МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

Е. Б. Титова
Д. В. Грибанов

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02. 03. 02 “Фундаментальная информатика и информационные технологии”,
01. 03. 02 “Прикладная математика и информатика”.

Нижний Новгород
2017

УДК 519.85
ББК В22.18
Т-45

Т-45 Титова Е.Б., Грибанов Д.В. ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ: учебно-методическое пособие. – [электронный ресурс] Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 25с.

Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Тюхтина А.А.**

В данном учебно-методическом пособии разобраны решения различных задач линейного программирования. К применяемым методам относятся: графический метод решения двумерных задач, прямой симплекс-метод, двойственный симплекс-метод и метод искусственного базиса. Также в пособии приведены контрольные работы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов второго и третьего курсов, обучающихся по направлениям: “Фундаментальная информатика и информационные технологии”, “Прикладная математика и информатика”, а также может быть использовано школьниками старших классов, занимающихся научной работой в рамках НОУ.

УДК 519.85
ББК 22.18

Предисловие

В данном учебно-методическом пособии представлены решения различных типовых задач линейного программирования. Для решения используются следующие методы: прямой симплекс-метод в строчной форме, двойственный симплекс-метод в строчной форме, графический метод для решения двумерных задач и метод искусственного базиса. В пособии не представлено никакой теоретической информации и обоснований указанных методов. За данными сведениями авторы рекомендуют читателю обратиться к книге Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. “Линейное и целочисленное линейное программирование” [1]. Задачи для контрольных работ частично были составлены авторами и частично взяты из книг [2,3,4].

Задача производственного планирования № 1

На изготовление одного стула расходуется 5 кг древесины, 0,5 м^2 кожи, 100 гр. клея и затрачивается 10 чел/час., одного стола - 20 кг древесины, 250 гр. клея и затрачивается 15 чел/час. В распоряжении имеется 400 кг древесины, 15 м^2 кожи, 7,5 кг клея и 450 чел/час. Нужно получить максимальную выручку от продажи столов и стульев, если известно, что стул стоит 50 рублей, а стол 100 рублей.

Занесем все данные в таблицу:

Ресурсы / Продукты	Стул	Стол	Ограничения
Древесина (кг)	5	20	400
Кожа (кв. м)	0,5	-	15
Клей (г)	100	250	7500
Трудовые затраты (чел/час)	10	15	450
Доход (руб)	50	100	

Составим математическую модель задачи, для этого введем необходимые переменные: x_1 - количество стульев, x_2 - количество столов. Оптимизируемая функция будет иметь вид: $f(x) = 50x_1 + 100x_2 \to \max$. По таблице составим ограничения-неравенства:

$$\begin{cases} 5x_1 & +20x_2 & \leq 400 \\ 0,5x_1 & & \leq 15 \\ 100x_1 & +250x_2 & \leq 7500 \\ 10x_1 & +15x_2 & \leq 450 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

I способ. *Графический.*

В прямоугольной системе координат построим область, ограниченную неравенствами (дополнительно сократив неравенства на некоторые положительные целые числа):

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & \leq 80 \\ x_1 & & \leq 30 \\ 2x_1 & +5x_2 & \leq 150 \\ 2x_1 & +3x_2 & \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

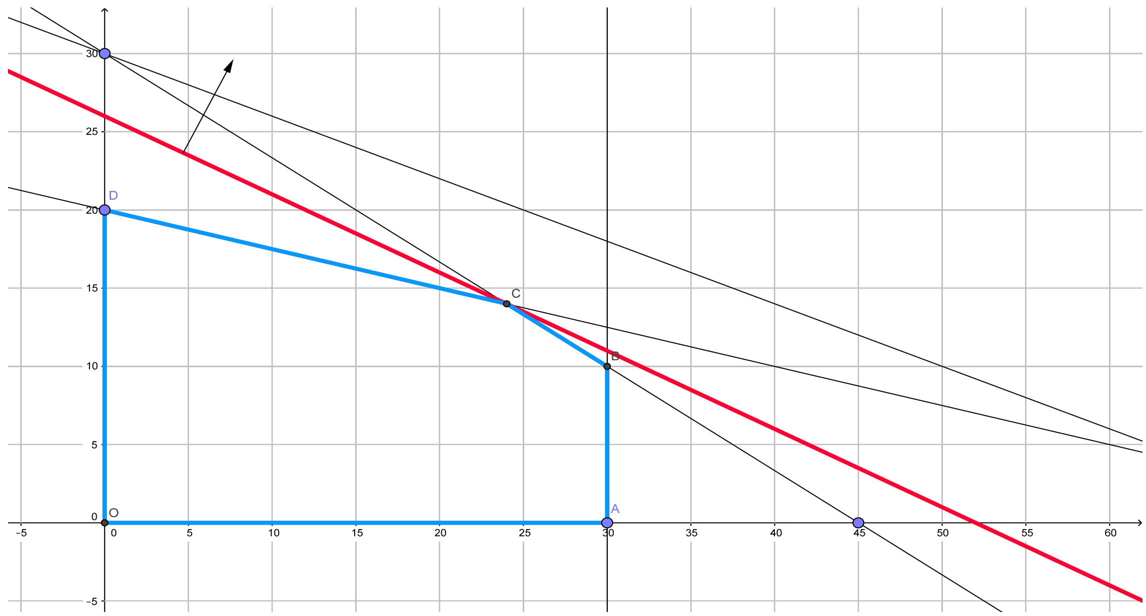

Рис. 1: Решение графическим методом

Вычислим значение целевой функции в каждой вершине многоуголь-ника:

$$\begin{array}{ll} O(0;0) & f_O = 0 \\ A(30;0) & f_A = 1500 \\ B(30;10) & f_B = 2500 \\ C(24;14) & f_C = 2600 \\ D(0;20) & f_D = 2000. \end{array}$$

Очевидно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке C. Линия уровня функции выделена красным цветом, многоугольник допустимой области — синим.

Ответ: $f(x) = 2600, x = (24;14)$. Изготовив 24 стула и 14 столов, получим максимальную выручку 2600 рублей.

II способ. *Симплекс-метод.*

Введем дополнительную переменную $x_0 = \frac{f(x)}{50} = x_1 + 2x_2$. Данная переменная теперь играет роль целевой функции $f(x)$, поэтому будем решать задачу $x_0 \to \max$. Добавим к каждому неравенству системы (1) неотрицательную переменную, для того чтобы неравенства превратились в равенства. Получим следующую задачу:

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} x_0 & -x_1 & -2x_2 & & & & & = 0 \\ & x_1 & +4x_2 & +x_3 & & & & = 80 \\ & x_1 & & & +x_4 & & & = 30 \\ & 2x_1 & +5x_2 & & & +x_5 & & = 150 \\ & 2x_1 & +3x_2 & & & & +x_6 & = 90 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, ..., 6} \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу, содержащую допустимый начальный базис (столбцы 3,4,5,6):

0	-1	-2	0	0	0	0
80	1	4	1	0	0	0
30	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0
150	2	5	0	0	1	0
90	2	3	0	0	0	1

По каждой симплекс-таблице выписываем соответствующее ей допустимое решение задачи: $X = (0, 0, 80, 30, 150, 90)$ и значение целевой функции на нем $x_0 = 0$.

Выбираем столбец, вводимый в базис, характеризующийся отрицательным элементом в 0-ой строке. В примере это столбец с номером $j = 1$. Выбираем строку так, чтобы на ее номере достигался $\min\limits_{i:Q_{i\,j}>0} Q_{i\,0}/Q_{i\,j}$, где $Q_{i\,j}$ элемент таблицы, находящийся в i-ой строке и j-ом столбце (нумерация с нуля). В примере $i = 1$. Ведущий элемент выделен рамкой. Пересчитываем таблицу, выполняя один шаг метода Гаусса.

30	0	-2	0	1	0	0
50	0	4	1	-1	0	0
30	1	0	0	1	0	0
90	0	5	0	-2	1	0
30	0	$\boxed{3}$	0	-2	0	1

$x_0 = 30, X = (30, 0, 50, 0, 90, 30)$

Делаем следующий шаг, выбирая в качестве ведущего элемент, находящийся в третьей строке и втором столбце таблицы.

50	0	0	0	-1/3	0	2/3
10	0	0	1	$\boxed{5/3}$	0	-4/3
30	1	0	0	1	0	0
40	0	0	0	4/3	1	-5/3
10	0	1	0	-2/3	0	1/3

$x_0 = 50, X = (30, 10, 10, 0, 40, 0)$

Продолжаем итерации.

52	0	0	1/5	0	0	2/5
6	0	0	3/5	1	0	-4/5
24	1	0	-3/5	0	0	4/5
32	0	0	-4/5	0	1	-3/5
14	0	1	2/5	0	0	-1/5

$x_0 = 52, X = (24, 14, 0, 6, 32, 0)$

Последняя таблица оптимальна, так как все элементы нулевой строки, кроме значения целевой функции, неотрицательны.

Чтобы выписать ответ вспомним, что мы выбирали $x_0 = \frac{f(x)}{50}$.

Ответ: 24 стула, 14 столов. Прибыль 2600 рублей.

Задача производственного планирования №2

Необходимо распределить вагоны по двум типам поездов так, чтобы выгода от продажи билетов пассажирам по некоторой средней фиксированной цене была максимальной. Исходные данные занесены в таблицу:

Поезда / Вагоны	Багажный	Почтовый	Плацкарт	Купе	Мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1
Число пассажиров	-	-	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Обозначим число скорых поездов через x_1, а число пассажирских - через x_2. Составим целевую функцию:

$$f(x) = (5 \cdot 58 + 6 \cdot 40 + 3 \cdot 32)x_1 + (8 \cdot 58 + 4 \cdot 40 + 1 \cdot 32)x_2 = 626x_1 + 656x_2 \to \max.$$

Составим по таблице систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & \leq 12 \\ x_1 & & \leq 8 \\ 5x_1 & +8x_2 & \leq 81 \\ 6x_1 & +4x_2 & \leq 70 \\ 3x_1 & +x_2 & \leq 26 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

По аналогии с предыдущим примером, введем переменную $x_0 = 1/2 f(x) = 313x_1 + 328x_2$, обозначающую величину целевой функции и будем решать задачу $x_0 \to \max$. Также сократим четвертое неравенство на 2 и введем неотрицательные переменные $x_3, \ldots, x_7$, для того чтобы превратить неравенства системы (2) в уравнения:

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} x_0 & -313x_1 & -328x_2 & & & & & & = 0 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & = 12 \\ & x_1 & & & +x_4 & & & & = 8 \\ & 5x_1 & +8x_2 & & & +x_5 & & & = 81 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & & +x_6 & & = 35 \\ & 3x_1 & +x_2 & & & & & +x_7 & = 26 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, ..., 7} \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу:

0	-313	-328	0	0	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
81	5	$\boxed{8}$	0	0	1	0	0
35	3	2	0	0	0	1	0
26	3	1	0	0	0	0	1

$x_0 = 0, X = (0, 0, 12, 8, 81, 35, 26)$

3321	-108	0	0	0	41	0	0
15/8	$\boxed{3/8}$	0	1	0	-1/8	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0
81/8	5/8	1	0	0	1/8	0	0
59/4	7/4	0	0	0	-1/4	1	0
127/8	19/8	0	0	0	-1/8	0	1

$x_0 = 3321, X = (0, 81/8, 15/8, 8, 0, 59/4, 127/8)$

3861	0	0	288	0	5	0	0
5	1	0	8/3	0	-1/3	0	0
3	0	0	-8/3	1	1/3	0	0
7	0	1	-5/3	0	1/3	0	0
6	0	0	-14/3	0	1/3	1	0
4	0	0	-19/3	0	2/3	0	1

$x_0 = 3861, X = (5, 7, 0, 3, 0, 6, 4)$

Последняя таблица оптимальна, так как значения 0-нулевой строки, кроме значения целевой функции, неотрицательны.

Чтобы выписать ответ вспомним, что мы выбирали $x_0 = 1/2f(x)$.

Ответ: 5 скорых и 7 пассажирских поездов с прибылью 7722 усл.ед.

Задача о рационе кормления.

При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 2000 единиц белка, не менее 120 единиц кальция, не менее 40 единиц витаминов. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание питетельных веществ в каждом виде кормов приведено в таблице:

Питательные вещества / Продукты	Сено	Силос	Комбикорм
Белок (ед/кг)	50	20	180
Кальций (ед/кг)	6	4	3
Витамины (ед/кг)	2	1	1

Требуется составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг сена 3 усл.ед., силоса - 2 усл.ед., комбинированного корма - 5 усл.ед.

Обозначим количество сена через x_1 кг, силоса - через x_2 кг, комбинированного корма - через x_3 кг. Составим целевую функцию: $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$.

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 50x_1 & +20x_2 & +180x_3 & \geq 2000 \\ 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & \geq 120 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Сократим первое неравенство:

$$\begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & +18x_3 & \geq 200 \\ 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & \geq 120 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Как и в предыдущих задачах, введем переменную $x_0 = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \rightarrow \max$ и неотрицательные дополнительные переменные x_4, x_5, x_6 для превращения неравенств системы (3) в уравнения. Получим следующую формулировку рассматриваемой задачи:

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} x_0 & +3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & & & & = 0 \\ & 5x_1 & +2x_2 & +18x_3 & -x_4 & & & = 200 \\ & 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & -x_5 & & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & -x_6 & = 40 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, ..., 6} \end{cases} \quad (4)$$

В полученной задаче не выделен начальный допустимый базис. Для его нахождения применим метод искусственного базиса.

I способ: Метод искусственного базиса

Метод искусственного базиса состоит в решении специальной вспомогательной задачи, отличающейся от исходной тем, что к каждому уравнению системы добавляется дополнительная переменная, в нашем случае это переменные x_7, x_8, x_9. Оптимизируемая функция же заменяется на специальную функцию $g(x) = -x_7 - x_8 - x_9 \to \max$, равную сумме новых введенных переменных с отрицательным знаком. Решив вспомогательную задача мы сможем построить начальный допустимый базис для исходной задачи.

Таким образом, вспомогательная задача примет вид(как обычно, для обозначения целевого функционала заведем отдельную переменную $x_0 = -x_7 - x_8 - x_9$):

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} x_0 & & & & & & & +x_7 + x_8 + x_9 & = 0 \\ & 5x_1 & +2x_2 & +18x_3 & -x_4 & & & +x_7 & = 200 \\ & 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & -x_5 & & +x_8 & = 120 \\ & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & -x_6 & +x_9 & = 40 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,...,9} \end{cases}$$

Запишем симплекс таблицу:

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
200	5	2	18	-1	0	0	1	0	0
120	6	4	3	0	-1	0	0	1	0
40	2	1	1	0	0	-1	0	0	1

Вычитаем все строки из целевой строки и получаем правильную симплекс-таблицу для переменных $x_1, \ldots, x_9$.

-360	-13	-7	-22	1	1	1	0	0	0
200	5	2	18	-1	0	0	1	0	0
120	6	4	3	0	-1	0	0	1	0
40	$\boxed{2}$	1	1	0	0	-1	0	0	1

Максимизируем вспомогательную целевую функцию $g(x)$, выбирая столбец, вводимый в базис, которому соответствует отрицательный элемент 0-ой строки.

-100	0	-1/2	-31/2	1	1	-11/2	0	0	13/2
100	0	-1/2	$\boxed{31/2}$	-1	0	5/2	1	0	-5/2
0	0	1	0	0	-1	3	0	1	-3
20	1	1/2	1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2

Продолжаем шаги симплекс-метода:

0	0	-1	0	0	1	-3	1	0	4
200/31	0	-1/31	1	-2/31	0	5/31	2/31	0	-5/31
0	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	3	0	1	-3
520/31	1	16/31	0	1/31	0	-18/31	-1/31	0	18/31

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
200/31	0	0	1	-2/31	-1/31	8/31	2/31	1/31	-8/31
0	0	1	0	0	-1	3	0	1	-3
520/31	1	0	0	1/31	16/31	-66/31	-1/31	-16/31	66/31

Получили базис, не содержащий искусственных переменных. Удаляем столбцы искусственных переменных (x_7, x_8, x_9) и восстанавливаем целевую функцию $f(x)$ исходной задачи.

0	3	2	5	0	0	0
200/31	0	0	1	-2/31	-1/31	8/31
0	0	1	0	0	-1	3
520/31	1	0	0	1/31	16/31	-66/31

Устанавливаем нули в целевой строке над базисными столбцами:

-2560/31	0	0	0	7/31	19/31	-28/31
200/31	0	0	1	-2/31	-1/31	8/31
0	0	1	0	0	-1	$\boxed{3}$
520/31	1	0	0	1/31	16/31	-66/31

Производим шаги симплекс-метода для максимизации исходной целевой функции:

-2560/31	0	28/93	0	7/31	29/93	0
200/31	0	-8/93	1	-2/31	5/93	0
0	0	1/3	0	0	-1/3	1
520/31	1	22/31	0	1/31	-6/31	0

$f(X) = -2560/31, X = (520/31, 0, 200/31, 0, 0, 0)$

Последняя таблица является оптимальной, так как элементы 0-ой строки, кроме значения целевой функции, неотрицательны.

Чтобы выписать ответ вспомним, что мы выбирали $x_0 = -f(x)$.

Ответ: сена - 520/31 кг., комбикорма 200/31 кг., суммарный расход 2560/31 усл. ед.

II способ: Двойственный симплекс-метод (использование недопустимых планов)

По системе (4) составляем симплекс-таблицу:

0	3	2	5	0	0	0
200	5	2	18	-1	0	0
120	6	4	3	0	-1	0
40	2	1	1	0	0	-1

Домножим уравнения предыдущей системы на -1, получим следующую симплекс-таблицу:

0	3	2	5	0	0	0
-200	-5	-2	-18	1	0	0
-120	-6	-4	-3	0	1	0
-40	$\boxed{-2}$	-1	-1	0	0	1

Данная таблица не является прямодопустимой, но является двойственно допустимой. К таким таблицам можно применять шаги двойственного симплекс-метода.

По правилу шага двойственного симплекс-метода, ведущая строка выбирается среди строк с отрицательным элементом в 0-ом столбце. Например можно выбрать номер ведущей строки $i = 1$. Столбец для ввода в базис выбираем так, чтобы на его номере достигался $\max\limits_{i:Q_{ij}<0} Q_{0j}/Q_{ij}$, где Q_{ij} есть i-ый j-ый элемент таблицы (нумерация с нуля). В примере номер столбца $j = 3$. Ведущий элемент выделен рамкой.

-60	0	1/2	7/2	0	0	3/2
-100	0	1	$\boxed{-31/2}$	1	0	-5/2
0	0	-1	0	0	1	-3
20	1	1/2	1/2	0	0	-1/2

-2560/31	0	24/31	0	7/31	0	29/31
200/31	0	-1/31	1	-2/31	0	5/31
0	0	-1	0	0	1	-3
520/31	1	16/31	0	1/31	0	-18/31

$f(X) = 2560/31, X = (520/31, 0, 200/31, 0, 0, 0)$

Последняя таблица является оптимальной, так как элементы 0-ого столбца, кроме значения целевой функции, неотрицательны.

Чтобы выписать ответ вспомним, что мы выбирали $x_0 = -f(x)$.

Ответ: сена - 520/31 кг., комбикорма 200/31 кг., суммарный расход 2560/31 усл. ед.

Задача о раскрое

Имеется исходное сырье - бревна длины 3 м. Необходимо изготовить комплекты из 2 брусьев длиной по 0,6 м, 1 бруса длиной 1,5 м и 3 брусьев длиной по 2,5 м без склеивания. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Все возможные способы распила занесем в таблицу:

Способы распила	Брус 0,6 м	Брус 1,5 м	Брус 2,5 м	Кол-во бревен
1	5	-	-	x_1
2	2	1	-	x_2
3	-	2	-	x_3
4	-	-	1	x_4

Количество комплектов определяется брусьями длиной 2,5 м, которые получаются при 4 способе распила. Отсюда целевая функция $f(x) = x_4/3 \to \max$. Выберем $x_0 = 3f(x) = x_4 \to \max$. Считаем, что x_i - доли от общего числа бревен, тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Условия формирования комплектов:

$$\frac{5x_1 + 2x_2}{2} = \frac{x_2 + 2x_3}{1} = \frac{x_4}{3}.$$

Получаем следующую задачу:

$$\max x_0$$

$$\begin{cases} x_0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad -x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2/3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 1/3x_4 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Составляем симплекс-таблицу:

0	0	0	0	-1
1	1	1	1	1
0	5	2	0	-2/3
0	0	$\boxed{1}$	2	-1/3

В данной таблице также не выделена начальная допустимая база. Можно было бы найти эту базу используя метод искусственного базиса. Но не трудно видеть, что за счет нулей в первом столбце второй и третьей строки, используя две итерации метода Гаусса можно найти две переменные, входящие в некоторый допустимый базис.

0	0	0	0	-1
1	1	0	-1	4/3
0	$\boxed{5}$	0	-4	0
0	0	1	2	-1/3

0	0	0	0	-1
1	0	0	-1/5	$\boxed{4/3}$
0	1	0	-4/5	0
0	0	1	2	-1/3

Из последней таблицы видно, что выбрав элемент 1-ой строки 4-ого столбца в качестве ведущего, мы в итоге получим допустимый базис, или другими словами допустимую симплекс-таблицу:

3/4	0	0	-3/20	0
3/4	0	0	-3/20	1
0	1	0	-4/5	0
1/4	0	1	$\boxed{39/20}$	0

Выполнив над таблицей выше один шаг симплекс-метода получи оптимальную таблицу:

10/13	0	1/13	0	0
30/39	0	1/13	0	1
4/39	1	16/39	0	0
5/39	0	20/39	1	0

$x_0 = 10/13, X = (4/39, 0, 5/39, 10/13)$

Чтобы записать ответ вспомним, что мы положили $x_0 = 3f(x)$.

Ответ: Из 39 бревен получим 10 комплектов. Необходимо распилить 4 бревна 1 способом, 5 бревен - 3 способом и 30 бревен - 4 способом.

Контрольная работа № 1

Дана область D, заданная системой неравенств, и вектор строка c. Задание состоит из следующих пунктов:

1) Сделайте рисунок области D.

2) Найдите максимум функции cx по области D. Если функция cx неограниченна, то укажите луч, по которому указанная функция неограниченно возрастает.

3) Найдите минимум функции cx по области D. Если функция cx неограниченна, то укажите луч, по которому указанная функция неограниченно убывает.

4) Найдите неравенство следствие в системе неравенств, задающей D.

Вариант 1
$c = (2, -3)$
$$\begin{cases} (3,-2)x \geq 2 \\ (4,1)x \geq 10 \\ x_2 \leq 5 \\ (1,1)x \geq 1 \\ (-7,1)x \leq -12 \end{cases}$$

Вариант 2
$c = (2, -1)$
$$\begin{cases} x_1 \leq 14 \\ (-2,7)x \leq 22 \\ (1,2)x \leq 22 \\ (2,-1)x \geq 2 \\ (1,-2)x \geq -5 \end{cases}$$

Вариант3
$c = (1, 3)$
$$\begin{cases} x_2 \geq -4 \\ (2,1)x \geq -10 \\ (-1,1)x \leq 5 \\ (-1,3)x \leq 13 \\ x_1 \geq -5 \end{cases}$$

Вариант 4
$c = (2, -3)$
$$\begin{cases} (1,3)x \leq 22 \\ (-2,3)x \leq 19 \\ x_1 \geq -2 \\ (3,1)x \geq -4 \\ (1,-1)x \geq -7 \end{cases}$$

Вариант 5
$c = (2, -3)$
$$\begin{cases} (-1,4)x \leq 17 \\ (2,-3)x \geq -14 \\ (-3,1)x \leq 14 \\ x_2 \geq -1 \\ (5,-4)x \geq -28 \end{cases}$$

Вариант 6
$c = (3, 1)$
$$\begin{cases} (-1,3)x \leq 7 \\ (-2,1)x \leq 4 \\ (3,2)x \geq -13 \\ x_2 \geq -5 \\ (-3,4)x \leq 11 \end{cases}$$

Вариант7
$c = (-3, -4)$
$$\begin{cases} (3,1)x \leq 11 \\ (1,1)x \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ (3,-1)x \geq -7 \\ (1,-1)x \geq -6 \end{cases}$$

Вариант 8
$c = (-2, 3)$
$$\begin{cases} (-1,2)x \geq -9 \\ (1,-1)x \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ (1,3)x \leq 10 \\ (-2,3)x \geq -14 \end{cases}$$

Вариант 9
$c = (3, -2)$
$$\begin{cases} (-3,2)x \leq 14 \\ (1,-2)x \geq -10 \\ x_2 \leq 6 \\ (4,1)x \leq 26 \\ (1,-1)x \geq -6 \end{cases}$$

Вариант 10
$c = (-1, -4)$
$$\begin{cases} (-1,1)x \leq 2 \\ (-1,3)x \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ (-3,1)x \geq -7 \\ (1,-2)x \geq -3 \end{cases}$$

Вариант11
$c = (-1, -4)$
$$\begin{cases} (2,-1)x \geq -5 \\ (-2,3)x \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ (3,-1)x \leq 9 \\ (1,-1)x \geq -3 \end{cases}$$

Вариант 12
$c = (-2, 3)$
$$\begin{cases} (2,-3)x \geq -7 \\ (-2,5)x \leq 9 \\ x_1 \leq 3 \\ (3,-1)x \leq 10 \\ (1,-2)x \geq -4 \end{cases}$$

Вариант 13
$c = (4, 5)$
$$\begin{cases} (-3,2)x \leq 13 \\ x_1 \geq -3 \\ (1,1)x \geq -4 \\ (1,-4)x \leq 11 \\ (1,-1)x \geq -5 \end{cases}$$

Вариант 14
$c = (-5, 2)$
$$\begin{cases} (1,2)x \leq 9 \\ (4,3)x \leq 16 \\ (-1,2)x \geq -4 \\ x_2 \geq -3 \\ (-5,-1)x \geq -20 \end{cases}$$

Вариант15
$c = (-5, 2)$
$$\begin{cases} (1,4)x \leq 12 \\ (1,2)x \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ (-2,5)x \geq -18 \\ (-1,-3)x \geq -9 \end{cases}$$

Вариант 16
$c = (-5, 2)$
$$\begin{cases} x_2 \leq 4 \\ (1,4)x \leq 15 \\ (-5,2)x \geq -9 \\ (-1,2)x \geq -5 \\ (3,1)x \leq 12 \end{cases}$$

Вариант 17

$c = (1, 2)$

$$\begin{cases} (-2,3)x \le 6 \\ x_2 \le 2 \\ (-2,-1)x \ge -8 \\ (-5,4)x \ge -20 \\ (-3,-1)x \ge -16 \end{cases}$$

Вариант 18

$c = (-2, 1)$

$$\begin{cases} (-1,2)x \le 4 \\ (3,-1)x \ge -7 \\ x_2 \ge -2 \\ (-1,6)x \ge -12 \\ (-4,1)x \le 13 \end{cases}$$

Вариант19

$c = (2, -1)$

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ (-1,6)x \le 21 \\ (1,-1)x \ge -6 \\ (3,-1)x \le 9 \\ (1,1)x \le 10 \end{cases}$$

Вариант 20

$c = (-1, -2)$

$$\begin{cases} x_1 \ge -4 \\ (-1,2)x \le 10 \\ (1,1)x \le 5 \\ (4,1)x \le 11 \\ (-1,4)x \le 24 \end{cases}$$

Вариант 21

$c = (3, 2)$

$$\begin{cases} x_2 \le 4 \\ (3,2)x \le 14 \\ (2,-1)x \ge -6 \\ (4,-1)x \ge -12 \\ (1,1)x \le 8 \end{cases}$$

Вариант 22

$c = (-2, 3)$

$$\begin{cases} x_2 \ge -2 \\ (-1,2)x \ge -5 \\ (-3,-1)x \le 5 \\ (-2,1)x \le 5 \\ (1,3)x \ge -12 \end{cases}$$

Вариант 23

$c = (-3, 2)$

$$\begin{cases} (-2,1)x \ge -6 \\ x_1 \le 3 \\ (-1,-2)x \ge -7 \\ (1,-3)x \ge -8 \\ (1,1)x \le 6 \end{cases}$$

Вариант 24

$c = (2, 3)$

$$\begin{cases} (-1,-1)x \ge -4 \\ x_2 \le 3 \\ (1,-3)x \ge -11 \\ (4,1)x \ge -18 \\ (1,2)x \le 9 \end{cases}$$

Вариант 25

$c = (2, 5)$

$$\begin{cases} x_1 \ge -3 \\ (-1,3)x \le 6 \\ (3,2)x \ge -11 \\ (1,2)x \ge -9 \\ (-1,2)x \le 7 \end{cases}$$

Вариант 26

$c = (3, -4)$

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ (-1,-1)x \ge -4 \\ (2,-1)x \le 7 \\ (-1,-3)x \le 7 \\ (-1,1)x \ge -7 \end{cases}$$

Вариант 27

$c = (2, -5)$

$$\begin{cases} x_2 \le 2 \\ (1,1)x \le 3 \\ (2,-3)x \le 6 \\ (1,-3)x \le 6 \\ (-1,4)x \ge -14 \end{cases}$$

Вариант 28

$c = (4, 3)$

$$\begin{cases} x_2 \ge -2 \\ (-1,-1)x \le 3 \\ (-4,3)x \le 12 \\ (-2,3)x \ge -8 \\ (-3,1)x \le 14 \end{cases}$$

Вариант 29

$c = (4, 2)$

$$\begin{cases} x_1 \ge -2 \\ (-3,2)x \le 8 \\ (1,3)x \le 12 \\ (2,1)x \ge -5 \\ (-3,1)x \le 12 \end{cases}$$

Вариант 30

$c = (3, -4)$

$$\begin{cases} (-1,3)x \ge -8 \\ x_1 \le 2 \\ (-1,-1)x \le 4 \\ (-3,-1)x \le 10 \\ (-1,4)x \ge -16 \end{cases}$$

Вариант 31

$c = (2, 4)$

$$\begin{cases} (3,1)x \ge -5 \\ x_2 \ge -2 \\ (-1,1)x \le 3 \\ (-1,4)x \ge -9 \\ (4,3)x \ge -13 \end{cases}$$

Вариант 32

$c = (4, 3)$

$$\begin{cases} (-3,1)x \le 10 \\ (-1,2)x \le 5 \\ x_2 \le 2 \\ (2,1)x \le 6 \\ (-4,3)x \le 17 \end{cases}$$

Контрольная работа № 2

Решите следующую задачу:

$$\max cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Где матрица A и строка c и столбец b даны ниже в следующем виде:

0	c
b	A

Например, если дана таблица

0	1	3	-1	-4	-1
3	5	5	2	-3	-3
5	-1	-1	0	0	3
3	3	-4	4	4	-3

это означает, что $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $c = (1, 3, -1, -4, -1)$, $b = (3, 5, 3)^\top$.

Вариант 1

0	1	3	-1	-4	-1
3	5	5	2	-3	-3
5	-1	-1	0	0	3
3	3	-4	4	4	-3

Вариант 2

0	2	-1	-4	2	-3
5	-1	0	2	0	-2
5	-3	-2	4	-4	-1
3	-4	5	-3	3	-2

Вариант 3

0	3	-2	1	-4	-2
1	-3	2	5	5	-1
5	5	-2	3	-4	1
3	5	3	5	-2	-1

Вариант 4

0	1	-4	1	-3	-1
1	5	-1	1	-4	1
5	-1	-3	-3	5	-4
5	1	0	3	2	-3

Вариант 5

0	5	-3	-1	-1	-1
2	-2	-4	-1	4	2
4	0	4	3	-2	2
1	-4	-1	2	-3	3

Вариант 6

0	3	-4	-4	-3	-3
3	1	1	-1	2	4
1	3	-3	1	0	2
5	3	1	4	0	-4

Вариант 7

0	0	2	-3	-1	-3
5	4	3	4	0	-2
1	-1	3	1	4	-3
5	-4	-3	4	-1	0

Вариант 8

0	-1	-3	-1	-2	1
1	-3	4	0	-4	1
5	5	2	2	1	-4
4	0	-4	2	4	1

Вариант 9

0	-1	-3	-3	-4	-1
2	1	-2	3	-1	-1
1	-4	3	4	3	-2
5	-3	4	3	0	3

Вариант 10

0	4	-1	3	-3	-4
1	-3	4	0	-4	2
4	2	1	-2	-3	3
5	1	-3	-4	3	1

Вариант 11

0	-1	-3	-1	0	3
4	1	-2	0	-1	4
4	-3	2	0	-2	2
5	4	-3	1	-3	-1

Вариант 12

0	4	-3	3	-3	-1
3	-1	1	4	-3	0
3	2	-1	2	4	0
2	-2	-3	-2	5	2

Вариант 13

0	4	2	-4	-2	-4
1	5	-3	3	-1	3
3	-1	3	-1	-4	2
1	0	-4	4	-1	2

Вариант 14

0	-3	-3	-4	-1	-2
1	0	2	4	1	-2
2	5	4	1	-1	1
2	-3	-4	-1	-1	3

Вариант 15

0	-2	2	-4	-1	-4
2	2	4	-3	-4	-3
5	-1	3	-2	-1	3
5	2	0	-1	0	0

Вариант 16

0	-2	4	-2	-3	1
3	1	-3	0	3	3
1	4	3	3	-4	0
1	4	5	-3	-2	1

Вариант 17

0	1	5	0	5	-4
3	2	4	1	3	-3
1	1	4	-3	2	3
2	1	0	4	-1	-4

Вариант 18

0	5	-2	-3	-3	3
5	1	2	-4	-2	4
1	-3	0	-1	4	-4
4	3	1	-4	1	2

Вариант 19

0	-3	-4	1	-3	5
4	0	0	0	0	4
1	0	-1	-3	-2	3
3	-1	5	-1	0	-3

Вариант 20

0	-4	0	4	-4	-3
2	5	-3	3	-1	0
3	3	3	0	0	0
3	-4	-1	-3	-4	4

Вариант 21

0	-4	1	-1	1	-1
2	-2	3	-1	2	1
3	2	5	4	1	-4
3	5	-4	1	1	2

Вариант 22

0	-3	0	3	-1	2
3	-4	4	-2	0	-1
2	-1	2	4	-2	5
4	-3	5	2	-3	2

Вариант 23

0	5	2	-1	2	-1
1	-1	3	5	3	-2
3	5	-1	-1	-3	0
5	0	5	5	4	-2

Вариант 24

0	2	-4	-1	5	-1
5	5	0	-1	2	1
4	4	-2	1	2	-2
5	-3	1	-1	2	3

Вариант 25

0	-4	-1	1	-2	4
5	3	-3	0	-3	-1
3	-1	-2	2	3	0
3	1	2	-4	5	-4

Вариант 26

0	-1	-3	2	-2	3
5	2	-4	1	2	-4
4	2	-3	-3	-1	-4
5	2	-4	-3	3	2

Вариант 27

0	0	1	-2	-4	-4
2	4	0	3	-2	2
3	5	-4	0	3	-1
4	1	0	1	1	0

Вариант 28

0	1	1	-3	-1	-2
1	-1	-1	3	5	-1
5	2	5	-2	-1	-2
1	1	2	0	-1	3

Вариант 29

0	-3	-4	2	-3	-4
2	4	5	0	-4	1
5	1	1	3	-4	1
1	-3	-4	3	-3	4

Вариант 30

0	3	-3	1	-2	-2
2	4	0	-2	-3	4
3	2	0	4	-3	3
3	-2	2	2	-1	1

Вариант 31

0	1	4	0	-3	-3
4	4	5	0	-2	1
1	0	3	-3	2	1
5	2	-4	-1	2	-3

Вариант 32

0	-2	-4	3	-3	-2
2	-3	-3	-2	3	-3
3	5	0	-4	0	2
5	-4	-4	4	-1	3

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю.* Линейное и целочисленное линейное программирование: учебник. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2005. - 160с.

[2] *Абрамов Л.М., Капустин В.Ф.* Математическое программирование. Ленинград: ЛГУ, 1976. — 184 с.

[3] *Заславский Ю. Л.* Сборник задач по линейному программированию. М: Наука, 1969. - 256 с.

[4] *Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. — Мн.: Вышэйш. школа, 1978. — 256 с., ил.

Елена Борисовна Титова
Дмитрий Владимирович Грибанов

ПРАКТИКУМ ПО
ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.