

Министерство образования Российской Федерации
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

С. М. ГРАЧ, Г. Х. КАМЕНЕЦКАЯ

ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ
(вводный курс)
Часть I.

Учебное пособие

Издательство Нижегородского университета
Нижний Новгород, 2002

УДК 533.95
ББК В333.475
Г-78

Грач С. М., Каменецкая Г. Х. Волны в плазме (вводный курс). Часть 1. // Учебное пособие. Н.Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2002, 84 с.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов физических и физико-технических специальностей. Пособие составлено на основе специального курса «Распространение электромагнитных волн в плазме», прочитанного на третьем курсе радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского студентам кафедры радиоастрономии и распространения радиоволн. При составлении пособия использовались обзоры и монографии [1]– [14].

Дается понятие о том, что такое плазма; описываются различные модели описания плазмы; излагаются основы электродинамики сред с дисперсией; на основе квазигидродинамического и кинетического подходов рассматриваются свойства волн в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля.

ББК В333.475

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении закономерностей распространения электромагнитных волн в плазме приходится сталкиваться с большим количеством различных задач. Это собственно дисперсионные свойства волн, в том числе при наличии постоянного магнитного поля; рефракция, поглощение и усиление волн в плазме; нагрев плазмы и ускорение ее частиц электромагнитными волнами; излучение, рассеяние и трансформация волн; влияние регулярной неоднородности среды и т. д. Настоящее пособие составлено на основе специального курса «Распространение электромагнитных волн в плазме», прочитанного на третьем курсе радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского студентам кафедры радиоастрономии и распространения радиоволн. Целью пособия является последовательное изложение основ теории распространения электромагнитных волн в однородной плазме, на базе которых можно было бы продолжить более глубокое изучение свойств собственно плазмы и электромагнитных волн в ней в рамках спецкурсов «Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде», «Распространение волн в случайно-неоднородной среде» и «Нелинейные эффекты в плазме», а также при самостоятельной работе. Авторы стремились, чтобы приведенные в пособии математические выкладки могли быть проведены до конца по указанным рецептам и был бы ясен физический смысл проводимых расчетов. Для этого мы использовали в ряде случаев вывод одних и тех же (или сходных) формул с помощью различных моделей описания плазмы.

Первая часть пособия включает в себя описание свойств, при которых ионизированный газ может считаться плазмой, основы электродинамики сред с временной и пространственной дисперсией, краткое изложение различных моделей описания плазмы, описание дисперсионных свойств электромагнитных волн в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля. Во вторую часть пособия планируется включить разделы, посвященные электромагнитным волнам в магнитоактивной плазме, а также некоторым неустойчивостям неравновесной плазмы, приводящим к генерации волн. Более подробное освещение рассмотренных вопросов можно найти, например в [1]–[14].

ВВЕДЕНИЕ

§1. Определение плазмы.

Согласно школьным представлениям, плазма — это четвертое состояние вещества. Действительно, по мере нагревания вещества оно испытывает последовательные превращения из твердого состояния в жидкость, а затем в газ. При дальнейшем нагревании, по мере усиления хаотического движения молекул газа они, сталкиваясь, начинают расщепляться на составляющие атомы, а затем и атомы начнут распадаться на электроны и ионы. Таким образом, при нагревании любого вещества оно должно в конце концов превратиться в плазму — ионизованный газ. В этом смысле плазму несколько условно и называют четвертым состоянием вещества.

Впервые термин “плазма” был введен И. Ленгмюром в 1923 г. при изучении явлений, происходящих при электрическом разряде в газах и был непосредственно связан с представлением об ионизованном газе, что оказалось очень плодотворным. Именно наличие в плазме большого числа заряженных частиц обуславливает ее характерные свойства, которые и позволяют определить плазму как отдельное состояние вещества.

В отличие от резких фазовых переходов твердое тело — жидкость и жидкость — газ, переход к ионизованному состоянию является непрерывным, так что степень ионизации $r = N_e/N_m$, т. е. отношение плотности электронов N_e к плотности нейтральных частиц N_m является плавной функцией температуры. Даже в пламени свечи имеется некоторое количество электронов и ионов, однако вряд ли его можно считать настоящей плазмой. Поэтому ясно, что определение плазмы требует еще некоторых характеристик, которые показывали бы, начиная с какой плотности заряженных частиц ионизованный газ можно считать плазмой. Главная особенность коллектива заряженных частиц, составляющих плазму, состоит во взаимодействии частиц этого коллектива через электрические и магнитные поля, т. е. посредством далекодействующих сил. Именно благодаря возможности этого типа взаимодействия коллектив заряженных частиц приобретает новые качества. Фактически он образует нечто целое с электрическими и магнитными полями, которые с этими частицами взаимодействуют (и их поэтому называют самосогласован-

ными полями). Таким образом, плазмой можно назвать ионизованный газ при такой плотности заряженных частиц, когда становится существенным взаимодействие этих частиц с самосогласованными электрическими и магнитными полями.

§2. Параметры плазмы.

Как уже отмечалось, плазма состоит из заряженных и нейтральных частиц. Положительно заряженными частицами могут быть ионы (газовая плазма) дырки (полупроводниковая плазма) или позитроны (плазма оболочек нейтронных звезд), а отрицательными частицами — электроны и отрицательные ионы. Последние, как правило, не играют большой роли в плазменных процессах (исключение может составлять пылевая плазма и плазма нижней ионосферы). Состав нейтральной компоненты может быть достаточно сложным: помимо атомов и молекул в плазме могут присутствовать атомы и молекулы в различных возбужденных состояниях. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением газовой плазмы, состоящей из электронов, ионов и нейтральных частиц.

Для описания плазмы прежде всего необходимо знать концентрацию (плотность) частиц различных сортов N_α , где индекс α означает сорт частиц. Далее все величины, относящиеся к электронам плазмы, будут обозначаться индексом e , ионам — индексом i , и нейтралам — индексом m . Если в плазме присутствуют ионы (и нейтралы) разных сортов, следует задавать отдельно концентрацию частиц каждого сорта. В дальнейшем, однако, мы ограничимся рассмотрением плазмы, в которой присутствуют один сорт ионов и один сорт нейтральных частиц.

По степени ионизации $r = N_e/N_m$ плазму обычно подразделяют на слабоионизованную, ($r \ll 1, r < 10^{-2} \div 10^{-3}$) и полностью ионизованную, ($r \rightarrow \infty$), т.е. плазму, состоящую только из заряженных частиц. Однако, имея в виду различный характер процессов переноса в плазме с различной степенью ионизации, для ряда задач более удобным представляется введение следующей градации с учетом соотношения частот соударений частиц плазмы: слабо ионизованная плазма с

$$\nu_{em} \gg \nu_{ei}, \quad (2.1)$$

сильно ионизованная с

$$\nu_{em} \ll \nu_{ei} \quad (2.2)$$

и полностью ионизованная с

$$\nu_{im} \ll \nu_{ii}. \quad (2.3)$$

Здесь ν_{em} и ν_{ei} — соответственно частоты соударений электронов с нейтралами и ионами, ν_{im} и ν_{ii} — соответствующие частоты соударений ионов. При этом в случае (2.2) нейтральные частицы практически не оказывают влияния на движение электронов, а в случае (2.3) — на движение всей заряженной компоненты. Отметим, что в случаях как слабо, так и сильно ионизованной плазмы степень ионизации остается малой, $r \ll 1$, в случае (2.3) $r \gtrsim 1$. Последнее неравенство оказывается существенно более мягким, чем приведенное ранее ($r \gg 1$).

Для описания происходящих процессов нужно знать заряд и массу частиц. В газовой плазме заряд электрона $e_e = -e$, $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ, масса $m_e = m = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г; заряд ионов $e_i = Ze$ (Z — кратность ионизации), масса $m_i = M = A \cdot 1.66 \cdot 10^{-24}$ г, где A — атомный вес соответствующего газа. Для нейтральных частиц, очевидно $e_m = 0$, а $m_m \approx m_i = M$. Обозначение M для масс ионов и нейтралов будет использоваться только в том случае, когда речь идет о плазме, состоящей из ионов и нейтралов одного сорта.

Частицы плазмы находятся в состоянии хаотического движения. Для характеристики этого движения вводят температуру плазмы T и температуры отдельных ее компонент T_α . Температура плазмы вводится в предположении, что плазма находится в термодинамическом равновесии, а функции распределения всех частиц по скоростям являются максвелловскими с одной и той же температурой T . В этом случае плазма называется изотермической. Чаще, однако, можно говорить о частичном термодинамическом равновесии, когда различные компоненты плазмы имеют максвелловские распределения с различными температурами:

$$f_\alpha(v_\alpha) = N_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2T_\alpha} \right\} = \frac{N_\alpha}{(2\pi v_{T_\alpha}^2)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{v_\alpha^2}{2v_{T_\alpha}^2} \right\}, \quad (2.4)$$

где через $v_{T_\alpha} = (T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$ обозначена тепловая скорость частиц сорта α , а температура частиц характеризует среднюю кинетическую энергию частиц данного сорта:

$$(3/2)kT_\alpha = \overline{m_\alpha v_\alpha^2}/2. \quad (2.5)$$

Здесь ε — постоянная Больцмана, $\varepsilon = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град в случае, когда температура частиц измеряется в градусах Кельвина. В формуле (2.4) (и всюду в дальнейшем) температура частиц сорта α T_α измеряется в энергетических единицах¹, и $\varepsilon = 1$.

Приведем, далее, абсолютные значения основных параметров плазмы N_α и T_α в различных конкретных условиях. Так, в F -слое ионосферы $N_e \approx N_i \sim 10^5 \div 10^6$ см⁻³, $N_m \sim 10^9 \div 10^{10}$, таким образом $r \sim 10^{-4}$, а температура плазмы оказывается порядка $(1 \div 3) \cdot 10^3$ К. На больших высотах, превышающих радиус Земли, в межпланетной плазме плотность заряженных частиц варьируется в пределах $10^{-2} \lesssim N_e \approx N_i \lesssim 10$ см⁻³, причем $N_m \ll N_e$, т. е. плазма практически полностью ионизована, а температура $T \approx 10^4$ К. Концентрация и температура плазмы звезд меняются в очень широких пределах: концентрация от $10^2 \div 10^3$ до $10^{22} \div 10^{26}$ см⁻³ и выше, а температура от $10^4 \div 10^5$ до $10^9 \div 10^{10}$ К, при этом плазма полностью ионизована. Так, например, в солнечной короне $N_e \approx N_i \sim 10^4 \div 10^8$ см⁻³, а $T \approx 10^6 \div 10^9$ К. В установках для получения управляемого термоядерного синтеза для превышения порога реакции слияния температура плазмы должна превышать $T \gtrsim 10^8$ К, концентрация же заряженных частиц зависит от методов удержания и нагрева плазмы и составляет либо $10^{14} \div 10^{15}$ см⁻³ либо $10^{22} \div 10^{23}$ см⁻³. Плазму газового разряда в противоположность термоядерной часто называют низкотемпературной. Ее температура не превышает обычно $10^4 \div 10^5$ К, а концентрация составляет $10^8 \div 10^{15}$ см⁻³, причем такая плазма практически всегда слабо ионизована, т.к. $N_m \approx 10^{12} \div 10^{17}$ см⁻³.

Степень ионизации плазмы определяется конкуренцией между процессами *ионизации* (развала атомов) и обратным процессом *рекомбинации*, т.е. воссоединения электронов и ионов в нейтральные частицы. В термодинамически равновесной плазме степень ионизации не зависит от деталей этих процессов, и, в принципе, ее можно установить чисто термодинамическим путем. Наиболее просто законы термодинамики выглядят для плазмы, в которой кинетическая энергия заряженных частиц значительно превышает энергию их взаимодействия, т.е. выполнено газовое приближение (см. §3). Допустим, что мы имеем дело с однократной ионизацией. Согласно об-

¹Для ряда задач удобно использовать для температуры внесистемную энергетическую единицу электрон-вольт ($1 \text{ эВ} \approx 11594 \text{ К}$). В этом случае постоянная Больцмана $\varepsilon = 1.6 \cdot 10^{-12}$ эВ/град.

щим принципам статистической физики отношение вероятностей нахождения электрона в состояниях с энергиями w_1 и w_2 при заданной температуре T равно:

$$(g_1/g_2) \exp\{-(w_1 - w_2)/T\}.$$

Здесь g_1 и g_2 — кратности вырождения (квантовые веса, более подробно см. [15]) состояний с энергиями w_1 и w_2 соответственно. Степень ионизации газа, т.е. отношение числа свободных электронов к числу нейтральных атомов, определяется этим выражением, если в нем положить $w_1 - w_2 = I$, где I — энергия ионизации.

В этом случае g_1 — число квантовых ячеек в фазовом пространстве для свободного электрона; g_2 — квантовый вес стационарного энергетического уровня в атоме. Если для простоты не учитывать возможность перехода на возбужденные уровни атома и предположить, что основное состояние является невырожденным, то I — энергия ионизации для основного состояния и $g_2 = 1$. Свободные электроны имеют сплошной спектр по энергиям. Квантовый вес свободных состояний приблизительно равен объему фазового пространства для электрона со средним тепловым импульсом $\sqrt{2mT} = mv_T \sqrt{2}$, деленному на элементарный фазовый объем:

$$g_1 = (2mT)^{3/2} V_0 / (2\pi\hbar)^3.$$

В этом выражении V_0 — геометрический объем, приходящийся на один электрон, т.е. $V_0 = 1/N_e$. Следовательно

$$g_1 = (2mT)^{3/2} / N_e (2\pi\hbar)^3.$$

Используя последнее выражение, мы получаем так называемую формулу Саха, которая определяет зависимость степени ионизации от температуры:

$$r = \frac{N_e}{N_m} = \frac{g_1}{g_2} \exp\{-I/T\} = \frac{(2mT)^{3/2}}{N_e (2\pi\hbar)^3} \exp\{-I/T\}. \quad (2.6)$$

В другой записи, более удобной для вычисления отношения N_e/N_m при слабой степени ионизации, эта формула приобретает вид:

$$r = \frac{N_e}{N_m} \approx \frac{(2mT)^{3/4}}{N_m^{1/2} (2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\{-I/T\}. \quad (2.7)$$

Из формулы Саха следует, что чем меньше плотность нейтрального газа, тем легче его ионизовать, причем высокая степень ионизации достигается еще при температурах $T \ll I$. Но при слишком малых плотностях труднее достигнуть термодинамического равновесия, потому что реже происходят столкновения между частицами, устанавливающие равнораспределение по степеням свободы. В термодинамически неравновесной плазме для определения степени ионизации приходится рассматривать специфику процессов соударений, приводящих к ионизации и рекомбинации.

§ 3. Основные свойства плазмы: квазинейтральность, дебаевское экранирование, коллективные процессы. Газовое приближение. Плазменный параметр.

Как уже указывалось, плазма представляет собой ионизованный газ заряженных частиц, в котором существенно взаимодействие этих частиц с самосогласованными электрическими и магнитными полями. Из этого определения вытекает ряд основных, определяющих свойств, по которым и можно установить, имеем ли мы дело с реальной плазмой.

Это, во-первых *квазинейтральность* плазмы: электрические силы, связывая разноименные заряды, обеспечивают приблизительное равенство концентрации электронов и ионов (если последние ионизованы однократно):

$$N_e \approx N_i = N, \quad (3.1)$$

или, в общем случае

$$\sum e_\alpha N_\alpha = 0, \quad (3.2)$$

где e_α и N_α соответственно заряд и концентрация частиц сорта α . В самом деле, при достаточно высокой плотности N_e (и соответственно N_i) даже малое пространственное разделение зарядов плазмы привело бы к появлению очень сильных электрических полей. Поэтому, при всех протекающих в плазме явлениях с полями естественной величины (например, порядка внешних полей) плотности электронов и ионов оказываются близкими друг к другу, даже при достаточно бурно протекающих в ней процессах.

Оценим напряженность электрического поля, возникающего при разделении зарядов в плазме. Предположим, что в плоском слое размером x произошло полное разделение зарядов и остались только

заряды одного знака. Электрическое поле в рассматриваемой области подчиняется уравнению Пуассона: $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, где $\rho = eN$ — плотность электрического заряда, и следовательно

$$\mathbf{E} = 4\pi eN\mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Потенциал плазмы в области разделения зарядов изменяется на $\varphi \sim \mathbf{E}\mathbf{x} \sim 4\pi eNx^2$. В отсутствие внешних сил потенциальная энергия частиц $e\varphi$ при самопроизвольном случайном разделении зарядов не может превышать по порядку величины их среднюю тепловую энергию T . Иными словами, значительное разделение зарядов может происходить лишь в области размером

$$x \sim r_d = \sqrt{T/4\pi e^2 N}. \quad (3.4)$$

Физический смысл величины r_d можно уточнить, рассматривая экранирование электрического поля в плазме. Допустим, что в плазму внесли точечный заряд q . На достаточно малом расстоянии от него потенциал будет равен, естественно, $\varphi \approx q/r$. Однако, на большом расстоянии зависимость $\varphi(r)$ изменится вследствие поляризации плазмы, вызванной зарядом q . Вблизи пробного заряда концентрация противоположно заряженных частиц оказывается более высокой. Это приводит к экранированию пробного заряда. Пространственный профиль потенциала φ найдем, решая уравнение Пуассона в предположении о бoльцмановском распределении зарядов в электрическом поле ($N = N_0 \exp(-U/T_\alpha)$, где $U = e_\alpha\varphi$ — потенциальная энергия в поле пробного заряда, которая имеет разный знак для электронов ($\alpha = e$, $e_e = -e$) и ионов ($\alpha = i$, $e_i = e$):

$$\Delta\varphi = 4\pi q\delta(r) + 4\pi\rho; \quad \rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha}N_{\alpha}. \quad (3.5)$$

Полагая потенциальную энергию частиц плазмы малой по сравнению с их кинетической энергией $|e\varphi| \ll T$ (об обосновании такого предположения см. ниже), в сферической системе координат имеем:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 4\pi q\delta(r) + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{T_{\alpha}}. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид ($T_e = T_i$)

$$\varphi = (q/r) \exp(-r/r_d). \quad (3.7)$$

Таким образом, на расстояниях $r > r_d$ потенциал заряда q убывает экспоненциально, а область сильного электрического поля вокруг него ограничена сферой с радиусом порядка $r_d = \sqrt{T/4\pi e^2 N}$. Это — еще одно определяющее свойство плазмы: *дебаевская экранировка зарядов*. Характерная длина экранирования впервые была введена Дебаем для сильных электролитов. В дальнейшем это понятие было перенесено в физику плазмы. Величину r_d принято называть *дебаевским радиусом* или *дебаевской длиной*.

Наконец, еще одним характерным свойством плазмы является наличие в ней так называемых *коллективных степеней свободы* — резонансов, не связанных напрямую с движением отдельных частиц. Для простоты рассмотрим опять случай разделения зарядов в плоском слое, когда все электроны смещены относительно ионов (точнее — относительно своего начального положения) на расстояние x . При этом на электроны будет действовать возвращающая сила, равная $-eE$, их движение подчиняется уравнению

$$m_e \ddot{x} = -eE = -4\pi e^2 N x, \quad (3.8)$$

которое представляет из себя уравнение гармонического осциллятора с частотой

$$\omega_{pe} = (4\pi e^2 N / m_e)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Отсюда следует, что рассасывание избыточного заряда сопровождается колебаниями с частотой ω_{pe} — *ленгмюровскими колебаниями*. Отметим, что *ленгмюровская частота* — одна из основных, но не единственная характерная частота, с которой в плазме вместе колеблются поля и частицы. Пространственное смещение электронов в таких колебаниях составляет $r \sim v_{Te} / \omega_{pe} = \sqrt{T/4\pi e^2 N}$, т. е. по порядку величины совпадает с дебаевским радиусом. Квазинейтральность плазмы, таким образом, устанавливается на расстояниях $\sim r_d$ за время $\sim 1/\omega_{pe}$.

Плазменная частота не зависит непосредственно от температуры плазмы и определяется только ее концентрацией. Для практических расчетов полезны формулы

$$\omega_{pe} = \sqrt{3.18 \cdot 10^9 N_e} \quad \text{или} \quad f_{pe} = \omega_{pe} / 2\pi = \sqrt{5.06 \cdot 10^8 N_e}. \quad (3.10)$$

По этим формулам легко оценить порядок величины плазменной частоты для различных реальных плазм. Так, например, для ионо-

сферной плазмы $\omega_{pe} \lesssim 5 \cdot 10^7$ 1/с ($f_{pe} \lesssim 9$ МГц), а для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда $\omega_{pe} \sim 10^8 \div 10^{16}$ 1/с.

В приведенном определении плазма была охарактеризована как газ заряженных частиц. Но газом нельзя считать любую систему частиц. Совокупность заряженных частиц образует газ, или, как говорят, для нее применимо *газовое приближение*, если средняя потенциальная энергия частиц мала по сравнению с их средней кинетической (тепловой) энергией. Только при этом условии частицы газа являются почти свободными и слабо взаимодействуют между собой. Для кулоновски взаимодействующих частиц указанное требование записывается в виде

$$e^2/r_{\text{ср}} \sim e^2 N^{1/3} \ll T \quad (3.11)$$

С этим неравенством связана важная характеристика плазмы:

$$\eta = \frac{e^2}{r_{\text{ср}} T} = \frac{e^2 N^{1/3}}{T} \sim \frac{e^2 \cdot 4\pi e^2 N}{r_{\text{ср}} T \cdot 4\pi e^2 N} \sim \frac{r_{\text{ср}}^2}{r_d^2} \ll 1. \quad (3.12)$$

Величина η называется плазменным параметром, и условие применимости газового приближения сводится к требованию $\eta \ll 1$. Неравенство (3.12) означает, что среднее расстояние между заряженными частицами в плазме должно быть меньше дебаевского радиуса, или иначе, внутри дебаевской сферы (радиус сферы r_d) должно находиться много частиц. В реальной газовой плазме неравенства (3.11) и (3.12), как правило, выполняются с большим запасом: для ионосферной плазмы $\eta \lesssim 10^{-4}$, а для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда $\eta \lesssim 10^{-2}$.

Глава I. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕДЫ С ДИСПЕРСИЕЙ¹

§ 4. Уравнения электромагнитного поля в среде. Тензоры комплексной проводимости и диэлектрической проницаемости

Как уже указывалось в §1, основным признаком плазмы является самосогласованное воздействие заряженных частиц и поля друг на друга. Уравнения для электромагнитного поля в плазме, таким образом, должны учитывать индуцированные заряды и токи. Эти уравнения для плазмы, как и для любой другой материальной среды, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_0), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где \mathbf{B} - вектор магнитной индукции; \mathbf{E} - вектор напряженности электрического поля; \mathbf{j} и ρ - соответственно плотности тока и заряда, индуцируемых в среде; \mathbf{j}_0 и ρ_0 - плотности тока и заряда внешних источников поля. В дальнейшем будем считать внешние источники поля либо заданными, либо отсутствующими ($\mathbf{j}_0 = 0$, $\rho_0 = 0$). В последнем случае, взяв дивергенцию от первого уравнения системы (4.1), получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Подставляя сюда значение $\operatorname{div} \mathbf{E}$ из третьего уравнения системы (4.1), находим, что индуцированные токи и заряды удовлетворяют уравнению непрерывности, выражающему закон сохранения количества

¹При составлении настоящей главы использовались материалы монографий [5], [8] и [9].

электричества:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.2)$$

В системе уравнений поля (4.1) влияние среды характеризуется появлением (по сравнению с уравнениями поля в вакууме) одной новой векторной величины \mathbf{j} - плотности индуцированного тока в среде; плотность индуцированного заряда ρ выражается через \mathbf{j} с помощью уравнения непрерывности (4.2). Часто вместо \mathbf{j} вводят векторную величину \mathbf{D} , называемую вектором электрической индукции и определяемую из соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}, t'), \quad \text{или} \\ \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя (4.3) и уравнение непрерывности (4.2), из системы уравнений электромагнитного поля в среде (4.1) можно исключить плотности индуцированных заряда и тока и записать ее в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

Система уравнений (4.1) или (4.4) не является замкнутой до тех пор, пока не задана связь плотности индуцированных токов \mathbf{j} и зарядов ρ с напряженностью электрического поля \mathbf{E} и магнитной индукцией \mathbf{B} (или связь величины \mathbf{D} с \mathbf{E} и \mathbf{B}). Поскольку магнитную индукцию \mathbf{B} можно выразить с помощью второго уравнения системы (4.1) через напряженность электрического поля \mathbf{E} , достаточно задать связь величины \mathbf{j} с \mathbf{E} (либо \mathbf{D} с \mathbf{E}). Установление этой связи является задачей той или иной конкретной модели среды, в нашем

случае — плазмы, и будет рассмотрено в дальнейшем. Однако, не задаваясь конкретной моделью среды, из общих соображений можно утверждать, что в линейной электродинамике связь \mathbf{j} и \mathbf{E} должна иметь вид

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (4.5)$$

Аналогично, для величин \mathbf{D} и \mathbf{E} имеем:

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (4.6)$$

В этих соотношениях, называемых материальными уравнениями линейной электродинамики, учтено, что состояние среды (индуцированные в ней заряды и токи) в заданный момент времени t в точке пространства \mathbf{r} может зависеть от значения поля во все предшествующие моменты времени (в соответствии с принципом причинности) и от значения поля в любой точке среды. Именно в этом проявляется временная (частотная) и пространственная дисперсия среды. Физически частотная дисперсия связана с инерцией зарядов и процессами релаксации поля в среде, а пространственная дисперсия — с передачей действия поля из одной точки среды в другую из-за наличия в плазме процессов переноса и теплового движения частиц. Функции $\hat{\sigma}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, называемые часто функциями влияния и представляющие собой ядра интегральных соотношений (4.5) и (4.6), характеризуют эффективность передачи действия поля из одной точки пространства-времени в другую. Задачей конкретной модели среды как раз и является нахождение явного выражения этих функций.

Рассмотрим далее общие свойства функциональных связей (4.5) и (4.6) для случая однородной в пространстве и во времени среды, не ограничиваясь их явным видом для какой-либо конкретной модели плазмы. Однородность во времени означает, что среда не меняет своих свойств во времени под действием внешних причин, не связанных с действием электромагнитного поля. Очевидно, в этом случае ядра интегральных соотношений (4.5) и (4.6) зависят от $t - t'$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Тогда

$$j_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'), \quad (4.7)$$

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(t', \mathbf{r}'). \quad (4.8)$$

Электромагнитное поле в среде с помощью разложения в ряд Фурье можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн, зависимость которых от времени и координат описывается функцией $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ (ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор). В силу линейности уравнений поля достаточно рассмотреть лишь одну компоненту разложения, т. е. принять, что

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (4.9)$$

Такая же зависимость принимается и для всех других входящих в уравнения поля величин. Соотношение (4.7) при этом запишется в виде

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\omega(t'-t) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} E_j(\omega, \mathbf{k}),$$

или

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\sigma}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.10)$$

где $\tau = t - t'$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Отсюда сразу же следует, что связь между комплексными амплитудами $j_i(\omega, \mathbf{k})$ и $E_j(\omega, \mathbf{k})$ имеет вид

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.11)$$

где

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\sigma}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}). \quad (4.12)$$

Величина $\sigma(\omega, \mathbf{k})$ называется тензором комплексной проводимости среды. Аналогично вводится тензор комплексной диэлектрической проницаемости среды:

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}). \quad (4.14)$$

Зависимость этих тензоров от ω определяет частотную (временную) дисперсию, а зависимость их от волнового вектора \mathbf{k} — пространственную дисперсию электромагнитного поля в среде. С учетом выражения для электрической индукции (4.3) из (4.11) и (4.13) легко установить следующую связь между тензорами $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}). \quad (4.15)$$

При этом, естественно, предполагалось, что $\omega \neq 0$.

Необходимо отметить, что тензоры $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r})$ и $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r})$ и являются действительными функциями своих переменных, так как они связывают между собой действительные величины $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$. Этого нельзя сказать о тензорах $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ даже как о функциях действительных переменных ω и \mathbf{k} . Однако из действительности функций $\hat{\sigma}_{ij}(t, \mathbf{r})$ и $\hat{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{r})$ следуют определенные свойства величин $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. В самом деле, из выражений (4.12) и (4.14) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= -\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $\operatorname{Re} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\operatorname{Im} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — соответственно действительная и мнимая части компонент тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$.

В случае однородной и изотропной среды, т. е. среды, свойства которой одинаковы в любой точке пространства и в любых направлениях, тензор диэлектрической проницаемости является функцией лишь одного единственного вектора \mathbf{k} , причем функцией четной, не меняющейся при замене \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$. Тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при этом может выражаться лишь через единичный тензор δ_{ij} ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$) и тензор $k_i k_j$; других тензоров второго ранга из единственного вектора \mathbf{k} составить невозможно. Поэтому для изотропной среды тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k). \quad (4.17)$$

Это означает, что в изотропной среде из 9 компонент тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ независимыми являются только две: $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ и $\varepsilon^l(\omega, k)$, называемые

соответственно поперечной и продольной диэлектрической проницаемостью. Смысл этих названий легко понять, если учесть, что тензор $(k_i k_j / k^2)$ при умножении на \mathbf{E}_j , выделяет продольную относительно волнового вектора часть поля (\mathbf{kE}) , а следовательно, величина $\varepsilon^l(\omega, k)$ характеризует электромагнитные свойства среды по отношению к продольному полю. Тензор же $[\delta_{ij} - (k_i k_j / k^2)]$ при умножении на \mathbf{E}_j выделяет поперечную относительно вектора \mathbf{k} часть поля $[\mathbf{kE}]$, т. е. $\varepsilon^{tr}(\omega, k)$ характеризует электромагнитные свойства среды по отношению к поперечному полю. В справедливости последних утверждений легко убедиться, положив вектор \mathbf{k} направленным, например, вдоль оси z .

Аналогично записывается для изотропной среды и тензор комплексной проводимости:

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\omega, k), \quad (4.18)$$

причем на основании соотношения (4.15) получаем

$$\varepsilon^{tr, l}(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^{tr, l}(\omega, k). \quad (4.19)$$

В силу равноправия всех направлений волнового вектора в изотропной среде из (4.16) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon^{tr, l}(\omega, k) &= \operatorname{Re} \varepsilon^{tr, l}(-\omega, k), \\ \operatorname{Im} \varepsilon^{tr, l}(\omega, k) &= -\operatorname{Im} \varepsilon^{tr, l}(-\omega, k). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Легко показать, что аналогичным соотношениям удовлетворяет и тензор $\sigma_{ij}(\omega, k)$ с заменой $\operatorname{Re} \rightleftharpoons \operatorname{Im}$.

Вычисление конкретного вида тензоров $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является задачей различных моделей описания плазмы.

§5. Энергия электромагнитного поля в среде.

Рассмотрим вопрос об энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией. Домножим первое уравнение системы (4.4) скалярно на \mathbf{E} , а второе — на \mathbf{B} и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{EB}] - \mathbf{E} j_0. \quad (5.1)$$

Проинтегрировав это соотношение по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S , найдем, используя теорему Гаусса,

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \oint dS[\mathbf{E}\mathbf{B}] - \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E} j_0. \quad (5.2)$$

В соотношении (5.2) первое слагаемое в правой части представляет собой поток вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность S , второе слагаемое представляет собой работу поля над внешними источниками в единицу времени. В пределе неограниченной среды считая, что на бесконечности поля \mathbf{E} и \mathbf{B} должны исчезать, пренебрежем первым слагаемым в правой части (5.2). Работа поля, в свою очередь, компенсируется изменением энергии поля W :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt} = -\int_V d\mathbf{r} \mathbf{E} j_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (5.3)$$

Рассмотрим далее поля \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{B} в виде плоских монохроматических волн $\propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Учитывая, что в реальности поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ представляют собой действительные функции времени t и координат \mathbf{r} , запишем

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (5.4)$$

Аналогично записываются поля \mathbf{D} и \mathbf{B} . Подставляя такие представления в формулу (5.3) и производя усреднение по времени, получим

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}) = \frac{i\omega}{4\pi} V (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D}), \quad (5.5)$$

где V — достаточно большой объем среды.

Заметим, что применение выражения (5.3) к монохроматическим полям вида (5.4), которые не исчезают на бесконечности, на первый взгляд, непоследовательно. Однако, поскольку даже если поля остаются конечными и на бесконечности, при переходе к пределу неограниченной среды поверхностный интеграл в правой части соотношения (5.2) растет гораздо медленнее объемного, и им можно пренебречь.

Подставляя далее в (5.5) материальное уравнение (4.13), получим выражение для среднего количества энергии, выделяющейся в среде в единицу времени:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{i\omega}{4\pi} \int d\mathbf{r} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^* = \\ &= \frac{i\omega}{4\pi} V [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*. \end{aligned} \quad (5.6)$$

При выводе этого соотношения использовано свойство тензора комплексной диэлектрической проницаемости (4.16): $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^*(-\omega, -\mathbf{k})$. Из формулы (5.6) непосредственно следует, что количество тепла, выделяющегося в единицу объема в единицу времени, равно

$$\frac{Q}{V} = \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})] E_i E_j^*. \quad (5.7)$$

Соотношение (5.7) позволяет сделать важный вывод: в среде, в которой тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является эрмитовым, т.е.

$$\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}), \quad (5.8)$$

тепло не выделяется, $Q = 0$, и плоская монохроматическая волна в такой среде не поглощается. Таким образом, можно сказать, что за поглощение электромагнитного поля в среде ответственна антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости.

В случае изотропной среды из соотношения (5.7) с учетом (4.17) получаем

$$\frac{Q}{V} = \frac{\omega}{2\pi k^2} \{ \text{Im } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) |(\mathbf{k}\mathbf{E})|^2 + \text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) |[\mathbf{k}\mathbf{E}]|^2 \}, \quad (5.9)$$

где $\text{Im } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ и $\text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})$ мнимые части соответствующих компонент тензора ε при действительных ω и \mathbf{k} . Первое слагаемое этого выражения определяет поглощение продольного (невихревого) поля с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, а второе — поперечного (вихревого) поля с $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

Из соотношения (5.9) следует очень важное свойство тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ для изотропной среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Очевидно, что в такой среде любые электромагнитные волны должны поглощаться, поэтому $Q > 0$. Поэтому

$$\text{Im } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) > 0; \quad \text{Im } \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) > 0. \quad (5.10)$$

Нарушение любого из этих неравенств приводит к тому, что возможно изменение знака Q , т. е. перекачка энергии от среды к электромагнитному полю. В такой среде возникшее в результате флуктуаций поле может нарастать во времени, вызывая тем самым уменьшение энергии среды. Очевидно, что это возможно только если среда находится в термодинамически неравновесном состоянии. Следует, однако, заметить, что нарушение какого-либо из неравенств (5.10) еще не является достаточным условием развития неустойчивости в среде и нарастания в ней электромагнитного поля. Нужно, чтобы в той области значений ω и \mathbf{k} , где $\text{Im } \epsilon^l < 0$ и $\text{Im } \epsilon^{lr} < 0$, в среде могли распространяться электромагнитные волны.

При написании формулы (5.4) электромагнитное поле в среде считалось строго монохроматическим. Реально поле в среде всегда состоит из суперпозиции монохроматических полей с частотами, близкими к некоторому значению ω . Поэтому вместо (5.4) необходимо записать

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t)e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5.11)$$

где $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$ — медленно меняющаяся функция времени t . Аналогичные соотношения, естественно, записываются также для полей $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}, t)$ и $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}, t)$. Подставим, далее, эти соотношения для \mathbf{D} и \mathbf{E} в (4.8) и, учитывая медленность изменения величины $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$ во времени, разложим ее в ряд Тейлора, ограничиваясь первым членом разложения ($\tau = t - t'$):

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t') = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) - \tau \frac{\partial \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)}{\partial t} + \dots \quad (5.12)$$

В результате для i -той компоненты вектора электрической индукции $D_i(\omega, \mathbf{k}, t)$ имеем¹ (ср. (4.13)):

$$D_i(\omega, \mathbf{k}, t) \approx \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})E_j(\omega, \mathbf{k}, t) + i \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} E_i(\omega, \mathbf{k}, t), \quad (5.13)$$

¹При выводе (5.13) использовалось равенство:

$$\int_0^\infty i\tau \epsilon_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^\infty \epsilon_{ij}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega}.$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ по-прежнему определяется выражением (4.14). Подставляя (5.13) в (5.3), после усреднения по времени вместо (5.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{d\overline{W}}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dt} [B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t)] + \right. \\ &+ E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial t} E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \\ &+ E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial t} E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k}) \left. \right\} + \\ &+ \frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})] E_i(\omega, \mathbf{k}, t) E_j^*(\omega, \mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.14)$$

В случае строго монохроматического поля величины $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$ и $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}, t)$ не зависят от времени t и соотношение (5.14) переходит в (5.6), определяющее количество энергии, выделяющейся в единице объема среды в единицу времени. При этом отличным от нуля оказывается лишь последнее слагаемое в правой части (5.6). Если же поле не строго монохроматическое, а среда непоглощающая, то $\varepsilon_{ij}^*(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k})$, и последнее слагаемое в (5.6) обращается в нуль. В результате находим

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{V} \frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4\pi} B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4\pi} E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Величину

$$\begin{aligned} w(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{V} \overline{W} = \frac{1}{4\pi} B_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) B_i(\omega, \mathbf{k}, t) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} E_i^*(\omega, \mathbf{k}, t) E_j(\omega, \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

можно рассматривать как среднюю плотность энергии электромагнитного поля в непоглощающей среде. В случае изотропной непоглощающей среды выражение (5.16) легко приводится к виду

$$\begin{aligned} w(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi k^2} \left\{ |(\mathbf{k} \mathbf{E})|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, k) + \right. \\ &+ \left. |[\mathbf{k} \mathbf{E}]|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left[\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Отсюда для термодинамически равновесной среды следуют неравенства

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) > 0; \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left(\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} \right) > 0 \quad (5.18)$$

При $\omega > 0$ энергия поля в среде положительна. В неравновесной среде величина ω может стать отрицательной и условия (5.18) могут нарушаться. Нарушение какого-либо из неравенств (5.18) относительно соответствующей волны (продольной, либо поперечной), которую при этом называют *волной с отрицательной энергией*, является признаком электромагнитной неустойчивости среды.

§ 6. Электромагнитные волны в диспергирующей среде

Какие же волны могут распространяться в среде, например, в плазме, в отсутствие внешних источников поля или, иными словами, при каких условиях выражения типа $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}r)$ являются решениями системы уравнений (4.4) при $j_0 = 0$ и $\rho_0 = 0$? На этот вопрос можно ответить, если известно выражение для тензора диэлектрической проницаемости. При этом можно найти так называемые *собственные электромагнитные колебания среды* или, по другой терминологии, *нормальные волны среды*. В вакууме величины ω и \mathbf{k} действительны и связаны соотношением

$$\omega = ck. \quad (6.1)$$

Уравнения, связывающие между собой частоту ω и волновой вектор волны \mathbf{k} ,

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (6.2)$$

называются дисперсионными уравнениями. Соотношение (6.1) является, в частности, таким уравнением для электромагнитных волн в вакууме.

Найдем дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в среде. Если среда непоглощающая (как известно из предыдущего параграфа, для таких сред тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ является эрмитовым), то ω и \mathbf{k} , как и в вакууме, — действительные величины; если же среда поглощающая, то ω и \mathbf{k} — комплексны. Рассмотрим, какие существуют нетривиальные решения системы уравнений поля (4.4) в отсутствие

внешних источников. Применим ко второму уравнению системы операцию rot и выразим $\text{rot } \mathbf{B}$ с помощью первого уравнения. В результате с учетом соотношения $\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$ приходим к волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} = 0. \quad (6.3)$$

Подставляя далее зависимость напряженности электрического поля от времени и координат в виде плоской монохроматической волны (4.9), с учетом материального уравнения (4.13) имеем $[\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$ — другое обозначение тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$]:

$$k^2 \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) - \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})) - \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (6.4)$$

Распишем уравнение (6.4) как систему трех однородных алгебраических уравнений для компонент поля \mathbf{E} :

$$\Lambda_{ij} E_j = \left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = 0. \quad (6.5)$$

Условие существования нетривиальных решений этой системы, которое очевидно, имеет вид равенства нулю ее детерминанта, и представляет собой искомое дисперсионное уравнение, которое связывает между собой частоту ω и волновой вектор \mathbf{k} для электромагнитных волн в среде:

$$\text{Det} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 \quad (6.6)$$

В случае изотропной среды, тензор диэлектрической проницаемости которой имеет вид (4.17), уравнение (6.6) принимает вид

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \right]^2 \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (6.7)$$

в чем легко убедиться, положив \mathbf{k} направленным, например, вдоль оси z . Система (6.5) распадается при этом на два независимых уравнения ($\omega \neq 0$)

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l = 0; \quad \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \right] \mathbf{E}^{tr} = 0, \quad (6.8)$$

где $\mathbf{E}^l = \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})/k^2$ — компонента электрического поля, параллельная волновому вектору \mathbf{k} , т. е. продольное поле, а $\mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l$ — компонента электрического поля, перпендикулярная к вектору \mathbf{k} т.е. поперечное поле. Дисперсионное уравнение (6.7) также, естественно, распадается на два соотношения:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0; \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (6.9)$$

причем первое из них представляет собой условие существования продольных волн, а второе — поперечных волн в среде и соответствует при этом двукратному корню уравнения (6.6).

В общем случае анизотропной среды дисперсионное уравнение (6.6) не распадается на уравнения продольных и поперечных волн. Следовательно, и электромагнитное поле в среде не является ни чисто продольным, ни чисто поперечным. Однако при некоторых соотношениях между ω и \mathbf{k} поле $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ с большой степенью точности оказывается продольным, т. е. $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \parallel \mathbf{k}$. Отметим, что продольное поле по определению является потенциальным, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, а для плоской монохроматической волны $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\varphi(\omega, \mathbf{k})$. При этом из третьего уравнения системы (4.4) получаем:

$$k_i \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) k_j \varphi(\omega, \mathbf{k}) = 0.$$

Отсюда находим дисперсионное уравнение продольных, или потенциальных, волн в анизотропной среде:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{k^2} = 0. \quad (6.10)$$

Величину $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$, определенную соотношением (6.10), называют *продольной диэлектрической проницаемостью* анизотропной среды. Легко показать, что для изотропной среды, когда тензор $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})$ имеет вид (4.17), величина $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ совпадает с $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$.

Как уже отмечалось, дисперсионное уравнение (6.6) устанавливает связь между ω и \mathbf{k} для электромагнитных волн, которые могут существовать в среде, или, как говорят, для собственных волн среды. С помощью дисперсионного уравнения можно при заданном действительном значении \mathbf{k} определить комплексную частоту $\omega(\mathbf{k})$, или, иными словами, найти спектр частот собственных колебаний среды.

И наоборот, при заданном действительном значении ω из дисперсионного уравнения можно найти комплексную проекцию волнового вектора \mathbf{k} в любом заданном направлении. Эти два подхода соответствуют двум различным постановкам задачи при решении интегродифференциальных уравнений электромагнитного поля в среде (интегральный характер этих уравнений обусловлен материальным уравнением (4.13)). Речь может идти о начальной задаче, когда известно начальное состояние электромагнитного поля в среде и необходимо исследовать его временное развитие, и граничной задаче, когда определяется пространственное изменение поля в среде при его известном значении на некоторой поверхности.

Начальная задача. Пусть в пространственно однородной неограниченной среде в начальный момент времени $t = 0$ каким-то образом (в результате флуктуаций или под действием внешних источников) возникло электромагнитное поле. Рассмотрим изменение во времени созданного таким образом электромагнитного поля в среде. Для решения этой задачи недостаточно знания начальных значений полей $\mathbf{E}(0, \mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(0, \mathbf{r})$, необходимо также задать начальное значение электрической индукции $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$, которое, согласно соотношению (4.6) определяется всей предысторией поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ до момента $t = 0$. Физическая причина необходимости знания предыстории поля $\mathbf{E}(0, \mathbf{r})$ обусловлена принципом причинности и связана с временной (частотной) дисперсией среды, а именно, с инерцией носителей заряда и процессами релаксации. Если бы были известны начальные условия не только для полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , но и для всех частиц среды, то в знании предыстории поля \mathbf{E} не было бы необходимости, ибо сразу можно было бы вычислить $\mathbf{D}(0, \mathbf{r})$. Такая постановка задачи, однако, нереальна; проще задать $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ для всех моментов $t \leq 0$. Для решения поставленной так начальной задачи воспользуемся односторонним преобразованием Фурье-Лапласа для \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \\ \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) &= \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Im } \omega = \sigma > 0). \end{aligned} \quad (6.11)$$

При этом уравнения поля (4.4) при учете материального уравнения (4.13) легко сводится к следующей неоднородной системе трех алге-

браических уравнений:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} E_j &= \left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j(\omega, \mathbf{k}) = \\ &= \frac{i\omega}{c} D_i(\mathbf{k}, t=0) + \frac{i}{c} [\mathbf{k} \mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)]_i, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{k}, t=0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{k}, t=0)$ — Фурье-образы по пространственным координатам от начальных значений $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Решение этих уравнений имеет вид

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})}{\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})}. \quad (6.13)$$

где $\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — определитель систем (6.5), (6.12) и задается выражением (6.6)

$$\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right|, \quad (6.14)$$

а $\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})$ — соответствующее алгебраическое дополнение, которое зависит от правой части системы (6.12), т. е. от начальных значений $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Подставив решение (6.13) в преобразование Фурье-Лапласа (6.11), получим поле при произвольных начальных условиях. Для начального возмущения в виде одной Фурье-гармоники с заданным \mathbf{k} имеем

$$E_i(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Lambda_i(\omega, \mathbf{k})}{\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})}. \quad (6.15)$$

Интеграл этот обычно вычисляют с помощью теории вычетов путем обхода полюсов в плоскости комплексной переменной ω . Контур интегрирования, лежащий выше действительной оси ($\sigma \geq 0$) замыкается окружностью бесконечного радиуса, причем интеграл по замкнутому контуру определяется суммой вычетов подынтегральной функции (6.15) в полюсах, лежащих внутри контура интегрирования. Полюсы подынтегрального выражения определяются нулями определителя (6.14):

$$\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (6.16)$$

Пусть корни уравнения (6.16), совпадающего с дисперсионным уравнением (6.6), равны $\omega_n(\mathbf{k})$. Тогда $\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно представить в виде произведения $\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \prod_n (\omega - \omega_n(\mathbf{k}))$ и вклад вычетов подынтегральной функции (6.15) в интеграл приводит к следующей зависимости поля от времени¹:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \sim \sum_n e^{-i\omega_n(\mathbf{k})t}, \quad (6.17)$$

т. е. поле представляется в виде суперпозиции плоских волн с частотами, определяемыми уравнением (6.16).

Корни дисперсионного уравнения $\omega_n(\mathbf{k})$ являются комплексными величинами, знак мнимой части которых показывает, усиливаются или затухают соответствующие возмущения. Если для всех корней мнимая часть $\text{Im } \omega_n(\mathbf{k}) < 0$, то члены ряда (6.17) уменьшаются (затухают) во времени. При этом величина $\gamma_n = |\text{Im } \omega_n(\mathbf{k})|$ называется декрементом затухания волны ω_n . Ясно, что с течением времени основной вклад в величину поля дает слагаемое, соответствующее возмущению с минимальным γ_n . Если среди корней дисперсионного уравнения есть корень с $\text{Im } \omega_n = 0$, то соответствующий член суммы (6.17) описывает незатухающие собственные колебания среды (незатухающие нормальные волны). Наконец, если среди корней есть хотя бы один корень с $\text{Im } \omega_n > 0$, то колебания данного типа будут нарастать во времени. Это возможно лишь тогда, когда среда находится в неустойчивом состоянии; величину $\gamma_n = \text{Im } \omega_n(\mathbf{k})$ при этом называют инкрементом нарастания колебаний.

Таким образом, корни дисперсионного уравнения (6.6), (6.16) определяют, помимо условия существования нетривиальных волновых решений уравнений поля без внешних источников, также и характер развития начальных электромагнитных возмущений во времени, обусловленный свойствами самой среды, а не связанный с особенностями этих возмущений. В этом, в частности, и состоит важное физическое значение дисперсионного уравнения в линейной электродинамике сплошных сред.

Граничная задача. Дисперсионное уравнение (6.6) определяет изменение электромагнитного поля не только во времени, но и в пространстве. В частности, по корням дисперсионного уравнения можно

¹Интегрирование выражения (6.15) при наличии точек ветвления или других особых точек в подынтегральной функции требует особого рассмотрения.

судить о характере проникновения и распространения поля вглубь среды при падении электромагнитной волны на ее границу. С другой стороны, тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, который фигурирует в дисперсионном уравнении (6.6), строго говоря, можно ввести только для неограниченной и пространственно однородной среды. Однако имеющаяся здесь непоследовательность может оказаться вполне допустимой, когда размеры среды значительно больше длин волн исследуемых колебаний электромагнитного поля. В этом случае дисперсионное уравнение (6.6) будет правильно описывать пространственное изменение электромагнитных волн на расстояниях от границы, значительно превышающих длину волны. На таких расстояниях пространственное изменение поля определяется свойствами самой среды, а не конкретными граничными условиями.

Если в начальной задаче мы искали комплексные решения дисперсионного уравнения $\omega(\mathbf{k})$ при действительных значениях \mathbf{k} , то при решении граничной задачи обычно определяют комплексную проекцию вектора $\mathbf{k}(\omega)$ на заданное направление в предположении, что и две другие ортогональные проекции $\mathbf{k}(\omega)$ действительны. Изменение поля в пространстве при этом определяется выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \sim \sum_n e^{i\mathbf{k}_n(\omega)\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (6.18)$$

где $\mathbf{k}_n(\omega)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению (6.6).

В общем случае $\mathbf{k}_n(\omega)$ — комплексные величины. Если $\text{Im } k_n(\omega, \theta) > 0$ (здесь θ - угол между заданным направлением и вектором $\mathbf{k}_n(\omega)$), то волна будет затухать в данном направлении, в противном случае волна будет нарастать. Однако сделать вывод об устойчивости среды на основании знака $\text{Im } k_n(\omega, \theta)$ нельзя. Для этого необходимо строго решать граничную задачу и провести тщательный анализ дисперсионных кривых $k_n(\omega, \theta)$. Вопрос об устойчивости среды значительно проще исследовать исходя из начальной задачи, т. е. решая дисперсионное уравнение (6.6) относительно $\omega(\mathbf{k})$. Если известно, что среда устойчива, т. е. $\text{Im } \omega < 0$, то $\text{Im } k_n(\omega, \theta)$ характеризует пространственное затухание данной "моды" колебаний в данном направлении, и, наоборот, для неустойчивой среды $\text{Im } \omega > 0$ является характеристикой пространственного усиления волны с заданной частотой.

Для описания распространения электромагнитных волн в среде вместо вектора \mathbf{k} часто вводят вектор комплексного показателя преломления \mathbf{n} , связанный с \mathbf{k} соотношением:

$$\mathbf{n} = \frac{c\mathbf{k}}{\omega}. \quad (6.19)$$

Уравнение (6.4) для \mathbf{n} переписывается в виде

$$n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{nE}) - \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = 0, \quad (6.20)$$

а дисперсионное уравнение (6.6) — как

$$\left| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}(\omega, \frac{\omega}{c} \mathbf{n}) \right| = 0. \quad (6.21)$$

Из этого уравнения можно определить проекцию вектора \mathbf{n} на заданное направление θ :

$$n(\omega, \theta) = \tilde{n}(\omega, \theta) + i\kappa(\omega, \theta), \quad (6.22)$$

где \tilde{n} — собственно показатель преломления, а κ — коэффициент поглощения волны.

В общем случае комплексного $\mathbf{k}_n(\omega)$ волна вида (6.18) может быть названа "плоской" лишь условно, так как плоскости постоянной фазы (плоскости, перпендикулярные вектору $\text{Re } \mathbf{k}(\omega)$ в этом случае не совпадают с плоскостями постоянной амплитуды (плоскости, перпендикулярные вектору $\text{Im } \mathbf{k}(\omega)$). Поэтому такие волны называют неоднородными плоскими волнами в отличие от однородных плоских волн, для которых указанные плоскости совпадают.

Если волна слабо затухает, т. е. $|\text{Im } \mathbf{k}(\omega)| \ll |\text{Re } \mathbf{k}(\omega)|$, то с большой степенью точности можно сказать, что фазовая и групповая скорости волны не изменяются по сравнению со случаем непоглощающей прозрачной среды. При этом фазовая скорость волны

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (6.23)$$

характеризует скорость распространения уровня постоянной фазы ($\varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0 = \text{const}$) вдоль направления вектора \mathbf{k} , а групповая скорость

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega \quad (6.24)$$

характеризует скорость перемещения амплитуды и, следовательно, энергии волны (подробнее см. ниже).

Остановимся кратко на связи затухания (или нарастания) волн в слабопоглощающих (усиливающих) средах во времени и в пространстве. В слабопоглощающих средах антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости, ответственная за поглощение волн [см. (5.7)], мала по сравнению с эрмитовой частью. Это приводит к тому, что в выражении для $\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ мнимые слагаемые малы по сравнению с действительными, т. е. $\text{Im} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})] \ll \text{Re} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})]$. Тогда, если нас интересует поведение поля волны во времени (начальная задача) то приближенное решение уравнения (6.6) можно записать в виде²

$$\omega \rightarrow \omega + i\gamma, \quad (6.25)$$

где $\omega(\mathbf{k})$ — действительные корни уравнения

$$\text{Re} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})] = \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}^H(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (6.26)$$

характеризующие спектр частот колебаний, а

$$\gamma(\mathbf{k}) = - \frac{\text{Im} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})]}{\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})]} \quad (6.27)$$

соответственно — декремент затухания (или инкремент нарастания) колебаний. При $\gamma(\mathbf{k}) > 0$ среда отдает энергию волне, происходит раскачка колебаний, если $\gamma(\mathbf{k}) < 0$ происходит диссипация энергии волны, а энергия среды при этом увеличивается.

Для анализа пространственного затухания волны в заданном направлении дисперсионное уравнение (6.6) необходимо решить относительно $k(\omega, \theta)$. При этом мы получим $\text{Re } k(\omega, \theta)$ — действительные корни уравнения (6.6) — и величину

$$\text{Im } k(\omega, \theta) = \frac{\omega}{c} \varkappa(\omega, \theta) = - \frac{\text{Im} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})]}{\frac{\partial}{\partial k(\omega, \theta)} \text{Re} [\text{Det } \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})]}, \quad (6.28)$$

²Чтобы не вводить лишних обозначений, комплексную и действительную частоты обозначаем одной и той же буквой ω . В тех случаях, когда необходимо учитывать отдельно $\text{Re } \omega$ и $\text{Im } \omega$, они обозначаются соответственно через ω и γ .

которая характеризует затухание (нарастание) волны в пространстве.

Из формул (6.27) и (6.28) легко установить следующую связь между временным и пространственным затуханиями волны:

$$\operatorname{Im} k(\omega, \theta) = -\frac{\gamma(\theta)}{v_g(\theta)}, \quad \gamma = -v_g(\theta) \operatorname{Im} k(\omega, \theta) = -\frac{\omega \varkappa}{\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \tilde{n}(\omega)]}, \quad (6.29)$$

где $v_g(\theta) = \partial \omega / \partial k(\theta)$ — групповая скорость волны в заданном направлении θ .

Волновой пакет. Энергия волны. Выше мы убедились, что для нормальных волн, распространяющихся в среде, величины ω и \mathbf{k} не являются независимыми, а связаны дисперсионным соотношением (6.6). Каким же образом тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ можно рассматривать как функцию независимых переменных ω и \mathbf{k} ? Дело в том, что нормальные волны, или собственные колебания среды, соответствуют решениям уравнений поля (4.4) в отсутствие внешних источников $\rho_0 = 0$ и $\mathbf{j}_0 = 0$. При произвольных ρ_0 и \mathbf{j}_0 переменные ω и \mathbf{k} уже не связаны дисперсионным уравнением (6.6), и функция $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ описывает линейный отклик среды на электромагнитное поле вида $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ с независимыми значениями ω и \mathbf{k} . В дальнейшем мы будем изучать поведение именно собственных волн среды (плазмы). Отметим, что решение задачи о свойствах таких волн методом Фурье, например разложением по плоским волнам для однородной среды, дает полное решение задачи, но еще не позволяет прямым образом получить качественную картину процесса. Более адекватным для этого является язык волновых пакетов, медленно меняющихся в пространстве и во времени. Отдельный участок такого пакета приближенно можно считать плоской волной. Электрическое поле такой волны имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \text{к. с.} \quad (6.30)$$

Здесь $|2E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)|$ — амплитуда колебаний электрического поля, $\omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$ — собственная частота, которая является решением дисперсионного уравнения (6.6), $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}$ — единичный вектор поляризации волны, который может быть найден из уравнений (6.5) при $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ и в общем случае вектор $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ является комплексным. Наиболее важными характеристиками такого пакета являются величины \mathbf{k} и $\langle E^2 \rangle$

— среднее по периоду колебаний значение квадрата электрического поля, пропорциональное плотности энергии волны в данной точке.

Естественно, что уравнения, описывающие поведение волновых пакетов со временем, должны формулироваться именно для основных величин \mathbf{k} и $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$. Первое из этих уравнений получить довольно просто, в особенности для однородной среды. В самом деле, если мы имеем дело с почти синусоидальной волной, характеристики которой медленно меняются в пространстве и во времени, то вместо \mathbf{k} и $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ можно ввести фазу φ , являющуюся функцией r и t , так что выражение (6.30) для пакета будет иметь вид ($\varphi(r, t) = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0$)

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(r, t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\varphi} + \text{к. с.} \quad (6.31)$$

Скорость изменения фазы в данной точке, т. е. $\partial\varphi/\partial t$, очевидно, соответствует частоте колебаний, а градиент фазы соответствует волновому вектору, так как он устанавливает величину и направление наискорейшего изменения фазы в пространстве. Таким образом, имеем

$$\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = -\nabla\varphi. \quad (6.32)$$

Дифференцируя второе из этих соотношений по времени и используя первое из них, находим

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} = -\nabla\omega \quad (6.33)$$

В однородной среде частота колебаний является функцией только \mathbf{k} : $\omega = \omega_{\mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k})$. Таким образом, уравнение (6.33) является дифференциальным уравнением относительно $\mathbf{k}(r, t)$, и с его помощью можно найти, как эволюционирует волновой вектор со временем в любой точке пространства. Например, в одномерном случае, когда волновое число k зависит только от координаты x , уравнение (6.33) имеет простой вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (6.34)$$

где $v_g = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость. Как мы видим, волновое число пакета просто переносится с групповой скоростью.

Перейдем к нахождению уравнения для $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ или, что более целесообразно — для плотности энергии волны, поскольку эта величина

имеет более определенный физический смысл. Напомним, что согласно (5.16) плотность энергии волны связаны с электрическим и магнитным полями соотношением

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi} |\mathbf{B}_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{4\pi} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 a_i^* a_j \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.35)$$

где индекс \mathbf{k} означает "принадлежность" к волне $\omega_{\mathbf{k}}$. Поскольку из второго уравнения системы (4.4) поле \mathbf{B} может быть выражено через \mathbf{E} ($\mathbf{B} = (c/\omega)[\mathbf{k}\mathbf{E}]$; и далее $[[\mathbf{k}\mathbf{E}]]^2 = k_{\perp}^2 |\mathbf{E}|^2 = (k^2 - k_{\parallel}^2) |\mathbf{E}|^2 = (k^2 - |\mathbf{k}\mathbf{a}|^2) |\mathbf{E}|^2$) для $\omega_{\mathbf{k}}$ имеем (ср. (5.16)):

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \left[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \frac{c^2}{\omega^2} |(\mathbf{k}\mathbf{a}_{\mathbf{k}})|^2 \right] \right\}. \quad (6.36)$$

где $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \equiv a_{\mathbf{k},i}^* \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) a_{\mathbf{k},j}$, а производная по ω от выражения в фигурных скобках берется при значении $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$.

Обратимся теперь к связи электрической индукции $D_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \equiv E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ для медленно меняющихся волновых пакетов (6.30). Аналогично тому, как мы поступали в §5 [см. (5.12)], разложим в соотношении (4.8) $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t', \mathbf{r}')$ в ряд Тейлора по малым параметрам $\tau = t - t'$ и $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Физически это разложение соответствует тому, что характерные временной и пространственный масштабы функции влияния $\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \rho)$ существенно меньше, чем соответствующие масштабы изменения амплитуды поля, или, что то же самое, амплитуда поля слабо меняется во времени на периоде волны $T = 2\pi/\omega_{\mathbf{k}}$ и в пространстве на длине волны $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. Для $E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t)$ имеем:

$$E_{\mathbf{k},j}(t - \tau, \mathbf{r} - \rho) \approx E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t) - \tau \frac{\partial E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \quad (6.37)$$

В результате из (4.8) для $D_{\mathbf{k},i}(\mathbf{r}, t)$, используя (4.14) получаем:

$$D_{\mathbf{k},i}(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t) + \\ + i \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - i \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\partial k_l} \frac{\partial E_{\mathbf{k},j}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l}. \quad (6.38)$$

Подставляя, далее, (6.38) в волновое уравнение (6.3), учитывая представление (6.30), и домножая полученное выражение на $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$, получим уравнение для $E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}$):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial t} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{r}} E_{\mathbf{k}} - i \frac{\omega^2}{c^2} [a_{\mathbf{k},i}^* \varepsilon_{ij}^A(\omega, \mathbf{k}) a_{\mathbf{k},j}] E_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.39)$$

где

$$\Lambda = a_{\mathbf{k},i}^* \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) a_{\mathbf{k},j} = -k^2 + |(\mathbf{k}\mathbf{a})|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} [a_{\mathbf{k},i}^* \varepsilon_{ij}^H(\omega, \mathbf{k}) a_{\mathbf{k},j}], \quad (6.40)$$

при $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$ функция Λ обращается в нуль, так как она получается просто умножением уравнения (6.4) на величину $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}$. Можно сказать, что $\Lambda = 0$ вдоль всей дисперсионной кривой $\omega = \omega_{\mathbf{k}}$. Таким образом, вдоль этой кривой $d\Lambda = (\partial\Lambda/\partial\omega)d\omega + (\partial\Lambda/\partial\mathbf{k})d\mathbf{k} = 0$, и следовательно,

$$\frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \mathbf{v}_g = -\frac{\partial\Lambda/\partial\mathbf{k}}{\partial\Lambda/\partial\omega}, \quad (6.41)$$

где \mathbf{v}_g — по-прежнему групповая скорость волны. Домножая (6.39) на $E_{\mathbf{k}}^*/4\pi$ и принимая во внимание выражение для плотности энергии (6.36), мы легко приходим к искомому уравнению переноса энергии волны

$$\frac{\partial w_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{v}_g w_{\mathbf{k}}) \equiv \frac{\partial w_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}_g w_{\mathbf{k}}) = 2\gamma_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}}. \quad (6.42)$$

Здесь

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \hat{\varepsilon}^A \mathbf{a}_{\mathbf{k}}}{\partial(\omega\Lambda)/\partial\omega|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} = -\frac{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \hat{\varepsilon}^A \mathbf{a}_{\mathbf{k}}}{\partial(\omega\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(\hat{\varepsilon}^H)\mathbf{a}_{\mathbf{k}})/\partial\omega|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}} \quad (6.43)$$

есть инкремент (декремент) волны, и, как нетрудно убедиться, такое определение его совпадает с данным в формуле (6.27). В уравнении (6.42) стоит именно $2\gamma_{\mathbf{k}}$, так как квадрат амплитуды затухает вдвое быстрее самой амплитуды.

Глава II. РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ¹

Перейдем теперь к изучению свойств собственно плазмы. Его цель — получение выражений для тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, которые позволили бы исследовать конкретные решения дисперсионного уравнения (6.6), и, следовательно, характеристики электромагнитных волн в плазме.

§ 7. Движение отдельных частиц

Наиболее простая (на первый взгляд) модель количественного описания представляют плазму как систему не взаимодействующих между собой заряженных частиц, свободно движущихся во внешних полях. При этом, если плотность частиц сорта α равна N_α , то необходимо решить $\sum_\alpha N_\alpha$ уравнений движения с заданием такого же числа начальных условий, т. е. координат и скоростей частиц. Естественно, что такая задача, даже при современном состоянии компьютерной техники, оказывается невыполнимой². Уравнение движения частицы с массой m и зарядом e записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}] \right\} + \mathbf{g}, \quad (7.1)$$

где \mathbf{g} — ускорение, вызываемое силой неэлектромагнитного происхождения, например, гравитационной силой или силой трения. Рассмотрим систему (7.1).

Очевидно, что в случае, когда электрическое поле и неэлектромагнитные силы отсутствуют ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{g} = 0$), а магнитное поле однородно, движение заряженной частицы в направлении магнитного поля \mathbf{B} равномерно и прямолинейно, а в поперечном направлении частица движется по окружности с частотой $\omega_B = eB/mc$, которую называют циклотронной частотой или гирочастотой заряженных частиц. Направление вращения частиц зависит от знака их заряда, или,

¹При составлении настоящей главы использовались материалы монографий [5], [7] [10], [12] и [13].

²При численном моделировании даже в наиболее мощных современных компьютерах приходится вместо реальных частиц вводить так называемые "макро-частицы", представляющие собой совокупность многих частиц реальной плазмы [16].

другими словами, гирочастота имеет разный знак для положительно и отрицательно заряженных частиц. Такой характер движения частиц, делает свойства плазмы в постоянном магнитном поле зависящими от направления в пространстве, т. е. такая магнитоактивная плазма является анизотропной.

Аналогично (3.10), выпишем формулы для гирочастоты, полезные для практических расчетов:

$$\omega_{B_e} = 1.76 \cdot 10^7 B \text{ (Гц)}, \quad \omega_{B_i} = \omega_{B_e} \cdot (m_e/m_i). \quad (7.2)$$

Например, на уровне Земли в средних широтах электронная гирочастота равна $\omega_{B_e} = 8.5 \cdot 10^6$ 1/с, в ионосферной плазме на высотах порядка 250 км, где основной ионной составляющей являются однократно заряженные ионы атомарного кислорода, $\omega_{B_i} = 280$ 1/с.

Найдем скорость движения частицы, полагая ее движение гармоническим, $\mathbf{v} \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}r)$, и заменяя $d/dt \rightarrow -i\omega$ (индекс α пока опускаем). Второе уравнение системы (7.1) при этом можно решать для компонент вектора \mathbf{v} , однако проще домножить это уравнение векторно на \mathbf{B}_0 . В результате имеем:

$$-i\omega[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] = \frac{e}{m}[\mathbf{E}\mathbf{B}_0] - \frac{e}{mc}[\mathbf{B}_0[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]] + [\mathbf{g}\mathbf{B}], \quad (7.3)$$

или

$$-i\omega[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] = \frac{e}{m}[\mathbf{E}\mathbf{B}_0] - \frac{e}{mc}B_0^2\mathbf{v}_\perp + [\mathbf{g}\mathbf{B}_0]. \quad (7.4)$$

Отсюда при $\omega = 0$, т. е. для стационарного движения частицы, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp = \frac{c}{B^2} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{m}{e}\mathbf{g} \right) \mathbf{B} \right], \quad (7.5)$$

т. е. под действием полей \mathbf{E} и \mathbf{g} , перпендикулярных внешнему магнитному полю \mathbf{B}_0 , частицы дрейфуют поперек всех внешних полей (дрейф в скрещенных полях), причем скорость электрического дрейфа $v_E = (c/B_0^2)[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]$ не зависит от массы частицы и знака ее заряда. Таким образом, электроны и ионы, например, в скрещенных электрическом и магнитном полях, постоянных во времени, будут дрейфовать в одну и ту же сторону с одинаковыми скоростями. Напротив, под действием поля \mathbf{g} , которое не зависит от знака заряда частицы, электроны и ионы дрейфуют в разные стороны, что приводит к появлению тока в плазме.

Относительный дрейф заряженных частиц разного знака в плазме может возникнуть также под действием постоянного продольного (параллельного магнитному полю) электрического поля \mathbf{E} . Если при этом $\mathbf{g} = 0$, то согласно уравнениям (7.1) продольная скорость частицы будет возрастать пропорционально времени:

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E} t. \quad (7.6)$$

Если же частица при движении испытывает силу трения в результате столкновений с частицами другого сорта $\mathbf{g} = -\nu \mathbf{v}$ (более подробно см. §§10–12), то в результате устанавливается стационарная (дрейфовая) скорость

$$\mathbf{v} = \frac{e \mathbf{E}}{m \nu}. \quad (7.7)$$

С помощью уравнений (7.1) можно вычислить ток, индуцированный в плазме под действием высокочастотного электромагнитного поля, и найти тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Действительно, если искать решение линеаризованной системы в виде $\mathbf{v} \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, то при $\mathbf{g} = -\nu \mathbf{v}$ и $\omega \gg k v$ из (7.1), (7.3) и (7.4) имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m} \frac{\nu - i\omega}{\omega_B^2 + (\nu - i\omega)^2} \times \\ \times \left\{ \mathbf{E} + \frac{\omega_B}{\nu - i\omega} \left[\frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}_0]}{B_0} + \frac{\omega_B}{\nu - i\omega} \frac{\mathbf{B}_0(\mathbf{E}\mathbf{B}_0)}{B_0^2} \right] \right\}, \quad (7.8)$$

здесь \mathbf{B}_0 — внешнее постоянное магнитное поле, \mathbf{E} — электрическое поле волны, а также принято, что $\mathbf{g} = -\nu \mathbf{v}$, т. е. приближенно учтена сила трения. Плотность тока, индуцированного в плазме при движении заряженных частиц, равна (см. также (4.11))

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha N_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.8) в (7.9) и учитывая (4.15), мы с легкостью получаем выражение для компонент тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} . В случае постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси z , тензор и его компоненты имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\perp\alpha} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2 (\omega + i\nu_{\alpha})}{\omega[(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \omega_{B\alpha}^2]}, \\ g &= \sum_{\alpha} g_{\alpha} = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega[(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \omega_{B\alpha}^2]}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\parallel\alpha} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha})}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь $\omega_{P\alpha} = \sqrt{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}/m_{\alpha}}$, $\omega_{B\alpha} = e_{\alpha} B_0/m_{\alpha} c$.

§ 8. Магнитогидродинамическое описание плазмы

Противоположной по сравнению с приближением отдельных частиц является гидродинамическая модель описания плазмы. В этой модели предполагается, что корреляции как между заряженными частицами, так и между заряженными и нейтральными частицами настолько сильны, что плазма ведет себя как проводящая жидкость.

Шведский физик Х. Альвен первым обратил внимание на то, что проводящие жидкость или газ при движении в магнитном поле обнаруживают интересные свойства, связанные с тем, что при перемещении проводящих масс жидкости в них возбуждаются токи индукции, которые совместно с магнитным полем оказывают обратное воздействие на жидкость. Речь при этом может идти о любой жидкости, в том числе — о плазме, важно лишь, чтобы она была электропроводной.

В приближении *магнитной гидродинамики* (точнее, газодинамики) предполагается, что поведение плазмы сходно с поведением идеального газа с уравнением состояния $p = 2NT$, где p — давление, T — температура (в эргах), а N — плотность электронов и равная ей плотность однозарядных ионов. Поскольку масса электронов m_e значительно меньше массы ионов m_i , то массовая плотность $\rho = m_i N$.

В этом случае уравнение движения жидкости с учетом силы Ампера запишется в виде

$$m_i N \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]. \quad (8.1)$$

Здесь, по-прежнему, \mathbf{j} — плотность электрического тока, а \mathbf{B} — магнитное поле. К этому уравнению следует добавить уравнение непрерывности (4.2) и уравнения Максвелла (4.1), в которых мы пренебрежем током смещения $(1/c) \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t$, считая, что все происходящие в плазме движения медленные, т. е. протекают со скоростями значительно меньше скорости света:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\mathbf{v}) = 0, \quad (8.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (8.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (8.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8.5)$$

Плотность тока \mathbf{j} в проводящей среде равна $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_*$, где \mathbf{E}_* — электрическое поле в системе отсчета, движущейся вместе с жидким элементом. При $v \ll c$ это поле равно $\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v} \mathbf{B}]$. Полагая $\mathbf{E}_* = \mathbf{j} / \sigma = (c/4\pi\sigma) \operatorname{rot} \mathbf{B}$ и подставляя выражение для \mathbf{E} через \mathbf{E}_* в (8.5), мы приведем (8.5) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}, \quad (8.6)$$

Уравнения (8.1)–(8.4) и (8.6) и составляют основную систему уравнений магнитной гидродинамики. В этих уравнениях мы пренебрегли вязкостью. Что касается температуры T , то для ее изменения со временем можно воспользоваться условием адиабатичности $T \sim N^{\gamma-1}$ где γ — показатель адиабаты. Если характерные размеры возмущения в плазме невелики, то в силу высокой электронной теплопроводности более адекватным является приближение изотермической плазмы $T = \text{const}$. Уравнения магнитной гидродинамики достаточно хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме,

для которых несущественно различие в движении отдельных групп составляющих ее частиц, в частности, — равновесие плазмы в магнитном поле в условиях, когда несущественна ее анизотропия, т. е. когда функция распределения частиц по скоростям близка к максвелловской.

Вмороженность магнитного поля. Рассмотрим несколько подробнее уравнение (8.6) и постараемся выяснить его физический смысл. Оценим члены в правой части этого уравнения, полагая ℓ характерным масштабом неоднородности. Имеем

$$\text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \sim \frac{vB}{\ell}; \quad \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta\mathbf{B} \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{B}{\ell^2}.$$

Введем R_M — магнитное число Рейнольдса,

$$R_M = \frac{4\pi\sigma v}{c^2} \quad (8.7)$$

и рассмотрим два случая.

1). $R_M \ll 1$. В этом случае первый член в правой части уравнения (8.6) мал, и оно принимает вид

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = D_M \Delta\mathbf{B}, \quad D_M = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (8.8)$$

Это уравнение представляет собой уравнение диффузии и описывает расплывание неоднородностей магнитного поля в проводящей среде вследствие конечной проводимости, а величину $D_M = c^2/4\pi\sigma$ можно назвать коэффициентом диффузии магнитного поля. В этом случае движение вещества не оказывает существенного влияния на магнитное поле.

2). При достаточно большой проводимости $R_M \gg 1$ и диффузией поля можно пренебречь, и мы приходим к идеальной магнитной гидродинамике, в которой отсутствуют все виды диссипации. Уравнение (8.6) тогда принимает вид

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (8.9)$$

В этом предельном случае уравнение (8.9) приводит к эффекту “приклеенности” силовых линий магнитного поля к плазме, или, как еще

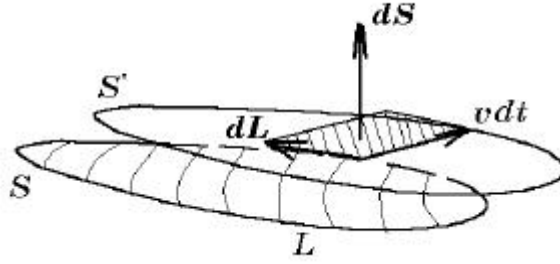


Рис. 1: Движение контура с плазмой и вмороженность магнитного поля.

иногда говорят, к вмороженности магнитного поля в проводящую среду. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный замкнутый контур L , движущийся вместе с плазмой, и введем в рассмотрение магнитный поток $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ через поверхность, ограниченную контуром L . Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и силовые линии магнитного поля нигде не кончаются, величина Φ определяется лишь контуром L и не зависит от формы поверхности, натянутой на L . Найдем теперь изменение потока $\Delta\Phi$ за время Δt :

$$\Delta\Phi = \int_{S'} \mathbf{B}' d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (8.10)$$

Здесь $\mathbf{B}'(t+\Delta t)$ — магнитное поле в момент $t+\Delta t$, S' — смещенная поверхность (рис. 1), а $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, рассматриваемый как вектор, направленный по нормали к поверхности. Как видно из рис. 1, поверхность S' можно считать состоящей из поверхности S и узкой ленты ΔS шириной $v\Delta t$, соединяющей два контура. Следовательно, первое слагаемое в (8.10) можно представить в виде суммы интегралов по S и ΔS . Первый из этих интегралов можно объединить со вторым интегралом в (8.10), и с точностью до малых величин второго порядка их сумма равна $\Delta t \int_S (\partial \mathbf{B} / \partial t) d\mathbf{S}$. Что касается интеграла по ΔS , то он может быть записан в виде интеграла по контуру L , так как элемент поверхности ленты ΔS равен $d\mathbf{S} = [v\Delta t, d\mathbf{l}]$.

Проводя несложные преобразования и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$ получаем:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} - \oint_L [\mathbf{v}\mathbf{B}] dl = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) d\mathbf{S} = 0, \quad (8.11)$$

т. е. $\Phi = \text{const}$. Поскольку это утверждение справедливо для любого контура L , движущегося вместе с веществом, то это и означает, что силовые линии магнитного поля переносятся проводящей жидкостью и могут рассматриваться как "вмороженные".

§ 9. Кинетическое уравнение с самосогласованным полем

Наиболее общим методом рассмотрения явлений в плазме является ее кинетическое описание, основанное на статистических (вероятностных) представлениях о плазме как системе, состоящей из большого числа частиц различных сортов. При этом вводится функция распределения, характеризующая вероятность нахождения частицы сорта α со скоростью \mathbf{v} в заданный момент времени t в заданной точке пространства с радиусом-вектором \mathbf{r} . Такая функция распределения зависит от координат \mathbf{r} , \mathbf{v} и t , т. е. $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Величина $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ представляет собой число частиц сорта α в момент времени t в элементарном фазовом объеме $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$, а плотность числа частиц сорта α в точке \mathbf{r} в момент времени t дается выражением

$$N_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \iiint f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv_x dv_y dv_z \quad (9.1)$$

Часто это соотношение называют условием нормировки функции распределения.

Зная функцию распределения, можно найти среднее значение любой физической величины, например среднюю скорость и среднюю энергию частиц сорта α :

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (9.2)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N_\alpha(\mathbf{r}, t)} \int \frac{m_\alpha v^2}{2} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Для отыскания функции распределения применяют кинетическое уравнение, т. е. уравнение, описывающее изменение функции

распределения в шестимерном фазовом пространстве $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ во времени t . Для сильно разреженного газа в первом приближении взаимодействием между частицами можно пренебречь, считая их полностью независимыми. В этом приближении изменение распределения частиц в объеме фазового пространства около точки \mathbf{r}, \mathbf{v} возникает только вследствие втекания и вытекания частиц через поверхность, ограничивающую такой объем. Если в этом объеме не происходит рождения и гибели частиц, то функция $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ не меняется во времени, и, следовательно

$$\frac{df_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0. \quad (9.3)$$

Это уравнение называют уравнением Лиувилля или уравнением непрерывности для функции распределения частиц сорта α . Согласно уравнениям движения частиц (см. (7.1), в данном пособии мы ограничиваемся рассмотрением нерелятивистских частиц)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]),$$

и кинетическое уравнение (9.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (9.4)$$

Здесь \mathbf{a} – ускорение частиц, \mathbf{F}_α – сила, действующая на заряженную частицу сорта α (в (9.4) учтены только силы электромагнитной природы), $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля в точке нахождения частицы, e_α и m_α – заряд и масса частицы сорта α .

При получении уравнения (9.4) предполагалось, что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} заданы. В действительности они определяются из уравнений Максвелла для электромагнитного поля (ср. (4.4))

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

где ρ и \mathbf{j} — соответственно плотности электрического заряда и электрического тока,

$$\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (9.6)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

Суммирование в этих выражениях проводится по всем сортам заряженных частиц в плазме. Введенные таким образом поля \mathbf{E} и \mathbf{B} являются *самосогласованными*, так как из уравнения (9.4) получается такое распределение частиц f_{α} , которое вызывает появление электромагнитных полей, поддерживающих это распределение. Поэтому систему уравнений (9.4), (9.5), (9.6) называют *кинетическими уравнениями с самосогласованным полем*, а уравнение (9.4) — *уравнением Власова*, по имени А. А. Власова, который предложил использовать такие уравнения для описания разреженной плазмы [17]. Существенная роль взаимодействия заряженных частиц с самосогласованными полями, как уже указывалось в §1, является одним из признаков того, что ионизованный газ представляет собой плазму.

При выводе уравнения (9.4) мы полностью пренебрегли взаимодействием частиц между собой, считая их свободными. Другими словами, ограничились рассмотрением изменений функции распределения в нулевом приближении по параметру взаимодействия η , представляющему собой отношение средней потенциальной энергии взаимодействия частиц к кинетической энергии их свободного движения. Учет взаимной корреляции в движении частиц приводит к появлению отличной от нуля правой части уравнения (9.4)

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{st}, \quad (9.7)$$

которая называется интегралом столкновений и описывает изменения функции распределения вследствие взаимодействия частиц. При

этом в первом порядке по параметру взаимодействия η учитываются лишь парные столкновения частиц; слагаемые более высокого порядка учитывают тройные, четверные и т. д. столкновения. В газовой плазме параметр η достаточно мал, и можно ограничиться учетом лишь парных столкновений частиц, записав интеграл столкновений в виде суммы

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st} = \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta}, \quad (9.8)$$

в которой отдельные члены описывают столкновения частиц данного сорта α с частицами сорта β . Далее мы несколько более подробно остановимся на анализе интеграла столкновений. Здесь же отметим, что $\sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} \sim \nu_{\alpha\beta} f_\alpha$, где $\nu_{\alpha\beta}$ — частота столкновений частиц сорта α с частицами сорта β . Поэтому уравнение Власова (9.4) — пригодно лишь для описания процессов, протекающих за времена, меньшие времени свободного пробега частиц (времени между двумя столкновениями), или, что то же самое, для описания волн с частотами

$$\omega \gg \nu_\alpha \sim \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}. \quad (9.9)$$

Для таких процессов плазму можно считать бесстолкновительной, а учет соударений приводит к малым поправкам.

§ 10. Интеграл упругих столкновений Больцмана

Рассмотрим несколько более подробно кинетическое уравнение с учетом парных столкновений частиц (9.7). Ограничимся рассмотрением лишь упругих столкновений, не вызывающих изменений структуры частиц, т. е. приводящих к их возбуждению и/или ионизации. Пусть на неподвижную частицу-мишень сорта β налетает поток моноскоростных частиц сорта α . Под влиянием сил, действующих в процессе столкновения, траектории частиц сорта α искривляются, они меняют направление своего движения¹ (см. рис. 2). При этом

¹Рисунок сделан для случая столкновения разноименно заряженных частиц.

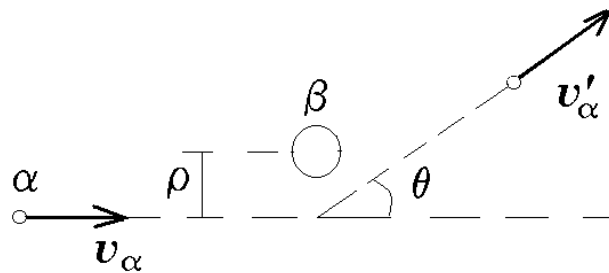


Рис. 2: Столкновение частицы α с неподвижной частицей β . ρ — прицельный параметр (10.28).

число частиц, рассеянных частицей-мишенью β в элементарный телесный угол $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ в единицу времени $(\Delta n/\Delta t)$ равно

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \sigma(\theta, v_\alpha) N_\alpha v_\alpha d\Omega, \quad (10.1)$$

где N_α , v_α — концентрация и скорость налетающих частиц α , $v_\alpha = |\mathbf{v}_\alpha|$, $\sigma(\theta, v_\alpha)$ — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность площади и называемый микроскопическим сечением столкновения. В общем случае величина σ зависит от скорости налетающего потока v_α , и угла рассеяния θ , $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, φ — азимутальный угол. Величину $\sigma(\theta, v_\alpha)$ называют также дифференциальным сечением рассеяния частиц сорта α на частицах сорта β .

Пусть, далее, частицы сорта α имеют функцию распределения $f_\alpha(v_\alpha)$, а частицы сорта β — функцию распределения $f_\beta(v_\beta)$. Тогда число частиц сорта α в интервале скоростей $v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha$ равно $\Delta N_\alpha = f_\alpha(v_\alpha) dv_\alpha$. Столкновения с частицей β , имеющей скорость v_β , мгновенно выводят частицы α из рассматриваемого интервала скоростей dv_α . При этом число частиц, покинувших интервал dv_α в единицу времени, согласно (10.1) равно

$$dv_\alpha \int |v_\alpha - v_\beta| \sigma_{\alpha\beta}(\theta, |v_\alpha - v_\beta|) f_\alpha(v_\alpha) d\Omega.$$

По сравнению с (10.1), в это выражение вместо v_α входит модуль относительной скорости $|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$, а также проведено интегрирование по телесному углу Ω . Поскольку в интервале $v_\beta, v_\beta + dv_\beta$ содержится $f_\beta(v_\beta)dv_\beta$ частиц сорта β , то число частиц сорта α со скоростями в интервале $v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha$ из-за столкновений с частицами сорта β со скоростями в интервале $v_\beta, v_\beta + dv_\beta$ уменьшится на

$$dv_\alpha dv_\beta \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| \sigma_{\alpha\beta}(\theta, |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|) f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta) d\Omega.$$

Чтобы подсчитать полное число частиц, ушедших из интервала dv_α , необходимо это выражение проинтегрировать по всем скоростям v_β , и (знак «-» соответствует уходу частиц)

$$\left(\frac{\partial f_\alpha(v_\alpha)}{\partial t} \right)^- dv_\alpha = -f_\alpha(v_\alpha) dv_\alpha \iint |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| \sigma_{\alpha\beta} f_\beta(v_\beta) dv_\beta d\Omega, \quad (10.2)$$

здесь знак “-” перед интегралом соответствует уходу частиц. Наряду с уходом частиц из интервала dv_α за счет столкновений, в результате которых частицы сорта α приобретают скорость v'_α , а частицы сорта β — скорость v'_β , существует обратный процесс, приводящий частицы сорта α со скоростями v'_α в интервал $v_\alpha, v_\alpha + dv_\alpha$ за счет столкновений с частицами сорта β и скоростями v'_β . Эти процессы проиллюстрированы на рис. 3. В результате полное изменение числа частиц в интервале dv_α за счет соударений с частицами сорта β равно

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_\alpha(v_\alpha)}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} dv_\alpha &= -dv_\alpha \iint |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| \sigma_{\alpha\beta} f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta) dv_\beta d\Omega \\ &+ dv'_\alpha \iint |\mathbf{v}'_\alpha - \mathbf{v}'_\beta| \sigma_{\alpha\beta} f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) dv'_\beta d\Omega. \end{aligned} \quad (10.3)$$

При упругих столкновениях сохраняются импульс и кинетическая энергия частиц:

$$m_\alpha v_\alpha + m_\beta v_\beta = m_\alpha v'_\alpha + m_\beta v'_\beta \quad (10.4)$$

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha'^2}{2} + \frac{m_\beta v_\beta'^2}{2} \quad (10.5)$$

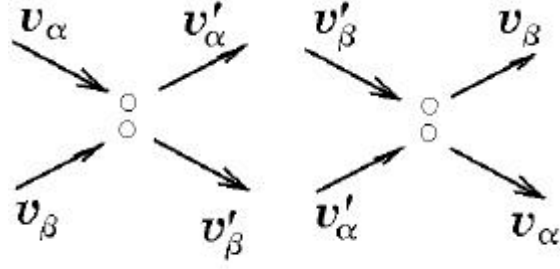


Рис. 3:

Следствием законов сохранения при абсолютно упругом ударе являются сохранение модуля относительной скорости частиц (более подробно см. [19, 20])

$$|v_\alpha - v_\beta| = |v'_\alpha - v'_\beta| \quad (10.6)$$

и равенство единице якобиана перехода от переменных $\{v_\alpha, v_\beta\}$ к переменным $\{v'_\alpha, v'_\beta\}$

$$\frac{\partial(v_\alpha, v_\beta)}{\partial(v'_\alpha, v'_\beta)} = 1 \quad \text{или} \quad dv_\alpha dv_\beta = dv'_\alpha dv'_\beta. \quad (10.7)$$

Используя (10.6) и (10.7), из (10.3) окончательно получаем выражение для интеграла упругих столкновений Больцмана:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha(v_\alpha)}{\partial t}\right)_{st}^{\alpha\beta} = \iint |v_\alpha - v_\beta| \sigma_{\alpha\beta}(|v_\alpha - v_\beta|, \theta) [f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)] dv_\beta d\Omega. \quad (10.8)$$

Здесь, напомним, $\sigma_{\alpha\beta}(|u|, \theta)$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{u} = \mathbf{v}'_\alpha - \mathbf{v}'_\beta$ в сферической системе координат, ось z которой направлена вдоль вектора $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$, угол θ — угол между векторами \mathbf{u} и \mathbf{u}' обычно называют углом рассеяния.

Основной задачей теории интегралов столкновений является вычисление сечения рассеяния $\sigma_{\alpha\beta}(|\mathbf{u}|, \theta)$. Задача эта оказывается весьма не простой, и для различных типов сталкивающихся частиц α и β должна решаться отдельно. Однако, несколько важных физических результатов можно получить непосредственно из кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений в виде (10.8).

1) Интеграл столкновений (10.8) обращается в нуль в состоянии термодинамического равновесия.

Действительно, равновесное распределение $f_0(v)$ должно удовлетворять уравнению (9.7). Когда функция распределения однородна и стационарна, в отсутствие внешних сил левая часть (9.7) обращается в нуль, что делает необходимым обращение в нуль ее правой части. Тогда при любом характере взаимодействия между частицами уравнение (9.7) будет удовлетворено, если (см.(10.8))

$$f_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha})f_{\beta}(\mathbf{v}'_{\beta}) = f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha})f_{\beta}(\mathbf{v}_{\beta}).$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln f_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha}) + \ln f_{\beta}(\mathbf{v}'_{\beta}) = \ln f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) + \ln f_{\beta}(\mathbf{v}_{\beta}). \quad (10.9)$$

Равенство (10.9) означает, что функции $\ln f$ является аддитивным инвариантом столкновений, т. е. такой функцией \mathbf{v}_{α} и \mathbf{v}_{β} , суммы которых для частиц α и β , участвующих в столкновении, не меняются. Такими свойствами из реальных характеристик движения обладают энергия (при упругих ударах) и импульс (см. (10.4), (10.5)). Аналогичность связей (10.9) и (10.4), (10.5) позволяет записать общее соотношение, справедливое как для частиц сорта α , так и β :

$$\ln f(\mathbf{v}) = a_1 + a_2 m \mathbf{v} - a_3 m v^2 / 2, \quad (10.10)$$

где a_1 , a_2 и a_3 — некоторые постоянные величины. Знак минус перед третьим слагаемым выбран с расчетом, чтобы искомая функция распределения $f(\mathbf{v})$ оказалась нормируемой при $a_3 > 0$. Выражение (10.10) можно переписать в следующем виде

$$\ln f = \ln a_0 - \frac{m a_3}{2} \left[\left(v_x - \frac{a_{2x}}{a_3} \right)^2 + \left(v_y - \frac{a_{2y}}{a_3} \right)^2 + \left(v_z - \frac{a_{2z}}{a_3} \right)^2 \right],$$

откуда при $a_0 = N(m/2\pi T)^{3/2}$ с очевидностью приходим к максвелловскому распределению

$$f_0(\mathbf{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2T} \right\}, \quad (10.11)$$

где $f_0(\mathbf{v})$ нормирована на концентрацию числа частиц N ($\int f_0 d\mathbf{v} = N$), $\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_2/a_3$ — средняя скорость упорядоченного движения частиц, $T = 1/a_3$ — температура частиц в энергетических единицах. Таким образом, равновесное максвелловское распределение (10.11) обращает интеграл столкновений (10.8) в нуль.

2) Независимо от начального вида функции распределения $f(\mathbf{v}, t = 0)$, при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (9.7) с интегралом столкновений в виде (10.8) при $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ асимптотически стремится к максвелловской функции распределения $f_0(\mathbf{v})$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) \quad (10.12)$$

Если бы в кинетическом уравнении (9.7) мы отбросили интеграл столкновений, то последнее соотношение не выполнялось бы. Поэтому можно сказать, что процесс приближения функции распределения к максвелловской — этот процесс называется *релаксацией* — происходит благодаря парным столкновениям частиц плазмы.

Используя свойство обращения в нуль интеграла столкновений в случае максвелловской функции распределения, можно при его грубой оценке считать, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} \propto \nu(f(\mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{v})), \quad (10.13)$$

где ν — характерная частота столкновений. Тогда кинетическое уравнение (9.7) для свободной и однородной плазмы принимает вид

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\nu(f(\mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{v})), \quad (10.14)$$

откуда

$$f(\mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + (f(\mathbf{v}, 0) - f_0(\mathbf{v})) \exp(-\nu t). \quad (10.15)$$

Выражение (10.15) действительно в общих чертах описывает релаксацию функции распределения $f(\mathbf{v}, t)$, независимо от ее начального

значения, к максвелловской за время $t \sim 1/\nu$. Тем не менее следует иметь в виду, что тонких деталей релаксации оно не передает. В частности, согласно (10.15), релаксация происходит равномерно при всех значениях скоростей, тогда как в действительности это не так.

Рассмотрим процесс релаксации несколько более подробно на примере функции распределения электронов. Если имеют место отклонения функции распределения от равновесной, например, вследствие вторжения потоков частиц, наличия электромагнитных полей или регулярной неоднородности среды, функцию распределения можно представить в виде

$$f_e(\mathbf{v}) = f_{e0}(v_e) + f_{e1}(\mathbf{v}) = f_{e0}(v_e) + f_{e1}(v, \cos \theta), \quad (10.16)$$

где f_{e0} — изотропная часть функции распределения, которая, вообще говоря, не обязательно является максвелловской, f_{e1} — анизотропная часть функции распределения, зависящая от угла θ между направлением скорости электрона и некоторым выделенным направлением z , например, направлением постоянного магнитного поля \mathbf{B} или направлением регулярного градиента плотности плазмы ∇N . В этом случае для решения многих задач функцию распределения удобно представить в виде разложения по полиномам Лежандра (сферическим функциям):

$$f_e(\mathbf{v}_e, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) f_k(z, v_e, t), \quad (10.17)$$

где $P_k(\mu)$ — полиномы Лежандра,

$$P_k(\mu) = \frac{d^k}{d\mu^k} (\mu^2 - 1)^k, \quad (10.18)$$

в частности, $P_0(\mu) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$. При подстановке (10.17) в (9.7) мы получим бесконечную цепочку уравнений для коэффициентов разложения $f_k(z, v, t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В частности, для случая релаксации анизотропной функции распределения в неоднородной плазме в отсутствие электромагнитных полей имеем

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + v \left[\frac{k}{2k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial z} + \frac{k+1}{2k+3} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial z} \right] = S_k, \quad (10.19)$$

$$S_k = \frac{2k+1}{4\pi} \int_{st} \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right) P_k(\mu) d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi. \quad (10.20)$$

При выводе (10.19) учтены соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_k(\mu) P_l(\mu) d\mu = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl}.$$

и рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \mu P_k(\mu) &= \frac{k+1}{2k+1} P_{k+1}(\mu) + \frac{k}{2k+1} P_{k-1}(\mu), \\ (1-\mu^2) \frac{dP_k}{d\mu} &= \frac{k(k+1)}{2k+1} [P_{k-1}(\mu) - P_{k+1}(\mu)]. \end{aligned}$$

Поскольку цепочка уравнений (10.19), во-первых, бесконечна и, во-вторых, уравнения для различных k зацепляются, она допускает лишь приближенное решение. Вопрос о максимальном значении k , на котором следует оборвать цепочку, должен решаться для каждой конкретной задачи отдельно. Более подробно этот вопрос рассмотрен в монографиях [12, 13]. Отметим лишь, что в большинстве практически важных случаев можно ограничиться учетом лишь первых двух членов разложения f_{e0} и f_{e1} , полагая $|f_{e1}| \ll f_{e0}$.

Согласно (10.8), при рассмотрении соударений электронов с другими частицами интеграл соударений $(\partial f_e / \partial t)_{st}$ является линейным выражением относительно функции распределения электронов f_e . В этом случае, если функция распределения частиц сорта β симметрична, т. е. $f_\beta(v_\beta) = f_\beta(v_\beta)$, то интеграл S_k зависит лишь от f_k , и можно показать, что

$$S_k = - \int u \sigma(u, \theta) [f_k(v_e) f_\beta(v_\beta) - f_\beta(v'_\beta) f_k(v'_e) P_k(\cos \theta)] d v_\beta d \Omega. \quad (10.21)$$

Рассмотрим теперь несколько более подробно упругие соударения электронов с нейтральными частицами и ионами.

Упругие соударения с нейтральными частицами. При упругом ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (атом, молекула) скорость первой легко изменяет свое направление; модуль скорости и (или) энергия электрона изменяются при этом лишь незначительно. Используя это обстоятельство, можно в первом приближении принять, что $v_e = v'_e$, $v_m = v'_m$. Учитывая также, что обычно скорость электрона много больше скорости молекулы, и следовательно

$u = |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_m| \approx v_e$, из (10.21) находим

$$\begin{aligned} S_{mk} &= -f_k(v_e) \int v_e \sigma_{em}(v_e, \theta) [1 - P_k(\cos \theta)] f(v_m) d\mathbf{v}_m d\Omega = \\ &= -\nu_{mk} f_k(v_e). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Здесь $\sigma_{em}(v_e, \theta)$ — дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электрона при столкновении с нейтральной частицей,

$$\nu_{mk} = N_m v_e \int \sigma_{em}(v_e, \theta) [1 - P_k(\cos \theta)] d\Omega, \quad (10.23)$$

где $N_m = \int f_m(\mathbf{v}_m) d\mathbf{v}_m$, — плотность числа молекул. В частности,

$$S_{m1} = -\nu_{m1} f_1(v_e), \quad \nu_m = N_m v_e \int \sigma_{em}(v_e, \theta) [1 - \cos \theta] d\Omega, \quad (10.24)$$

$\nu_{m1} \equiv \nu_{em}$ — частота столкновений электрона с тяжелой нейтральной частицей. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электрона при столкновении с нейтральной частицей σ_{em} зависит, естественно от v_e . Такая зависимость оказывается, однако, весьма слабой. Поэтому имеет смысл, особенно в отсутствие каких-либо универсальных теоретических зависимостей $\sigma_{em}(v_e)$, использовать простейшую модель упругого столкновения точечной частицы с шариком радиуса a . В этом случае $\sigma_{em} = a^2/4$ (при этом полное сечение $Q_{em} = \int \sigma_{em} d\Omega = \pi a^2$), и

$$\nu_{em} = \pi a^2 v_e N_m. \quad (10.25)$$

При этом, соответственно, $\nu_{mk}(v) = \nu_{em}$ при любых $k \neq 0$, поскольку $\int_0^\pi P_k(\cos \theta) d\Omega = 0$, а σ_{em} не зависит от θ .

Из (10.22) следует, что $S_{m0} = 0$, поскольку $P_0(\cos \theta) = 1$. Такой результат является следствием полного пренебрежения энергообменом при столкновении. Для вычисления $S_{m0} = 0$ следует учесть изменение энергии (и, соответственно, модуля скорости) электрона и молекулы при ударе. Используя выражение (10.22), законы сохранения энергии и импульса при упругом ударе (10.5) и (10.5), а также малость изменения модулей скорости сталкивающихся частиц, можно показать, что при максвелловском распределении молекул (см. [12])

$$S_{m0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial v_e} \left\{ v_e^2 \delta_{em} \nu_{em} \left[\frac{T_m}{m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_e} + v_e f_{e0} \right] \right\} \quad (10.26)$$

Здесь $\nu_{em}(v_e)$ — частота соударений электронов с нейтральными частицами, определенная формулой (10.23), $\delta_{em} = 2m_e/m_m$ — средняя доля энергии, теряемая электроном при упругом ударе, T_m — температура нейтральных частиц.

Сравнивая выражения (10.24) и (10.26), можно убедиться, что поправки к интегралу столкновений, связанные с изменением энергии электрона при упругом столкновении, малы, порядка $\delta_{em} = 2m_e/m_m$. Поэтому соответствующими поправками к интегралам (10.22) и (10.23) всегда можно пренебречь.

Упругие соударения с ионами. Для описания упругих соударений электронов с ионами полностью применимы полученные выражения для интеграла упругих соударений с нейтральными частицами (10.22)–(10.24), (10.26), т. к. они получены для произвольного вида сечения $\sigma(v_e, \theta)$, при выводе использовалась лишь малость массы электрона, $m_e \ll m_m$, что всегда справедливо и для иона. Необходимо, таким образом, лишь вычислить частоту соударений электрона с ионами ν_{ei} . Для этого в формулу (10.24) необходимо подставить соответствующее дифференциальное сечение рассеяния.

При столкновениях электронов с ионами дифференциальное сечение рассеяния определяется известной формулой Резерфорда [19]

$$\sigma_{ei} = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{m_e v_e^2} \right)^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-4}. \quad (10.27)$$

Здесь, напомним, θ — угол рассеяния (см. рис.2), который определяется скоростью электрона v_e и так называемым прицельным расстоянием ρ_e , которое представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки локализации иона на начальное направление движения электрона, т. е. расстояние, на котором электрон пролетел бы мимо иона, если бы кулоновское поле отсутствовало; согласно [19],

$$\rho_e = (Ze^2/m_e v_e^2) \operatorname{ctg}(\theta/2). \quad (10.28)$$

Подставляя (10.27) в (10.24) и проводя интегрирование, имеем:

$$\begin{aligned} \nu_{ei}(v_e) &= \frac{\pi Z^2 e^4 N_i}{2m_e^2 v_e^3} \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin^4(\theta/2)} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi Z^2 e^4 N_i}{m_e^2 v_e^3} \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \operatorname{ctg}(\theta/2) d\theta = \frac{4\pi Z^2 e^4 N_i}{m_e^2 v_e^3} \ln |\sin(\theta_{\min}/2)|, \end{aligned} \quad (10.29)$$

где N_i — концентрация, Ze — заряд ионов. Если рассматривать рассеяние электрона на свободном ионе, то интегрирование в (10.29) надо проводить от 0 до π . При этом частота соударений логарифмически расходится при малых θ . Поэтому, нужно интегрировать по θ от какого-то минимального угла θ_{\min} . Минимальному углу θ_{\min} соответствует максимальное значение прицельного расстояния $\rho_{e \max} = (Ze^2/m_e v_e^2) \operatorname{ctg}(\theta_{\min}/2)$. Поскольку в плазме, как мы знаем, происходит дебаевская экранировка точечного заряда, за $\rho_{e \max}$ естественно принять дебаевский радиус $r_D = \sqrt{T_e/4\pi e^2 N}$ (3.4). При этом, поскольку мы имеем дело с газовой плазмой (см. §3), $T_e/e^2 N^{1/3} \gg 1$, $\operatorname{ctg}(\theta_{\min}/2) \gg 1$, и $\operatorname{tg}(\theta_{\min}/2) \approx \sin(\theta_{\min}/2) \approx T_e^{3/2}/(4\pi e^4 N)^{1/2}$. Величину $L = \ln|\sin(\theta_{\min}/2)| \sim \ln(\rho_{e \max} m_e v_e^2/e^2)$, входящую в выражение для частоты столкновений (10.29), называют *кулоновским логарифмом*.

Для частот соударений $\nu_{ik}(v_e)$ (см. (10.23)) в случае соударений с ионами получаем

$$\nu_{ik}(v_e) = \frac{k(k+1)}{2} \nu_{ei}(v_e). \quad (10.30)$$

Приведем здесь также формулы для *эффективных частот* упругих соударений электронов с нейтралами и ионами. Согласно [10], эффективные частоты соударений вводятся при наилучшем совпадении выражений для проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы, полученных при кинетическом рассмотрении (при максвелловском распределении электронов) с формулами элементарной теории. При этом для столкновений с нейтралами и ионами соответственно имеем [5, 10]:

$$\nu_{ef \ e m} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} a^2 N_m \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}, \quad (10.31)$$

$$\nu_{ef \ e i} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{e^4 Z^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (10.32)$$

§ 11. Квазигидродинамическое описание плазмы

Анализ динамических процессов в плазме на основе прямого использования кинетического уравнения часто оказывается довольно

сложным. Вместе с тем, во многих случаях для вполне корректного описания явлений в плазме достаточно использовать так называемый квазигидродинамический подход, в котором, в отличие от магнитной гидродинамики, используются двухжидкостные (для электронной и ионной жидкостей) или трехжидкостные (для электронной, ионной и нейтральной жидкостей) модели, учитывающие взаимодействие частиц и их тепловое движение.

Для перехода к квазигидродинамическому описанию следует, с помощью операции усреднения по скоростям, получить на основе (9.7), замкнутую систему уравнений для моментов функций распределения f_α для каждого сорта частиц. Моментом n -го порядка функции f называется величина

$$M_{jkl\dots}^n = \int (v_j v_k v_l \dots) f dv, \quad (11.1)$$

где в левой части имеется n индексов (j, k, l, \dots), а в подынтегральное выражение входит такое же количество сомножителей. Квазигидродинамическое описание значительно проще кинетического. Действительно, моменты зависят только от координат \mathbf{r} и времени t , тогда как функции распределения f_α зависят от \mathbf{r} , \mathbf{v} и t . Первые моменты функций распределения имеют ясный физический смысл. Это, например, плотность ($n = 0$) и поток ($n = 1$) числа частиц:

$$M^0 = N_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv, \quad (11.2)$$

$$M^1 = N_\alpha(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv. \quad (11.3)$$

Пр мере увеличения n простота и наглядность интерпретации теряется и возникает вопрос о целесообразности привлечения уравнений с большими n . Поэтому значения n всегда ограничивают и анализируют усеченную систему уравнений. Подобная операция основывается обычно на физических предположениях, а система не является, вообще говоря, замкнутой.

Не останавливаясь на подробностях вывода системы квазигидродинамических уравнений (см. например, [5, 10, 12, 18]), приведем здесь в наиболее простом виде систему уравнений для плазмы, состоящей из электронов, однократно заряженных ионов одного сорта и

неподвижных молекул для случая изотропного давления электронов и ионов. Эта система состоит из уравнений движения для электронов и ионов

$$m_e N_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -eN_e \mathbf{E} - \frac{eN_e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}] - \nabla p_e - m_e N_e \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - m_e N_e \nu_{em} \mathbf{v}_e, \quad (11.4)$$

$$m_i N_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = eN_i \mathbf{E} + \frac{eN_i}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}] - \nabla p_i - m_i N_i \nu_{ie} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - m_i N_i \nu_{im} \mathbf{v}_i, \quad (11.5)$$

а также из уравнений непрерывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e \mathbf{v}_e) &= Q - \alpha_r N_e N_i, \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i \mathbf{v}_i) &= Q - \alpha_r N_e N_i. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Здесь, очевидно, $\nu_{ie} = (m_e/m_i)\nu_{ei}$, Q в (11.6) характеризует скорость образования заряженных частиц из-за ионизации (например, фотоионизации или ионизации электронным ударом), а последние члены в правых частях в (11.6) — рекомбинацию электронов с ионами. Давления электронов и ионов считаются изотропными, $\nabla p_e = \gamma_e T_e \nabla N_e$, $\nabla p_i = \gamma_i T_i \nabla N_i$, $\gamma_{e,i}$ — коэффициенты порядка единицы, определяемые уравнениями состояния электронной и ионной жидкостей. Их значения определяются с помощью кинетического уравнения. К анализу системы квазигидродинамических уравнений мы вернемся позднее, при анализе дисперсионных соотношений в плазме.

Глава III. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ¹

§ 12. Диэлектрическая проницаемость и волны в изотропной плазме. Квазигидродинамическое приближение

Выше, в § 7, мы получили выражение для компонент тензора ϵ_{ij} в модели, когда плазма рассматривалась как система не взаимодействующих между собой заряженных частиц, свободно движущихся во внешних полях. Выражение для тензора диэлектрической проницаемости в изотропной плазме проще всего получить, положив в (7.10), (7.11) $\omega_{B\alpha} = 0$. При этом имеем

$$\epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha})}. \quad (12.1)$$

В таком приближении, как видно из (12.1), диэлектрическая проницаемость не зависит от направления, и (см. (4.17)) ϵ^l и ϵ^{lr} также определяются выражением (12.1). Тензорный характер диэлектрической проницаемости, т. е. ее зависимость от направления распространения волны, проявляется в изотропной плазме лишь при учете теплового движения частиц.

Получим выражение для диэлектрической проницаемости изотропной плазмы в квазигидродинамическом приближении, на основе системы уравнений (11.4)–(11.6). Перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}] - \frac{\gamma_e T_e \nabla N_e}{m_e N_e} - \nu_e \mathbf{v}_e \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{e}{m_i} \mathbf{E} + \frac{e}{m_i c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}] - \frac{\gamma_i T_i \nabla N_i}{m_i N_i} - \nu_i \mathbf{v}_i, \\ \frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e \mathbf{v}_e) &= 0, \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i \mathbf{v}_i) &= 0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

¹При составлении настоящей главы использовались материалы обзора [3] и монографий [5] и [10].

Здесь $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{em}$, $\nu_i = \nu_{ie} + \nu_{im}$ — полные частоты соответственно электронных и ионных соударений. Кроме того, в уравнениях непрерывности не учитываются процессы рождения и рекомбинации частиц, а в правой части первого и второго уравнений мы пренебрегли соответственно членами $\nu_{ei}v_i$ и $\nu_{ie}v_e = \nu_{ei}v_i$. Последнее справедливо при выполнении достаточно мягкого неравенства $\omega \gg \nu_{ie}$.

Линеаризуем систему (12.2). Для этого положим

$$\begin{aligned} N_e &= N_0 + n'_e; & N_i &= N_0 + n'_i, & |n'_{e,i}| &\ll N_0, \\ v_{e,i} &= v_{e,i}^0 + v'_{e,i}, & & & & \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}', \end{aligned} \quad (12.3)$$

подставим эти соотношения в (12.2) и пренебрежем членами второго порядка по штрихованным переменным. Кроме того, предположим, что в плазме отсутствуют внешние поля и регулярное движение, $v_\alpha^0 = 0$, $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = 0$, а штрихованные переменные изменяются во времени и пространстве по гармоническому закону $\exp(-i\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})$. Тогда, выражая в уравнениях непрерывности n'_α через v_α

$$n'_\alpha = N_0(\mathbf{k}v'_\alpha)/\omega$$

и подставляя эти выражения в уравнения движения (первые два уравнения системы (12.2)), имеем

$$\begin{aligned} v'_e(-i\omega + \nu_e) + \frac{ik(\mathbf{k}v'_e)\gamma_e v_{Te}^2}{\omega} &= -\frac{e}{m_e}\mathbf{E} \\ v'_i(-i\omega + \nu_i) + \frac{ik(\mathbf{k}v'_i)\gamma_i v_{Ti}^2}{\omega} &= \frac{e}{m_i}\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Здесь, напомним, $v_{T_\alpha} = (T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$ — тепловая скорость частиц сорта α . В плазме в отсутствие постоянного магнитного поля существует только одно выделенное направление — направление распространения волны \mathbf{k} . Выберем оси координат так, что $x \perp \mathbf{k}$, $y \perp \mathbf{k}$, $z \parallel \mathbf{k}$. Тогда для продольных (вдоль \mathbf{k}) скоростей электронов и ионов имеем

$$v'_{ez} = \frac{eE_z}{im_e \left[\omega + i\nu_e - \frac{\gamma_e k^2 v_{Te}^2}{\omega} \right]}, \quad v'_{iz} = -\frac{eE_z}{im_i \left[\omega + i\nu_i - \frac{\gamma_i k^2 v_{Ti}^2}{\omega} \right]}. \quad (12.5)$$

Аналогично для поперечных скоростей ($\mathbf{v}_\perp = x_0 v_x + y_0 v_y$):

$$\mathbf{v}'_{e\perp} = \frac{e\mathbf{E}_\perp}{im_e(\omega + i\nu_e)}, \quad \mathbf{v}'_{i\perp} = -\frac{e\mathbf{E}_\perp}{im_i(\omega + i\nu_i)}. \quad (12.6)$$

Теперь, воспользовавшись выражениями (7.9) для плотности тока \mathbf{j} ($\mathbf{j} = \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha N_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}$) и (4.19) для связи тензоров проводимости и диэлектрической проницаемости ($\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + (4\pi i/\omega)\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$), имеем (см. также (4.17))

$$\sigma_{zz} = \sum_\alpha \sigma_{zz}^\alpha = \sum_\alpha \frac{ie_\alpha^2 N_0}{m_\alpha (\omega + i\nu_\alpha - \frac{\gamma_\alpha k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega})},$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon^l = 1 + \sum_\alpha \epsilon_{zz}^\alpha = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_\alpha) - \gamma_\alpha k^2 v_{T\alpha}^2}, \quad (12.7)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sum_\alpha \sigma_\perp^\alpha = \frac{ie_\alpha^2 N_0}{m_\alpha (\omega + i\nu_\alpha)},$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon^{tr} = 1 + \sum_\alpha \epsilon_\perp^\alpha = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_\alpha)}, \quad (12.8)$$

где по-прежнему, $\omega_{P\alpha} = \sqrt{4\pi e_\alpha^2 N_0 / m_\alpha}$. Отметим, что тепловое движение частиц не влияет в таком приближении на поперечные проводимость и диэлектрическую проницаемость, а в холодной плазме при $T_\alpha \rightarrow 0$ выражения элементарной теории (12.1) и полученные в квазигидродинамическом приближении (12.7), (12.8), естественно, совпадают.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств электромагнитных волн в изотропной плазме в квазигидродинамическом приближении. Как показано в §6, общее дисперсионное уравнение электромагнитных волн (6.6) для диэлектрической проницаемости в виде (4.17) и волнового вектора \mathbf{k} , направленного вдоль оси z , записывается следующим образом

$$\begin{vmatrix} \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon^{tr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon^{tr} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon^l \end{vmatrix} = \left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon^{tr} \right]^2 \epsilon^l = 0 \quad (12.9)$$

и, естественно, распадается на два независимых уравнения: одно для поперечных волн

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (12.10)$$

другое — для продольных

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (12.11)$$

Здесь $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ и $\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})$ даются выражениями соответственно (12.7) и (12.8), а кратный корень уравнения (12.9) определяет одинаковые решения дисперсионного уравнения для двух независимых поляризацій поперечных волн, например, поляризованных вдоль осей x и y , или, соответственно, по правому и левому кругу.

Начнем анализ со случая *поперечных волн*, причем решим уравнение (12.12) относительно показателя преломления $n(\omega) = ck/\omega$ (см. (6.19)), который характеризует распространение волны. Поскольку $\omega_{P_e} \gg \omega_P$, в выражении (12.8) для диэлектрической проницаемости вкладом ионов можно пренебречь. В результате имеем:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} = 1 - \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega^2 + \nu_e^2} + \frac{i\nu_e}{\omega} \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega^2 + \nu_e^2}. \quad (12.12)$$

Отсюда для случая слабых столкновений $\nu_e/\tilde{n} \omega_{P_e} \ll 1$ для реальной части показателя преломления \tilde{n} и показателя поглощения \varkappa легко находим

$$\tilde{n}^2 = (\operatorname{Re} n)^2 = 1 - \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega^2}, \quad \varkappa = \operatorname{Im} n = \frac{\nu_e}{2\omega\tilde{n}} \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega^2}. \quad (12.13)$$

Отсюда следует, что поперечные волны могут распространяться в плазме при частотах, превышающих плазменную, $\omega > \omega_{P_e}$. В противном случае $\tilde{n}^2 < 0$, и волна испытывает полное внутреннее отражение от плазмы. Зависимость \tilde{n}^2 от параметра $v = \omega_{P_e}^2/\omega^2$ приведена на рис. 4 (кривая 1). Видно, что при распространении вглубь плотной плазмы величина показателя преломления уменьшается от единицы (при $\omega_{P_e} = 0$, или при нулевой плотности заряженных частиц N_0) и обращается в нуль вблизи точки отражения, где $\omega = \omega_{P_e}$.

Найдем теперь из дисперсионного уравнения (12.12) зависимость $\omega(k)$ и декремент затухания поперечных волн. При $\nu_e \rightarrow 0$ имеем

$$\omega_1^2 = \omega_{P_e}^2 + k^2 c^2 \quad (12.14)$$

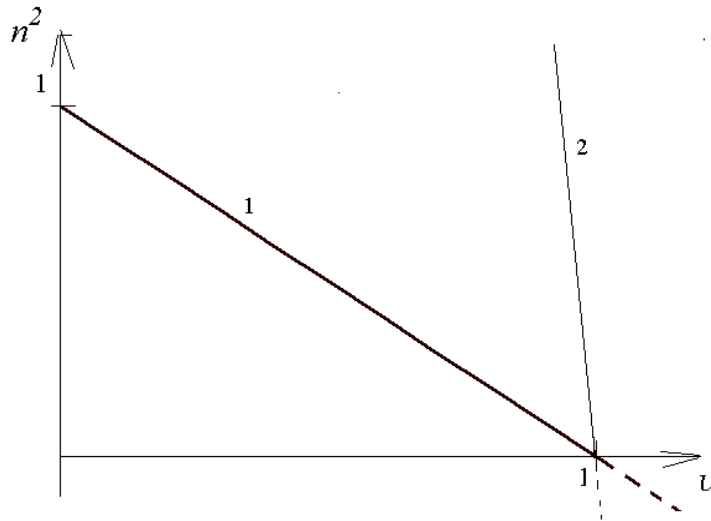


Рис. 4: Зависимость квадрата показателя преломления n от $\nu = \omega_{Pe}^2/\omega^2$ для поперечных (кривая 1) и продольных ленгмюровских (кривая 2) волн.

Графически зависимость (12.14) изображена на рис. 5 (кривая 1). При $\omega_{Pe} \ll kc$ ($N_0 \rightarrow 0$) дисперсионное уравнение (12.14) соответствует дисперсионному уравнению электромагнитных волн в вакууме. Учет вклада ионов в диэлектрическую проницаемость приводит для поперечных волн лишь к малым поправкам $\sim m_e/m_i$ в зависимости $\omega(k)$.

Как видно из формул (12.13) и (12.14), фазовая скорость поперечных волн равна

$$v_{ph1} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\tilde{n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{Pe}^2/\omega^2}}, \quad (12.15)$$

и $v_{ph1} > c$. Это приводит к невозможности взаимодействия поперечных волн с частицами на черенковском резонансе $\omega = kv$ (подробнее этот вопрос рассмотрен в следующем параграфе). Групповая скорость поперечных волн (скорость переноса энергии), как и положено, меньше скорости света:

$$v_{g1} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \omega_{Pe}^2/k^2 c^2}} = c \sqrt{1 - \omega_{Pe}^2/\omega^2}, \quad (12.16)$$

и $v_{ph1} \cdot v_{g1} = c^2$.

При учете столкновений при $\omega \gg \nu_e$ дисперсионное уравнение поперечных волн записывается в виде

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_{Pe}^2 \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right) = 0. \quad (12.17)$$

Спектр частот поперечных волн, определяемых этим уравнением совпадает с (12.14), а декремент их затухания, определяемый формулами (6.27), (6.43), равен

$$\gamma_1 = -\frac{\nu_e}{2} \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega_{Pe}^2 + k^2 c^2}. \quad (12.18)$$

Продольные волны. Как следует из (12.11), (12.7), дисперсионное уравнение для продольных волн в плазме без столкновений ($\nu_e = 0$) имеет вид

$$\epsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{Pi}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{Ti}^2} = 0. \quad (12.19)$$

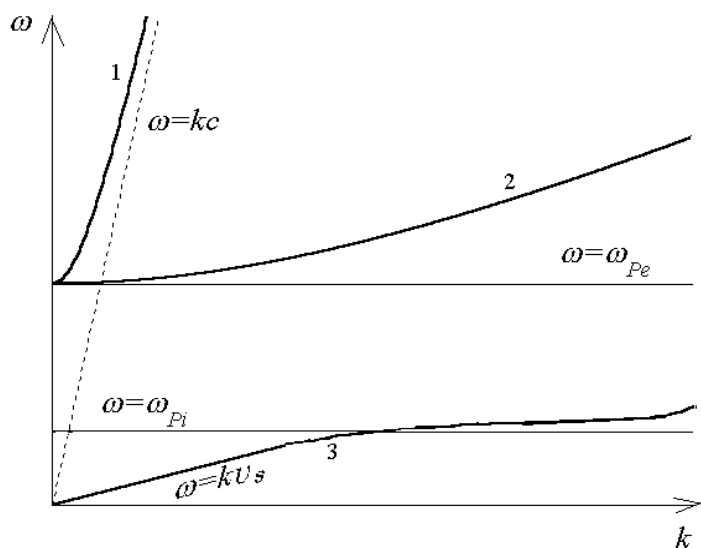


Рис. 5: Зависимость частоты ω от волнового числа k для поперечных (кривая 1), ленгмюровских (кривая 2) и продольных низкочастотных (кривая 3) волн.

Рассмотрим сначала случай $\omega^2 \gg k^2 v_{T_e}^2$. Тогда, поскольку $\omega_{P_e} \gg \omega_{P_i}$, вторым членом в левой части (12.19) можно пренебречь, и частота и показатель преломления продольной волны даются выражениями

$$\omega_2^2 = \omega_{P_e}^2 + \gamma_e k^2 v_{T_e}^2, \quad n^2 = \frac{1 - \omega_{P_e}^2/\omega^2}{\gamma_e v_{T_e}^2/c^2} = \frac{1 - v}{\gamma_e \beta^2}. \quad (12.20)$$

Здесь $v = \omega_{P_e}^2/\omega^2$, $\beta = v_{T_e}/c$. Если пренебречь тепловым движением электронов, то из (12.20) получаем $\omega_2 = \omega_{P_e}$, и мы имеем дело не с волнами, а с колебаниями. Эти колебания и соответствующие волны называют *плазменными* или *ленгмюровскими*. Зависимость показателя преломления этих волн от параметра v и их частоты ω от волнового числа k приведена на рис. 4 и 5.

В нерелятивистской плазме, которую мы рассматриваем, $\beta \ll 1$, и даже при весьма малых значениях $\omega - \omega_{P_e} > \omega\beta/2$ плазменные волны оказываются существенно медленнее поперечных, $n^2 \gg 1$, $v_{ph2} \ll c$. Отметим, что из неравенства $\omega^2 \gg k^2 v_{T_e}^2$ и выражения для частоты плазменных волн следует, что $k^2 r_d^2 \ll 1$, т. е. длина волны плазменных волн должна существенно превышать дебаевский радиус. Более подробно условия применимости решений дисперсионного уравнения, полученных в квазигидродинамическом приближении, будут обсуждаться в § 14 при рассмотрении кинетического описания плазмы. При учете в дисперсионном уравнении слабых соударений $\nu_e \ll \omega_{P_e}$ нетрудно с помощью (6.27) получить декремент столкновительного затухания плазменных волн

$$\gamma_2 = -\frac{\nu_e}{2} \frac{\omega_{P_e}^2}{\omega^2} \approx -\frac{\nu_e}{2}. \quad (12.21)$$

Из (12.20) можно получить также выражения для фазовой и групповой скоростей плазменных волн:

$$v_{ph2} = \frac{\gamma_e^{1/2} v_{T_e}}{\sqrt{1 - \omega_{P_e}^2/\omega^2}}, \quad v_{g2} = \gamma_e^{1/2} v_{T_e} \sqrt{1 - \omega_{P_e}^2/\omega^2}. \quad (12.22)$$

Отсюда видно, что $v_{ph2} v_{g2} = \gamma_e v_{T_e}^2$. Таким образом (см. также (12.14), (12.20)), характер дисперсии плазменных волн оказывается

таким же, как у поперечных, но, как уже указывалось, плазменные волны оказываются существенно более медленными.

Рассмотрим теперь низкочастотные продольные волны с $\omega^2 \ll k^2 v_{Te}^2$, учтя вклад ионов в дисперсионное уравнение (12.19). Пренебрегая во втором члене (12.19) ω^2 по сравнению с $k^2 v_{Te}^2$, получаем

$$\omega_3^2 = \frac{\omega_{Pi}^2}{1 + \omega_{Pe}^2 / \gamma_e k^2 v_{Te}^2} + \gamma_i k^2 v_{Ti}^2. \quad (12.23)$$

В длинноволновом пределе $k^2 v_{Te}^2 \ll \omega_{Pe}^2$ (или $k^2 r_{de}^2 \ll 1$) из (12.23) получаем дисперсионное уравнение *ионно-звуковых волн*

$$\omega_3 = kv_s, \quad v_s^2 = \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}, \quad (12.24)$$

распространяющихся с фазовой скоростью v_s , которую называют скоростью ионного звука. Поскольку v_s не зависит от частоты, то она совпадает и с групповой скоростью этих волн.

В пределе коротких волн $k^2 v_{Te}^2 \gg \omega_{Pe}^2$ ($k^2 r_{de}^2 \gg 1$) — волн с длиной меньше дебаевского радиуса электронов — имеем выражение для частоты *ионных ленгмюровских волн*

$$\omega_3^2 = \omega_{Pi}^2 + \gamma_i k^2 v_{Ti}^2, \quad (12.25)$$

которое с точностью до замены индекса (e на i) совпадает с (12.20).

Зависимость $\omega(k)$ для низкочастотных волн схематически представлена на рис. 5 (кривая 3).

Выражения (12.20) для частоты высокочастотных продольных (плазменных) волн получено при $\omega_2 \gg kv_{Te}$. В свою очередь, из (12.23), (12.24) следует, что $\omega_3 > kv_{Ti}$. Это означает, что фазовая скорость плазменных волн должна превышать тепловую скорость электронов, а низкочастотных волн — тепловую скорость ионов. При приближении фазовых скоростей волн к соответствующим тепловым скоростям ($\omega_2/k \rightarrow v_{Te}$, $\omega_3/k \rightarrow v_{Ti}$) должно усиливаться черенковское взаимодействие ($\omega = kv$) продольных волн с основной массой взаимодействующих частиц, что, в свою очередь, должно приводить к усилению черенковского поглощения и дополнительному, по сравнению со столкновительным, затуханию волн. Этот вопрос подробно рассмотрен при изучении кинетической теории распространения волн в плазме.

Неравенство $\omega \ll kvT_e$, использованное нами при получении спектров низкочастотных волн ω_3 (12.23), соответствует пренебрежению инерцией электронов (член $d\mathbf{v}/dt$ в левой части первого уравнения системы (12.2)). При этом для электронов имеет место больцмановское распределение $N = N_0 \exp(e\varphi/T_e)$ ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), и для рассматриваемых здесь малых колебаний $n' \approx N_0 e\varphi/T_e$.

Таким образом, в изотропной плазме существует три типа волн: поперечные ω_1 с законом дисперсии (12.14), продольные ленгмюровские ω_2 (12.20) и продольные низкочастотные ω_3 (12.23), которые в длинноволновом пределе называются ионно-звуковыми, а в коротковолновом — ионными ленгмюровскими. Зависимости частот этих волн от волнового числа схематически изображены на рис. 5.

§ 13. Диэлектрическая проницаемость и волны в изотропной плазме. Кинетическое описание

Квазигидродинамическое приближение качественно правильно описывает дисперсионные свойства волн (особенно при пренебрежении тепловым движением частиц, $T_{e,i} \rightarrow 0$) и их затухание из-за столкновений. Однако, в рамках этого приближения невозможно корректно учесть тепловое движение, в частности найти коэффициенты γ_e и γ_i . Кроме того, квазигидродинамическое приближение не учитывает взаимодействие волн с группами резонансных частиц, обладающих скоростями, близкими к фазовой скорости волн, (эффект Черенкова) и влияние такого взаимодействия на характеристики волн. Для корректного учета таких процессов необходимо кинетическое описание плазмы. При проведении вывода диэлектрической проницаемости мы ограничимся простейшим случаем плазмы без столкновений и, как и в предыдущем параграфе, в отсутствие внешних полей. В таком основном, равновесном состоянии функции распределения частиц плазмы зависят лишь от абсолютной величины скорости $f_\alpha(\mathbf{v}) = f_{0\alpha}(v)$.

Для того чтобы вычислить диэлектрическую проницаемость плазмы рассмотрим малые отклонения функций распределения частиц от равновесных функций $f_{0\alpha}(v)$, т. е. примем, что $f_\alpha = f_{0\alpha} + f'_\alpha$, $|f'_\alpha| \ll f_{0\alpha}$. Отклонения функций распределения $f'_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ связаны с возмущающими полями \mathbf{E} и \mathbf{V} . Линеаризуя кинетическое уравнение (9.4), т. е. считая f'_α , \mathbf{E} и \mathbf{V} величинами первого порядка малости и пренебрегая членами второго порядка, получим уравнение для

возмущенных частей функций распределения¹:

$$\frac{\partial f'_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (13.1)$$

Под действием возмущающих полей \mathbf{E} и \mathbf{B} в плазме появляются индуцированные заряды и токи, которые определяются через возмущенную функцию распределения:

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f'_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (13.2)$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f'_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (13.3)$$

В свою очередь, поля \mathbf{E} и \mathbf{B} определяются через \mathbf{j} и ρ посредством уравнений поля (9.5).

В отсутствие внешних источников зависимость от времени и координат решений этих уравнений можно принять в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Тогда решение уравнения (13.1) запишется так:

$$f'_\alpha = -i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbf{E}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (13.4)$$

Теперь мы можем вычислить ток, индуцированный в плазме под действием возмущений \mathbf{j} и ρ , подставив (13.4) в (13.3), с учетом материальных уравнений (4.11) и (4.13) найти проводимость $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ плазмы. Действительно, согласно (13.3) и (4.11) имеем

$$j_i = -i \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{v_i E_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j} \equiv \sigma_{ij} E_j, \quad (13.5)$$

или

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -i \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j}, \quad (13.6)$$

¹При выводе (9.4) мы пренебрегли членом $[\mathbf{v}\mathbf{B}] \cdot (\partial f_{0\alpha}/\partial \mathbf{v})$. Для случая поперечных волн это справедливо при $\tilde{n} \gtrsim \beta$, в продольных волнах $\mathbf{B} = 0$.

где $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор комплексной проводимости плазмы. Далее, помощью соотношения (4.15) находим выражение для тензора диэлектрической проницаемости.

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j}. \quad (13.7)$$

Отсюда, положив, например, $\mathbf{k} = kz_0$, легко получаем выражения для продольной ε^l и поперечной ε^{tr} диэлектрических проницаемостей²:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\parallel}}. \quad (13.9)$$

$$\varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \int d\mathbf{v} \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}_{\perp}}. \quad (13.10)$$

Здесь индексы "||" и "⊥" относятся к направлению распространения волны \mathbf{k} .

В формулах (13.5)–(13.10) суммирование проводится по всем сортам заряженных частиц плазмы. В условиях, когда плазма является бесстолкновительной, нейтральные частицы плазмы в электромагнитных явлениях участия, очевидно, не принимают. Как видно, выражения (13.8)–(13.10) имеют особенность под интегралом при $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$, и поэтому им нельзя пользоваться, пока не указано, каким образом следует устранять расходимость. Такая трудность обусловлена тем, что мы пользуемся идеализированным представлением возмущений в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. В реальной постановке задачи о малых колебаниях плазмы приходится иметь дело либо с заданными начальными данными, либо с заданными граничными условиями. Формально интегралы (13.8)–(13.10) можно вычислить, если

²Выражение для продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ можно найти также из третьего уравнения системы (9.5) (уравнения Пуассона) и выражения для индуцированного заряда (13.2), положив электрическое поле потенциальным, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. При этом приходим к выражению

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k} \int \frac{dv}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\parallel}}, \quad (13.8)$$

которое легко получается из (13.9) умножением (13.9) на k и добавлением в числитель слагаемого $\pm\omega$, что попросту эквивалентно использованию уравнения непрерывности (4.2).

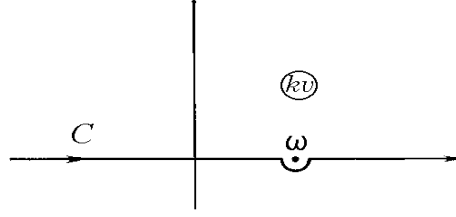


Рис. 6: Контур интегрирования C в (13.8)–(13.10).

ввести в знаменатель подынтегральных выражений малую положительную мнимую добавку $i\Delta$. Это соответствует смещению полюса в верхнюю полуплоскость ($v_{\parallel} = (\omega + i\Delta)/k$), или, при $\Delta \rightarrow 0$, обходу полюса снизу, по контуру C (см. рис. 6). Такое правило обхода называется правилом обхода Ландау и физически соответствует тому, что начальные возмущения в равновесной плазме должны затухать при $t \rightarrow \infty$. Более подробно данный вопрос рассмотрен в [4, 7, 21]. Такая малая положительная мнимая добавка к ω , как видно, например, из квазигидродинамического рассмотрения, автоматически возникает при учете столкновений частиц. Таким образом, заменяя, например, в (13.7)

$$\frac{1}{\omega - kv_{\parallel}} \rightarrow \frac{1}{\omega + i\Delta - kv_{\parallel}}$$

и переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ с учетом соотношений

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} - i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2},$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{P}{x}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x),$$

где символ P означает, что при интегрировании особенность в точке $x = 0$ следует понимать в смысле главного значения, имеем

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \int d\mathbf{v} \left[\frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] v_i \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_j}. \quad (13.11)$$

Для продольной диэлектрической проницаемости из (13.11) имеем:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \left[\int dv \frac{P}{\omega - kv} v \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v}(v) - i\pi \frac{\omega}{k^2} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v}(v) \Big|_{v=\frac{\omega}{k}} \right], \quad (13.12)$$

где $f_{0\alpha}(v) = \int f_{0\alpha}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}_{\perp}$ — одномерная (проинтегрированная по поперечным скоростям) функция распределения частиц сорта α . Из выражений (13.11), (13.12) видно, что, во-первых, в бесстолкновительной плазме существует отличная от нуля мнимая (антиэрмитова) часть тензора диэлектрической проницаемости, и во-вторых вклад в мнимую часть тензора дают лишь частицы, скорость которых удовлетворяет условию $\omega = kv$. Это условие можно переписать в виде $\omega/k = v_{\text{ph}} = v \cos \vartheta$, где v_{ph} — фазовая скорость волны и ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} . Но соотношение $\cos \vartheta = v_{\text{ph}}/v$ представляет собой не что иное, как условие черенковского излучения. При этом же условии, очевидно, происходит и обратный процесс — черенковское поглощение. Из (13.12) следует также, что при $\partial f_{0\alpha}/\partial v|_{v=\omega/k} < 0$ $\text{Im } \varepsilon^l > 0$, что соответствует поглощению волн (см. § 6) или, другими словами, их бесстолкновительной диссипации вследствие черенковского поглощения частицами плазмы. Такое бесстолкновительное затухание плазменных волн было впервые исследовано в [21] и получило название затухания Ландау. При $\partial f_{0\alpha}/\partial v|_{v=\omega/k} > 0$ (т. е. в неравновесной плазме) мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости отрицательна, $\text{Im } \varepsilon^l < 0$, и должно иметь место экспоненциальное нарастание волн (неустойчивость).

Найдем, далее, частоту высокочастотных плазменных (ленгмюровских) волн и декремент их затухания, предполагая, что тепловые поправки к собственной частоте колебаний все же остаются малыми, $\omega \gg kv$. Разложим знаменатель подынтегрального выражения (13.12) по отношению kv/ω и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int dv \frac{v \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v}}{\omega - kv} &\approx \frac{1}{\omega} \int dv \left(1 + \frac{kv}{\omega} + \frac{k^2 v^2}{\omega^2} + \dots \right) v \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v} = \\ &= -\frac{N_0}{\omega} \left(1 + 3 \frac{k^2 \overline{v^2}}{\omega^2} + \dots \right), \quad (13.13) \end{aligned}$$

где средний квадрат скорости

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 f_{0e}.$$

Итак,

$$\epsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 \overline{v^2}}{\omega^2} + \dots \right) - i \frac{\omega_{Pe}^2}{N_0 \omega} \frac{\pi}{|k|} \left[v \frac{\partial f_{0e}}{\partial v}(v) \right]_{v=\frac{\omega}{k}}. \quad (13.14)$$

Для (ленгмюровских) волн дисперсионное уравнение $\epsilon^l = 0$ дает

$$\omega^2 = \omega_{Pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 \overline{v^2}}{\omega^2} + \dots \right) + i \frac{\omega_{Pe}^2}{N_0} \frac{\pi \omega^2}{k^2} \left[\frac{\partial f_{0e}}{\partial v}(v) \right]_{v=\frac{\omega}{k}} \quad (13.15)$$

откуда находим выражение для частоты ω_1 и декремента γ_1 этих волн, считая поправки, связанные с учетом теплового движения, малыми и заменяя всюду в правой части ω на ω_{Pe} :

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \omega_{Pe}^2 + 3k^2 \overline{v^2}, \\ \gamma_2 &= -\frac{\text{Im } \epsilon^l}{\partial \text{Re } \epsilon^l / \partial \omega |_{\omega=\omega_2}} = \pi \frac{\omega_{Pe}^3}{2N_0 k^2} \left[\frac{\partial f_{0e}}{\partial v}(v) \right]_{v=\frac{\omega}{k}}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

При максвелловском распределении из (13.16) имеем

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \omega_{Pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2 = \omega_{Pe}^2 (1 + 3k^2 r_{de}^2), \\ \gamma_2 &= -\frac{\omega_{Pe} \sqrt{\pi}}{2 k^3 r_{de}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{de}^2}\right), \end{aligned} \quad (13.17)$$

где $r_{de}^2 = v_{Te} / \omega_{Pe}$ — дебаевский радиус.

Длинноволновые возмущения ($k^2 r_{de}^2 \ll 1$) затухают слабо, возмущения же, длина волны которых приближается к дебаевскому радиусу ($k^2 r_{de}^2 \sim 1$), затухают за один период колебаний (строго говоря, при $\gamma_2 \sim \omega_2$ формула (13.17) уже неприменима, но качественный вывод о сильном затухании при $kr_{de} \gtrsim 1$ правилен). Таким образом, как уже указывалось в предыдущем параграфе, электронные колебания плазмы происходят в очень узкой окрестности значений $\omega \approx \omega_{Pe}$.

Причина затухания, исследованного Ландау, может быть уяснена из следующих качественных соображений. Заряды, движущиеся со

скоростью, несколько большей фазовой скорости волны $v > v_{ph} = \omega/k$, могут затормозиться электрическим полем волны и изменить направление своего движения относительно волны. Но при отражении от потенциального барьера, движущегося со скоростью v_{ph} энергия частицы изменяется на величину³.

$$\Delta\mathcal{E} = 2m\frac{\omega}{k}\left(\frac{\omega}{k} - v\right). \quad (13.18)$$

При $v > \omega/k$ изменение энергии $\Delta\mathcal{E} < 0$, т. е. частица теряет энергию, отдавая ее волне. Точно такой же формулой выражается изменение энергии частицы, движущейся со скоростью, несколько меньшей фазовой ($v < \omega/k$). Эти частицы как бы подхлестываются догоняющей их волной и приобретают энергию $\Delta\mathcal{E} > 0$. Очевидно, что отраженные испытывают те заряды, энергия которых в системе координат, связанной с волной, меньше потенциальной энергии заряда в поле $E = E_0 \sin kz$ т. е.

$$-\sqrt{\frac{2eE_0}{mk}} < u = v - v_{ph} < \sqrt{\frac{2eE_0}{mk}}. \quad (13.19)$$

Ширина интервалов скоростей, в которых $\Delta\mathcal{E} > 0$, и $\Delta\mathcal{E} < 0$, одинакова. Но в одинаковом по величине интервале скоростей при максвелловском распределении (см. рис. 7а) число быстрых частиц (теряющих энергию) меньше числа медленных (отбирающих энергию у волны). Поэтому суммарная энергия, приобретаемая зарядами, положительна, и волна поглощается, что соответствует значениям $\gamma_1 \sim \partial f_{0e}/\partial v < 0$. На рис. 7 знаками "+" отмечена доля частиц, поглощающих энергию, а знаками "-" — доля частиц, отдающих свою энергию волне. Если функция распределения при $v = \omega/k$ растет с v , как это показано на рис. 7б (в этом случае $\gamma_1 \sim \partial f_{0e}/\partial v > 0$), то будет происходить усиление волны. Частицы, занимающие статистически менее вероятные состояния с большей энергией, под влиянием волны будут переходить в более вероятные состояния с меньшей энергией, отдавая избыток энергии волне.

³Относительная скорость частицы $u = v - v_{ph}$ при отражении изменит знак и станет равной $u_1 = v_{ph} - v$, следовательно, абсолютная скорость частицы после отражения будет $v_1 = 2v_{ph} - v$. Вычитая $mv_1^2/2$ из $mv^2/2$ найдем $\Delta\mathcal{E} < 0$ в соответствии с выражением (13.18)

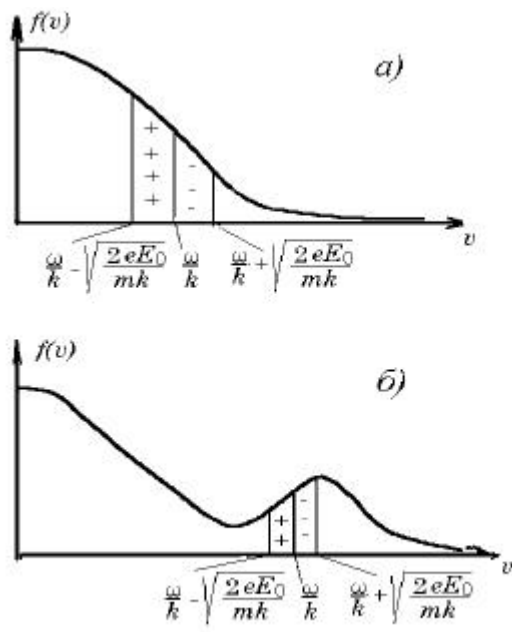


Рис. 7:

При максвелловском распределении выражения (13.9) и (13.10) сводятся к виду:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right) \right], \quad (13.20)$$

$$\varepsilon^{lr} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T\alpha}} \right), \quad (13.21)$$

где $J_+(x)$ — так называемая функция Крампа или плазменная функция⁴,

$$J_+(x) = x e^{-x^2/2} \int_0^x d\tau e^{\tau^2/2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad (13.22)$$

Вывод этих соотношений дан в конце параграфа. При кинетическом рассмотрении свойств волн в плазме полезными оказываются следующие асимптотические представления функции $J_+(x)$:

$$J_+(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2} \quad (13.23)$$

при $|x| \gg 1$, $\text{Re } x \gg \text{Im } x$;

$$J_+(x) \approx -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \quad (13.24)$$

при $|x| \ll 1$;

$$J_+(x) = -i \sqrt{2\pi} x e^{-x^2/2} \quad (13.25)$$

при $|x| \gg 1$, $\text{Im } x \gg \text{Re } x$, $\text{Im } x < 0$.

В частности, для случая ленгмюровских волн ($\omega \gg k v_{T\alpha}$), с помощью (13.23) немедленно приходим к выражениям (13.17) для частоты и декремента бесстолкновительного затухания. Как уже указывалось, формулы (13.17) неприменимы в области коротких волн, при $kr_{de} \gtrsim 1$, где ленгмюровские колебания сильно затухают. Рассмотрим эту область в пределе $\text{Im } \omega \gg \text{Re } \omega$ (считая при этом, что

⁴Функция $J_+(x)$ связана простым соотношением с табулированной функцией $W(x)$, $J_+(x) = -i \sqrt{\pi/2} x W(x/\sqrt{2})$ [22].

$\omega \gg kv_{T_e}$). Используя разложение (13.25), дисперсионное уравнение (12.11) продольных волн приведем к виду

$$1 + i\sqrt{2\pi} \frac{\omega}{kv_{T_e}} \frac{1}{k^2 r_{de}^2} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 r_{de}^2}\right) = 0. \quad (13.26)$$

Производя замену переменных $\omega = -ikv_{T_e}\xi$ и учитывая, что $\text{Re } \xi \gg \text{Im } \xi$, $\text{Re } \xi \gg 1$, из (13.26) имеем

$$k^2 r_{de}^2 + \sqrt{2\pi}\xi \exp(-\xi^2/2) = 0. \quad (13.27)$$

Разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, легко показать, что единственным решением, удовлетворяющим требуемым условиям $\text{Re } \xi \gg 1$, $\text{Im } \xi \ll 1$, является решение $\text{Im } \xi = \pi/\text{Re } \xi$, $\text{Re } \xi = \sqrt{\ln k^2 r_{de}^2}$, или

$$\frac{\omega}{kv_{T_e}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{\ln k^2 r_{de}^2} - i} \sqrt{\ln k^2 r_{de}^2}. \quad (13.28)$$

Из условия $\omega \gg kv_{T_e}\xi$ видим, что $k^2 r_{de}^2 \gg 1$, т. е. выражение (13.28) справедливо в пределе коротких волн. Спектр (13.28) продолжает, таким образом, спектр ленгмюровских колебаний (13.17) в область коротких волн. Колебания эти, однако, являются сильно затухающими.

Рассмотрим теперь с помощью (13.20) область частот $kv_{T_e} \ll \omega \ll kv_{T_e}$, в которой, согласно (12.23) – (12.25), должны существовать ионные звуковые и ионные ленгмюровские волны. В этом случае для ϵ_i , вклада ионов в диэлектрическую проницаемость, мы должны воспользоваться асимптотическим разложением (13.23), а для ϵ_e – разложением (13.24). В результате дисперсионное уравнение (13.25) приобретает следующий вид:

$$1 + \frac{\omega_{Pe}^2}{k^2 v_{T_e}^2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{T_e}}\right) - \frac{\omega_{Pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{k^2 v_{T_e}^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T_e}^2}\right) = 0. \quad (13.29)$$

Отсюда при $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$ находим выражения для частоты и декремента волны ($\omega \rightarrow \omega + i\gamma$):

$$\omega_3^2 = \frac{\omega_{Pi}^2 [1 + 3k^2 r_{di}^2 (1 + 1/k^2 r_{de}^2)]}{1 + 1/k^2 r_{de}^2},$$

$$\gamma_3 = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_i}{m_e} \frac{\omega^4}{k^3 v_{T_e}^3} \left[1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \cdot \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{T_i}^2} \right) \right]. \quad (13.30)$$

Отсюда в длинноволновом пределе $k^2 r_{de}^2 \ll 1$ для ионнозвуковых волн имеем:

$$\omega_3 = k v_s, \quad v_s^2 = \frac{T_e + 3T_i}{m_i};$$

$$\gamma_3 = -\omega \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_i}{m_e} \left[1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{2} - \frac{T_e}{2T_i} \right) \right]. \quad (13.31)$$

В пределе коротких волн $k^2 r_{de}^2 \gg 1$ для частоты ионных ленгмюровских волн получаем:

$$\omega_3^2 = \omega_{Pi}^2 + 3k^2 v_{T_i}^2,$$

$$\gamma_3 = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_i}{m_e} \frac{\omega}{k^3 r_{de}^3} \left[1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_{di}^2} \right) \right]. \quad (13.32)$$

Выражение (13.30), полученное при кинетическом описании, несколько отличается от полученного при приближенном, гидродинамическом описании выражения (12.23). В то же время приближенные выражения в длинноволновом (для ионнозвуковых) и коротковолновом (для ионных ленгмюровских волн) пределах (13.31) и (13.32) практически совпадают с (12.24) и (12.25) и позволяют определить коэффициенты $\gamma_e = 1$ и $\gamma_i = 3$. Кроме того, кинетическое рассмотрение позволяет определить декременты бесстолкновительного затухания этих волн как на электронах (первые члены в выражениях для декремента в (13.30) – (13.32), так и на ионах. Из выражений для декрементов видно, что слабозатухающие ионнозвуковые и ионные ленгмюровские волны ($\omega \gg \gamma$) могут существовать только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Отметим также, что в области очень коротких длин волн, $k^2 r_{di}^2 \gg 1$, эти волны сильно затухают при любых T_e/T_i , а выражения для их частоты и декремента можно найти подобно тому, как это сделано для ленгмюровских волн (см. (13.26) – (13.28)).

ПРИЛОЖЕНИЕ. Вывод соотношений (13.20), (13.21). Рассмотр-

рим интеграл

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-mv_{\parallel}^2/2T} dv_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel} + i\Delta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}kv_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2} dt}{x - t}, \end{aligned} \quad (\text{A14.1})$$

где $v_T = \sqrt{T/m}$, $x = (\omega + i\Delta)/kv_T$. Учитывая, что $\text{Im} x = \Delta/kv_T > 0$, запишем:

$$\frac{1}{x - t} = -i \int_0^{\infty} d\xi e^{i(x-t)\xi}. \quad (\text{A14.2})$$

Далее, добавляя в показатель экспоненты $\pm\xi^2/2$, а затем $\pm x^2/2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2} dt}{x - t} &= -i \int_0^{\infty} d\xi e^{ix\xi - \xi^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-(t+i\xi)^2/2} = \\ &= -i\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2} \int_0^{\infty} d\xi e^{-(\xi-ix)^2/2} = \\ &= -i\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2} \left(\int_0^{\infty} dy e^{-y^2/2} - \int_0^{-ix} dy e^{-y^2/2} \right) = \\ &= -i\pi e^{-x^2/2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\tau e^{-\tau^2/2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A14.3})$$

Учтя теперь, что интеграл, входящий в (13.10) в случае максвелловского распределения равен

$$\int dv \frac{v_{\perp}}{\omega - kv_{\parallel}} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_{\perp}} = N_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_T} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{e^{-v^2/2v_T^2}}{\omega - kv} = N_0 I(\Delta), \quad (\text{A14.4})$$

для ϵ^{1r} получаем выражение (13.21).

Чтобы найти для максвелловского распределения продольную диэлектрическую проницаемость ϵ^l с помощью (13.9), вспомним, что в (13.9)

$$\zeta(\omega - kv_{\parallel}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - kv_{\parallel} + i\Delta} = \frac{P}{\omega - kv_{\parallel}} - i\pi\delta(\omega - kv_{\parallel}).$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned}(\omega - kv_{\parallel})\zeta(\omega - kv_{\parallel}) &= 1, \\ kv_{\parallel}\zeta(\omega - kv_{\parallel}) &= -1 + \omega\zeta(\omega - kv_{\parallel}),\end{aligned}$$

и

$$k^2 v_{\parallel}^2 \zeta(\omega - kv_{\parallel}) = \omega^2 \zeta(\omega - kv_{\parallel}) - \omega - kv_{\parallel}.$$

Учитывая теперь, что для максвелловского распределения $\int_{-\infty}^{\infty} dv v f_0 = 0$, а также приведенное выражение для $I(\Delta)$, получаем (13.20).

Список литературы

- [1] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
- [2] Силин В. П., А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
- [3] Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», под ред. М. А. Леонтовича, вып. 3. — М.: Госатомиздат, 1963, с. 3–139.
- [4] Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
- [5] Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975.
- [6] Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т1. — М.: Атомиздат, 1975.
- [7] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
- [8] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
- [9] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1979.
- [10] Гершман Б. Н., Ерухимов Л. М., Яшин Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
- [11] Железняков В. В. Излучение в астрофизической плазме. — М.: Янус-К, 1997.
- [12] Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
- [13] Кринберг И. А. Кинетика электронов в ионосфере и плазмосфере Земли. — М.: Наука, 1978.

- [14] Основы физики плазмы. Т1. Под ред. А. А. Галева и Р. Судана. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
- [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика. Част 1. — М.: Наука, 1976.
- [16] Доусон Дж. М., Лин А. Т. Моделирование методом частиц. В кн. «Основы физики плазмы» под. ред. А. А. Галева и Р. Судана. Дополнение ко второму тому. — М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 83-146.
- [17] Власов А. А. ЖЭТФ, 8, 291 (1938)
- [18] Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы», под ред. М. А. Леонтовича, вып. 1. — М.: Госатомиздат, 1963, с. 183.
- [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика. — М.: Наука, 1973.
- [20] Хайкин С. Э., Физические основы механики. — М.: Наука, 1971.
- [21] Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 1946. Т. 16. С. 574.
- [22] Фадеева В.Н., Терентьев Н.Н. Таблицы значений интеграла вероятностей. — М.: Гостехиздат, 1954.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
§ 1. Определение плазмы	4
§ 2. Параметры плазмы	5
§ 3. Основные свойства плазмы: квазинейтральность, дебаевское экранирование, коллективные процес- сы. Газовое приближение. Плазменный параметр	9
Глава I. Основы линейной электродинамики среды с дисперсией	13
§ 4. Уравнения электромагнитного поля в среде. Тен- зоры комплексной проводимости и диэлектриче- ской проницаемости	13
§ 5. Энергия электромагнитного поля в среде	18
§ 6. Электромагнитные волны в диспергирующей сре- де	23
Глава II. Различные модели описания плазмы	36
§ 7. Движение отдельных частиц	36
§ 8. Магнитогидродинамическое описание плазмы . . .	39
§ 9. Кинетическое уравнение с самосогласованным по- лем	43

§ 10. Интеграл упругих столкновений Больцмана . .	46
§ 11. Квазигидродинамическое описание плазмы . .	56
Глава III. Диэлектрическая проницаемость и волны в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля	59
§ 12. Диэлектрическая проницаемость и волны в изо- тропной плазме. Квазигидродинамическое описа- ние	59
§ 13. Диэлектрическая проницаемость и волны в изо- тропной плазме. Кинетическое описание	68
Список литературы	81