класса* $C^{0,1}$. *Тогда пространство* $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *всюду плотно в* $H^1(\Omega)$.

Отметим, что для функций из $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ можно говорить об их сужении на границу Γ, и поэтому можно считать, что определен "граничный оператор", который каждой функции $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ ставит в соответствие ее сужение на границу Γ. Такой оператор будем называть *оператором следа функции* $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ *на границе* Γ и обозначать через γ_0: для функции $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ $\gamma_0 u$ – ее сужение на Γ.

Справедлива

Теорема 2.6. ([20, 30]) *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое ограниченное множество класса* $C^{0,1}$. *Тогда существует положительная постоянная* $C_\gamma(\Omega) > 0$, *зависящая только от области* Ω, *такая, что*

$$\| \gamma_0 u \|_{L_2(\Gamma)} \le C_\gamma(\Omega) \| u \|_{H^1(\Omega)} \qquad (2.13)$$

при всех $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Пусть теперь $u \in H^1(\Omega)$. Из теоремы 2.4. следует, что существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций $u_k \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такая, что

$$\| u - u_k \|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

откуда следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $H^1(\Omega)$:

$$\| u_k - u_l \|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k, l \to \infty. \qquad (2.14)$$

Из (2.13) следует, что

$$\| \gamma_0 u_k - \gamma_0 u_l \|_{L_2(\Gamma)} \le C_\gamma(\Omega) \| u_k - u_l \|_{H^1(\Omega)},$$

$$\| \gamma_0 u_k - \gamma_0 u_l \|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k, l \to \infty, \qquad (2.15)$$

то ест последовательность $\{\gamma_0 u_k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_2(\Gamma)$. Т.к. $L_2(\Gamma)$ – гильбертово (полное) пространство, то фундаментальная последовательность $\{\gamma_0 u_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предел в $L_2(\Gamma)$, который будем обозначать через $\gamma_0 u$ и называть *следом функции* $u \in H^1(\Omega)$ *на границе* Γ.

Корректность этого определения следует из теоремы

Теорема 2.7. *След функции* $\gamma_0 u \in L_2(\Gamma)$ *не зависит от выбора последовательности* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *функций* $u_k \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, *сходящейся к и по норме пространства* $H^1(\Omega)$, *и при этом оператор следа* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ *является линейным ограниченным оператором, удовлетворяющим (2.13) при всех* $u \in H^1(\Omega)$.

Более подробное обсуждение результатов, сформулированных в теоремах 2.4–2.6 содержится в [17, 20, 30]. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область класса* C^2. *Тогда* $\gamma_0\left(H^1(\Omega)\right) \equiv H^{1/2}(\partial\Omega)$ *– плотное подпространство в* $L_2(\partial\Omega)$ *и может быть снабжено нормой, индуцированной из* $H^1(\Omega)$ *с помощью* γ_0, *то есть* $\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$, *где функция* $u \in H^1(\Omega)$ *такова, что* $\gamma_0 u = v$.

Определим пространство $H_0^1(\Omega)$ как замыкание в $H^1(\Omega)$ пространства пробных функций $\mathcal{D}(\Omega)$. Очевидно, $\mathcal{D}(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$. По определению замыкания для любой функции $u \in H_0^1(\Omega)$ найдется последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ функций $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ такая, что

$$\| u - u_k \|_{H^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Но для любой функции $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\gamma_0 u_k \equiv 0$ на Г, и поэтому

$$\gamma_0 u = \lim_{k\to\infty} \gamma_0 u_k = 0.$$

Таким образом, для любой функции $u \in H_0^1(\Omega)$ справедливо $\gamma_0 u \equiv 0$.

Теорема 2.9. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое ограниченное множество класса* $C^{0,1}$. *Тогда для функции* $u \in H^1(\Omega)$

$$\gamma_0 u = 0 \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

2.5. Неравенства Фридрихса–Пуанкаре

Пусть Ω – ограниченная область класса $C^{0,1}$. Тогда справедливы следующие теоремы ([22, 30]).

Теорема 2.10. *Существует положительная постоянная* $C_I(\Omega) > 0$, *зависящая только от области* Ω *такая, что для всех* $u \in H_0^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} \le C_I(\Omega)\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x}.$$

Теорема 2.11 (неравенство Пуанкаре). *Существует положительная постоянная* $C_{II}(\Omega) > 0$, *зависящая только от области* Ω *такая, что для всех* $u \in H^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} \le C_{II}(\Omega)\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} + \frac{1}{m(\Omega)}\left(\int_\Omega u(\vec{x})d\vec{x}\right)^2.$$

Теорема 2.12 (неравенство Фридрихса). *Существует положительная постоянная* $C_{III}(\Omega) > 0$*, зависящая только от области* Ω *такая, что для всех* $u \in H^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega} u^2(\vec{x}) d\vec{x} \le C_{III}(\Omega) \left\{ \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \right)^2 d\vec{x} + \int_{\Gamma} u^2(\vec{x}) d\gamma \right\}.$$

Приведенные в теоремах 2.10–2.12 результаты более подробно обсуждаются в [20, 22, 26 и др.].

3. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

3.1. Обобщенная формулировка задачи

Задача Дирихле с однородными граничными условиями (краевая задача I рода) для уравнения Пуассона записывается в виде

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \tag{3.1}$$

$$u(\vec{x}) = 0, \; x \in \Gamma. \tag{3.2}$$

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (3.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{3.3}$$

С учетом того, что

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\partial_i u(\vec{x}) v(\vec{x}) \right) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(\vec{x}) \partial_i v(\vec{x}),$$

после применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x}) \right) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x}, \tag{3.4}$$

откуда, полагая $v(\vec{x}) = 0$ при $x \in \Gamma$, получим

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x}) \right) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{3.5}$$

Обобщенным решением задачи Дирихле называется функция $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству (3.5) при всех $v \in H_0^1(\Omega)$.

Выбор в обобщенной формулировке для обобщенного решения задачи Дирихле функционального пространства $H_0^1(\Omega)$ обеспечивает выполнение однородных граничных условий Дирихле (3.2) в смысле теории следов. То есть для учета граничных условий мы "погружаемся" в класс функций, удовлетворяющих этим граничным условиям. Граничные условия, которые учитываются при обобщенной формулировке с помощью выбора функционального пространства с функциями, удовлетворяющими граничным условиям, называются *главными граничными условиями* [9].

Обозначая

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \right) d\vec{x}, \; l(v) = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \tag{3.6}$$

сформулируем задачу (3.5) в виде: найти функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$a(u,v) = l(v) \tag{3.7}$$

при всех $v \in H_0^1(\Omega)$.

Задача о нахождении обобщенного решения задачи Дирихле с однородными граничными условиями эквивалентна соответствующей вариационной задаче

$$I(u) \to \min, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} - \int_\Omega f(\vec{x})u(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{3.9}$$

3.2. Существование и единственность обобщенного решения

Теорема 3.1. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in H_0^1(\Omega)$ *и при этом справедливо неравенство*

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \le M_I(\Omega) \| f \|_{2,\Omega}, \tag{3.10}$$

где $M_I(\Omega)$ *– некоторая положительная постоянная, зависящая только от области* Ω.

Доказательство. Покажем, что для задачи (3.7) (и, соответственно, (3.5)) выполнены все условия теоремы Лакса–Мильграма. Очевидно, что форма $a(u,v)$, определяемая (3.6), билинейна и симметрична. Установим ограниченность формы $a(u,v)$. Используя дискретное и интегральное неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$\left|a(u,v)\right| \le \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v\right| d\vec{x} \le \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^n \left(\partial_i u\right)^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^n \left(\partial_i v\right)^2\right\}^{1/2} d\vec{x} \le$$

$$\le \left\{\int_\Omega (\quad)^2 \sum_{i=1}^n \left(\partial_i u\right)^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\partial_i v\right)^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \le \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\left|a(u,v)\right| \le \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)},$$

и условие ограниченности билинейной формы $a(u,v)$ выполняется с постоянной $a^* = 1$.

Установим коэрцитивность билинейной формы $a(u,v)$. Согласно неравенству Фридрихса для некоторой постоянной $C_I(\Omega) > 0$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})\,d\vec{x} \le C_I(\Omega)\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x},$$

откуда

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})\,d\vec{x} + \int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} \le (1 + C_I(\Omega)) \int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x},$$

откуда получаем

$$a(u,u) \ge \frac{1}{1 + C_I(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)}. \qquad (3.11)$$

Таким образом, условие коэрцитивности выполнено с постоянной $a_* = (1 + C(\Omega))^{-1}$.

Ограниченность линейного функционала l, определенного соотношением (3.6), может быть установлена с помощью неравенства Коши–Буняковского:

$$|l(v)| \le \left\{ \int_\Omega f(\vec{x})\,d\vec{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega v(\vec{x})\,d\vec{x} \right\}^{1/2} \le \| f \|_{2,\Omega} \| v \|_{H^1(\Omega)}. \qquad (3.12)$$

Установленные свойства билинейной формы и линейного функционала позволяют применить теорему Лакса–Мильграма для доказательства существования и единственности решения обобщенной задачи (3.5). Учитывая, что это решение в силу (3.7) удовлетворяет равенству

$$a(u,u) = l(u),$$

и учитывая неравенства (3.11), (3.12), получим

$$\frac{1}{1 + C_I(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} \le \| f \|_{2,\Omega} \| u \|_{H^1(\Omega)},$$

откуда получаем (3.10) с постоянной $M_I(\Omega) = 1 + C_I(\Omega)$.

Учитывая результаты п.п. 1.2 заключаем, что справедлива

Теорема 3.2. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда при всех $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ вариационной задачи (3.8), (3.9), и это решение является обобщенным решением задачи Дирихле.*

3.3. Свойства разрешающего оператора

Теорема 3.1 позволяет определить линейный разрешающий оператор задачи (3.5), ставящий в соответствие функции $f \in L_2(\Omega)$ решение вспомогательной задачи (3.5) $u \in H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим этот оператор как

$$T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \qquad (3.13)$$

при этом , так как множество значений этого оператора $R(T) \subset H_0^1(\Omega)$, этот оператор может рассматриваться и как оператор

$$T : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega). \qquad (3.14)$$

Установленное в теореме 3.1 свойство (3.10) означает, что оператор (3.14) – ограниченный. Действительно, неравенство (3.10) можно записать в виде

$$\| Tf \|_{H^1(\Omega)} \le M_I(\Omega) \| f \|_{2,\Omega}. \qquad (3.15)$$

Отметим, что отсюда следует ограниченность оператора (3.13). Действительно, учитывая, что

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)},$$

можно записать

$$\| Tf \|_{L_2(\Omega)} \leq M_I(\Omega) \| f \|_{2,\Omega}. \qquad (3.16)$$

Рассмотрим теперь разрешающий оператор обобщенной задачи Дирихле (3.5) как оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Теорема 3.3. *T – самосопряженный оператор, то есть,*

$$(Tf, g)_{2,\Omega} = (f, Tg)_{2,\Omega} \text{ для любых } f, g \in L_2(\Omega) \qquad (3.17)$$

Доказательство. Пусть u – решение задачи (3.5) для уравнения (3.5) с правой частью $f \in L_2(\Omega)$, w – решение задачи (3.5) с правой частью $g \in L_2(\Omega)$, т. е. при всех $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \qquad (3.18)$$

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} w(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_\Omega g(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \qquad (3.19)$$

Подставляя в (3.18) $v = w$, а в (3.19) $v = u$, и вычитая из одного получившегося выражения другое, получим

$$\int_\Omega f(\vec{x}) w(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_\Omega g(\vec{x}) u(\vec{x})\, d\vec{x},$$

откуда, с учетом того, что $u = Tf$, $w = Tg$, получим (3.17). Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – вполне непрерывный.*

Доказательство. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(\Omega)$ – некоторая ограниченная последовательность в $L_2(\Omega)$, т.е. для некоторого $M > 0$ выполнено

$$\| f_k \|_{2,\Omega} \leq M \text{ при всех } k = 1,2... \qquad (3.20)$$

В силу неравенства (3.10) для решений задачи (3.5) $u_k \in H_0^1(\Omega)$, соответствующих $f = f_k$, справедливы неравенства

$$\| Tf_k \|_{H^1(\Omega)} = \| u_k \|_{H^1(\Omega)} \leq M_I(\Omega) \| f_k \|_{2,\Omega}$$

или

$$\| Tf_k \|_{H^1(\Omega)} \leq M \cdot M_I(\Omega) \text{ при } k = 1,2....$$

Следовательно, последовательность $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $H^1(\Omega)$ и, по теореме 2.4, содержит сходящуюся в $L_2(\Omega)$ подпоследовательность $\{Tf_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$, что доказывает вполне непрерывность оператора $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

4. Задача Неймана для уравнения Пуассона

4.1. Обобщенная формулировка задачи

Задача Неймана с однородными граничными условиями (краевая задача II рода) для уравнения Пуассона записывается в виде

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} = 0, \ x \in \Gamma. \tag{4.2}$$

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (4.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_\Omega \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{4.3}$$

С учетом того, что

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \big(\partial_i u(\vec{x}) v(\vec{x})\big) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(\vec{x}) \partial_i v(\vec{x}),$$

после применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_\Gamma v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int_\Omega \big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{4.4}$$

откуда, учитывая граничные условия (4.2), получим

$$\int_\Omega \big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{4.5}$$

Обобщенным решением задачи Неймана называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству (4.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Отметим, что задача Неймана как в классической формулировке (4.1), (4.2), так и в обобщенной формулировке (4.5) относятся к категории *некорректно поставленных задач* математической физики. Во-первых, очевидно, что если u – решение рассматриваемой задачи, то $u + \text{const}$ – также решение рассматриваемой задачи, т.е. решение задачи Неймана (4.1), (4.2) (или (4.5)) не единственно. Во-вторых, подставляя в (4.5) функцию $v(\vec{x}) \equiv 1$, получаем необходимое условие разрешимости задачи

$$\int_\Omega f(\vec{x})\, d\vec{x} = 0, \tag{4.6}$$

что говорит о том, что не при всех $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи Неймана существует.

В рассмотренной в п. 3 задаче Дирихле для уравнения Пуассона решение существовало при всех $f \in L_2(\Omega)$ и непрерывно зависело от *f*, что гарантировала оценка (3.6) и вытекающий из нее факт ограниченности (непрерывности) разрешающего оператора $T: L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. В нашем же случае если решение $u \in H^1(\Omega)$ существует для какой-то функции $f \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющей (4.6), то сколь угодно малое отклонение от функции f в $L_2(\Omega)$ может привести к нарушению необходимого условия разрешимости (4.6), что приведет вообще к отсутствию решения задачи.

В такой ситуации возникают следующие проблемы:

- определить необходимые и достаточные условия на правые части уравнения $f \in L_2(\Omega)$ для существования хотя бы одного решения задачи Неймана;
- описать многообразие решений задачи Неймана для всех $f \in L_2(\Omega)$, при которых множество решений непусто.

Замечание. В отличие от задачи Дирихле граничные условия Неймана (4.2) учитываются только в процессе вывода обобщенной формулировки (4.5) и никоим образом не отражаются на выборе функционального пространства $H^1(\Omega)$. Такого типа граничные условия принято называть *естественными граничными условиями*.

В такой ситуации, строго говоря, необходимо обосновывать, что найденное обобщенное решение действительно (в определенном смысле) удовлетворяет граничному условию Неймана (4.2). В настоящем пособии этот этап исследования опущен. Исчерпывающее исследование этого вопроса требует дополнительного углубления в теорию регулярности решений эллиптических задачи и в теорию следов [18, 19, 30 и др.].

4.2. Вспомогательная задача

Пусть $V(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \int\limits_\Omega u(\vec{x})\, d\vec{x} = 0 \right\}$. Справедлива

Лемма 4.1. $V(\Omega)$ – *гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$(u, v)_{V(\Omega)} = (u, v)_{2,\Omega} = \int\limits_\Omega u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x}\,. \qquad (4.7)$$

Доказательство. Очевидно, что $V(\Omega)$ – линейное пространство. Для доказательства полноты $V(\Omega)$ относительно скалярного произведения (4.7) достаточно убедиться в том, что $V(\Omega)$ – замкнутое подпространство в $L_2(\Omega)$. Пусть $u_\infty \in L_2(\Omega)$ – предельная точка множества $V(\Omega)$. Тогда существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ элементов $u_k \in V(\Omega)$ такая, что

$$\| u_\infty - u_k \|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \qquad (4.8)$$

Рассмотрим выражение

$$\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} \big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} u_k(\vec{x})\,d\vec{x}\,.$$

Последний интеграл равен нулю, т.к. $u_k \in V(\Omega)$. Поэтому применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x}\right| = \left|\int\limits_{\Omega} 1\cdot\big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)d\vec{x}\right| \le \left\{\int\limits_{\Omega} 1^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{\Omega} \big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2},$$

откуда

$$\left|\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x}\right| \le m(\Omega)\,\| u_\infty - u_k \|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{4.9}$$

где $m(\Omega)$ – мера множества Ω.Учитывая (4.8), заключаем, что функция $u_\infty \in L_2(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x} = 0\,,$$

что означает включение $u_\infty \in V(\Omega)$. Лемма доказана.

Пусть $V^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})\,d\vec{x} = 0 \right\}$. Справедлива

Лемма 4.2. $V^1(\Omega)$ – *гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$(u,v)_{V^1(\Omega)} = (u,v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} \big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big)d\vec{x}\,. \tag{4.10}$$

Доказательство. Очевидно, что $V^1(\Omega)$ – линейное пространства. Для доказательства полноты $V^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения (4.7) достаточно убедиться в том, что $V^1(\Omega)$ – замкнутое подпространство в $L_2(\Omega)$. Пусть $u_\infty \in L_2(\Omega)$ – предельная точка множества $V^1(\Omega)$. Тогда существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов $u_k \in V^1(\Omega)$ такая, что

$$\| u_\infty - u_k \|_{V^1(\Omega)} \to 0 \text{ при } k \to \infty\,. \tag{4.11}$$

Рассмотрим выражение

$$\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} \big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} u_k(\vec{x})\,d\vec{x}\,.$$

Последний интеграл равен нулю, т.к. $u_k \in V^1(\Omega)$. Поэтому применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x}\right| = \left|\int\limits_{\Omega} 1\cdot\big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)d\vec{x}\right| \le \left\{\int\limits_{\Omega} 1^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{\Omega} \big(u_\infty(\vec{x}) - u_k(\vec{x})\big)^2\,d\vec{x}\right\}^{1/2},$$

откуда

$$\left|\int_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x}\right| \le m(\Omega)\,\| u_\infty - u_k \|_{2,\Omega}. \tag{4.12}$$

Учитывая (4.8), заключаем, что функция $u_\infty \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} u_\infty(\vec{x})\,d\vec{x} = 0,$$

что означает включение $u_\infty \in V^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ определить функцию $u \in V^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{4.13}$$

при всех $v \in V^1(\Omega)$.

Обозначая

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x},\ l(v) = \int_{\Omega} f v\, d\vec{x}, \tag{4.14}$$

сформулируем вспомогательную задачу в виде: найти функцию $u \in V^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$a(u,v) = l(v) \tag{4.15}$$

при всех $v \in V^1(\Omega)$.

Соответствующая вариационная задача имеет вид

$$I(u) \to \min, \quad u \in V^1(\Omega), \tag{4.16}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x})\, u(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{4.17}$$

4.3. Существование и единственность решения вспомогательной задачи

Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{0,1}$. *Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in H^1(\Omega)$ *вспомогательной задачи (4.13), и при этом справедливо неравенство*

$$\| u \|_{V^1(\Omega)} \le M_{II}(\Omega)\, \| f \|_{2,\Omega}, \tag{4.18}$$

где $M_{II}(\Omega)$ *– некоторая положительная постоянная, зависящая только от области* Ω.

Доказательство. Рассмотрим задачу в виде (4.15). Поскольку, как показано в п. 3.2, линейный функционал $l : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ограничен, то в силу

(4.10) ограниченным будет и соответствующий функционал $l':V^1(\Omega)\to\mathbb{R}$, причем

$$\left|l(v)\right| \le \| f \|_{2,\Omega} \| v \|_{V^1(\Omega)}, \tag{4.19}$$

Очевидно, что билинейная форма (4.14) симметрична. Ограниченность этой формы доказывается так же, как и в задаче Дирихле (см. п. 3.2). Для доказательства ее коэрцитивности заметим, что из неравенства Пуанкаре в силу определения пространства $V(\Omega)$ (см. п. 4.2) следует, что $f \in L_2(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})\,d\vec{x} = C_{II}(\Omega)\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}\right)^2 d\vec{x}$$

при всех $u \in V(\Omega)$.

Рассуждая далее так же, как и при доказательстве коэрцитивности билинейной формы в задаче Дирихле (заменяя $C_I(\Omega)$ на $C_{II}(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ на $V^1(\Omega)$), получим

$$a(u,v) \ge \frac{1}{1+C_{II}(\Omega)} \| u \|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Установленные свойства билинейной формы и линейного функционала позволяют применить теорему Лакса–Мильграма для доказательства существования и единственности решения вспомогательной задачи (4.13). Учитывая, что это решение в силу (4.15) удовлетворяет равенству

$$a(u,u) = l(u),$$

и учитывая неравенства (4.19), (4.20), получим

$$\frac{1}{1+C_{II}(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} \le \| f \|_{2,\Omega} \| u \|_{V^1(\Omega)},$$

откуда получаем (4.18) с постоянной $M_{II}(\Omega) = 1 + C_{II}(\Omega)$.

Согласно результатам п. 1.2 задача о нахождении обобщенного решения задачи Дирихле с однородными граничными условиями эквивалентна вариационной задаче (4.16), (4.17) и справедлива

Теорема 4.2. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда при всех $f \in V(\Omega)$ существует единственное решение $u \in V^1(\Omega)$ вариационной задачи (4.24), (4.25), и это решение является обобщенным решением вспомогательной задачи.*

Теорема 4.1 позволяет определить линейный разрешающий оператор задачи (4.13), ставящий в соответствие функции $f \in L_2(\Omega)$ решение вспомогательной задачи (4.13) $u \in V^1(\Omega) \subset V(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим этот оператор как

$$T : L_2(\Omega) \to V(\Omega), \tag{4.21}$$

при этом учитывая, что множество значений этого оператора $R(T) \subset V^1(\Omega)$, этот оператор может рассматриваться и как оператор

$$T : L_2(\Omega) \to V^1(\Omega). \tag{4.22}$$

Установленное в теореме 4.1 свойство (4.18) означает, что оператор (4.21) – ограниченный. Действительно, неравенство (4.18) можно записать в виде

$$\| Tf \|_{V^1(\Omega)} \le M_{II}(\Omega) \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.23}$$

Отметим, что отсюда следует ограниченность оператора (4.23). Действительно, учитывая, что

$$\| u \|_{V(\Omega)} \le \| u \|_{V^1(\Omega)},$$

можно записать

$$\| Tf \|_{V(\Omega)} \le M_{II}(\Omega) \| f \|_{2,\Omega}. \tag{4.24}$$

Рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям п. 3.4, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.3. *Разрешающий оператор* $T : V(\Omega) \to V(\Omega)$ *вспомогательной задачи (4.13) – линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор.*

4.4. Теорема о разрешимости задачи Неймана

Справедлива

Теорема 4.4. *Пусть* Ω *– открытое ограниченное связное множество класса* $C^{0,1}$. *Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$, *удовлетворяющих (4.6) (*$f \in V(\Omega)$*), существует хотя бы одно обобщенное решение задачи Неймана (4.5). При этом решение задачи Неймана (4.5) определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, и в качестве частного решения может быть взято решение вспомогательной задачи (4.13).*

Доказательство. Покажем, что решение $u \in V^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ вспомогательной задачи при условии (4.6) является также решением задачи (4.5). Для этого достаточно показать, что решение $u \in V^1(\Omega)$ вспомогательной задачи (4.13) удовлетворяет равенству (4.13) и соответственно равенству (4.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Для произвольного $v \in H^1(\Omega)$ положим

$$\tilde{v}(\vec{x}) = v(\vec{x}) - \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{4.25}$$

Очевидно,

$$\int_\Omega \tilde{v}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_\Omega v(\vec{x})\, d\vec{x} - \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega v(\vec{x})\, d\vec{x} \int_\Omega 1\, d\vec{x} = 0,$$

поэтому $\tilde{v} \in V^1(\Omega)$ и для решения $u \in V^1(\Omega)$ вспомогательной задачи (4.13) справедливо равенство

$$\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\cdot \operatorname{grad}\tilde{v}(\vec{x})\right)d\vec{x}=\int_{\Omega} f(\vec{x})\tilde{v}(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \qquad (4.26)$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial\tilde{v}(\vec{x})}{\partial x_i}=\dfrac{\partial v(\vec{x})}{\partial x_i}$, $i=1,...,n$,

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})\tilde{v}(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x}-\int_{\Omega}\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\Omega} v(\vec{y})\,d\vec{y}\cdot f(\vec{x})\,d\vec{x}=$$

$$=\int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x}-\frac{1}{m(\Omega)}\int_{\Omega} v(\vec{y})\,d\vec{y}\int_{\Omega} f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Учитывая, что выполнено (4.6), заключаем, что

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})\tilde{v}(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \qquad (4.27)$$

Таким образом, решение вспомогательной задачи $u\in V^1(\Omega)$ удовлетворяет равенству (4.5) при всех $v\in H^1(\Omega)$ и, следовательно, является частным решением задачи (4.5).

Пусть некоторая функция $\tilde{u}\in V^1(\Omega)$ – также обобщенное решение задачи (4.5), а $u\in H^1(\Omega)$ – частное решение задачи (4.5), определенное выше как решение вспомогательной задачи (4.13). Тогда, очевидно, разность $\tilde{u}(\vec{x})-u(\vec{x})$ при всех $v\in H^1(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\tilde{u}(\vec{x})-u(\vec{x}))}{\partial x_i}\frac{\partial\tilde{v}(\vec{x})}{\partial x_i}\,d\vec{x}=0\,.$$

Подставляя в последнее равенство $v=\tilde{u}-u$, получаем

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(\tilde{u}(\vec{x})-u(\vec{x}))}{\partial x_i}\right)^2 d\vec{x}=0\,,$$

откуда следует, что $\tilde{u}-u=\text{const}$ при почти всех $\vec{x}\in\Omega$. Теорема 4.4 доказана.

Согласно результатам п. 1.2 задача о нахождении обобщенного решения задачи Неймана с однородными граничными условиями эквивалентна соответствующей вариационной задаче

$$I(u)\to\min,\quad u\in H^1(\Omega), \qquad (4.28)$$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i}\right)^2 d\vec{x}-\int_{\Omega} f(\vec{x})u(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \qquad (4.29)$$

Учитывая результаты п.п. 1.2 и 4.2, заключаем, что справедлива

Теорема 4.5. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда при всех $f\in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u\in H^1(\Omega)$ вариационной задачи (4.28), (4.29), и это решение является обобщенным решением задачи Неймана.

5. Задача Неймана для уравнения $-\Delta u + u = f$

5.1. Обобщенная формулировка задачи

Задача Неймана с однородными граничными условиями (краевая задача II рода) для уравнения $-\Delta u + u = f$ записывается в виде

$$-\Delta u + u = f\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \Gamma\,. \tag{5.2}$$

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (5.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} + \int_{\Omega} u(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})\,v(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \tag{5.3}$$

С учетом того, что

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\big(\partial_i u(\vec{x})v(\vec{x})\big) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(\vec{x})\partial_i v(\vec{x})\,,$$

после применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu}d\gamma + \int_{\Omega}\big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big)d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})\,v(\vec{x})\,d\vec{x}\,, \tag{5.4}$$

откуда, учитывая граничные условия (5.2), получим

$$\int_{\Omega} u(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x} + \int_{\Omega}\big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big)d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})\,v(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \tag{5.5}$$

Обобщенным решением задачи Неймана для уравнения (5.1) называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству (5.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Обозначая

$$l(v) = \int_{\Omega} fv\,d\vec{x}\,, \tag{5.6}$$

сформулируем обобщенную задачу в виде: найти функцию $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = l(v) \tag{5.7}$$

при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Соответствующая вариационная задача имеет вид

$$I(u) \to \min, \quad u \in H^1(\Omega) \tag{5.8}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\big(\operatorname{grad} u(\vec{x})\big)^2 d\vec{x} + \frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2(\vec{x})\,d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x})u(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \tag{5.9}$$

5.2. Существование и единственность решения

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{0,1}$*. Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in H^1(\Omega)$ *задачи (5.5), и при этом справедливо неравенство*

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} \le M(\Omega) \| f \|_{2,\Omega}, \tag{5.10}$$

где $M(\Omega)$ *– некоторая положительная постоянная, зависящая только от области* Ω.

Доказательство. Поскольку, как показано в п. 3.2, линейный функционал $l : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ограничен, причем

$$|l(v)| \le \| f \|_{2,\Omega} \| v \|_{H^1(\Omega)},$$

то по теореме Рисса (п. П3) существует единственный элемент $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющий (5.7) и, соответственно, (5.5), при этом в теореме 5.1 можно положить $M(\Omega) = 1$.

Согласно результатам п. 1.2 справедлива следующая теорема:

Теорема 5.2. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in H^1(\Omega)$ *вариационной задачи (5.8), (5.9), и это решение является обобщенным решением задачи Неймана.*

Определим линейный разрешающий оператор задачи (5.5), ставящий в соответствие функции $f \in L_2(\Omega)$ решение вспомогательной задачи (5.5) $u \in H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим этот оператор как

$$T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \tag{5.11}$$

при этом учитывая, что множество значений этого оператора $R(T) \subset H^1(\Omega)$, этот оператор может рассматриваться и как оператор

$$T : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega). \tag{5.12}$$

Так как неравенство (5.10) можно записать в виде

$$\| Tf \|_{H^1(\Omega)} \le M(\Omega) \| f \|_{L_2(\Omega)}, \tag{5.13}$$

оператор (5.12) – ограниченный. Отметим, что отсюда следует ограниченность оператора (5.11):

$$\| Tf \|_{L_2(\Omega)} \le M(\Omega) \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.14}$$

Теорема 5.3. *Разрешающий оператор* $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *вспомогательной задачи (5.5) – линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор.*

6. Задача Ньютона для уравнения Пуассона

6.1. Обобщенная формулировка задачи

Задача Ньютона с однородными граничными условиями (краевая задача III рода) для уравнения Пуассона записывается в виде

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}), \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} + hu(\vec{x}) = 0, \ x \in \Gamma. \tag{6.2}$$

где h – некоторая положительная постоянная.

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (6.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{6.3}$$

С учетом того, что

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \big(\partial_i u(\vec{x}) v(\vec{x})\big) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(\vec{x}) \partial_i v(\vec{x}),$$

после применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int_{\Omega} \big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{6.4}$$

откуда, учитывая граничные условия (6.2), получим

$$\int_{\Omega} \big(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\big) d\vec{x} + h \int_{\Gamma} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\gamma = \int_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{6.5}$$

Обобщенным решением задачи Ньютона для уравнения Пуассона называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству (6.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Замечание. Граничные условия Ньютона (6.2) учитываются только в процессе вывода обобщенной формулировки (6.5) и никоим образом не отражаются на выборе функционального пространства $H^1(\Omega)$, то есть являются *естественными граничными условиями*.

В такой ситуации, строго говоря, необходимо обосновывать, что найденное обобщенное решение действительно (в определенном смысле) удовлетворяет граничному условию Ньютона (6.2). В настоящем пособии этот этап исследования опущен. Исчерпывающее исследование этого вопроса требует дополнительного углубления в теорию регулярности решений эллиптических задачи и в теорию следов [7, 18, 30 и др.].

Обозначая

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad}u(\vec{x})\cdot\operatorname{grad}v(\vec{x})\right)d\vec{x}+h\int_{\Gamma}u(\vec{x})\,v(\vec{x})\,d\gamma\,, \qquad (6.6)$$

$$l(v)=\int_{\Omega}fv\,d\vec{x}\,, \qquad (6.7)$$

сформулируем рассматриваемую задачу в виде: найти функцию $u\in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$a(u,v)=l(v)\,, \qquad (6.8)$$

при всех $v\in H^1(\Omega)$.

Соответствующая вариационная задача имеет вид

$$I(u)\to\min,\quad u\in H^1(\Omega) \qquad (6.9)$$

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad}u(\vec{x})\right)^2+\frac{h}{2}\int_{\Gamma}u^2(\vec{x})\,d\gamma-\int_{\Omega}f(\vec{x})u(\vec{x})\,d\vec{x}\,. \qquad (6.10)$$

6.2. Существование и единственность решения

Справедлива

Теорема 6.1. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ класса $\mathcal{C}^{0,1}$. Тогда при всех $f\in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u\in H^1(\Omega)$ задачи (6.5) и при этом справедливо неравенство*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}\le M_{III}(\Omega)\,\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad (6.11)$$

где $M_{III}(\Omega)$ – некоторая положительная постоянная, зависящая только от области Ω.

Доказательство. Покажем, что для задачи (6.8) (и, соответственно, (6.5)) выполнены все условия теоремы Лакса–Мильграма. Очевидно, что форма $a(u,v)$, определяемая (6.6), билинейна и симметрична. Установим ограниченность формы $a(u,v)$. Используя дискретное и интегральное неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$|a(u,v)|\le\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\right)d\vec{x}+h\int_{\Gamma}|u\,v|\,d\gamma\le\int_{\Omega}|\operatorname{grad}u||\operatorname{grad}v|\,d\vec{x}+$$

$$+h\int_{\Gamma}|u\,v|\,d\gamma\le\left\{\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad}u\right)^2d\vec{x}\right\}^{1/2}\left\{\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad}v\right)^2d\vec{x}\right\}^{1/2}+$$

$$+h\int_{\Gamma}|\gamma u(\vec{x})|\cdot|\gamma v(\vec{x})|\,d\gamma\le\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}+h\,\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)}\|\gamma v\|_{L_2(\Gamma)}\,.$$

Применяя теорему о следах 2.6, получаем

$$|a(u,v)|\le\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}+hC_\gamma^2(\Omega)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}=$$

$$=(1+hC_\gamma^2(\Omega))\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

и условие ограниченности билинейной формы $a(u,v)$ выполняется с постоянной $a^* = 1 + hC_\gamma^2(\Omega)$.

Установим коэрцитивность билинейной формы $a(u,v)$. Согласно неравенству Фридрихса для некоторой постоянной $C_{III}(\Omega) > 0$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})d\vec{x} \le C_{III}(\Omega)\left\{\int_\Omega (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} + \int_\Gamma u^2(\vec{x})d\gamma\right\},$$

откуда

$$\int_\Omega u^2(\vec{x})\,d\vec{x} + \int_\Omega (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} \le (1 + C_{III}(\Omega))\left\{\int_\Omega (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} + \int_\Gamma u^2(\vec{x})d\gamma\right\} \le$$

$$\le \widetilde{C}(\Omega)\left\{\int_\Omega (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} + h\int_\Gamma u^2(\vec{x})d\gamma\right\},$$

где $\widetilde{C}(\Omega) = (1 + C_{III}(\Omega)) \cdot \max\{1, h^{-1}\}$, откуда получаем

$$a(u,v) \ge \frac{1}{\widetilde{C}(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{6.12}$$

Таким образом, условие коэрцитивности выполнено с постоянной $a_* = \widetilde{C}(\Omega)^{-1}$.

Так же, как в п. 3.2 может быть установлена ограниченность линейного функционала $l : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$:

$$|l(v)| \le \| f \|_{2,\Omega} \| v \|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.13}$$

Установленные свойства билинейной формы (6.6) и линейного функционала (6.7) позволяют применить теорему Лакса–Мильграма для доказательства существования и единственности решения задачи (6.5). Учитывая, что это решение в силу (6.8) удовлетворяет равенству

$$a(u,u) = l(u),$$

и учитывая неравенства (6.12), (6.13), получим

$$\frac{1}{\widetilde{C}(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} \le \| f \|_{2,\Omega} \| u \|_{H^1(\Omega)},$$

откуда получаем (6.11) с постоянной $M_{III}(\Omega) |= \widetilde{C}(\Omega)$.

Учитывая результаты п.1.2 заключаем, что задача о нахождении обобщенного решения задачи Ньютона с однородными граничными условиями эквивалентна вариационной задаче (6.9), (6.10) и справедлива

Теорема 6.2. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{0,1}$. *Тогда при всех* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение* $u \in H^1(\Omega)$ *вариационной задачи (6.9), (6.10), и это решение является обобщенным решением задачи Неймана.*

Теорема 6.1 позволяет определить линейный разрешающий оператор рассматриваемой задачи (6.5), ставящий в соответствие функции $f \in L_2(\Omega)$ решение вспомогательной задачи (6.5) $u \in H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Обозначим этот оператор как

$$T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \tag{6.14}$$

при этом учитывая, что множество значений этого оператора $R(T) \subset H^1(\Omega)$, этот оператор может рассматриваться и как оператор

$$T : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega). \tag{6.15}$$

Установленное в теореме 6.1 свойство (6.11) означает, что оператор (6.15) – ограниченный. Действительно, неравенство (6.11) можно записать в виде

$$\| Tf \|_{H^1(\Omega)} \leq M_{III}(\Omega) \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.16}$$

Отметим, что отсюда следует ограниченность оператора (6.14). Действительно, учитывая, что

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)},$$

можно записать

$$\| Tf \|_{L_2(\Omega)} \leq M_{III}(\Omega) \| f \|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.17}$$

Рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям п. 3.4, позволяют сформулировать следующую теорему

Теорема 6.3. *Разрешающий оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ задачи (6.5) – линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор.*

7. Обобщенная проблема собственных значений для задачи Дирихле

7.1. Формулировка проблемы

Классическая проблема собственных значений и собственных функций для задачи Дирихле формулируется как задача об определении значений числового параметра λ, при которых существуют нетривиальные классические решения $u(\vec{x})$ задачи

$$-\Delta u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \tag{7.1}$$

$$u(\vec{x}) = 0,\ x \in \Gamma. \tag{7.2}$$

и задача об определении этих нетривиальных решений, называемых *собственными функциями, отвечающими собственному значению* λ.

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (7.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} = \lambda \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7.3}$$

После применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int\limits_{\Gamma} v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{7.4}$$

откуда, полагая $v(\vec{x}) = 0$ при $x \in \Gamma$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7.5}$$

Собственными значениями обобщенной задачи Дирихле на собственные значения и собственные функции называются такие значения числового параметра λ, при которых существует нетривиальное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ (обобщенная собственная функция), удовлетворяющие равенству (7.5) при всех $v \in H_0^1(\Omega)$.

7.2. Свойства собственных значений

Действительность собственных значений

В обобщенной проблеме собственных значений и собственных функций требуется определить значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющее равенству

$$\int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int\limits_{\Omega} u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{7.6}$$

при всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число, то $u(\vec{x}) = \mathrm{Re}\, u(\vec{x}) + i\,\mathrm{Im}\, u(\vec{x})$ – вообще говоря, комплекснозначная функция, причем $\mathrm{Re}\, u \in H_0^1(\Omega)$, $\mathrm{Im}\, u \in H_0^1(\Omega)$. Применим к (7.5) операцию комплексного сопряжения

$$\int_\Omega \left(\mathrm{grad}\, \overline{u}(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\, v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \overline{\lambda} \int_\Omega \overline{u}(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \qquad (7.7)$$

Ввиду произвольности выбора $v \in H_0^1(\Omega)$ в равенствах (7.5), (7.6) можно заключить, в частности, что справедливы равенства

$$\int_\Omega \left(\mathrm{grad}\, u(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\, \overline{u}(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int_\Omega u(\vec{x}) \overline{u}(\vec{x})\, d\vec{x}, \qquad (7.8)$$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{grad}\, \overline{u}(\vec{x}) \cdot \mathrm{grad}\, u(\vec{x})\right) d\vec{x} = \overline{\lambda} \int_\Omega \overline{u}(\vec{x}) u(\vec{x})\, d\vec{x}. \qquad (7.9)$$

Вычитая из (7.8) равенство (7.9), заключаем, что

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_\Omega |u(\vec{x})|^2\, d\vec{x} = 0.$$

Поскольку u – собственная функция, то

$$\int_\Omega |u(\vec{x})|^2\, d\vec{x} > 0$$

и $\lambda = \overline{\lambda}$, а это означает, что $\lambda \in \mathbb{R}$. Если при этом комплекснозначная функция $u(\vec{x}) = \mathrm{Re}\, u(\vec{x}) + i\,\mathrm{Im}\, u(\vec{x})$, $\mathrm{Re}\, u \in H_0^1(\Omega)$, $\mathrm{Im}\, u \in H_0^1(\Omega)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ, то разделяя в (7.5) действительные и мнимые части, получим, что вещественные функции $\mathrm{Re}\, u$ $\mathrm{Im}\, u$ являются собственными функциями, отвечающими собственному значению λ. Поэтому достаточно ограничиться определением лишь вещественных собственных функций, отвечающих собственному значению λ. При этом любая комплексная собственная функция может быть получена как линейная комбинация вещественных собственных функций.

Таким образом, все собственные значения вещественны, и, не ограничивая общности, можно считать, что отвечающие им собственные функции также вещественны.

Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям

Теорема 7.1. *Пусть* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *– собственная функция, отвечающая собственному значению* λ_1, $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ *– собственная функция, отвечающая собственному значению* λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда*

$$\int_\Omega u_1(\vec{x}) u_2(\vec{x})\, d\vec{x} = 0. \qquad (7.10)$$

Доказательство. Имеем при всех $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u_1(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda_1 \int_\Omega u_1(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{7.11}$$

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u_2(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda_2 \int_\Omega u_2(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7.12}$$

Подставляя в (7.11) $v = u_2$, в (7.12) $v = u_1$ и составляя разность получившихся выражений, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Omega u_1(\vec{x}) u_2(\vec{x})\, d\vec{x} = 0,$$

откуда следует (7.10).

Положительность собственных значений

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ – собственное значение задачи

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int_\Omega u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7.13}$$

Здесь $u \in H_0^1(\Omega)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ, и равенство (7.13) выполняется при всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Положив в (7.13) $v = u$, получим

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x}}{\int_\Omega u(\vec{x})^2\, d\vec{x}}. \tag{7.14}$$

Отметим, что правая часть (7.14) неотрицательна, причем

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} > 0,$$

т.к. в противном случае если

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x} = 0,$$

получим, что $u(\vec{x}) = \text{const}$, и учитывая, что $u \in H_0^1(\Omega)$ (след функции u на границе Γ равен 0), получим, что $u(\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \Omega$, что приводит к противоречию, т.к. по определению u – нетривиальное решение (7.13).

Счётность множества собственных значений и собственных функций

Покажем, что каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций. Будем рассуждать от противного. Предположим, что некоторому собственному значению λ отвечает бесконечный (счётный) набор линейно независимых собственных векторов $\left\{u_\lambda^k\right\}_{k=1}^\infty$. Поскольку любая нетривиальная комбинация линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, является также собственным вектором, отвечающим собственному λ, то можно сказать, что бесконечная ортонормированная система $\left\{\tilde{u}_\lambda^k\right\}_{k=1}^\infty$ векторов, полученная в результате применения процедуры ортогонализации Грама–Шмидта (см. п. П2) к системе векторов $\{u_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$, также будет линейно независимым набором собственных векторов, отвечающих собственному значению λ. Но тогда для ограниченной последовательности $\{\widetilde{u}_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ $\left(\| u_\lambda^k \|_{2,\Omega}=1\right)$ последовательность $T\widetilde{u}_\lambda^k = \frac{1}{\lambda}\widetilde{u}_\lambda^k$ не будет иметь сходящейся подпоследовательности, т.к.

$$\left\|T\widetilde{u}_\lambda^k - T\widetilde{u}_\lambda^l\right\|^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left\|\widetilde{u}_\lambda^k - \widetilde{u}_\lambda^l\right\|^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left\|\widetilde{u}_\lambda^k\right\|_{L_2}^2 - 2\left(\widetilde{u}_\lambda^k, \widetilde{u}_\lambda^l\right)_{L_2} + \left\|\widetilde{u}_\lambda^l\right\|_{L_2}^2\right) = \frac{2}{\lambda^2},$$

и никакая подпоследовательность $\{T\widetilde{u}_\lambda^{k_i}\}_{i=1}^\infty$ не будет фундаментальной, что противоречит вполне непрерывности оператора $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Отметим, что впредь, не ограничивая общности, будем считать, что каждому собственному значению λ отвечает конечная система ортонормированных в $L_2(\Omega)$ векторов.

Справедлива

Теорема 7.2. *Для любого $R > 0$ существует не более чем конечное множество собственных значений λ таких, что $|\lambda| < R$.*

Доказательство. Предположим, что существует $R > 0$, для которого найдется бесконечный набор различных собственных значений $\{\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ таких, что $|\lambda^k| \le R$. Для каждого собственного значения λ^k возьмем по одному отвечающему ему нормированному в $L_2(\Omega)$ собственному вектору u^k ($k \in N$). Но тогда для ограниченной в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ $\left(\| u^k \|_{L_2(\Omega)}=1\right)$ последовательность $Tu^k = \frac{1}{\lambda_k}u^k$ не будет иметь сходящейся подпоследовательности, т.к

$$\left\|Tu^k - Tu^l\right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_l^2} \ge \frac{2}{R^2},$$

и никакая подпоследовательность $T\{u^{k_i}\}_{i=1}^\infty$ не будет фундаментальной, что противоречит вполне непрерывности оператора $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Следствие. *Множество собственных значений и собственных векторов не более чем счётно.*

Учитывая, что все собственные значения λ положительны, на основании теоремы 7.2 можно сделать вывод: если множество различных собственных значений бесконечно (счётно), то эти собственные значения могут быть расположены в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$$

и при этом $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

7.3. Теорема Гильберта–Шмидта и полнота системы собственных функций

С учетом определения разрешающего оператора $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, задача на собственные значения (7.5) может быть записана в виде

$$u = \lambda T u . \tag{7.15}$$

Поскольку доказано, что $\lambda > 0$, то положив $\mu = \lambda^{-1}$, уравнение (7.15) можно записать в виде

$$Tu = \mu u . \tag{7.16}$$

(в отличие от собственных значений λ числа $\mu = \lambda^{-1}$ будем называть *собственными числами*). Как было показано выше, $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого справедлива теорема Гильберта–Шмидта (п. П7). При этом ввиду конкретной задачи, порождающей разрешающий оператор $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, можно отметить следующие его свойства.

Лемма 7.1. *Если* $T(f) = 0$*, то* $f = 0$.

Доказательство. Напомним, что разрешающий оператор $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ определялся в п. 3.2 как оператор, ставящий в соответствие функции $f \in L_2(\Omega)$ решение $u \in H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ интегрального равенства

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} , \tag{7.17}$$

которое должно выполняться при всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Если при этом оказалось, что $T(f) = u = 0$, то в силу (7.17) это означает, что

$$\int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \text{ при всех } v \in H_0^1(\Omega). \tag{7.18}$$

Т.к. пространство пробных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$, то и пространство $H_0^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$, поэтому из (7.18) следует, что $f = 0$.

В данной конкретной ситуации из теоремы Гильберта–Шмидта следует, что любой элемент $f \in L_2(\Omega)$ записывается в виде

$$f = \sum c_k u_k , \tag{7.19}$$

где $\{u_k\}$ – система собственных векторов задачи (7.5).

Поскольку $L_2(\Omega)$ – бесконечномерное сепарабельное пространство, то возможность представления произвольного элемента $f \in L_2(\Omega)$ в виде ряда может осуществляться лишь в том случае, когда ортонормированная система $\{u_k\}$ счётна. Таким образом, справедлива

Лемма 7.2. *Множество* $\{\mu_k\}$ *различных собственных чисел задачи (7.5) счётно, при этом собственные числа могут быть расположены в порядке убывания*

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k > \ldots > 0, \qquad (7.20)$$

причем

$$\mu_k \to 0 \ \textit{при} \ k \to \infty.$$

Как отмечалось выше, каждому собственному числу μ_k соответствует набор из конечного числа линейно независимых собственных векторов; не ограничивая общности, можно считать этот набор ортонормированной системой. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу μ_k, называется *кратностью собственного числа* μ_k.

Таким образом, доказано, что ортонормированная система собственных векторов задачи (7.5) является полной системой (базисом) в $L_2(\Omega)$. Для записи разложения элементов из $L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по системе собственных векторов удобно пронумеровать все собственные векторы задачи (7.5). Для этого систему собственных чисел $\{\mu_k\}$ можно перенумеровать так, чтобы вместо цепочки (7.20) строгих неравенств была записана цепочка нестрогих неравенств

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k \geq \ldots > 0, \qquad (7.21)$$

в которой идущих подряд равенств может быть лишь конечное число и каждому собственному числу μ_k с номером k отвечает ровно один нормированных собственный вектор u_k. В цепочке (7.21) одно и то же собственное число может встречаться ровно столько раз, какова его кратность. Очевидно, по-прежнему

$$\mu_k \to 0 \ \text{при} \ k \to \infty,$$

и собственные векторы u_k и u_l с различными номерами k и l будут ортогональны в $L_2(\Omega)$. При этом для любого элемента $f \in L_2(\Omega)$ справедливо представление в виде ряда Фурье по ортонормированной системе $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \ \text{где} \ c_k = (f, u_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad (7.22)$$

и при этом будет выполнено равенство Парсеваля–Стеклова

$$\| f \|_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \qquad (7.23)$$

Кроме того, для любого $f \in L_2(\Omega)$ будет справедливо равенство

$$T(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k u_k, \ \text{где} \ c_k = (f, u_k)_{L_2(\Omega)}, \qquad (7.24)$$

Сформулируем соответствующие результаты для собственных значений λ и собственных функций $u \in H_0^1(\Omega)$ обобщенной проблемы собственных значений

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(x)) d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} \qquad (7.25)$$

(равенство должно выполняться при всех $v \in H_0^1(\Omega)$).

Теорема 7.3. *Существует счётный набор собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такой, что*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots, \tag{7.26}$$

причем $\lambda_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *каждому собственному значению* λ_k *с номером* k *соответствует ровно одна нормированная в* $L_2(\Omega)$ *собственная функция* $u_k \in H_0^1(\Omega)$; *для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *справедливо представление в виде сходящегося в* $L_2(\Omega)$ *ряда Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \text{ где } c_k = (f, u_k)_{2,\Omega}. \tag{7.27}$$

7.4. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Учитывая, что решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона при каждом $f \in L_2(\Omega)$ записывается с помощью разрешающего оператора в виде

$$u = Tf,$$

по теореме Гильберта–Шмидта (п. П7) его можно записать в виде сходящегося в $L_2(\Omega)$ ряда:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k u_k ,$$

где $c_k = (f, u_k)_{L_2(\Omega)}$, u_k – ортонормированная система собственных функций, или

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} c_k u_k . \tag{7.28}$$

Естественно обсудить особенности реализации метода Ритца для конечномерных подпространств $H_h = H^N \subset H$, где в качестве конечного базиса в H^N выступает система собственных функций $\{u_k\}_{k=1}^{N}$ задачи Дирихле. Как показано в п. 1.3, приближенное решение $u^N \in H^N$ при всех u_k, $k = 1,\ldots, N$ должно удовлетворять соотношению

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u^N(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} u_k(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) u_k(\vec{x})\, d\vec{x} . \tag{7.29}$$

Пусть

$$u^N(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} d_l^N u_l(\vec{x}), \tag{7.30}$$

где d_k^N – некоторые постоянные. Подставляя (7.30) в (7.29), получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l^N \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u_l(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} u_k(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) u_k(\vec{x})\, d\vec{x} \,. \tag{7.31}$$

В силу ортонормированности системы собственных функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u_l(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} u_k(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda_l \int_{\Omega} u_l(\vec{x}) u_k(\vec{x})\, d\vec{x} = \begin{cases} \lambda_k, & \text{при } \ l = k \\ 0, & \text{при } \ l \neq k. \end{cases} \tag{7.32}$$

Сопоставляя (7.31) и (7.32), получаем

$$d_k^N \lambda_k = (f, u_k)_{2,\Omega},$$

$$d_k^N = \frac{1}{\lambda_k} (f, u_k)_{2,\Omega} \,. \tag{7.33}$$

Соотношение (7.33) показывает, что коэффициенты d_k^N не зависят от N и приближенное решение u^N, определенное соотношение (7.30), совпадает с решением (7.28), определенным в результате применения метода Фурье.

8. Обобщенная проблема собственных значений для задачи Неймана

8.1. Формулировка проблемы

Классическая проблема собственных значений и собственных функций для задачи Неймана формулируется как задача об определении значений числового параметра λ, при которых существуют нетривиальные классические решения $u(\vec{x})$ задачи

$$-\Delta u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} = 0, \ x \in \Gamma. \tag{8.2}$$

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (8.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{8.3}$$

После применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{8.4}$$

откуда, с учетом граничных условий (8.2),

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{8.5}$$

Собственными значениями обобщенной задачи Неймана на собственные значения и собственные функции называются такие значения числового параметра λ, при которых существует нетривиальное решение $u \in H^1(\Omega)$ (обобщенная собственная функция), удовлетворяющие равенству (8.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

Отметим, что сформулированная задача на собственные значения и собственные функции эквивалентна задаче для интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} + \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = (\lambda + 1) \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{8.6}$$

8.2. Свойства собственных значений и собственных функций

Точно так же, как и в задаче Дирихле, может быть показано, что все собственные значения задачи (8.5) действительны и, не ограничивая общности, можно считать, что вещественны и соответствующие им собственные функции, которые будем считать нормированными в $L_2(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u^2(\vec{x})\, d\vec{x} = 1. \tag{8.7}$$

Так же, как и в задаче Дирихле, может быть показано, что собственные функции $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ортогональны в $L_2(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u_1(\vec{x}) u_2(\vec{x})\, d\vec{x} = 0; \tag{8.8}$$

при этом если в (8.5) положить $v = u$, то получим

$$\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x})\right)^2 d\vec{x}}{\int\limits_{\Omega} u^2(\vec{x})\, d\vec{x}},$$

откуда следует, что все собственные значения неотрицательны ($\lambda \geq 0$), причем, очевидно, $\lambda = 0$ – собственное значение, которому соответствует одна линейно независимая собственная функция

$$u(\vec{x}) = \text{const},$$

или, с учетом нормировки (8.7),

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{m(\Omega)}},$$

где $m(\Omega)$ – мера множества Ω.

Небольшая модификация рассуждений необходима для получения результатов о счётности множества собственных значений и отвечающих им собственных функций, аналогичных результатам п. 7.5. Очевидно, что задача об определении собственных значений и отвечающих им собственных функций эквивалентна задаче определения тех значений параметра λ, для которых существует хотя бы один нетривиальный элемент $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющий равенству

$$u = (1 + \lambda) T u. \tag{8.9}$$

Здесь $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – разрешающий оператор задачи об определении функции $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющей равенству

$$\int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

при всех $v \in H^1(\Omega)$. Эта задача была рассмотрена в п. 5 (задача (5.5)) и, в частности, было доказано, что разрешающий оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным линейным самосопряженным оператором.

Покажем, что каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций. Будем рассуждать от противного. Предположим, что некоторому собственному значению λ отвечает бесконечный набор линейно независимых собственных векторов $\left\{u_\lambda^k\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Поскольку любая нетривиальная комбинация линейно независимых собственных векторов отвечающих собственному значению λ является также собственным вектором, отвечающим собственному значению λ, то можно сказать, что бесконечная ортонормированная система $\{\widetilde{u}_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ векторов, полученная в результате применения процедуры ортогонализации Грама–Шмидта к системе векторов $\{u_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$, также будет линейно независимым набором собственных векторов, отвечающих собственному значению λ. Но тогда для ограниченной последовательности $\{\widetilde{u}_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ $\left(\| u_\lambda^k \|_{2,\Omega}=1\right)$ последовательность $T\widetilde{u}_\lambda^k = \dfrac{1}{1+\lambda}\widetilde{u}_\lambda^k$ не будет иметь сходящейся подпоследовательности, т.к.

$$\left\|T\widetilde{u}_\lambda^k - T\widetilde{u}_\lambda^l\right\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left\|\widetilde{u}_\lambda^k - \widetilde{u}_\lambda^l\right\|_{2,\Omega}^2 =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\left\|\widetilde{u}_\lambda^k\right\|_{2,\Omega}^2 - 2\left(\widetilde{u}_\lambda^k, \widetilde{u}_\lambda^l\right)_{2,\Omega} + \left\|\widetilde{u}_\lambda^l\right\|_{2,\Omega}^2\right) = \frac{2}{(1+\lambda)^2},$$

и никакая подпоследовательность $\left\{T\widetilde{u}_\lambda^{k_i}\right\}_{i=1}^\infty$ не будет фундаментальной. Это противоречит вполне непрерывности оператора $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Отметим, что впредь, не ограничивая общности, будем считать, что каждому собственному значению λ отвечает конечная система ортонормированных в $L_2(\Omega)$ векторов.

Справедлива

Теорема 8.1. *Для любого $R > 0$ существует не более чем конечное множество собственных значений λ таких, что $|\lambda| < R$.*

Доказательство. Предположим, что существует $R > 0$, для которого найдется бесконечный набор различных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ таких, что $|\lambda_k| \le R$. Для каждого собственного значения λ_k возьмем по одному отвечающему ему нормированному в $L_2(\Omega)$ собственному вектору u_k ($k \in N$). Но тогда для ограниченной в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ $\left(\| u_k \|_{2,\Omega}=1\right)$ последовательность $Tu_k = \dfrac{1}{1+\lambda_k}u_k$ не будет иметь сходящейся подпоследовательности, т.к

$$\left\|Tu_k - Tu_k\right\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{(1+\lambda_k)^2} + \frac{1}{(1+\lambda_l)^2} \ge \frac{2}{(1+R)^2},$$

и никакая подпоследовательность $\{Tu_{ki}\}_{i=1}^\infty$ не будет фундаментальной. Это противоречит вполне непрерывности оператора $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$

Следствие. *Множество собственных значений и собственных функций задачи Неймана для оператора Лапласа не более чем счётно.*

Учитывая, что все собственные значения неотрицательны ($\lambda \geq 0$), и $\lambda = 0$ – наименьшее собственное значение, на основании полученных в этом пункте результатов можно сделать вывод: если множество различных собственных значений бесконечно, то эти собственные значения могут быть расположены в порядке возрастания

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$$

и при этом $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

8.3. Теорема Гильберта–Шмидта и полнота системы собственных функций

С учетом определения разрешающего оператора $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, задача на собственные значения (8.5) может быть записана в виде

$$u = (1 + \lambda)Tu\,. \tag{8.10}$$

Поскольку доказано, что $\lambda \geq 0$, то положив $\mu = (1 + \lambda)^{-1}$, уравнение (8.10) можно записать в виде

$$Tu = \mu u\,. \tag{8.11}$$

(в отличие от собственных значений λ числа $\mu = (1 + \lambda)^{-1}$ будем называть *собственными числами оператора* *T*). Как было показано выше, $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого справедлива теорема Гильберта–Шмидта (п. П7). При этом для задачи (8.11) об определении собственных чисел и собственных векторов могут быть проведены рассуждения, полностью аналогичные п. 7.

Сформулируем соответствующие результаты для собственных значений λ и собственных функций $u \in H^1(\Omega)$ обобщенной проблемы собственных значений

$$\int\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int\limits_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} \tag{8.12}$$

(равенство должно выполняться при всех $v \in H^1(\Omega)$).

Теорема 8.2. *Существует счётный набор собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такой, что*

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots, \tag{8.13}$$

причем

$$\lambda_k \to \infty \text{ при } k \to \infty,$$

каждому собственному значению λ_k с номером k соответствует ровно одна нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция $u_k \in H^1(\Omega)$; для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ справедливо представление в виде сходящегося в $L_2(\Omega)$ ряда Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \text{ где } c_k = (f, u_k)_{2,\Omega}. \tag{8.14}$$

8.4. Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона

Напомним, что обобщенная постановка задачи Неймана для уравнения Пуассона заключается в определении функции $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющей равенству

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{8.15}$$

при всех $v \in H^1(\Omega)$. В разделе 4 было показано, что при всех $f \in V(\Omega) = \{w \in L_2(\Omega) : \int_\Omega w\, d\vec{x} = 0\}$ существует хотя бы одно обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$, причем это решение может быть записано в виде

$$u(\vec{x}) = c_1 + \tilde{u}(\vec{x}), \tag{8.16}$$

где c_1 – произвольная постоянная, $\tilde{u}$ – частное решение задачи (8.15), которое может быть найдено как решение вспомогательной задачи об определении функций $\tilde{u} \in V^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : \int_\Omega w\, d\vec{x} = 0\}$, удовлетворяющей равенству

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} \tilde{u}(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \int_\Omega f(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{8.17}$$

при всех $v \in V^1(\Omega)$.

Покажем, что

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} u_k(\vec{x}), \tag{8.18}$$

где $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций u_k, отвечающих собственным значениям λ_k, $c_k = (f, u_k)_{2,\Omega}$. Действительно, в силу (8.5) для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_\Omega \left(\operatorname{grad} u_k(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda_k \int_\Omega u_k(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{8.19}$$

при всех $v \in H^1(\Omega)$ и в частности, при всех $v \in V^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Отметим, что

$$u_k \in V^1(\Omega) \subset V(\Omega) \text{ при всех } k = 2,3, \ldots,$$

т.к. в силу ортонормированности системы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеем при $k = 2,3, \ldots$

$$0=\int_{\Omega} u_k(\vec{x})u_1(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_{\Omega} u_k(\vec{x})(m(\Omega))^{-1}\,d\vec{x}=(m(\Omega))^{-1}\int_{\Omega} u_k(\vec{x})\,d\vec{x},$$

или

$$\int_{\Omega} u_k(\vec{x})\,d\vec{x}=0 \text{ при всех } k=2,3,\ldots$$

Для каждого натурального $N = 2,3,\ \ldots$ определим $\widetilde{u}(\vec{x})=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k}u_k(\vec{x})$,

$$f^N(\vec{x})=\sum_{k=2}^{N} c_k u_k(\vec{x})\in V(\Omega), \tag{8.20}$$

$$u^N(\vec{x})=\sum_{k=2}^{N}\frac{c_k}{\lambda_k}u_k(\vec{x})\in V^1(\Omega), \tag{8.21}$$

где $c_k=(f,u_k)_{2,\Omega}$.

В силу (8.19) выполнено

$$\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} u_k(\vec{x})\cdot\operatorname{grad} v(\vec{x})\right)d\vec{x}=\frac{c}{\lambda}\int_{\Omega} u_k(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x},$$

или

$$\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} u^N(\vec{x})\cdot\operatorname{grad} v(\vec{x})\right)d\vec{x}=\int_{\Omega} f^N(\vec{x})v(\vec{x})\,d\vec{x} \tag{8.22}$$

при всех $v\in V^1(\Omega)$. Таким образом, при всех $u^N\in V^1(\Omega)$ – решение вспомогательной задачи вида (8.17), соответствующее $f^N\in V(\Omega)$. Согласно теореме 4.1 решение задачи (8.17) существует, единственно и может быть определено с помощью линейного ограниченного разрешающего оператора $T:V(\Omega)\to V^1(\Omega)$. Таким образом,

$$T(f)=\widetilde{u},\quad T(f^N)=u^N.$$

Поэтому из условия $f^N\to f$ в $L_2(\Omega)$ следует $u^N\to\widetilde{u}$ в $H^1(\Omega)$ (или в $V^1(\Omega)$), откуда следует возможность представления (8.18).

Таким образом, доказана справедливость следующей формулы для обобщенного решения $u\in H^1(\Omega)$ задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$u(\vec{x})=c_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k}u_k(\vec{x}), \tag{8.23}$$

где $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k}u_k(\vec{x})$ – сходящийся в $H^1(\Omega)$ ряд, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций u_k, отвечающих собственным значениям λ_k, $c_k=(f,u_k)_{2,\Omega}$.

9. Обобщенная проблема собственных значений для задачи Ньютона

9.1. Формулировка проблемы

Классическая проблема собственных значений и собственных функций для задачи Ньютона формулируется как задача об определении значений числового параметра λ, при которых существуют нетривиальные классические решения $u(\vec{x})$ задачи

$$-\Delta u(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} + hu(\vec{x}) = 0, \ x \in \Gamma, \tag{9.2}$$

где h – некоторая положительная постоянная.

Для получения обобщенной формулировки, действуя формально, умножим уравнение (9.1) на произвольную функцию $v(\vec{x})$ и проинтегрируем результат по области Ω:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{9.3}$$

С учетом того, что

$$\Delta u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\partial_i u(\vec{x}) v(\vec{x})\right) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(\vec{x}) \partial_i v(\vec{x}),$$

после применения теоремы Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Gamma} v(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} d\gamma + \int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{9.4}$$

откуда, в силу граничных условий (9.2),

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} + h \int_{\Gamma} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\gamma = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{9.5}$$

Собственными значениями обобщенной задачи Ньютона на собственные значения и собственные функции называются такие значения числового параметра λ, при которых существует хотя бы одно нетривиальное решение $u \in H^1(\Omega)$ (обобщенная собственная функция), удовлетворяющие равенству (9.5) при всех $v \in H^1(\Omega)$.

9.2. Свойства собственных значений и собственных функций

Точно так же, как и в задаче Дирихле, может быть показано, что все собственные значения задачи (9.5) действительны и, не ограничивая общности, можно считать, что вещественны и соответствующие им собственные функции, которые будем считать нормированными в $L_2(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u^2(\vec{x})\, d\vec{x} = 1. \qquad (9.6)$$

Так же, как и в задаче Дирихле, может быть показано, что собственные функции $u_1(\vec{x})$ и $u_2(\vec{x})$, отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ортогональны в $L_2(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} u_1(\vec{x}) u_2(\vec{x})\, d\vec{x} = 0; \qquad (9.7)$$

при этом если в (9.5) положить $v = u$, то получим

$$\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u(\vec{x}))^2 d\vec{x} + h\int\limits_{\Gamma} u^2(\vec{x})\, d\gamma}{\int\limits_{\Omega} u^2(\vec{x})\, d\vec{x}},$$

откуда следует, что все собственные значения положительны ($\lambda > 0$).

Так же, как в п. 7.2 может быть показано, что каждому собственному значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций и для любого $R > 0$ существует не более чем конечное множество собственных значений λ таких, что $|\lambda| < R$.

Следствие. *Множество собственных значений и собственных функций задачи Ньютона для оператора Лапласа не более чем счётно.*

Учитывая, что все собственные значения положительны ($\lambda > 0$), на основании полученных в этом пункте результатов можно сделать вывод: если множество различных собственных значений бесконечно, то эти собственные значения могут быть расположены в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$$

и при этом $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

9.3. Теорема Гильберта–Шмидта и полнота системы собственных функций

С учетом определения разрешающего оператора $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, задача на собственные значения (9.5) может быть записана в виде

$$u = \lambda T u. \qquad (9.8)$$

Поскольку доказано, что $\lambda > 0$, то положив $\mu = \lambda^{-1}$, уравнение (9.5) можно записать в виде

$$Tu = \mu u. \qquad (9.9)$$

Как было показано выше, $T: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор, для которого справедлива теорема Гильберта–Шмидта (п. П7). При этом для задачи (9.9) об определении собственных чисел и собственных векторов могут быть проведены рассуждения, полностью аналогичные п. 7.2.

Сформулируем соответствующие результаты для собственных значений λ и собственных функций $u \in H^1(\Omega)$ обобщенной проблемы собственных значений

$$\int_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(\vec{x}) \cdot \operatorname{grad} v(\vec{x})\right) d\vec{x} + h \int_{\Gamma} u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\gamma = \lambda \int_{\Omega} u(\vec{x}) v(\vec{x}) d\vec{x} \tag{9.10}$$

(равенство должно выполняться при всех $v \in H^1(\Omega)$).

Теорема 9.1. *Существует счётный набор собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такой, что*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots, \tag{9.11}$$

причем

$$\lambda_k \to \infty \text{ при } k \to \infty,$$

каждому собственному значению λ_k *с номером k соответствует ровно одна нормированная в* $L_2(\Omega)$ *собственная функция* $u_k \in H^1(\Omega)$*; для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *справедливо представление в виде сходящегося в* $L_2(\Omega)$ *ряда Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \text{ где } c_k = (f, u_k)_{2,\Omega}. \tag{9.12}$$

Отметим, что в цепочке неравенств (9.11) идущих подряд равенств может быть лишь конечное число.

9.4. Решение задачи Ньютона для уравнения Пуассона

Учитывая, что решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона при каждом $f \in L_2(\Omega)$ записывается с помощью разрешающего оператора в виде

$$u = Tf,$$

по теореме Гильберта–Шмидта (п. П7) его можно записать в виде сходящегося в $L_2(\Omega)$ ряда:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_k u_k,$$

где $c_k = (f, u_k)_{L_2(\Omega)}$, u_k – ортонормированная система собственных функций, или

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} c_k u_k.$$

10. Пространства вектор-функций

10.1. Пространства функций, связанные с операторами векторного анализа

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, L – некоторое пространство функций из Ω в $\mathbb{R}^1$. Через $\{L\}^n$ обозначается пространство вектор-функций $\vec{u}:\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\vec{u}=(u_1,...,u_n)$, таких, что $u_i \in L$ при $i=1,...,n$.

Если L – евклидово пространство, то скалярное произведение и норма в $\{L\}^n$ определяются следующим образом:

$$(\vec{u},\vec{v})_{L^n} = \sum_{i=1}^{n}(u_i,v_i)_L \,,\ \|\vec{u}\|_{L^n} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_L^2\right\}^{1/2}.$$

Если L – полное пространство, то, очевидно, $\{L\}^n$ также полное. Пространство $\{L\}^n$ сепарабельное тогда и только тогда, когда L сеперабельное.

В частности, справедливы следующие утверждения.

Лемма 10.1. *Пространство $\{L_2(\Omega)\}^n$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением*

$$(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_i v_i d\vec{x}\,,$$

причем $\|\vec{u}\|_{2,\Omega} = (\vec{u},\vec{u})_{2,\Omega}^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_i^2 d\vec{x}\right)^{1/2}.$

Лемма 10.2. *Для всех $\vec{u},\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^n$ справедливо неравенство*

$$\left|\int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x}\right| \le \|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\vec{v}\|_{2,\Omega}.$$

Для дифференцируемых функций $\vec{u}:\Omega \to \mathbb{R}^n$ основные дифференциальные операции векторного анализа записываются в виде

$$\operatorname{div}\vec{u} = \partial_1 u_1 + ... + \partial_n u_n\,,$$

при $n=3$

$$\operatorname{rot}\vec{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Справедливы тождества:

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{u}) = \varphi \operatorname{div}\vec{u} + (\vec{u}\cdot \operatorname{grad}\varphi), \tag{10.1}$$

$$\operatorname{div}[\vec{u}\times\vec{v}] = (\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u}) - (\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}), \tag{10.2}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{u}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{u} + [\operatorname{grad}\varphi\times\vec{u}], \tag{10.3}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0,\ \Delta\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi. \tag{10.4}$$

Пусть область Ω имеет липшицеву границу, на которой почти всюду определён вектор единичной нормали $\vec{\nu}$. Для функций $\vec{u}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ используются обозначения

$$u_\nu(\vec{x})=\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{\nu}(\vec{x}),\ \vec{u}_\nu(\vec{x})=u_\nu(\vec{x})\vec{\nu}(\vec{x}),\ \vec{u}_\tau(\vec{x})=\vec{u}(\vec{x})-\vec{u}_\nu(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Gamma.$$

Поскольку при $n=3$ $\vec{u}\times\vec{\nu}=\vec{u}_\tau\times\vec{\nu}$, $\vec{u}_\tau=\vec{\nu}\times[\vec{u}\times\vec{\nu}]$, то $\vec{u}_\tau(\vec{x})=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{u}(\vec{x})\times\vec{\nu}(\vec{x})=0$.

Для гладких функций $\vec{u}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ справедлива формула Гаусса - Остроградского (Стокса)

$$\int_\Omega \operatorname{div}\vec{u}\,d\vec{x}=\int_{\partial\Omega}(\vec{u}\cdot\vec{\nu})\,d\gamma. \tag{10.5}$$

Используя формулу Стокса и тождества (10.1), (10.2), получаем справедливость следующих формул для гладких $\vec{u},\vec{v}:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^1$

$$\int_\Gamma \varphi(\vec{u}\cdot\vec{\nu})\,d\gamma=\int_\Omega(\vec{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi)\,d\vec{x}+\int_\Omega\varphi\operatorname{div}\vec{u}\,d\vec{x}, \tag{10.6}$$

$$\int_\Gamma(\vec{u}_\tau\cdot\vec{v})\,d\gamma=\int_\Omega(\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})\,d\vec{x}-\int_\Omega(\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u})\,d\vec{x}. \tag{10.7}$$

На основании этих равенств будем говорить, что $\operatorname{div}\vec{u}=g\in L_2(\Omega)$ для функции $\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^n$, если

$$\int_\Omega g\varphi\,d\vec{x}=-\int_\Omega(\vec{u}\cdot\operatorname{grad}\varphi)\,d\vec{x}\ \text{при всех}\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega),$$

$\operatorname{rot}\vec{u}=\vec{h}\in\{L_2(\Omega)\}^3$ ($\Omega\subset\mathbb{R}^3$) для функции $\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3$ если

$$\int_\Omega(\vec{h}\cdot\vec{\varphi})\,d\vec{x}=\int_\Omega(\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{\varphi})\,d\vec{x}\ \text{при всех}\ \vec{\varphi}\in\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3.$$

Определим следующие пространства вектор-функций:

$$H(\operatorname{div};\Omega)=\left\{\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^n:\operatorname{div}\vec{u}\in L_2(\Omega)\right\},$$

$$H(\operatorname{rot};\Omega)=\left\{\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3:\operatorname{rot}\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3\right\},\ \text{если}\ n=3.$$

Лемма 10.3. $H(\operatorname{div};\Omega)$, $H(\operatorname{rot};\Omega)$ *– гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями*

$$(\vec{u},\vec{v})_{div,\Omega}=(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}+(\operatorname{div}\vec{u},\operatorname{div}\vec{v})_{2,\Omega},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{rot,\Omega}=(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}+(\operatorname{rot}\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v})_{2,\Omega}.$$

Доказательство. Аксиомы скалярного произведения, очевидно, выполняются. Проверим полноту пространств по соответствующим нормам

$$\|\vec{u}\|_{div,\Omega}=\left\{\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2+\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{2,\Omega}^2\right\}^{1/2},$$

$$\|\vec{u}\|_{rot,\Omega}=\left\{\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2+\|\operatorname{rot}\vec{u}\|_{2,\Omega}^2\right\}^{1/2}.$$

Пусть $\vec{u}_k$, $k=1,2,\ldots$, – фундаментальная последовательность в $H(\operatorname{div};\Omega)$. Тогда последовательности $\vec{u}_k$ и $\operatorname{div}\vec{u}_k$, $k=1,2,\ldots$, фундаментальны в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и

$L_2(\Omega)$ соответственно и, следовательно, сходятся к функциям $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $v \in L_2(\Omega)$. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega v\varphi d\vec{x} = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\vec{u}_k d\vec{x} = -\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (\mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{u}_k)d\vec{x} = -\int_\Omega (\mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{u})d\vec{x},$$

то есть $v = \mathrm{div}\vec{u}$, что и требовалось доказать. Для пространства $H(\mathrm{rot};\Omega)$ доказательство аналогично.

Теорема 10.1. [28]. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытая, ограниченная, липшицева область. Тогда множество вектор-функций, принадлежащих* $\{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$, *плотно в пространстве* $H(\mathrm{div};\Omega)$ *и, при* $n = 3$, *в* $H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Лемма 10.4. *Пространства* $H(\mathrm{div};\Omega)$, $H(\mathrm{rot};\Omega)$ *сепарабельны.*

Доказательство. Пусть $D = \{\omega_k\}$ – множество, плотное в $\{H^1(\Omega)\}^3$, $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)$, $\varepsilon > 0$, элемент $\vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ таков, что $\|\vec{u}-\vec{\varphi}\|_{div,\Omega} < \varepsilon$. Так как $\vec{\varphi} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, найдется элемент $\omega_k \in D$ такой, что

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{2,\Omega} + \sum_{i,j=1}^{3}\|\partial_i(\varphi_j - \omega_{kj})\|^2_{2,\Omega} < \varepsilon^2.$$

Таким образом,

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{div,\Omega} = \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|^2_{2,\Omega} + \sum_{i=1}^{3}\|\partial_i(\varphi_i - \omega_{ki})\|^2_{2,\Omega} < \varepsilon^2,$$

$$\|\vec{u}-\vec{\omega}_k\|_{div,\Omega} \le \|\vec{u}-\vec{\varphi}\|_{div,\Omega} + \|\vec{\varphi}-\vec{\omega}_k\|_{div,\Omega} < 2\varepsilon,$$

то есть D – плотное множество в $H(\mathrm{div};\Omega)$.

Сепарабельность пространства $H(\mathrm{rot};\Omega)$ доказывается аналогично.

Через $H_0(\mathrm{div};\Omega)$, $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ обозначаем замыкание множества $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\mathrm{div};\Omega)$ и в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ (при $n = 3$) соответственно.

Так как множество гладких функций всюду плотно в пространствах $H(\mathrm{div};\Omega)$, $H(\mathrm{rot};\Omega)$, используя равенства (10.6), (10.7), можно определить на границе области Ω нормальную компоненту функции из $H(\mathrm{div};\Omega)$ и тангенциальную – для функции из $H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Теорема 10.2. [28]. *Пусть* $\Omega \subset R^n$ *– открытое ограниченное множество класса* C^2. *Тогда существует непрерывный линейный оператор* $\gamma_\nu : H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$, *где* $H^{-1/2}(\partial\Omega) = \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$, *такой, что* $\gamma_\nu\vec{u} = u_\nu$ *для всех* $\vec{u} \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^n$. *Для всех* $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)\}$ *и* $w \in H^1(\Omega)$ *верна обобщенная формула Стокса*

$$\langle\gamma_\nu\vec{u}, \gamma_0 w\rangle = \int_\Omega (\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,w)d\vec{x} + \int_\Omega w\,\mathrm{div}\vec{u}d\vec{x}.$$

Ядро оператора γ_ν *совпадает с* $H_0(\mathrm{div};\Omega)$, *то есть*

$$H_0(\mathrm{div};\Omega)=\{\vec{u}\in H(\mathrm{div};\Omega): u_\nu=0\}.$$

Теорема 10.3. [10] *Пусть* $\Omega\subset R^3$ *– открытое ограниченное множество класса* C^2. *Тогда существует непрерывный линейный оператор* $\gamma_\tau: H(\mathrm{rot};\Omega)\to\left\{H^{-1/2}(\partial\Omega)\right\}^3$ *такой, что* $\gamma_\tau\vec{u}=\vec{u}_\tau$ *для* $\vec{u}\in\left\{C^1(\overline{\Omega})\right\}^3$. *Для всех* $\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *и* $\vec{w}\in\left\{H^1(\Omega)\right\}^3$ *верна формула*

$$\langle\gamma_\tau\vec{u},\gamma_0\vec{w}\rangle=\int_\Omega(\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{w})d\vec{x}-\int_\Omega(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{w})d\vec{x}.$$

Ядро оператора γ_τ *совпадает с* $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, *то есть*

$$H_0(\mathrm{rot};\Omega)=\{\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega):\vec{u}_\tau=0\}.$$

Из сформулированных теорем вытекают следующие утверждения:

Лемма 10.5. *Для всех* $\vec{u}\in H(\mathrm{div};\Omega)$, $p\in H^1(\Omega)$ *таких, что* $\vec{u}\in H_0(\mathrm{div};\Omega)$, *или* $p\in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega(\vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,p)d\vec{x}=-\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,d\vec{x}.$$

Лемма 10.6. *Для всех* $\vec{u}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)$

$$\int_\Omega(\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})d\vec{x}=\int_\Omega(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x}.$$

Лемма 10.7. *Пусть* $u\in H^1(\Omega)$, $\Delta u\in L_2(\Omega)$. *Тогда* $\partial u/\partial\nu\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *и для* $v\in H^1(\Omega)$

$$(\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,v)_{2,\Omega}=-(\Delta u,v)_{2,\Omega}+\langle\partial u/\partial\nu,\gamma_0 v\rangle.$$

В пространствах $H(\mathrm{div};\Omega)$ и $H(\mathrm{rot};\Omega)$ рассмотрим множества функций

$$K(\mathrm{div};\Omega)=\left\{\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3:\mathrm{div}\,\vec{u}=0\right\},$$
$$K(\mathrm{rot};\Omega)=\left\{\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3:\mathrm{rot}\,\vec{u}=0\right\}.$$

Лемма 10.8. $K(\mathrm{div};\Omega)$, $K(\mathrm{rot};\Omega)$ *– замкнутые подпространства в* $H(\mathrm{div};\Omega)$, $H(\mathrm{rot};\Omega)$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\vec{v}_n\in K(\mathrm{div};\Omega)$, $n=1,2,...$, сходится в $\{L_2(\Omega)\}^3$ к некоторому $\vec{v}$. Тогда, так как $\mathrm{div}\,\vec{v}_n=0$, последовательность сходится в $H(\mathrm{div};\Omega)$. Для любого $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi)d\vec{x}=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(\vec{v}_n\cdot\mathrm{grad}\,\varphi)d\vec{x}=0,$$

то есть $\vec{v}\in K(\mathrm{div};\Omega)$.

Для $K(\mathrm{rot};\Omega)$ доказательство аналогично.

Из леммы 10.8 следует, что $K(\mathrm{div};\Omega)$, $K(\mathrm{rot};\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами относительно скалярных произведений

$$(\vec{u},\vec{v})_{K(div,\Omega)}=(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega},\ (\vec{u},\vec{v})_{K(rot,\Omega)}=(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}.$$

Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ пространство, сопряженное $H_0^1(\Omega)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 10.9. [29] *Если* $\vec{f} \in \{H^{-1}(\Omega)\}^n$ *удовлетворяет условию*

$$\langle \vec{f}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ для всех } \vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^n \cap K(\mathrm{div};\Omega),$$

то найдется функция $p \in L_2(\Omega)$ *такая, что* $\vec{f} = \mathrm{grad}\, p$.

Лемма 10.10. *Функция* $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^n$ *лежит в* $K(\mathrm{div};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{\Omega} (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\varphi) d\vec{x} = 0$ *при всех* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Если $\int\limits_{\Omega} (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\varphi) d\vec{x} = 0$ при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, то это же справедливо для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то есть, по определению, $\mathrm{div}\vec{u} = 0$. Обратное вытекает из леммы 10.5.

Лемма 10.11. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Функция* $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ *лежит в* $K(\mathrm{rot};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_{\Omega} (\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\vec{v}) d\vec{x} = 0$ *при всех* $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Доказательство. Если $\int\limits_{\Omega} (\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\vec{v}) d\vec{x} = 0$ при всех $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, то это справедливо и для всех $\vec{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, то есть $\mathrm{rot}\vec{u} = 0$. Обратное вытекает из леммы 10.6.

Лемма 10.12. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Для всех* $p \in H^1(\Omega)$ *справедливо включение* $\mathrm{grad}\, p \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, *причем если* $p \in H_0^1(\Omega)$, *то* $\mathrm{grad}\, p \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Доказательство. Пусть $p_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $n = 1,2,...,$ – последовательность функций, сходящаяся в $H^1(\Omega)$ к функции $p \in H^1(\Omega)$. Тогда последовательность $\mathrm{grad}\, p_n$ сходится к $\mathrm{grad}\, p$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и для любой функции $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ выполнено

$$(\mathrm{grad}\, p_n \cdot \mathrm{rot}\vec{\psi}) = -p_n \,\mathrm{div}\mathrm{rot}\vec{\psi} + \mathrm{div}(p_n \mathrm{rot}\vec{\psi}),$$

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\, p_n \cdot \mathrm{rot}\vec{\psi}) d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} p_n (\mathrm{rot}\vec{\psi} \cdot \vec{\nu}) d\gamma = 0.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, получаем, что $\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{rot}\vec{\psi}) d\vec{x} = 0$, что по определению означает, что $\mathrm{grad}\, p \in K(\mathrm{rot};\Omega)$.

Если $p \in H_0^1(\Omega)$, то можно считать, что $p_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда $\mathrm{grad}\, p_n \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, p_n = 0$.

Следовательно, $\mathrm{grad}\, p$ является пределом в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ последовательности пробных функций $\mathrm{grad}\, p_n$ и поэтому $\mathrm{grad}\, p \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

10.2. Представления векторных полей в трехмерных областях

Любую вектор-функцию $\vec{u} \in \{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\}^3$ можно представить в виде [2]:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_{R^3}\frac{\operatorname{rot}\vec{u}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d\vec{y} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int_{R^3}\frac{\operatorname{div}\vec{u}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d\vec{y} \equiv \operatorname{rot}\vec{v} + \operatorname{grad} p \qquad (10.8)$$

где $\vec{v}$ и p – гладкие вектор и функция, убывающие на бесконечности как $1/|\vec{x}|^2$ с производными, убывающими как $1/|\vec{x}|^3$.

Обозначим через $G(\mathbb{R}^3)$ замыкание в $\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3$ множество векторов вида $\operatorname{grad} p(\vec{x})$, где p – гладкие функции, убывающие на бесконечности как $1/|\vec{x}|^2$ с производными, убывающими как $1/|\vec{x}|^3$, $J(\mathbb{R}^3)$ – замыкание в $\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3$ множества гладких векторов вида $\operatorname{rot}\vec{v}$, где порядок убывания на бесконечности $\vec{v}$ и его производных такой же, как для p.

Справедливы следующие утверждения [2].

Теорема 10.4.

$$\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3 = G \oplus J. \qquad (10.9)$$

Если $\vec{u} \in \{H^m(\mathbb{R}^3)\}^3$, *то и его проекции на G и J принадлежат* $\{H^m(\mathbb{R}^3)\}^3$, *причем их нормы в* $\{H^m(\mathbb{R}^3)\}^3$ *не превосходят* $\|\vec{u}\|_{m,2,R^3}$.

Теорема 10.5. *В G плотно множество* $\{\operatorname{grad}\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\}$, *а в J – множество* $\left\{\operatorname{rot}\vec{\psi} : \vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\}^3\right\}$.

Обозначим через D_1 замыкание множества $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ по норме

$$|\varphi|_{1,2} = \left\{\int_{R^3}(\operatorname{grad}\varphi)^2 d\vec{x}\right\}^{1/2}.$$

Для всякой гладкой финитной функции ψ справедливо неравенство

$$\int_{R^3}\frac{\psi^2(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d\vec{y} \le 4|\psi|_{1,2}^2.$$

Отсюда вытекает, что функции из D_1 локально квадратично суммируемы, а их производные принадлежат $L_2(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 10.6. *Всякий вектор* $\vec{u} \in J$ *однозначно представим в виде* $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$, *где* $\vec{v} \in \{D_1\}^3$, *причем* $|\vec{v}|_{1,2} = \|\vec{u}\|_{2,R^3}$.

Всякий вектор из G однозначно представим в виде $\operatorname{grad} p$, *где* $p \in D_1$ *и* $|p|_{1,2} = \|\operatorname{grad} p\|_{2,R^3}$.

Аналогичные результаты могут быть получены для областей в R^3, обладающих достаточно гладкими границами [28,29]. Ограничимся рассмотрением звездных множеств.

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно точки $\vec{y} \in \Omega$, если для всех $\vec{x} \in \Omega$ и $\tau \in [0,1]$ справедливо включение $\vec{y} + \tau(\vec{x} - \vec{y}) \in \Omega$.

Теорема 10.7. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– открытое подмножество, звездное относительно точки* $\vec{y} \in \Omega$, $\vec{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$. *Тогда при всех* $\vec{x} \in \Omega$ *справедливы представления*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{grad}\left(\int_0^1 \left(\vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})\right) d\tau\right) + \\ + \int_0^1 \tau\left[\operatorname{rot}\vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})\right] d\tau; \tag{10.10}$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{rot}\left(\int_0^1 \tau\left[\vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})\right] d\tau\right) + \\ + \int_0^1 \tau^2 (\vec{x} - \vec{y}) \operatorname{div}\vec{u}(\tau\vec{x} + (1-\tau)\vec{y}) d\tau. \tag{10.11}$$

С учётом обозначений $r = |\vec{x} - \vec{y}|$, $\xi = \tau r$, $\vec{s} = (\vec{x} - \vec{y})/r$, тождества (10.10), (10.11) можно записать соответственно в виде

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{grad}_{\vec{x}}\left\{\int_0^r \left(\vec{u}(\vec{y} + \xi\vec{s}) \cdot \vec{s}\right) d\xi\right\} + \frac{1}{r}\int_0^1 \xi\left[\operatorname{rot}\vec{u}(\vec{y} + \xi\vec{s}) \times \vec{s}\right] d\xi, \tag{10.12}$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{rot}_{\vec{x}}\left\{\int_0^r \xi\left[\vec{u}(\vec{y} + \xi\vec{s}) \times \vec{s}\right] d\xi\right\} + \frac{\vec{s}}{r^2}\int_0^1 \xi^2 \operatorname{div}\vec{u}(\vec{y} + \xi\vec{s}) d\xi. \tag{10.13}$$

Определим для каждого $m \geq 0$ и для функций $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $\vec{\varphi} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$ функции $Q_m(\varphi) : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $\vec{Q}_m(\vec{\varphi}) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ соответственно соотношениями

$$Q_m(\varphi)(\vec{x}) = r^{-m}\int_0^r \xi^m \varphi(\vec{y} + \xi\vec{s}) d\xi,$$

$$\vec{Q}_m(\vec{\varphi})(\vec{x}) = r^{-m}\int_0^r \xi^m \vec{\varphi}(\vec{y} + \xi\vec{s}) d\xi. \tag{10.14}$$

С использованием обозначений (10.14) тождества (10.12), (10.13) примут соответственно вид

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}) \cdot \vec{s}\right)(\vec{x}) + \left[\vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{u}) \times \vec{s}\right](\vec{x}), \tag{10.15}$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right](\vec{x}) + \vec{s}Q_2(\operatorname{div}\vec{u})(\vec{x}). \tag{10.16}$$

Справедлива

Лемма 10.13. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– открытое множество, звездное относительно точки* $\vec{y} \in \Omega$. *При всех* $m \geq 1$ *существует такая постоянная* $C_m(\Omega) > 0$, *зависящая только от m и области* Ω, *что для любых* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ *справедливо неравенство*

$$\|Q_m(\varphi)\|_{2,\Omega} \leq C_m(\Omega)\|\varphi\|_{2,\Omega}. \qquad (10.17)$$

Доказательство. Пусть

$$R_{\vec{s}}(\vec{y}) = \sup\{r \in R^1 : \vec{y} + r\vec{s} \in \Omega\}, \; R(\vec{y}) = \sup_{\vec{s} \in S} R_{\vec{s}}(\vec{y}),$$

(очевидно, $0 < R(\vec{y}) < d(\Omega)$, где $d(\Omega)$ – диаметр множества Ω), $d\vec{s}$ - элемент площади единичной сферы S.

Применяя неравенство Коши–Буняковского, видим, что

$$|Q_m(\varphi)(\vec{x})| \leq r^{-m}\int_0^r \xi^m |\varphi(\vec{y} + \xi\vec{s})| d\xi = r^{-m}\int_0^r \xi^{m-1}\xi|\varphi(\vec{y} + \xi\vec{s})| d\xi \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2m-1}\right)^{1/2} r^{-1/2}\left\{\int_0^r \xi^2 |\varphi(\vec{y} + \xi\vec{s})|^2 d\xi\right\}^{1/2}.$$

Далее,

$$\|Q_m(\varphi)\|^2_{2,\Omega} = \int_S d\vec{s} \int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} r^2 |Q_m(\varphi)(\vec{y} + r\vec{s})|^2 dr \leq$$

$$\frac{1}{2m-1}\int_S d\vec{s} \int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} r\int_0^r \xi^2 |\varphi(\vec{y} + \xi\vec{s})|^2 d\xi dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{2m-1}\int_S d\vec{s}\,\frac{R^2_{\vec{s}}(\vec{y})}{2}\int_0^{R_{\vec{s}}(\vec{y})} \xi^2 |\varphi(\vec{y} + \xi\vec{s})|^2 d\xi \leq \frac{1}{2m-1}\frac{R^2(\vec{y})}{2}\|\varphi\|^2_{2,\Omega}.$$

Обозначив $C_m(\Omega) = \left(\dfrac{1}{2m-1}\right)^{1/2}\dfrac{R(\vec{y})}{\sqrt{2}}$, получим (10.17).

Для функции $\vec{\varphi} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$ получаем, используя обратное неравенство Минковского, что

$$|Q_m(\vec{\varphi})(\vec{x})| \leq |Q_m(|\vec{\varphi}|)(\vec{x})|.$$

Применим лемму 10.13 к функции $|\vec{\varphi}| \in C(\overline{\Omega})$:

$$\|\vec{Q}_m(\vec{\varphi})\|_{2,\Omega} \leq \|Q_m(|\vec{\varphi}|)\|_{2,\Omega} \leq C_m(\Omega)\||\vec{\varphi}|\|_{2,\Omega} = C_m(\Omega)\|\vec{\varphi}\|_{2,\Omega}.$$

Установленные в лемме 10.13 неравенства показывают, что оператор Q_m, рассматриваемый как отображение из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ непрерывен на множестве $C(\overline{\Omega})$, плотном в $L_2(\Omega)$. Следовательно, его можно продолжить до некоторого линейного ограниченного оператора, обозначаемого в дальнейшем также через

Q_m, определенного на всем пространстве $L_p(\Omega)$. Оценка (10.17) остается справедливой и для этого оператора. Оператор $\vec{Q}_m : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3$ продолжается по непрерывности на пространство $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Теорема 10.8. *Для всех* $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *справедливо тождество*

$$\vec{u} = \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right] + \vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}). \tag{10.18}$$

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{div};\Omega)$. Согласно теореме 10.1, найдется последовательность $\{\vec{u}_k\} \subset \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ такая, что $\vec{u}_k \to \vec{u}$ при $k \to \infty$ в пространстве $H(\mathrm{div};\Omega)$, и, следовательно, в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Согласно оценке (10.17),

$$\left\|\vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) - \vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u})\right\|_{2,\Omega} \le \left\|Q_2(\mathrm{div}(\vec{u}_k - \vec{u}))\right\|_{2,\Omega} \le C_2(\Omega)\left\|\mathrm{div}(\vec{u}_k - \vec{u})\right\|_{2,\Omega},$$

то есть $\vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) \to \vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u})$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ при $k \to \infty$.

Из справедливого для всех $\vec{u}_k \in \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ тождества (10.16) и неравенства треугольника следует, что при любых k, l

$$\left\|\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_l) \times \vec{s}\right]\right\|_{2,\Omega} \le$$
$$\le \left\|\vec{u}_k - \vec{u}_l\right\|_{2,\Omega} + \left\|\vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_k) - \vec{s} Q_2(\mathrm{div}\,\vec{u}_l)\right\|_{2,\Omega},$$

значит, последовательность $\left\{\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right]\right\}$ фундаментальна в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и, таким образом, сходится к некоторому элементу $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$:

$$\left\|\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \vec{v}\right\|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

С другой стороны, для любой функции $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$

$$\left|\left\langle \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] - \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right], \vec{\psi}\right\rangle\right| = \left|\left\langle \left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k - \vec{u}) \times \vec{s}\right], \mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\rangle\right| \le$$
$$\le \left\|\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k - \vec{u}) \times \vec{s}\right]\right\|_{2,\Omega} \left\|\mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\|_{2,\Omega} \le C_1(\Omega)\left\|\vec{u}_k - \vec{u}\right\|_{2,\Omega}\left\|\mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right\|_{2,\Omega},$$

то есть $\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}_k) \times \vec{s}\right] \to \mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right]$ при $k \to \infty$.

В силу единственности предела, $\mathrm{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s}\right] = \vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и утверждение теоремы получаем с помощью предельного перехода.

Теорема 10.9. *Для всех* $\vec{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ *найдется такая функция* $Q(\vec{u}) \in H^1(\Omega)$, *что справедливо тождество*

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{grad}\, Q(\vec{u}) + \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\,\vec{u}) \times \vec{s}\right]. \tag{10.19}$$

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$. Согласно теореме 10.1, найдется последовательность $\{\vec{u}_k\} \subset \{\mathcal{D}(\overline{\Omega})\}^3$ такая, что $\vec{u}_k \to \vec{u}$ при $k \to \infty$ в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и, следовательно, $\vec{u}_k \to \vec{u}$, $\mathrm{rot}\,\vec{u}_k \to \mathrm{rot}\,\vec{u}$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Для всех $\vec{u}_k$ справедливо тождество (10.15):

$$\vec{u}_k(\vec{x}) = \mathrm{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right)(\vec{x}) + \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\,\vec{u}_k)\times\vec{s}\right](\vec{x}). \qquad (10.20)$$

По лемме 10.13, $\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\vec{u}) \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и

$$\left\| \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\vec{u}_k)\times\vec{s}\right] - \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\vec{u})\times\vec{s}\right] \right\|_{2,\Omega} \le C_1(p,\Omega)\left\|\mathrm{rot}\vec{u}_k - \mathrm{rot}\vec{u}\right\|_{2,\Omega},$$

то есть $\left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\,\vec{u}_k)\times\vec{s}\right] \to \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\,\vec{u})\times\vec{s}\right]$ при $k\to\infty$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Последовательность $\left\{\mathrm{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right)\right\}$, таким образом, сходится к некоторому элементу $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$:

$$\left\|\mathrm{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right) - \vec{v}\right\|_{2,\Omega} \to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Пусть $\vec{\psi} \in \left\{\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)\right\}^3$ такова, что $\mathrm{div}\vec{\psi} = 0$. Тогда

$$\langle \vec{v}, \vec{\psi} \rangle = \lim_{k\to\infty}\left\langle \mathrm{grad}\left(\vec{Q}_0(\vec{u}_k)\cdot\vec{s}\right), \vec{\psi}\right\rangle = 0.$$

Применяя лемму 10.9 получим, что $\vec{v} = \mathrm{grad}\,Q(\vec{u})$, где функция $Q(\vec{u})$ определена с точностью до аддитивной константы и лежит в $L_2(\Omega)$ согласно неравенству Пуанкаре и, следовательно, $Q(\vec{u}) \in H^1(\Omega)$.

Равенство (10.19) устанавливаем, переходя к пределу в (10.20)

Теоремы 10.8, 10.9 имеют следующие очевидные следствия.

Лемма 10.14. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K(\mathrm{rot};\Omega) = \left\{\mathrm{grad}\,w, w \in H^1(\Omega)\right\}.$$

Лемма 10.15. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K(\mathrm{div};\Omega) = \left\{\mathrm{rot}\,\vec{w}, \vec{w} \in H(\mathrm{rot};\Omega)\right\}.$$

10.3 Основные неравенства для ограниченных областей

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное множество с регулярной границей, звездное относительно некоторой точки.

Теорема 10.10. *Существует такая постоянная* $C_1 > 0$*, зависящая только от области* Ω*, что для любых* $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{u} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)$*, справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x}\right| \le C_1\left(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{div}\vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\mathrm{div}\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{v}\|_{2,\Omega}\right). \quad (10.21)$$

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{u} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Согласно теореме 10.9, существует функция $Q(\vec{v}) \in H^1(\Omega)$ такая, что

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\,Q(\vec{v}) + \left[\vec{Q}_1(\mathrm{rot}\,\vec{v})\times\vec{s}\right],$$

при этом, ввиду неравенства Пуанкаре, найдется число C^* такое, что

$$\left\| Q(\vec{v}) - C^* \right\|_{2,\Omega} \le C_{II}(\Omega) \|\operatorname{grad} Q(\vec{v})\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом,

$$\left\| Q(\vec{v}) - C^* \right\|_{2,\Omega} \le C_{II}(\Omega)\Big(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + \left\| \vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{v}) \right\|_{2,\Omega} \Big) \le$$
$$\le C_{II}(\Omega)\big(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + C_1(\Omega)\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega} \big).$$

Получаем, следовательно, используя лемму 10.5:

$$\left| \int_\Omega (\vec{v}\cdot\vec{u}) d\vec{x} \right| \le \left| \int_\Omega \big(Q(\vec{v}) - C^* \big) \operatorname{div}\vec{u}\, d\vec{x} \right| + \int_\Omega \left| \vec{Q}_1(\operatorname{rot}\vec{v}) \right| |\vec{u}| d\vec{x} \le$$
$$\le C_{II}(\Omega)\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{2,\Omega}\big(\|\vec{v}\|_{2,\Omega} + C_1(\Omega)\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega} \big) + C_1(\Omega)\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\vec{u}\|_{2,\Omega}.$$

Положив $C_1 = \max\{C_{II}(\Omega), C_1(\Omega), C_{II}(\Omega)C_1(\Omega)\}$, получаем неравенство (10.21).

Теорема 10.11. *Существует такая постоянная* $C_2 > 0$*, зависящая только от области* Ω*, что для любых* $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$*,* $\vec{u} \in H(\operatorname{div};\Omega)$*, справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v}) d\vec{x} \right| \le C_2\big(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{2,\Omega} \big). \qquad (10.22)$$

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{u} \in H(\operatorname{div};\Omega)$. По теореме 10.8,

$$\vec{u} = \operatorname{rot}\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s} \right] + \vec{s} Q_2(\operatorname{div}\vec{u}),$$

при этом, ввиду леммы 10.13, $\left[\vec{Q}_1(\vec{u}) \times \vec{s} \right] \in H(\operatorname{rot};\Omega)$.

Применяя лемму 10.6 и оценки (10.17), получаем

$$\left| \int_\Omega (\vec{v}\cdot\vec{u}) d\vec{x} \right| \le \int_\Omega \left| \vec{Q}_1(\vec{u}) \right| |\operatorname{rot}\vec{v}| d\vec{x} + \int_\Omega \left| Q_2(\operatorname{div}\vec{u}) \right| |\vec{v}| d\vec{x} \le$$
$$\le C_1(\Omega)\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega} + C_2(\Omega)\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\vec{v}\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом, справедливо неравенство (10.22), где $C_2 = C_1(\Omega)$.

Теорема 10.12. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– произвольная ограниченная область. Найдётся такая постоянная* $C_3 > 0$*, зависящая только от области* Ω*, что для любых* $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$*,* $\vec{u} \in H_0(\operatorname{div};\Omega)$*, справедливо неравенство*

$$\left| \int_\Omega (\vec{u}\cdot\vec{v}) d\vec{x} \right| \le C_3\big(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{rot}\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{2,\Omega} \big). \qquad (10.23)$$

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{u} \in H_0(\operatorname{div};\Omega)$, последовательности $\vec{\psi}_m$, $\vec{\varphi}_m \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $m = 1,2,\ldots$, сходятся к $\vec{u}$ в $H(\operatorname{div};\Omega)$ и к $\vec{v}$ в $H(\operatorname{rot};\Omega)$ соответственно. Пусть $B_R \subset \mathbb{R}^3$ – некоторый открытый шар, содержащий $\overline{\Omega}$. Продолжая функции $\vec{\psi}_m$, $\vec{\varphi}_m$ нулём вне Ω, получаем, применяя теорему 10.11:

$$\left|\int_{\Omega}(\vec{\varphi}_m\cdot\vec{\psi}_m)d\vec{x}\right|=\left|\int_{B_R}(\vec{\varphi}_m\cdot\vec{\psi}_m)d\vec{x}\right|\le C_3\left(\|\vec{\psi}_m\|_{2,B_R}\|\mathrm{rot}\,\vec{\varphi}_m\|_{2,B_R}+\|\vec{\varphi}_m\|_{2,B_R}\|\mathrm{div}\,\vec{\psi}_m\|_{2,B_R}\right)=$$

$$=C_3\left(\|\vec{\psi}_m\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{\varphi}_m\|_{2,\Omega}+\|\vec{\varphi}_m\|_{2,\Omega}\|\mathrm{div}\,\vec{\psi}_m\|_{2,\Omega}\right),$$

где $C_3=C_1(B_R)$. Переходя к пределу, получаем (10.23).

Положив в неравенствах (10.21), (10.22) $\vec{v}=\vec{u}$, получим оценки нормы функции $\vec{u}$ через нормы ее ротора и дивергенции.

Теорема 10.13. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *– ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная* $C_4>0$*, зависящая только от области* Ω*, что для всех* $\vec{u}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap H(\mathrm{div};\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\le C_4\left(\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}+\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}\right). \tag{10.24}$$

Доказательство. Положим в неравенстве (10.22) $\vec{v}=\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2\le C_2\left(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}+\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}\right).$$

Умножив последнее неравенство на $\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^{-1}$, получим оценку (10.24), $C_4=C_2$.

Теорема 10.14. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *– ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная* $C_5>0$*, зависящая только от области* Ω*, что для всех* $\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *справедлива оценка*

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\le C_5\left(\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}+\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}\right). \tag{10.25}$$

Доказательство. Положим в неравенстве (10.21) $\vec{v}=\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2\le C_1\left(\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}+\|\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}+\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}\right).$$

Обозначая $\|\vec{u}\|_{2,\Omega}=z$, $\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}=a$, $\|\mathrm{div}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}=b$, получаем

$$z^2\le zC_1(a+b)+C_1ab,$$

откуда

$$z\le\frac{1}{2}\left(C_1(a+b)+\sqrt{C_1^2(a+b)^2+4C_1ab}\right)\le\frac{a+b}{2}\left(C_1+\sqrt{C_1^2+C_1}\right)<\frac{a+b}{2}\left(2C_1+\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, справедлива оценка (10.25), где $C_5=C_1+1/4$.

10.4. Ортогональные разложения векторных полей

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ - ограниченная область с регулярной границей. Обозначаем через $K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega)$ ортогональное дополнение к $K(\mathrm{div};\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^n$, через $K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$ – ортогональное дополнение к $K(\mathrm{rot};\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Лемма 10.16. $K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *множества*

$$X = \left\{\mathrm{rot}\,\vec{\varphi} : \vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3\right\}.$$

Доказательство. По определению, $\int\limits_{\Omega}(\vec{v}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\varphi})d\vec{x} = 0$ для любых $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, следовательно, $X \subseteq K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$, это же справедливо для его замыкания.

Обратно, предположим, найдется элемент $\vec{w} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$ такой, что $\int\limits_{\Omega}(\vec{w}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\varphi})d\vec{x} = 0$ для всех $\vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, то есть $\vec{w}$ ортогонален *X*. Тогда по определению $\mathrm{rot}\,\vec{w} = 0$, следовательно, $\vec{w} \in K(\mathrm{rot};\Omega) \bigcap K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega) = \{0\}$.

Лемма 10.17. $K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^n$ *множества*

$$Y = \{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Доказательство. По определению, $\int\limits_{\Omega}(\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\varphi)d\vec{x} = 0$ для любых $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, следовательно, $Y \subseteq K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega)$, это же справедливо для его замыкания.

Обратно, пусть $\vec{w} \in K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega)$ ортогонален элементам *Y*, то есть $\int\limits_{\Omega}(\vec{w}\cdot\mathrm{grad}\varphi)d\vec{x} = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда, по определению, $\mathrm{div}\,\vec{w} = 0$, то есть $\vec{w} \in K(\mathrm{div};\Omega) \bigcap K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega) = \{0\}$.

Лемма 10.18. $K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega)$ *совпадает со множеством*

$$\left\{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Доказательство. Обозначим множество $\left\{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in H_0^1(\Omega)\right\}$ через $\widetilde{Y}$. Достаточно показать, что со множеством $\widetilde{Y}$ совпадает замыкание в $\{L_2(\Omega)\}^n$ множества $Y = \{\mathrm{grad}\,\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$.

Пусть $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Тогда найдется последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $k = 1,2,\ldots$, сходящаяся к φ в $H^1(\Omega)$. В частности, последовательность $\mathrm{grad}\,\varphi_k \in Y$ сходится в $\{L_2(\Omega)\}^n$ к $\mathrm{grad}\,\varphi$.

Обратно, пусть последовательность $\mathrm{grad}\,\varphi_k \in Y$, $k = 1,2,\ldots$, сходится в $\{L_2(\Omega)\}^n$ к некоторому $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^n$. Тогда, ввиду неравенства Фридрихса, для любых *k*, *m*

$$\int\limits_{\Omega}(\varphi_k - \varphi_m)^2\,d\vec{x} \le C_I(\Omega)\int\limits_{\Omega}(\mathrm{grad}(\varphi_k - \varphi_m))^2\,d\vec{x},$$

следовательно, последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$сходится в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $\varphi \in L_2(\Omega)$. Для любой $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^n$

$$\int_\Omega \varphi \operatorname{div}\vec{\psi} d\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k \operatorname{div}\vec{\psi} d\vec{x} = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\operatorname{grad}\varphi_k \cdot \vec{\psi}) d\vec{x} = -\int_\Omega (\vec{v} \cdot \vec{\psi}) d\vec{x}.$$

По определению, $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi$, φ – предел в $H^1(\Omega)$ функций из $\mathcal{D}(\Omega)$, то есть $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и $\vec{v} \in \widetilde{Y}$.

Поскольку неравенства (10.21), (10.22) оценивают скалярные произведения функций в $\{L_2(\Omega)\}^3$, из них следуют известные условия ортогональности соленоидальных и потенциальных векторных полей.

Лемма 10.19. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K^\perp(\operatorname{div};\Omega) = K(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot};\Omega).$$

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in K^\perp(\operatorname{div};\Omega)$. Согласно лемме 10.18, $\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. По лемме 10.12 тогда $\vec{u} \in K(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot};\Omega)$.

Обратно, пусть $\vec{u} \in K(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $\vec{v}$ – произвольный элемент из $K(\operatorname{div};\Omega)$. Из неравенства (10.22) следует, что $\int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = 0$, то есть $\vec{u} \in K^\perp(\operatorname{div};\Omega)$.

Лемма 10.20. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда*

$$K^\perp(\operatorname{rot};\Omega) = K(\operatorname{div};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega).$$

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in K^\perp(\operatorname{rot};\Omega)$. Согласно лемме 10.16, найдется последовательность $\vec{\varphi}_m \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $m = 1,2,...$, такая, что $\|\vec{u} - \operatorname{rot}\vec{\varphi}_m\|_{2,\Omega} \to 0$ при $m \to \infty$. Так как при каждом m $\operatorname{rot}\vec{\varphi}_m \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{\varphi}_m = 0$, то для всех $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}\psi) d\vec{x} = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\operatorname{rot}\vec{\varphi}_m \cdot \operatorname{grad}\psi) d\vec{x} = 0,$$

то есть, по определению, $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, последовательность $\operatorname{rot}\vec{\varphi}_m$, $m = 1,2,...,$сходится к $\vec{u}$ в $H(\operatorname{div};\Omega)$. Таким образом, $\vec{u} \in K(\operatorname{div};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$.

Обратно, пусть $\vec{u} \in K(\operatorname{div};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$, $\vec{v}$ – произвольный элемент из $K(\operatorname{rot};\Omega)$. Тогда из неравенства (10.21) следует, что $(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} = 0$, то есть $\vec{u} \in K^\perp(\operatorname{rot};\Omega)$.

Следующий результат был установлен другими методами, например, в [3,28].

Теорема 10.14. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область класса C^2, звездная относительно некоторой точки. Тогда пространство* $\{L_2(\Omega)\}^3$

раскладывается в прямую сумму взаимно ортогональных пространств H, H_1, H_2, *где*

$$H = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\vec{u} = 0, \gamma_\nu \vec{u} = 0\right\},$$
$$H_1 = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \operatorname{grad} p, \Delta p = 0\right\},$$
$$H_2 = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \operatorname{grad}\varphi, \varphi \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Доказательство. Согласно лемме 10.20,

$$H = K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega) = K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega),$$

по леммам 10.12 и 10.9, $H_2 = K^{\perp}(\mathrm{div};\Omega) = K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Так как, ввиду леммы 10.12, $H_1 = K(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$, пространства H, H_1, H_2 взаимно ортогональны. Остается показать, что пространство $K(\mathrm{rot};\Omega)$ раскладывается в прямую сумму H_1 и H_2. Если $\vec{u} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, то, согласно теореме Лакса-Мильграма, найдется единственный элемент $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ такой, что при всех $\eta \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}\eta) d\vec{x} = \int_\Omega (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\eta) d\vec{x},$$

и, следовательно, $\vec{u} - \operatorname{grad}\varphi \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$. Так как $\operatorname{grad}\varphi \in H_2$, теорема доказана.

Лемма 10.21. $K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$ *совпадает с замыканием в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *множества*

$$\mathcal{V} = \left\{\vec{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\vec{v} = 0\right\}.$$

Лемма 10.22. *Множество* $K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ *всюду плотно в* $K(\mathrm{div};\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда, так как $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, найдется сходящаяся к $\vec{v}$ последовательность $\vec{v}_m \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $m = 1,2,\ldots$. Согласно лемме 10.19 $\vec{v}_m = \vec{u}_m + \vec{g}_m$, где $\vec{u}_m \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g}_m \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Тогда $\vec{u}_m \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и, так как

$$\|\vec{v} - \vec{v}_m\|_{2,\Omega}^2 = \|\vec{v} - \vec{u}_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\vec{g}_m\|_{2,\Omega}^2,$$

последовательность $\vec{u}_m$, $m = 1,2,\ldots$, сходится к $\vec{v}$.

Из леммы 10.16 следует, что если $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, то $\operatorname{rot}\vec{v} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$. Обратно, справедливо утверждение

Лемма 10.23. *Для* $\vec{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *найдется единственная функция* $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ *такая, что* $\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{v}$.

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда существует последовательность $\vec{\psi}_m \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, $m = 1,2,\ldots$, такая, что $\operatorname{rot}\vec{\psi}_m$ стремится к $\vec{u}$ при $m \to \infty$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$. По лемме 10.19 $\vec{\psi}_m = \vec{v}_m + \vec{g}_m$, где $\vec{v}_m \in K(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g}_m \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$\$. Тогда $\vec{v}_m \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\operatorname{rot}\vec{v}_m = \operatorname{rot}\vec{\psi}_m$. Из неравенства (10.23) вытекает, что последовательность $\vec{v}_m$ фундаментальна в $\{L_2(\Omega)\}^3$ и, следовательно, сходится к некоторому элементу $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$. Для $\vec{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$

$$\int_\Omega (\vec{v} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{\varphi})d\vec{x} = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{\varphi} \cdot \vec{v}_m)d\vec{x} = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega (\vec{\varphi} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}_m)d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{\varphi})d\vec{x},$$

то есть $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{u}$.

Предположим, $\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{v}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{v}_2$, где $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Тогда $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap K^\perp(\mathrm{rot};\Omega) = \{0\}$.

Лемма 10.24. *Пусть* $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$. *Тогда найдется единственная функция* $\vec{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *такая, что* $\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$.

Доказательство. Согласно лемме 10.15, найдется функция $\vec{w} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ такая, что $\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{w}$. Ввиду леммы 10.20 $\vec{w} = \vec{u} + \vec{g}$, где $\vec{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, то есть $\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$.

Если $\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{u}_1 = \mathrm{rot}\,\vec{u}_2$, где $\vec{u}_i \in K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, то $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap K^\perp(\mathrm{rot};\Omega) = \{0\}$.

Приведем без доказательства некоторые свойства ортогональных разложений векторных полей, установленные в [2,29].

Обозначим

$$V = \left\{\vec{v} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 : \mathrm{div}\,\vec{v} = 0\right\}.$$

V – замкнутое подпространство в $\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$. Пусть $V^\perp$ ортогональное дополнение к V в пространстве $\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$, рассматриваемом со скалярным произведением $(\mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,v)_{2,\Omega}$.

Лемма 10.25. *Любой элемент* $u \in V^\perp$ *– решение задачи*

$$-\Delta\vec{u} = \mathrm{grad}\,p \text{ в } \Omega,\ p \in L_2(\Omega),\ \vec{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Лемма 10.26. *Пространство* $\mathcal{V}$ *плотно в* V.

Лемма 10.27. *Справедливо, алгебраически и топологически, равенство*

$$\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 = H_0(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega).$$

Из леммы 10.27 следует, что алгебраически и топологически

$$\left\{H^1(\mathbb{R}^3)\right\}^3 = H(\mathrm{div};\mathbb{R}^3) \cap H(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3).$$

Теорема 10.15. *Если область* Ω *ограничена и имеет границу класса* $\mathcal{C}^2$, *пространство* $H(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ *непрерывно вложено в* $\left\{H^1(\Omega)\right\}^3$.

Теорема 10.16. *Если область* Ω *ограничена и имеет границу класса* $\mathcal{C}^2$, *то пространство* $H_0(\mathrm{div};\Omega) \cap H(\mathrm{rot};\Omega)$ *непрерывно вложено в* $\left\{H^1(\Omega)\right\}^3$.

Следующие утверждения вытекают из теорем 10.15, 10.16 и лемм 10.23, 10.24.

Лемма 10.28. *Любой вектор* $\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$ *представим в виде* $\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$, *где* $\vec{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, $\vec{v}_\tau\big|_{\partial\Omega} = 0$, *причем* $\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)} \le \|\vec{u}\|_{2,\Omega}$.

Лемма 10.29. *Любой вектор* $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$ *представим в виде* $\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{u}$, *где* $\vec{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, $\vec{u}_\nu\big|_{\partial\Omega} = 0$, *причем* $\|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)} \le C\|\vec{v}\|_{2,\Omega}$.

Лемма 10.30. *Любая функция* $\vec{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ *представима в виде*

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\, p + \mathrm{rot}\,\vec{u},$$

где $p \in H^1(\Omega)$, $\vec{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3$ *и, при этом,* $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{u} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$.

10.5. Оценки векторных полей в $\mathbb{R}^3$

Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ определим пространства функций

$$H^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3) = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3 : \left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\alpha/2}\mathrm{rot}\,\vec{u} \in \{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3\right\},$$

$$H^\alpha(\mathrm{div};\mathbb{R}^3) = \left\{\vec{u} \in \{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3 : \left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\alpha/2}\mathrm{div}\,\vec{u} \in L_2(\mathbb{R}^3)\right\}.$$

Очевидно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 10.31. $H^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$, $H^\alpha(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)$ *– гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями*

$$(\vec{u},\vec{v})_{\alpha,rot} = \int_{R^3}(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}))d\vec{x} + \int_{R^3}\left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\alpha}(\mathrm{rot}\,\vec{u}(\vec{x})\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{x}))d\vec{x},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{\alpha,div} = \int_{R^3}(\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{v}(\vec{x}))d\vec{x} + \int_{R^3}\left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\alpha}\mathrm{div}\,\vec{u}(\vec{x})\,\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{x})d\vec{x}.$$

Лемма 10.32. *Множество* $\{\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\}^3$ *плотно в пространствах* $H^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$ *и* $H^\alpha(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)$.

На основании представления (10.13) и леммы 32 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 10.17. *Пусть* $\alpha > 1$, $\beta > 1$. *Существует такая константа* $C(\alpha,\beta) > 0$, *что для любых вектор-функций* $\vec{u} \in H^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$, $\vec{v} \in H^\beta(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)$ *справедливо неравенство*

$$\int_{R^3}(\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x} \le C(\alpha,\beta)\left(\left\|\left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\alpha/2}\mathrm{rot}\,\vec{u}\right\|_{2,R^3}\|\vec{v}\|_{2,R^3} + \right.$$

$$\left. + \|\vec{u}\|_{2,R^3}\left\|\left(1+|\vec{x}|^2\right)^{\beta/2}\mathrm{div}\,\vec{v}\right\|_{2,R^3}\right). \qquad (10.26)$$

11. Задача Стокса

Уравнения Стокса – это линеаризованная стационарная форма уравнений Навье-Стокса – уравнений движения вязкой жидкости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная область, $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ – заданная функция, $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости. Скорость $\vec{u}$ и давление p жидкости удовлетворяют следующим уравнениям [28, 29]:

$$-\nu\Delta\vec{u}(\vec{x}) + \operatorname{grad} p(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \tag{11.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Omega. \tag{11.2}$$

Система будет рассматриваться при однородных краевых условиях

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega. \tag{11.3}$$

Если $\vec{f}$, $\vec{u}$ и p – гладкие функции, удовлетворяющие (11.1)–(11.3), то умножив (11.1) скалярно на $\vec{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$, получим

$$-\nu\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} v_i \Delta u_i d\vec{x} - \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v} d\vec{x} =$$

$$\nu\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} u_i) d\vec{x} - \int_\Omega p \operatorname{div}\vec{v} d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}.$$

По непрерывности равенство имеет место для всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Таким образом, ввиду (11.2), (11.3), задача (11.1) – (11.3) допускает следующую обобщенную постановку: найти $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$ такую, что при всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$

$$\nu\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} u_i) d\vec{x} = \int_\Omega (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \tag{11.4}$$

Теорема 11.1. *Пусть* Ω *– открытая ограниченная область класса* C^2, $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. *Тогда существует единственная функция* $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$, *удовлетворяющая (11.4) при всех* $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$.

Доказательство. Положим $V = \{H_0^1(\Omega)\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$ – гильбертово пространство как замкнутое подпространство в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$. Определим билинейную форму и линейный функционал на V соотношениями

$$a(\vec{v},\vec{w}) = \nu\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\operatorname{grad} v_i \cdot \operatorname{grad} w_i) d\vec{x},\ l(\vec{v}) = \int_\Omega (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x},\ \vec{v},\vec{w} \in V.$$

Непрерывность формы и функционала обосновывается применением неравенства Гёльдера, коэрцитивность билинейной формы – следствие неравенства Фридрихса. Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы Лакса-Мильграма.

Эквивалентная (11.4) вариационная задача имеет вид

$$I(\vec{v}) \equiv \frac{\nu}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}(\operatorname{grad} v_i)^2 d\vec{x} - \int_{\Omega}\left(\vec{f}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x} \to \min,\ \vec{v} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega). \quad (11.5)$$

Согласно теореме 11.1 задача (11.5) имеет единственное решение $\vec{u} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$. Для него справедливо (11.2) в обобщенном смысле и, если граница области Ω достаточно гладкая, выполнено условие (11.3) в смысле теории следов.

Определим $\vec{g} \in \left\{H^{-1}(\Omega)\right\}^3$ соотношением

$$\vec{g} = -\nu\Delta\vec{u} - \vec{f},$$

$$\langle \vec{g}, \vec{\varphi} \rangle = \nu\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}(\operatorname{grad} u_i \cdot \operatorname{grad}\varphi_i)d\vec{x} - \int_{\Omega}\left(\vec{f}\cdot\vec{\varphi}\right)d\vec{x},\ \vec{\varphi} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3.$$

Согласно (11.4), $\langle \vec{g}, \vec{\varphi} \rangle = 0$ для всех $\vec{\varphi} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 \cap K(\operatorname{div};\Omega)$.

Таким образом, согласно лемме 10.9, найдется функция $p \in L_2(\Omega)$ такая, что $\vec{g} = \operatorname{grad} p$ и равенство (11.1) выполнено в $\left\{H^{-1}(\Omega)\right\}^3$.

12. Линейные краевые задачи теории упругости

12.1. Постановка задач

Рассмотрим основы линейной теории упругости, в которой соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций линейны и рассматриваются только малые деформации [22, 26].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей. Обозначим через $\vec{u}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ вектор перемещения, $\varepsilon(\vec{u})$ – линеаризованный тензор деформации, компоненты которого определены соотношениями

$$\varepsilon_{ik}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right).$$

Очевидно, $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ для всех $1 \le i,k \le 3$.

Тензор напряжений обозначим через σ. Соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций задаются обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\vec{u}),$$

где a_{ijkl} – коэффициенты упругости, обладающие свойствами симметрии

$$a_{jikl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

и эллиптичности

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \ge \alpha_1 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2 .$$

В общем случае коэффициенты упругости являются функциями от $\vec{x}$. Ограничимся изучением однородных сред, в которых все a_{ijkl} постоянны.

Пусть $\vec{f}$ – вектор объемной плотности заданных сил. Тогда компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sum_{k=1}^{3} \partial_k \sigma_{ik}(\vec{u}) + f_i = 0,\ i = 1,2,3 . \qquad (12.1)$$

Таким образом, определяя оператор A теории упругости выражением

$$(A\vec{u})_i = -\sum_{j=1}^{3} \partial_k \sigma_{ij}(\vec{u}) = -\sum_{j,k,l=1}^{3} \partial_k \left(a_{ijlk}\,\varepsilon_{kl}(\vec{u})\right),$$

получаем, что стационарная система линейной упругости имеет вид

$$A\vec{u} = \vec{f} . \qquad (12.2)$$

Для векторов перемещений $\vec{u}$, $\vec{v}$ положим

$$W(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{kl}(\vec{v}).$$

Функция

$$W(\vec{u}) \equiv W(\vec{u},\vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{3} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{kl}(\vec{u})$$

называется упругим потенциалом единичного объема. Упругий потенциал тела Ω определяется как

$$\int_{\Omega} W(\vec{u})d\vec{x},$$

а общая потенциальная энергия деформации тела равна

$$\int_{\Omega} W(\vec{u})d\vec{x} - \int_{\Omega}(\vec{f}\cdot\vec{u})d\vec{x}. \qquad (12.3)$$

Равенство (12.3) задает функционал энергии.

Рассмотрим уравнение (12.2) при одном из следующих граничных условий, определяющих, соответственно, первую, вторую и смешанную задачу теории упругости.

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \qquad (12.4)$$

$$\vec{t}(\vec{u})(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \partial\Omega, \qquad (12.5)$$

где $\vec{t}(\vec{u}) = \sigma(\vec{u})\vec{\nu}$,

$$\vec{u}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma_1,\ \vec{t}(\vec{u})(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma_2. \qquad (12.6)$$

где Γ_1, Γ_2 – открытые подмножества $\partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$.

Условие (12.4) означает, что тело закреплено на границе, условие (12.5) – что тело свободно на границе (на границе задано нулевое напряжение).

Пусть $\vec{u}$, $\vec{v} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_{\Omega}(A\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x} = -\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\int_{\Omega}\partial_j\left(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\vec{u})\right)v_i d\vec{x} =$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\vec{u})\partial_j v_i d\vec{x} - \sum_{i,j,k,l=1}^{3}\int_{\partial\Omega} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\vec{u})v_i\nu_i d\gamma =$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})d\vec{x} - \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\sigma_{ij}(\vec{u})v_i\nu_i d\gamma =$$

$$= 2\int_{\Omega} W(\vec{u},\vec{v})d\vec{x} - \int_{\partial\Omega}(\vec{t}(\vec{u})\cdot\vec{v})d\gamma. \qquad (12.7)$$

Если функции $\vec{u}$, $\vec{v}$ удовлетворяют одному из граничных условий (12.4)–(12.6), интеграл по границе области в (12.7) равен нулю.

Положим

$$a(\vec{u},\vec{v}) = 2\int_{\Omega} W(\vec{u},\vec{v})d\vec{x}.$$

Очевидно, $a(\cdot,\cdot)$ – симметричная билинейная форма в $\{H^1(\Omega)\}^3$,

$$l(\vec{v}) = \int_{\Omega}(\vec{f}\cdot\vec{v})d\vec{x}$$

– непрерывный линейный функционал в $\{H^1(\Omega)\}^3$ при всех $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$.

12.2. Существование решения первой краевой задачи

Условие (12.4) для $\vec{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3$ означает, что $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$. Таким образом, задача (12.2), (12.4) допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $\vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$ такую, что при всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$

$$2\int_\Omega W(\vec{u},\vec{v})d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{f} \cdot \vec{v}\right)d\vec{x}. \tag{12.8}$$

Ввиду эллиптичности коэффициентов

$$a(\vec{u},\vec{u}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{u})d\vec{x} \ge \alpha_1 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \varepsilon_{ij}^2(\vec{u})d\vec{x}.$$

Следовательно, обобщенная постановка эквивалентна вариационной задаче

$$I(\vec{u}) \to \min,\ \vec{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3, \tag{12.9}$$

где

$$I(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}a(\vec{u},\vec{u}) - \int_\Omega \left(\vec{f} \cdot \vec{v}\right)d\vec{x} = \int_\Omega W(\vec{u},\vec{v})d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{f} \cdot \vec{v}\right)d\vec{x}$$

– функционал энергии.

Доказательство коэрцитивности формы $a(\cdot,\cdot)$ основано на следующих оценках.

Теорема 12.1 (Неравенство Корна). *Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная область с регулярной границей. Найдется постоянная $C > 0$, зависящая только от области Ω, что для всех $\vec{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3$*

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} + \int_\Omega (\vec{v})^2\,d\vec{x} \le C\|\vec{v}\|_{1,2,\Omega}^2. \tag{12.10}$$

Из неравенства Корна вытекает

Лемма 12.1. *Для всех $\vec{v} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3$*

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} \ge C\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega (\operatorname{grad} v_i)^2\,d\vec{x}. \tag{12.11}$$

Доказательство. Соотношение $(A\vec{v},\vec{v})_{2,\Omega} = 0$ означает, что $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0$ для $i,j = 1,2,3$. Отсюда следует, что $\vec{v} \in M$, где

$$M = \left\{\vec{a} + \vec{b} \times \vec{x} : \vec{a},\vec{b} \in R^3\right\}.$$

M называется множеством жестких перемещений.

Если $\vec{v} \in M$ лежит в $\{H_0^1(\Omega)\}^3$, то, очевидно, $\vec{v} = 0$.

Из (12.10) следует, что

$$C\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} v_i\right)^2 d\vec{x} \le \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} + \int_{\Omega}\vec{v}^{\,2}d\vec{x}.$$

Поэтому для доказательства (12.11) достаточно установить, что найдется константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\|\vec{v}\|_{2,\Omega}^2 \le c_0 \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} \text{ для всех } \vec{v}\in\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3.$$

Пусть $\vec{v}\in\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$. Без ограничения общности можно считать (заменяя $\vec{v}$ на $\vec{v}/\|\vec{v}\|_{2,\Omega}$, что $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} = 1$. Покажем, что найдется $c_0 > 0$, что

$$c_0\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} \ge 1.$$

Если это не так, то найдется последовательность $\vec{v}_k\in\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$, $k = 1,2,\ldots$, такая, что $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$, $\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v}_k)d\vec{x}\to 0$ при $k\to\infty$. Так как, ввиду неравенства (12.10), последовательность $\{\vec{v}_k\}$ ограничена в $\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$, найдется её подпоследовательность, слабо сходящаяся в $\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$ к некоторому $\vec{v}\in\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v})d\vec{x} \le \liminf \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{v}_k)d\vec{x} = 0$$

и, следовательно, $\vec{v}\in M$, то есть $\vec{v} = 0$. Так как вложение $\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3 \subset \{L_2(\Omega)\}^3$ компактно, $\vec{v}_k\to 0$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, что противоречит предположению $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$.

Из неравенства (12.11) получаем, что для всех $\vec{u}\in\left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$

$$a(\vec{u},\vec{v}) \ge \alpha_1\sum_{i,j}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^2(\vec{u})d\vec{x} \ge \alpha_1 C\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} u_i\right)^2 d\vec{x}.$$

Из неравенства Фридрихса для функций $u_i\in H_0^1(\Omega)$, $i = 1,2,3$, вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\left(\operatorname{grad} u_i\right)^2 d\vec{x} \ge \frac{1}{C_I(\Omega)}\int_{\Omega}\vec{u}^{\,2}d\vec{x},$$

то есть

$$a(\vec{u},\vec{v}) \ge \frac{C\alpha_1}{2}\left(1+\frac{1}{C_I(\Omega)}\right)\|\vec{u}\|_{H^1}^2. \tag{12.12}$$

Применяя теорему Лакса-Мильграма заключаем, что при любых $\vec{f} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ существует единственное обобщенное решение задачи (12.2), (12.4).

12.3. Существование решения второй краевой задачи

Рассмотрим задачу (12.2), (12.5). Очевидно, она имеет не более одного решения в классе $M^{\perp}$ – ортогональном дополнении к M в $\{L_2(\Omega)\}^3$, так как пространство $M^{\perp}$ изоморфно фактор-пространству $\{H^1(\Omega)\}^3$ по M.

Элементы $M^{\perp}$ характеризуются соотношениями

$$\int_{\Omega} \vec{v} d\vec{x} = 0, \quad \int_{\Omega} [\vec{x} \times \vec{v}] d\vec{x} = 0.$$

Для существования решения необходимо, чтобы функционал $l(\vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}$ обращался в ноль на элементах из M, то есть объемные силы $\vec{f}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{\Omega} \vec{f} d\vec{x} = 0, \quad \int_{\Omega} [\vec{x} \times \vec{f}] d\vec{x} = 0. \qquad (12.13)$$

Эти условия характеризуют статическое и моментное равновесие тела.

Согласно условию эллиптичности, для доказательства коэрцитивности билинейной формы $a(\vec{u},\vec{u}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{u}) d\vec{x}$ достаточно показать, что для элементов $\vec{v} \in M^{\perp}$ справедлива оценка (12.11). Это будет заведомо выполнено, если найдется константа $c_1 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \geq c_1 \|\vec{v}\|_{2,\Omega}^2 \text{ для всех } \vec{v} \in M^{\perp}.$$

Пусть $\vec{w} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{v} \in M^{\perp}$, $\vec{g} \in M$. Заменяя $\vec{w}$ на $\vec{w}/\|\vec{v}\|_{2,\Omega}$, придем к случаю $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} = 1$. Таким образом, нужно показать, что $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(\vec{w}) d\vec{x} \geq c_1$.

Если это не выполнено, то найдется последовательность $\vec{w}_k \in \{H^1(\Omega)\}^3$, $k = 1,2,\ldots$, такая, что $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$, $\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(\vec{w}_k) d\vec{x} \to 0$ при $k \to \infty$. Так как, ввиду неравенства (12.10), последовательность $\{\vec{v}_k\}$ ограничена в $\{H^1(\Omega)\}^3$, найдется её подпоследовательность, слабо сходящаяся в $\{H^1(\Omega)\}^3$ к некоторому $\vec{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(\vec{v}) d\vec{x} \le \liminf \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2(\vec{w}_k) d\vec{x} = 0,$$

и, следовательно, $\vec{v} \in M$. Так как $\vec{v}_n \in M^{\perp}$, то $\vec{v} \in M^{\perp}$, то есть $\vec{v} = 0$. Тогда $\vec{v}_k \to 0$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, что противоречит предположению $\|\vec{v}_k\|_{2,\Omega} = 1$.

Применяя теорему Лакса–Мильграма, получаем, что существует единственная функция $\vec{u} \in M^{\perp}$ такая, что для всех $\vec{v} \in M^{\perp}$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}.$$

Таким образом, решение второй краевой задачи определяется с точностью до произвольного жесткого перемещения.

Аналогично можно доказать существование и единственность смешанной краевой задачи.

В каждом из рассматриваемых случаев обобщенное решение краевой задачи минимизирует функционал энергии, то есть выполнен принцип минимума потенциальной энергии.

12.4. Краевые задачи в однородных средах

В изотропных средах коэффициенты упругости равны

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl},$$

где $\lambda \ge 0$, $\mu > 0$ – коэффициенты Ламе, и, следовательно,

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\vec{u}) + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

В однородных средах коэффициенты Ламе постоянны и связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}, \ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Таким образом, оператор A имеет вид

$$A\vec{u} \equiv -(\lambda + \mu) \operatorname{graddiv} \vec{u} - \mu \Delta \vec{u}.$$

Рассмотрим первую краевую задачу. Пусть $\vec{u}$ – гладкая функция, удовлетворяющая уравнению (12.2). Умножим (12.2) скалярно на $\vec{v} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ и проинтегрируем по Ω, используя формулу Стокса. Получаем

$$(\lambda + \mu) \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} d\vec{x} + \mu \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u_i \cdot \operatorname{grad} v_i) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \qquad (12.14)$$

По непрерывности (12.14) справедливо для всех $\vec{v} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$.

Таким образом, задача (12.2), (12.4) допускает следующую обобщенную постановку: найти $\vec{u} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$ такую, что для всех $\vec{v} \in \left\{H_0^1(\Omega)\right\}^3$ справедливо равенство (12.14).

Существование и единственность решения этой задачи вытекает из теоремы Лакса-Мильграма, возможность применения которой доказывается с использованием неравенства Фридрихса.

13. Стационарные задачи электромагнитной теории

13.1. Постановка задачи

Пусть $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{J}$ – объемная плотность тока, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, $\vec{D}$ – вектор электрической индукции, ρ – плотность электрических зарядов.

Стационарная система уравнений Максвелла записывается в гауссовой системе единиц в виде [27]:

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{x}), \tag{13.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}(\vec{x}) = 0, \tag{13.2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{x}) = 0, \tag{13.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}), \tag{13.4}$$

где $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

При рассмотрении линейных сред справедливы материальные соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{13.5}$$

где μ – тензор магнитной проницаемости среды, ε – тензор диэлектрической проницаемости. Имеет место дифференциальная форма обобщенного закона Ома

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^{cm}\right), \tag{13.6}$$

где σ – тензор проводимости, $\vec{E}^{cm}$ – напряженность поля сторонних электродвижущих сил. С использованием обозначения $\vec{J}^{cm} = \sigma\vec{E}^{cm}$ (13.6) принимает вид

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{cm}. \tag{13.7}$$

В простейшем случае, когда область Ω заполняется однородной средой, ε и μ можно считать положительными постоянными (в частности, $\varepsilon = \mu = 1$ в вакууме). Коэффициент удельной проводимости σ можно считать положительной постоянной в однородной проводящей среде и равным нулю в непроводящей среде.

Пусть $\vec{E}^{cm} : \Omega \to R^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция, $\vec{H} : \Omega \to R^3$, $\vec{B} : \Omega \to R^3$, $\vec{E} : \Omega \to R^3$, $\vec{D} : \Omega \to R^3$, $\vec{J} : \Omega \to R^3$ и $\rho : \Omega \to R^1$ – неизвестные функции, для которых справедливы соотношения (13.5) и (13.6).

Пусть Ω – ограниченная область, ε, μ, σ – положительные постоянные.

Система дифференциальных уравнений (13.1)-(13.4) будет рассматриваться при однородных краевых условиях

$$\vec{H}_\tau(\vec{x})=0\,,\ \vec{x}\in\partial\Omega\,. \qquad (13.8)$$

Будем искать решение задачи (13.1)-(13.6), (13.8) в классах суммируемых с квадратом функций. Тогда (13.1) и (13.8) означают, согласно теореме 10.3, что $\vec{H}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Из (13.2) следует, что $\vec{B}\in K(\mathrm{div};\Omega)$, а из (13.3) – что $\vec{E}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$. Выполнение (13.4) означает, что $\rho\in H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle\rho,\varphi\rangle=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega\left(\vec{D}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi\right)d\vec{x}\ \text{ для всех } \varphi\in H_0^1(\Omega). \qquad (13.9)$$

13.2. Задача для напряженности магнитного поля

Получим замкнутую формулировку задачи об определении напряженности магнитного поля $\vec{H}$, в которой исключена неизвестная функция напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Уравнения (13.1), (13.2) можно записать в виде

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{x})=\vec{E}+\vec{E}^{cm}, \qquad (13.10)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0\,. \qquad (13.11)$$

Домножая (13.10) скалярно на $\mathrm{rot}\,\vec{v}$, $\vec{v}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, и интегрируя по области Ω, получим

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\int\limits_\Omega\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}=\int\limits_\Omega\left(\vec{E}^{cm}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}+\int\limits_\Omega\left(\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}\,. \qquad (13.12)$$

По лемме 10.6 при всех $\vec{E}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\vec{v}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$

$$\int\limits_\Omega\left(\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}=0\,,$$

поэтому равенство (13.12) может быть записано в виде

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\int\limits_\Omega\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}=\int\limits_\Omega\left(\vec{E}^{cm}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}\,. \qquad (13.13)$$

Рассмотрим задачу определения функции $\vec{H}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$, удовлетворяющей (13.13) при всех $\vec{v}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$.

Определим билинейную форму и линейный функционал в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$ соотношениями

$$a(\vec{u},\vec{v})=\frac{c}{4\pi\sigma}\int\limits_\Omega\left(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}\,,$$

$$l(\vec{v})=\int\limits_\Omega\left(\vec{E}^{cm}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}\,.$$

Так как $a(\vec{u},\vec{v})$ – симметричная неотрицательно определенная форма в пространстве $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $l(\vec{v})$ – линейный функционал, задача (13.13) может быть сформулирована в виде эквивалентного вариационного принципа

$$I(\vec{u}) \to \inf,\ \vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega) \tag{13.14}$$

$$I(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}) d\vec{x} - \frac{4\pi\sigma}{c} \int_\Omega \left(\vec{E}^{cm} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x}\,.$$

Покажем, что для доказательства разрешимости поставленной задачи можно применить теорему Лакса-Мильграма.

Пусть последовательность $\vec{u}_n \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$, $n = 1,2,...$ сходится в $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ к некоторому элементу $\vec{u}$. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\vec{u}_n \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} = 0\,,$$

то есть $H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ – замкнутое подпространство в $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и, следовательно, является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v})_V = (\vec{u},\vec{v})_{rot}$.

Пусть $\vec{u},\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$. Используя неравенство Гельдера, получаем:

$$|a(\vec{u},\vec{v})| \le \frac{c}{4\pi\sigma} \left\{ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{v})^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \le \frac{c}{4\pi\sigma} (\vec{u},\vec{u})_V^{1/2} (\vec{v},\vec{v})_V^{1/2}\,,$$

$$|l(\vec{v})| \le \left\{ \int_\Omega \left(\vec{E}^{cm}\right)^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{v})^2 d\vec{x} \right\}^{1/2} \le \left\| \vec{E}^{cm} \right\|_{2,\Omega} (\vec{v},\vec{v})_V^{1/2}\,,$$

то есть форма $a(\cdot,\cdot)$ и функционал l непрерывны.

С другой стороны, из неравенства (10.24) следует, что для всех $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \vec{u}^2 d\vec{x} \le C_4 \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2 d\vec{x}\,,$$

то есть

$$a(\vec{u},\vec{u}) = \frac{c}{4\pi\sigma} \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2 d\vec{x} \ge \frac{c}{8\pi\sigma} \left(1 + \frac{1}{C_6}\right) \left(\int_\Omega \vec{u}^2 d\vec{x} + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u})^2 d\vec{x} \right), \tag{13.15}$$

форма $a(\cdot,\cdot)$, тем самым, коэрцитивна.

Таким образом, выполнены условия теоремы Лакса–Мильграма. Следовательно, существует единственное решение $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ интегрального равенства (13.13).

Определим остальные неизвестные функции из соотношений (13.1), (13.5), (13.7), (13.9), то есть $\vec{B} = \mu\vec{H}$,

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{E}^{cm}\,, \tag{13.16}$$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{cm}$. При этом, очевидно, $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{B} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, функции $\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$ суммируемы с квадратом и остается проверить, что $\vec{E}$ лежит в пространстве $K(\mathrm{rot};\Omega)$, то есть выполнено (13.3).

Из (13.13) следует, что

$$\int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} = 0 \tag{13.17}$$

при всех $\vec{v} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \bigcap K(\mathrm{div};\Omega)$.

Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Применяя теорему Лакса-Мильграма получаем, что существует единственный элемент $p \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий при всех $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (\mathrm{grad}\, p \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{\psi} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi) d\vec{x} .$$

Тогда $\vec{v} = \vec{\psi} - \mathrm{grad}\, p \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{\psi}$ и $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, то есть $\vec{v} \in K(\mathrm{div};\Omega)$. Получаем,

$$\int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} = 0,$$

то есть справедливо (13.3).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 13.1. *Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная звездная область класса C^2, $\vec{E}^{cm} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, ε, σ, μ – положительные постоянные. Тогда задача (13.1)-(13.6), (13.8) имеет единственное решение.*

13.3. Задача для напряженности электрического поля

Выше была рассмотрена задача об определении напряженности магнитного поля $\vec{H}$. При этом напряженность электрического поля $\vec{E}$ может быть определена как производная величина с помощью соотношения (13.16).

Существует возможность независимого определения вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Домножая (13.16) скалярно на $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$ и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} \left(\vec{E}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} + \frac{c}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \left(\mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} . \tag{13.18}$$

По лемме 10.6 при всех $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left(\mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = 0,$$

поэтому равенство (13.18) может быть записано в виде

$$\int_{\Omega} \left(\vec{E} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = \int_{\Omega} \left(\vec{E}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} \,. \tag{13.19}$$

Поставим задачу определения функции $\vec{E} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, удовлетворяющей (13.19) при всех $\vec{v} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$.

Задача (13.19) может быть сформулирована в виде эквивалентного вариационного принципа

$$I(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{u}^{\,2} d\vec{x} - \int_{\Omega} \left(\vec{E}^{cm} \cdot \vec{u}\right) d\vec{x} \to \inf \,, \ \vec{u} \in K(\mathrm{rot};\Omega). \tag{13.20}$$

Сформулированный вариационный принцип (13.20) известен как *принцип минимизации джоулевых потерь* [27].

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения этой задачи опирается на теорему Лакса – Мильграма, применение которой не вызывает затруднений, поскольку $\|\vec{u}\|_{rot} = \|\vec{u}\|_{2,\Omega}$ и $K(\mathrm{rot};\Omega)$ – замкнутое подпространство $\{L_2(\Omega)\}^3$.

13.4. Задачи в терминах потенциалов

Рассмотренная задача (13.1)–(13.6), (13.8) может быть поставлена также с использованием векторного магнитного потенциала $\vec{A}$ и скалярного электрического потенциала φ, которые, ввиду соотношений (13.2), (13.3), можно ввести по формулам

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\,,\ \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi\,. \tag{13.21}$$

В этом случае уравнение (13.1) переписывается с учетом (13.5), (13.7) в виде

$$\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\left(-\sigma\,\mathrm{grad}\,\varphi + \vec{J}^{cm}\right). \tag{13.22}$$

Краевые условия для векторного потенциала $\vec{A}$, соответствующие краевым условиям (13.8), записываются в виде

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_{\tau}(\vec{x}) = 0\,,\ \vec{x} \in \partial\Omega\,. \tag{13.23}$$

Решением задачи (13.22), (13.23) называем функции $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ такие, что $\mathrm{rot}\,\vec{A} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и справедливо равенство (13.22).

Для корректной постановки задач об определении потенциалов $(\vec{A},\varphi)$ требуются дополнительные условия на векторный потенциал $\vec{A}$ (калибровочные соотношения). Рассмотрим два вида калибровочных соотношений:

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0\,,\ \left(\vec{A}\right)_{\nu}\big|_{\partial\Omega} = 0\,; \tag{13.24}$$

$$\varphi = -\kappa\,\mathrm{div}\,\vec{A}\,,\ \left(\vec{A}\right)_{\nu}\big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{13.25}$$

Будем искать решение задач определения векторного потенциала в классе $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Обозначим также $K_0(\mathrm{div};\Omega)=K(\mathrm{div};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Лемма 13.1. $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ – *гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$(\vec{u},\vec{v})_W=\int\limits_\Omega(\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x}+\int\limits_\Omega(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})d\vec{x}+\int\limits_\Omega\mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v}d\vec{x}.$$

Доказательство. Аксиомы скалярного произведения, очевидно, выполняются. Остается проверить полноту пространства по соответствующей норме. Пусть последовательность $\{\vec{u}_n\}$ фундаментальная в $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Для всех n, m

$$\|\vec{u}_n-\vec{u}_m\|_W^2=\|\vec{u}_n-\vec{u}_m\|_{rot}^2+\|\mathrm{div}\vec{u}_n-\mathrm{div}\vec{u}_m\|_{2,\Omega}^2,$$

откуда и получаем сходимость последовательности $\{\vec{u}_n\}$ в пространствах $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и в $H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Лемма 13.2. *Каждый элемент* $\vec{w}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *однозначно представим в виде* $\vec{w}=\vec{v}+\vec{g}$*, где* $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$.

Доказательство. Согласно лемме 10.20 элемент $\vec{w}$ однозначно представим в виде $\vec{w}=\vec{v}+\vec{g}$, где $\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{v}\in H_0(\mathrm{div};\Omega)\cap K(\mathrm{div};\Omega)$. Поскольку $\vec{w}$, $\vec{g}$ лежат в $H(\mathrm{rot};\Omega)$, это же справедливо для $\vec{v}$.

Пусть $\vec{A}$, φ – классическое решение задачи (13.22), (13.23). Умножим равенство (13.22) скалярно на функцию $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_\Omega\left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}=\frac{4\pi\sigma}{c}\int\limits_\Omega\varphi\,\mathrm{div}\,\vec{v}d\vec{x}+\frac{4\pi}{c}\int\limits_\Omega\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}.\qquad(13.26)$$

Соотношения (13.24) означают, что $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$. Так как $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ – замкнутое подпространство в $H(\mathrm{rot};\Omega)\cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, оно является гильбертовым пространством относительно индуцированного скалярного произведения

$$(\vec{u},\vec{v})_V=(\vec{u},\vec{v})_W=\int\limits_\Omega(\vec{u}\cdot\vec{v})d\vec{x}+\int\limits_\Omega(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})d\vec{x}=(\vec{u},\vec{v})_{rot}.$$

При калибровочных соотношениях (13.24), таким образом, задача (13.22), (13.23) сводится к следующей задаче определения векторного магнитного потенциала: найти функцию $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, для которой при всех $\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x}=\frac{4\pi\mu}{c}\int\limits_\Omega\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}.\qquad(13.27)$$

Эквивалентная вариационная задача для определения $\vec{A}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ записывается в виде

$$I(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{u})^2 d\vec{x} - \frac{4\pi\mu}{c}\int_{\Omega}\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{u}\right)d\vec{x} \to \inf,\ \vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap K_0(\operatorname{div};\Omega). \tag{13.28}$$

Теорема 13.2. *Существует единственное решение задачи (13.28).*

Доказательство. Положим для $\vec{u},\vec{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap K_0(\operatorname{div};\Omega)$

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})d\vec{x},\ l(\vec{v}) = \frac{4\pi\mu}{c}\int_{\Omega}\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}.$$

Видно, что l – линейный непрерывный функционал, $a(\cdot,\cdot)$ – симметричная билинейная форма на $H(\operatorname{rot};\Omega)\cap K_0(\operatorname{div};\Omega)$.

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что форма $a(\cdot,\cdot)$ непрерывна, применяя оценку (10.25) находим, что форма $a(\cdot,\cdot)$ коэрцитивна.

Утверждение теоремы следует тогда из теоремы Лакса-Мильграма.

При использовании калибровочных соотношений (13.25) задача (13.22), (13.23) сводится к задаче определения векторного магнитного потенциала $\vec{A} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$, для которого при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\right)d\vec{x} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\operatorname{div}\vec{v}\,d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c}\int_{\Omega}\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}. \tag{13.29}$$

Эквивалентная вариационная задача для определения $\vec{A} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$ записывается в виде

$$I(\vec{u}) \to \inf,\ \vec{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\cap H_0(\operatorname{div};\Omega), \tag{13.30}$$

$$I(\vec{u}) \equiv \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{u})^2 d\vec{x} + \frac{2\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_{\Omega}(\operatorname{div}\vec{u})^2 d\vec{x} - \frac{4\pi\mu}{c}\int_{\Omega}\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{u}\right)d\vec{x} \to \inf.$$

Теорема 13.3. *Существует единственное решение задачи (13.30).*

Доказательство. Определим билинейную форму и линейный функционал на $H(\operatorname{rot};\Omega)\cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$ соотношениями

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})d\vec{x} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa\int_{\Omega}\operatorname{div}\vec{u}\operatorname{div}\vec{v}\,d\vec{x},\ l(\vec{v}) = \frac{4\pi\mu}{c}\int_{\Omega}\left(\vec{J}^{cm}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}.$$

Из неравенства Коши-Буняковского вытекает непрерывность формы $a(\cdot,\cdot)$ и функционала l. Коэрцитивность билинейной формы следует из оценки (10.21).

Таким образом, справедливость утверждения теоремы вытекает из теоремы Лакса-Мильграма.

13.5. Связь между задачами для потенциалов при различных калибровочных соотношениях

Следующие теоремы устанавливают связь между задачами в терминах векторного магнитного потенциала при различных калибровочных соотношениях.

Теорема 13.4. *Пусть* $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи (13.28),* $\vec{A}_\kappa \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи (13.30). Тогда* $\vec{A}_\kappa \to \vec{A}$ *при* $\kappa \to \infty$ *в пространстве* $H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Доказательство. Обозначим $\vec{a} = \vec{A}_\kappa - \vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Согласно лемме 10.20, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, где $\vec{a}_1 \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{a}_2 \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Возьмем произвольные $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Тогда $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Ввиду (13.27), (13.29) справедливы тождества

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{A}_\kappa \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa \int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{A}_\kappa\, \mathrm{div}\,\vec{g}\, d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{w}\right) d\vec{x},$$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot v\right) d\vec{x},$$

откуда следует, что

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{a}_1 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\kappa \int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{a}_2\, \mathrm{div}\,\vec{g}\, d\vec{x} = \frac{4\pi\mu}{c}\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x}.$$

В частности, при всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{a}_1 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} = 0,$$

то есть $\vec{a}_1 = 0$, $\vec{a} = \vec{a}_2 \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$, $\mathrm{rot}\,\vec{A}_\kappa = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ и при всех $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{a}\, \mathrm{div}\,\vec{g}\, d\vec{x} = \frac{1}{\sigma\kappa}\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x}. \qquad (13.31)$$

Применяя к $\vec{a}$ оценку (10.25) получим

$$\int_\Omega \vec{a}^{\,2} d\vec{x} \le C_5 \int_\Omega \left(\mathrm{div}\,\vec{a}\right)^2 d\vec{x}.$$

Положим в (13.31) $\vec{g} = \vec{a}$. Тогда

$$\int_\Omega \left(\mathrm{div}\,\vec{a}\right)^2 d\vec{x} = \frac{1}{\sigma\kappa}\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{a}\right) d\vec{x} \le \frac{1}{\sigma\kappa}\left\{\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm}\right)^2 d\vec{x}\right\}^{1/2} \left\{\int_\Omega \vec{a}^{\,2} d\vec{x}\right\}^{1/2}.$$

Получаем, таким образом,

$$\left\|\vec{A}_\kappa - \vec{A}\right\|_W = \left\|\vec{a}\right\|_W = \left\{\left\|\vec{a}\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\mathrm{div}\,\vec{a}\right\|_{2,\Omega}^2\right\}^{1/2} \le \frac{1}{\kappa\sigma}\left(1 + C\right)^{1/2}\left\|\vec{J}^{cm}\right\|_{2,\Omega},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

13.6. Эквивалентность задач для потенциалов исходной задаче

Изучим связь между постановками задач в терминах векторного магнитного потенциала и альтернативными постановкам для напряженности магнитного поля.

Теорема 13.5. *Пусть* $\vec{H} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ *– решение задачи (13.13),* $\vec{A} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ *и* $\vec{A}_\kappa \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *– решения задач (13.28) и (13.30) соответственно. Тогда*

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_\kappa = \mu\vec{H}\,.$$

Доказательство. Так как $\mu\vec{H} \in K(\mathrm{div};\Omega)$, найдется, по теореме, функция $\vec{q} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ такая, что $\mu\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{q}$. Согласно теореме Лакса-Мильграма, существует элемент $\vec{z} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, удовлетворяющий при всех $\vec{h} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega \left(\vec{z}\cdot\vec{h}\right)d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{q}\cdot\vec{h}\right)d\vec{x}\,.$$

Тогда, ввиду леммы 10.20, $\vec{q} - \vec{z} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega) = K(\mathrm{div};\Omega) \cap H_0(\mathrm{div};\Omega)$. Так как $\vec{z} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathrm{rot}(\vec{q} - \vec{z}) = \mathrm{rot}\,\vec{q} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Таким образом,

$$\vec{a} = \vec{q} - \vec{z} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega),\ \mathrm{rot}\,\vec{a} = \mu\vec{H}\,.$$

Покажем, что $\vec{a}$ – решение задачи (13.28).

Согласно лемме 10.6, для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x} = \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x}\,.$$

Далее, так как по лемме 10.20 $\vec{v} \in K^{\perp}(\mathrm{rot};\Omega)$, найдется, согласно лемме 10.16, последовательность $\{\vec{\psi}_n\} \subset \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ такая, что $\mathrm{rot}\,\vec{\psi}_n \to \vec{v}$ при $n \to \infty$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Согласно теореме Лакса – Мильграма, для каждой функции $\vec{\psi}_n$ найдется единственная функция $p_n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $\omega \in H_0^1(\Omega)$ равенству

$$\int_\Omega \left(\mathrm{grad}\,p_n\cdot\mathrm{grad}\,\omega\right)d\vec{x} = \int_\Omega \left(\vec{\psi}_n\cdot\mathrm{grad}\,\omega\right)d\vec{x}\,.$$

Тогда $\vec{\omega}_n = \vec{\psi}_n - \mathrm{grad}\,p_n \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathrm{div}\,\vec{\omega}_n = 0$, и $\mathrm{rot}\,\vec{\omega}_n = \mathrm{rot}\,\vec{\psi}_n$. Используя тождество (13.13), получаем

$$\int_\Omega \left(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}\right)d\vec{x} = \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\vec{v}\right)d\vec{x} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\psi}_n\right)d\vec{x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\operatorname{rot}\vec{H} \cdot \operatorname{rot}\vec{\omega}_n\right) d\vec{x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\vec{E}^{cm} \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}_n\right) d\vec{x} = \frac{4\pi}{c} \int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x},$$

следовательно, $\vec{a} \in H(\operatorname{rot};\Omega) \cap K_0(\operatorname{div};\Omega)$ удовлетворяет равенству (13.27) при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega) \cap K_0(\operatorname{div};\Omega)$ и, в силу единственности решения задачи (13.28), $\vec{a} = \vec{A}$, $\operatorname{rot}\vec{A} = \mu\vec{H}$ по построению.

Поскольку, как установлено в теореме 13.4, $\operatorname{rot}\vec{A}_\kappa = \operatorname{rot}\vec{A}$, теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $\vec{A} \in H(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$ *– решение задачи (13.28) или (13.30). Тогда функция* $\operatorname{rot}\vec{A} \in H_0(\operatorname{rot};\Omega)$*, то есть выполнено в смысле теории следов граничное условие (13.23).*

Лемма 13.3. Пусть $\vec{A}_\kappa \in H(\operatorname{rot};\Omega) \cap H_0(\operatorname{div};\Omega)$ – решение задачи (13.30), функция $\varphi \in L_2(\Omega)$ определена соотношением

$$\varphi = -\kappa \operatorname{div} \vec{A}_\kappa. \qquad (13.32)$$

Тогда $\vec{A}_\kappa$, φ – решение задачи (13.22), (13.23).

Доказательство. Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Тогда $\vec{\psi} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и, согласно лемме 10.20, $\vec{\psi} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{v} \in K_0(\operatorname{div};\Omega)$, $\vec{g} \in K(\operatorname{rot};\Omega)$. Поскольку $\operatorname{div}\vec{g} = \operatorname{div}\vec{\psi} \in L_2(\Omega)$, $\vec{g} \in H_0(\operatorname{div};\Omega)$.

Согласно тождеству (13.16)

$$\int_\Omega \left(\sigma\vec{E} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\operatorname{rot}\vec{H} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\vec{H} \cdot \operatorname{rot}\vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\mu^{-1} \operatorname{rot}\vec{A}_\kappa \cdot \operatorname{rot}\vec{v}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} = 0.$$

Таким образом,

$$\int_\Omega \left(\sigma\vec{E} \cdot \vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \left(\sigma\vec{E} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} = \frac{c}{4\pi} \int_\Omega \left(\operatorname{rot}\vec{H} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} - \int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x} = -\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x}.$$

С другой стороны, $\int_\Omega \varphi \operatorname{div}\vec{\psi} d\vec{x} = \int_\Omega \varphi \operatorname{div}\vec{g} d\vec{x}$. Так как

$$\varphi = -\kappa \operatorname{div}\left(\vec{A}_\kappa - \vec{A}\right),$$

где $\vec{A} \in H(\operatorname{rot};\Omega) \cap K_0(\operatorname{div};\Omega)$ – решение задачи (13.28), получаем из (13.30), что

$$\int_\Omega \sigma\varphi \operatorname{div}\vec{g} d\vec{x} = -\int_\Omega \left(\vec{J}^{cm} \cdot \vec{g}\right) d\vec{x},$$

то есть для всех $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$

$$\int_\Omega \left(\vec{E} \cdot \vec{\psi}\right) d\vec{x} = \int_\Omega \varphi \operatorname{div}\vec{\psi} d\vec{x}. \qquad (13.33)$$

Подставляя в это равенство в качестве $\vec{\psi}$ функции $\vec{\psi}_i = \omega \vec{e}_i$, $i = 1,2,3$, где $\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$, получаем утверждение леммы.

Положим $\vec{J} = \dfrac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{E} = \sigma^{-1}\left(\vec{J} - \vec{J}^{cm}\right)$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и определим функционал $\rho \in H^{-1}(\Omega)$ формулой (13.9).

Следствие. *Функции* $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, ρ *– решение задачи (13.1)- (13.6), (13.8).*

13.7. Задача определения $\left(\vec{H}, \vec{E}\right)$ в $\mathbb{R}^3$ с компактной проводящей подобластью

Рассмотрим одну из возможных постановок стационарной задачи в терминах напряженности магнитного поля, позволяющую однозначно определить напряженность магнитного поля во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а электрическое поле, токи и заряды – в проводящей подобласти $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Предположим, Ω_σ – открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$ с регулярной границей Γ, в каждой точке которой определен единичный вектор внешней нормали $\vec{\nu}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma$. Рассмотрим стационарную систему уравнений Максвелла (13.1)-(13.6), где $\vec{x} \in R^3$, $\vec{E}^{cm} \in \left\{L_2\left(\mathbb{R}^3\right)\right\}^3$, σ, μ, ε – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sigma(\vec{x}) = 0,\ \mu(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x}) = 1,\ \vec{E}^{cm}(\vec{x}) = 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \quad (13.34)$$

$$\sigma(\vec{x}) = \sigma^* > 0,\ \mu(\vec{x}) = \mu^* > 0,\ \varepsilon(\vec{x}) = \varepsilon^* > 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \Omega_\sigma. \quad (13.35)$$

Естественной с физической точки зрения является задача об определении электрических и магнитных полей, вызванных только источниками, сосредоточенными в подобласти Ω_σ. Отсутствие внешних источников, в частности, предполагает, что

$$\rho(\vec{x}) = 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \quad (13.36)$$

а отсутствие внешних полей, наряду с вытекающими из (13.1), (13.2), (13.4), (13.5) соотношениями

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = 0,\ \operatorname{div} \vec{H}(\vec{x}) = 0,\ \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \quad (13.37)$$

требует выполнения дополнительных условий на поведение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $|\vec{x}| \to \infty$:

$$\left|\vec{E}(\vec{x})\right| \le \frac{C}{|\vec{x}|^2},\ \left|\vec{H}(\vec{x})\right| \le \frac{C}{|\vec{x}|^2} \quad (13.38)$$

при достаточно больших $|\vec{x}|$.

При сделанных предположениях задача об определении напряженности магнитного поля $\vec{H}$ может быть в замкнутой форме сформулирована в виде интегрального тождества

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\int_{\Omega_\sigma}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\right)d\vec{x} = \int_{\Omega_\sigma}\left(\vec{E}^{cm}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\right)d\vec{x}\,. \qquad (13.39)$$

Введем необходимые функциональные пространства:

$$K\left(\operatorname{div}\mu;\mathbb{R}^3\right)=\left\{\vec{u}\in\left\{L_2\left(\mathbb{R}^3\right)\right\}^3 : \mu\vec{u}\in K\left(\operatorname{div};\mathbb{R}^3\right)\right\},$$

$$V\left(\operatorname{rot};\Omega_\sigma\right)=\left\{\vec{u}\in H\left(\operatorname{rot};\mathbb{R}^3\right): \operatorname{rot}\vec{u}(\vec{x})=0, \vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega_\sigma\right\}.$$

Обозначим через $U\equiv K\left(\operatorname{div}\mu;\mathbb{R}^3\right)\cap V\left(\operatorname{rot};\Omega_\sigma\right)$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)_U=\left(\vec{u},\vec{v}\right)_{2,R^3}+\left(\operatorname{rot}\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v}\right)_{2,R^3}.$$

Задача об определении вектора напряженности магнитного поля может быть сформулирована в следующем виде: определить вектор-функцию $\vec{H}\in U$, удовлетворяющую интегральному тождеству (13.39) при всех функциях $\vec{v}\in U$.

Теорема 13.6. *Пусть измеримые функции* σ, μ, ε *и* $\vec{E}^{cm}\in\left\{L_2\left(R^3\right)\right\}^3$ *удовлетворяют условиям (13.34), (13.35). Тогда решение* $\vec{H}\in U$ *интегрального тождества (13.39) существует и единственно.*

Доказательство. Обозначим

$$a\left(\vec{H},\vec{v}\right)=\frac{c}{4\pi\sigma}\int_{\Omega_\sigma}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\right)d\vec{x},\ \vec{H},\vec{v}\in U,$$

$$l(\vec{v})=\int_{\Omega_\sigma}\left(\vec{E}^{cm}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\right)d\vec{x},\ \vec{v}\in U.$$

Легко проверяется, что билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ и функционал $l(\cdot)$ удовлетворяют условиям леммы Лакса-Мильграма. При этом коэрцитивность билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ является прямым следствием неравенства (10.26) для $\vec{v}=\mu\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|_{2,R^3}\le C(\alpha,\alpha,2)\mu^*\left(1+R^2\right)^{\alpha/2}\|\vec{u}\|_{2,\Omega_\sigma},$$

где R – радиус некоторого шара с центром в начале координат, содержащего Ω_σ.

Замечание 1. Разрешимость рассматриваемой задачи остается также справедливой в том случае, когда σ – симметричный положительно определенный тензор, удовлетворяющий условию (13.34). Схема доказательства аналогична приведенной в теореме.

Замечание 2. Результат теоремы 13.6 показывает, что может быть дана следующая корректная формулировка задачи об определении $\vec{H}$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ при условии отсутствия внешних полей и источников по отношению к области Ω_σ как решение следующей вариационной задачи

$$\frac{c}{8\pi\sigma}\int\limits_{\Omega_\sigma}\left|\operatorname{rot}\vec{H}\right|^2 d\vec{x} - \int\limits_{\Omega_\sigma}\left(\vec{E}^{cm}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}\right)d\vec{x} \to \min \tag{13.40}$$

при условиях

$$\operatorname{rot}\vec{H} \in \left\{L_2\left(\mathbb{R}^3\right)\right\}^3,\ \operatorname{div}\left(\mu\vec{H}(\vec{x})\right) = 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{13.41}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{x}) = 0 \text{ при почти всех } \vec{x} \in R^3 \setminus \Omega_\sigma, \tag{13.42}$$

$$\int\limits_{R^3}\mu\vec{H}^2 d\vec{x} < \infty. \tag{13.43}$$

Соотношения (13.41)-(13.43) эквивалентны включению $\vec{H}$ в пространство $U(\Omega_\sigma)$, причем условие (13.43), эквивалентное требованию конечности энергии магнитного поля, позволяет исключить из постановки задачи условие поведения $\vec{H}(\vec{x})$ при $|\vec{x}| \to \infty$ вида (13.38). Вариационный принцип (13.40), эквивалентный интегральному тождеству (13.39) [26], имеет физический смысл минимизации джоулевых энерговыделений [27].

Замечание 3. Приведенная постановка задачи позволяет однозначно определить поле $\vec{E}$ в Ω_σ, но не позволяет однозначно определить $\vec{E}$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и заряд, распределенный на поверхности Γ. Для исчерпывающего решения этой задачи необходима дополнительная информация о полном заряде, сосредоточенном в $\overline{\Omega}_\sigma = \Omega_\sigma \cup \Gamma$, или о значении интеграла

$$\int\limits_{\partial\Omega_\sigma}\left(\vec{E}\cdot\vec{\nu}\right)d\gamma,$$

где $\left(\vec{E}\cdot\vec{\nu}\right)$, вообще говоря, определяется как след на границе $\partial\Omega_\sigma$ функции $\vec{E} \in \left\{L_2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\sigma\right)\right\}^3$, удовлетворяющей условию $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma$.

Упражнения

1. Пусть Ω – ограниченная область. Доказать, если последовательность $u_k \in L_2(\Omega)$, $k = 1,2,...$ сходится к $u \in L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, то $\int\limits_{\Omega} u_k d\vec{x} \to \int\limits_{\Omega} u d\vec{x}$, $k \to \infty$.

2. Установить, что смешанная обобщённая производная не зависит от порядка дифференцирования.

3. Показать, что из существования обобщённой производной $\partial_\alpha u$ не следует существования обобщённой производной $\partial_\beta u$ при $\beta_i \le \alpha_i$, $i = 1,...,n$, $|\beta| < |\alpha|$. Указание: рассмотреть функцию $u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$, где $u_i(x)$ не имеют обобщённых производных первого порядка.

4. Показать, что если в области Ω функция $u(\vec{x})$ имеет обобщённую производную $\partial_\alpha u$, то и в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ функция $u(\vec{x})$ имеет обобщённую производную $\partial_\alpha u$.

5. Пусть в области Ω_1 задана функция $u_1(\vec{x})$, имеющая обобщённую производную $\partial_\alpha u_1$, а в области Ω_2 - функция $u_2(\vec{x})$, имеющая обобщённую производную $\partial_\alpha u_2$. Доказать, что если $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$ - область и $u_1 = u_2$ в $\Omega_1 \bigcap \Omega_2$, то функция

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} u_1(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_1, \\ u_2(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

имеет обобщённую производную в $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$, равную $\partial_\alpha u_1$ в Ω_1 и $\partial_\alpha u_2$ в Ω_2.

6. Пусть $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| < 1\}$, $u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in \Omega, x_2 > 0 \\ -1, & \vec{x} \in \Omega, x_2 < 0 \end{cases}$.

Убедиться, что $u(\vec{x})$ имеет обобщённые производные первого порядка в каждом из полукругов, но не имеет обобщённой производной по x_2 в Ω.

7. Доказать, если у функции $u(\vec{x})$ в области Ω существует обобщённая производная $\partial_\alpha u = w$, а для функции $w(\vec{x})$ существует обобщённая производная $\partial_\beta w$, то существует обобщённая производная $\partial_{\alpha+\beta} u$.

8. Вычислить производные порядка 1,2 функции $y = |x| \sin x$.

9. Найти производные первого порядка функций

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \ge 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ x + 1, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 + 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

10. Доказать, $y = \operatorname{sgn} x \notin H^1(-1,1)$.

11. Доказать, $y = |x| \in H^1(-1,1)$, $y = |x| \notin H^2(-1,1)$.

12. Доказать, если $u \in H^1(\Omega)$ и $u(\vec{x}) = const$ п.в. в $\Omega' \subset \Omega$, то $\operatorname{grad} u = 0$ п.в. в Ω'.

13. Доказать, если $u \in H^1(\Omega)$ и $\operatorname{grad} u = 0$ п.в. в Ω, то $u(\vec{x}) = const$ п.в. в Ω

14. Доказать неравенство Фридрихса для случая $\Omega = (a,b) \subset R^1$.

15. Доказать неравенство Пуанкаре для случая $\Omega = (a,b) \subset R^1$.

16. Доказать, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с регулярной границей, то для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ найдется такая постоянная C_u, что

$$\|u - C_u\|_{2,\Omega} \le C_{II}(\Omega)\|\operatorname{grad} u\|_{2,\Omega}.$$

17. Пусть $p \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $p(\vec{x}) \ge p_0 > 0$. Доказать эквивалентность скалярных произведений в пространстве $H^1(\Omega)$:

$$(u,v) = \int_\Omega uv d\vec{x} + \int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x},$$

$$(u,v) = \int_\Omega u d\vec{x} \int_\Omega v d\vec{x} + \int_\Omega (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{x}.$$

18. Показать, что в пространстве

$$V^1 = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u d\vec{x} = 0 \right\}$$

можно ввести эквивалентное скалярное произведение формулой

$$(u,v)_0 = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{2,\Omega}.$$

19. Показать, что в пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение формулой $(u,v)_0 = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{2,\Omega}$.

20. Показать, что в пространствах $H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\mathrm{div};\Omega)$ и $H(\mathrm{rot};\Omega) \cap K_0(\mathrm{div};\Omega)$ можно ввести скалярное произведение формулой

$$(\vec{u},\vec{v})_0 = (\mathrm{rot}\,\vec{u}, \mathrm{rot}\,\vec{v})_{2,\Omega}$$

21. Доказать лемму 10.21.

22. Показать, что обобщённые решения задач

$$\Delta u(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \nu} + \lambda u(\vec{x}) = 0, \ \vec{x} \in \partial\Omega$$

при различных λ ортогональны в $L_2(\partial\Omega)$.

23. Пусть в области Ω рассматривается задача

$$-\operatorname{div}\left(p\operatorname{grad}u\right)+q(\vec{x})u=f(\vec{x}),$$

$$u(\vec{x})=0,\ \vec{x}\in\partial\Omega,$$

где $p\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $p(\vec{x})\geq p_0>0$, $\vec{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $q\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $f\in L_2(\Omega)$.

Сформулировать обобщённую постановку задачи и соответствующую вариационную задачу.

24. Доказать существование и единственность обобщённого решения задачи из упражнения 23 при $q\geq 0$.

25. Доказать существование обобщённого решения смешанной краевой задачи для линейного уравнения теории упругости.

26. Доказать существование и единственность обобщённого решения первой краевой задачи для уравнения упругости в случае постоянных сред.

Приложения

В этом приложении содержится краткая сводка необходимых фактов из теории гильбертовых пространств. С более полным изложением соответствующего материала можно ознакомиться, например, в [14].

П1. Гильбертовы пространства над полем действительных чисел

Векторное пространство H над полем действительных чисел называется *пространством со скалярным произведением*, если определено отображение

$$(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющее при всех $u, v \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим условиям

(i) $(u,v)_H = (v,u)_H$;

(ii) $(u_1 + u_2, v)_H = (u_1, v)_H + (u_2, v)_H$;

(iii) $(\lambda u, v)_H = \lambda (u,v)_H$;

(iv) $(u,u)_H \geq 0$, причем $(u,u)_H = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

В пространстве со скалярным произведением может быть определена норма элемента по формуле:

$$\| u \|_H = (u,u)_H^{1/2}.$$

Норма обладает следующими свойствами:

(i) $\| u \|_H \geq 0$, причем $\| u \|_H = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$;

(ii) $\| \lambda \cdot u \|_H = | \lambda | \cdot \| u \|_H$;

(iii) $\| u + v \|_H \leq \| u \|_H + \| v \|_H$.

В пространстве со скалярным произведением определим функцию расстояния (метрику) между любыми двумя элементами по формуле:

$$\rho(u,v) = \| u - v \|_H = (u - v, u - v)_H^{1/2}.$$

Введенная таким образом функция расстояния $\rho : H \times H \to \mathbb{R}$ обладает свойствами:

(i) $\rho(u,v) \geq 0$, причем $\rho(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

(ii) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;

(iii) $\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$ для $\forall v \in H$.

Пространство H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ называется *гильбертовым*, если оно является полным метрическим пространством с определенной выше функцией расстояния. Это означает, что любая фундаментальная последовательность в H имеет предел (последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, u_n \in H$ называется фундаментальной (последовательностью Коши, последовательностью сходящейся в себе), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N(\varepsilon)$, что $\rho(u_k, u_l) < \varepsilon$ при $k, l > N(\varepsilon)$).

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ сходится к элементу $u \in H$, тогда последовательность u_n фундаментальна.

2. Любая фундаментальная последовательность ограничена (то есть существует $R > 0$ такое, что $\| u_n \|_H \le R$ при всех натуральных n).

3. (Неравенство Коши–Буняковского)

$$|(u,v)_H| \le \| u \|_H \cdot \| v \|_H .$$

Это неравенство так же называют неравенством Шварца.

Пример 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i .$$

здесь $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Это пространство – пример конечномерного гильбертова пространства.

Пример 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое непустое ограниченное подмножество $\overline{\Omega}$. – его замыкание. Обозначим через $C(\overline{\Omega})$ класс непрерывных функций, определенных на $\overline{\Omega}$. Определим скалярное произведение по формуле:

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) d\vec{x},$$

где $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ – элемент объема в $\mathbb{R}^n$.

Легко убедиться, что выполняются все аксиомы скалярного произведения. Однако пространство $C(\overline{\Omega})$ не гильбертово.

Действительно, пусть $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}^1$. Определим последовательность функций по формуле:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, 0 < x < 1 - \dfrac{1}{n}, \\ nx - n + 1, 1 - \dfrac{1}{n} \le x < 1, \\ 1, 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Последовательность таких функций фундаментальна, но ни одна непрерывная функция не является ее пределом.

П2. Ортогональные системы и ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве

Элементы $u, v \in H$ называются *ортогональными* $(u \perp v)$, если $(u, v) = 0$. Элемент *u* называется *ортогональным множеству* $V \subset H$, если $(u, v) = 0$ при всех $v \in V$. Если $u \in H$ ортогонален всюду плотному в *H* множеству *V*, то $u = 0$. Элемент $u \in H$ называется *нормированным*, если $\| u \| = 1$.

Множество $V \subset H$ называется *ортонормированным (нормированной системой)*, если его элементы нормированы и попарно ортогональны. Ортонормированное множество, очевидно, линейно независимо.

Любое счётное или конечное линейно независимое множество элементов $\{u_k\}$ можно преобразовать соответственно в счётное или конечное ортонормированное множество $\{\widetilde{u}_k\}$, следуя *процедуре Грама–Шмидта*:

$$\widetilde{u}_1 = \frac{u_1}{\| u_1 \|}, \; \widetilde{u}_2 = \frac{u_2 - (u_2, \widetilde{u}_1)\widetilde{u}_1}{\| u_2 - (u_2, \widetilde{u}_1)\widetilde{u}_1 \|}, \ldots,$$

$$\widetilde{u}_k = \frac{u_k - (u_k, \widetilde{u}_1)\widetilde{u}_1 - \ldots - (u_k, \widetilde{u}_{k-1})\widetilde{u}_{k-1}}{\| u_k - (u_k, \widetilde{u}_1)\widetilde{u}_1 - \ldots - (u_k, \widetilde{u}_{k-1})\widetilde{u}_{k-1} \|}, \ldots.$$

Пусть $V = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная ортонормированная система. Для каждого $u \in H$ числа $c_k = (u, u_k)$ называются *коэффициентами Фурье элемента u по системе V.*

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \qquad (П2.1)$$

называется *рядом Фурье для элемента u по системе V.*

Справедлива

Лемма П.1. *Для любого элемента* $u \in H$ *ортонормированной системы* $V = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ряд Фурье (П2.1) сходится, т.е. существует элемент* $u_V \in H$ *такой, что*

$$\left\| u_V - \sum_{k=1}^{m} c_k u_k \right\| \to 0 \textit{ при } m \to \infty,$$

и при этом справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \| u \|^2 \qquad (П2.2)$$

(неравенство Бесселя).

Отметим, что для того чтобы сходился в H ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность действительных чисел, необходимо и достаточно, чтобы сходился числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

Счётная ортонормированная система $V=\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *полной, или ортонормированным базисом пространства H*, если любой элемент $u \in H$ представим в виде своего ряда Фурье

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \text{ , где } c_k=(u,u_k), \tag{П2.3}$$

то есть $\left\| u-\sum_{k=1}^{m} c_k u_k \right\| \to 0$ при $m \to \infty$.

Справедлива

Лемма П.2. *Для того чтобы ортонормированная система* $V=\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *была ортонормированным базисом в H, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента* $u \in H$ *выполнялось равенство Парсеваля–Стеклова:*

$$\| u \|^2=\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \text{ , где } c_k=(u,u_k). \tag{П2.4}$$

Отметим, что в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует не более чем счётный ортонормированный базис.

П3. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве

Справедлива следующая теорема Рисса о представлении линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве.

Теорема П.1. *Пусть H – гильбертово пространство,* $l: H \to \mathbb{R}$ *– линейный ограниченный функционал. Тогда существует единственный элемент* $u \in H$

$$(u,v)=l(v) \text{ при всех } v \in H .$$

П4. Компактность в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пространство над полем действительных чисел. Множество $M \subset H$ будем называть *ограниченным*, если существует такое положительное число $R>0$, что $\| u \| \le R$ для всех $u \in M$.

Множество $M \subset H$ будем называть *компактным в H*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Множество $M \subset H$ будем называть *предкомпактным в H*, если его замыкание $\overline{M}$ в H – компактное множество в H.

Полезен следующий критерий предкомпактности: множество $M \subset H$ предкомактно тогда и только тогда, когда любая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ содержит подпоследовательность $\{u_{ki}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторому элементу $u^{\infty} \in H$, т.е. $\| u^{\infty} - u_{ki} \| \to 0$ при $i \to \infty$

П5. Линейные вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве

Оператор $A: H \to H$ называется *линейным оператором*, если для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in H$ выполнено

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v).$$

Линейный оператор $A: H \to H$ называется *ограниченным*, если существует положительная постоянная $a^* > 0$ такая, что $\| Au \| \leq a^* \| u \|$ при всех $u \in H$. Для линейных операторов условие ограниченности является критерием непрерывности.

Оператор $A: H \to H$ называется *вполне непрерывным (или компактным)*, если оператор A переводит любое ограниченное множество $M \subset H$ в предкомпактное множество $A(M) \subset H$. Любой линейный вполне непрерывный оператор является также и ограниченным.

Полезен следующий критерий вполне непрерывности оператора $A: H \to H$: оператор $A: H \to H$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ последовательность $\{Au_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ содержит подпоследовательность $\{Au_{ki}\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, сходящуюся к некоторому элементу $w \in H$.

П6. Линейные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Пусть $A: H \to H$ – линейный ограниченный оператор. Тогда для каждого элемента $v \in H$ определен линейный ограниченный функционал $l_v(u) = (Au, v)$. По теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует такой элемент $z \in H$, что

$$(Au, v) = l_v(u) = (u, z) \text{ при всех } u \in H.$$

По определению полагается, что $z = A^* v$, при этом оператор $A^*: H \to H$ называется *сопряженным к оператору A*, и может быть показано, что $A^*: H \to H$ – также линейный ограниченный оператор. Если $A^* = A$, то оператор A называется *самосопряженным*. Иначе говоря, линейный ограниченный оператор $A: H \to H$ (в вещественном гильбертовом пространстве H) является самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$(Au, v) = (u, Av) \text{ при всех } u, v \in H .$$

П7. Теорема Гильберта–Шмидта

Пусть H – гильбертово пространство над полем действительных чисел, $A: H \to H$ – линейный самосопряженный вполне непрерывный оператор. Рассмотрим задачу

$$Au = \mu u \qquad (\text{П7.1})$$

об определении собственных чисел μ и отвечающих им собственных векторов u (собственным числом называется такое число μ, для которого существует нетривиальный вектор u, удовлетворяющий (П7.1); сам вектор u называется *собственным вектором, отвечающим собственному числу* μ.

Отметим основные свойства собственных чисел и собственных векторов задачи (П7.1):

(i) все собственные числа задачи (П7.1) вещественны;

(ii) для каждого $R > 0$ существует лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным числам μ, по модулю превосходящим R (в частности, для каждого $R > 0$ существует лишь конечное число собственных чисел, удовлетворяющих условию $|\mu| > R$ и каждому $\mu \neq 0$ отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных векторов;

(iii) собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны в H.

Следствием утверждения (ii) является утверждение

(iv) множество различных собственных чисел $\{\mu_n\}$ задачи (П7.1) не более чем счётно, причем если это множество счётно (бесконечно), то $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество собственных чисел $\{\mu_n\}$ и соответствующих им собственных векторов $\{\varphi_n\}$ задачи (П7.1) непусто. Ввиду свойств (ii), (iii) можно считать, что система $\{\varphi_n\}$ ортонормированна.

Справедлива следующая теорема [20]

Теорема П.2 (теорема Гильберта–Шмидта). *Пусть $A: H \to H$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор. Тогда при любом $u \in H$ элемент Au разлагается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}$:*

$$Au = \sum c_k \varphi_k , \; c_k = (Au, \varphi_k).$$

Следствие. *Для всякого вполне непрерывного самосопряженного оператора $A: H \to H$ в сепарабельном гильбертовом пространстве* *существует ортонормированный базис пространства H, элементами которого являются собственные вектора оператора A. Если оператор A обратим, то система* $\{\varphi_n\}$ *- ортонормированный базис пространства H.*

Список литературы

1. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
2. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.// Труды МИАН СССР, 1960. Т. 59. С. 5–36.
3. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала.// Г. Вейль. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1984.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
7. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
8. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.
9. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976. – 96 с.
10. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Lp-оценки векторных полей в неограниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах.// Вестник Удмурдского университета. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки, 2012, № 1. С. 3–14.
12. Калинин А.В. Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике: Учебное пособие. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 319 с.
13. Калинин А.В., Калинкина А.А. Lp - оценки векторных полей// Известия Вузов. Серия Математика, 2004. N 3. С. 26–35.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
15. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
16. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
17. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
18. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.– 408 с.
19. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

20. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.– 424 с.
21. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. – 260 с.
22. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. – М.: Мир, 1985.– 590 с.
23. Сборник задач по уравнениям математической физики/ Под ред. В.С. Владимирова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 288 с.
24. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. – М.: Наука, 1989.– 254 с.
25. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988.– 336 с.
26. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980.– 512 с.
27. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
28. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
29. Girault V. Raviart P. Finite element methods for Navier-Stokes Equations. – Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New-York/ Tokyo, 1986. – 374 p.
30. Nečas J. Les methodes directes en theorie des équations elliptiques. Praque, Academia, 1967.– 372 p.

Алексей Вячеславович **Калинин**
Алла Александровна **Тюхтина**

Введение в современные методы математической физики

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.