МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Л.К. Додунова

И.Ю. Ястребова

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
04.03.01 "Химия",
18.03.01 "Химическая технология",
по специальности 04.05.01 "Фундаментальная и прикладная химия".

Нижний Новгород

2016

УДК 517.31(075.8)
ББК В161.1я73-41
Д 60

Д 60 Додунова Л.К., Ястребова И.Ю. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. — 25 с.

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры математики ННГАСУ **Т.А. Пушкова**

Работа содержит методические рекомендации к применению приёмов интегрирования тригонометрических выражений. Рассмотрено двенадцать видов выражений, состоящих из набора тригонометрических функций, в соответствии с учебной программой по математике на химическом факультете. На каждый вид представлены примеры и показано практическое применение данных приёмов. Дано более ста примеров для самостоятельной работы студентов и контрольная работа.

Предназначено студентам для приобретения практических навыков нахождения интегралов от тригонометрических функций. Кроме того, данное пособие может быть использовано преподавателями на практических занятиях со студентами.

УДК 517.31(075.8)
ББК В161.1я73-41

Введение

Настоящее пособие содержит методические рекомендации к нахождению определённых видов интегралов от тригонометрических выражений, предусмотренных программой химического факультета по курсу "Математика". Оно преследует цель помочь студентам систематизировать и укрепить свои знания в области нахождения указанных интегралов.

Представлено двенадцать видов интегралов на данную тему и каждый вид подробно рассмотрен на примерах. Для закрепления студентами изученного материала даются примеры для самостоятельной работы. Причём они расположены не отдельно на каждый вид после его объяснения, а сразу на все виды вместе, чтобы избежать трафаретного подхода к вычислению интегралов. Такое расположение примеров также даёт возможность при вычислении увидеть связь при переходе от одного вида интеграла к другому. Таким образом, построение пособия способствует закреплению повторяющихся важных базовых приёмов при нахождении каждого вида интеграла, а также позволяет увидеть целостность данной темы и выделить новизну каждого вида. Другими словами, данное пособие способствует развитию интереса к рассматриваемой теме и сокращению времени на запоминание приёмов нахождения интегралов.

Также с целью предотвращения трафаретного подхода к вычислению интегралов и развития элементов творчества дана контрольная работа, при выполнении которой студент определяется в своей степени понимания данной темы. Эта цель достигается за счёт составления примеров специальным образом. А именно, в первых примерах контрольной работы изменены аргументы функций в отличие от примеров, объясненных в пособии. Чтобы взять интеграл от такой функции, нужно применить два приёма, каждый из которых объяснен отдельно. В рассматриваемых примерах контрольной работы студент должен уметь соединить эти два приёма. Таким образом, данное пособие полезно для студентов разных уровней подготовки и способствует развитию элементов творчества.

§1. Основные правила интегрирования тригонометрических выражений

1. Простейшие интегралы от тригонометрических функций имеют вид

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

К ним с помощью приема подведения функции под знак дифференциала сводятся интегралы вида $\int \sin(nx+b)dx$, $\int \cos(nx+b)dx$ следующим образом:

$$\int \sin(nx+b)dx = \frac{1}{n}\int \sin(nx+b)d(nx+b) = -\frac{1}{n}cos(nx+b) + C;$$

$$\int \cos(nx+b)dx = \frac{1}{n}\int \cos(nx+b)d(nx+b) = \sin(nx+b) + C.$$

2. Пусть подынтегральная функция представляет собой нечетную степень $\sin x$ или $\cos x$, то есть рассмотрим интегралы вида $\int \sin^{2n+1} x dx$, $\int \cos^{2n+1} x dx$ (n – целое положительное число). Для вычисления этих интегралов применяется прием подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = -\int (1-\cos^2 x)^n d(\cos x);$$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int (1-\sin^2 x)^n d(\sin x),$$

в результате получим интеграл от степенной функции.

Примеры.

1) $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x) = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C;$

2) $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) =$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

3. Пусть подынтегральная функция представляет собой четную степень $\sin x$ или $\cos x$, то есть рассмотрим интегралы вида $\int \sin^{2n} x dx$, $\int \cos^{2n} x dx$ (n – целое положительное число). В этом случае для вычисления интеграла применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Примеры.

1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

2) $\displaystyle\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx +$
$\displaystyle+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C =$
$\displaystyle= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C;$

3) $\displaystyle\int \cos^6 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx =$
$\displaystyle= \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx = \frac{x}{8} + \frac{3\sin 2x}{16} +$
$\displaystyle+\frac{3}{16}\int (1+\cos 4x)dx + \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx = \frac{x}{8} + \frac{3\sin 2x}{16} + \frac{3x}{16} +$
$\displaystyle+\frac{3\sin 4x}{64} + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d(\sin 2x) = \frac{5x}{16} + \frac{3\sin 2x}{16} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{16} -$
$\displaystyle-\frac{\sin^3 2x}{48} + C = \frac{5x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$

4. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, \tag{1}$$

где, по крайней мере, одно из чисел m, n – нечетное положительное. Если m – нечетное положительное, то под знак дифференциала вводят $\sin x$ и делают замену $t = \cos x$, если n – нечетное положительное, то то под знак дифференциала вводят $\cos x$ и делают замену $t = \sin x$.

Примеры.

1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x) =$

$$= \int (\cos^4 x - \cos^2 x) d(\cos x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

2) $$\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^4 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C;$$

3) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^6 x} d(\sin x) = \int \sin^{-6} x (\sin x) -$$

$$- \int \sin^{-4} x d(\sin x) = -\frac{1}{5}\sin^{-5} x + \frac{1}{3}\sin^{-3} x + C = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C;$$

4) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{-\frac{4}{3}} x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int (1 - t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = \int \left(t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}} \right) dt = \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C;$$

5) $$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin^{-\frac{3}{4}} x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int (1 - 2t^2 + t^4) t^{-\frac{3}{4}} dt = \int \left(t^{-\frac{3}{4}} - 2t^{\frac{5}{4}} + t^{\frac{13}{4}} \right) dt = 4t^{\frac{1}{4}} - \frac{8}{9} t^{\frac{9}{4}} + \frac{4}{17} t^{\frac{17}{4}} + C =$$

$$= 4\sqrt[4]{\sin x} - \frac{8}{9}\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\sin x} + \frac{4}{17}\sin^4 x \cdot \sqrt[4]{\sin x} + C.$$

5. Пусть теперь дан интеграл вида (1) с четными положительными числами m и n. В этом случае для вычисления интеграла применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Примеры.

1) $$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

в этом примере сначала применили последнюю из приведенных выше формул понижения степени, а потом – первую;

2) $$\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x dx = \int (\sin x\cdot\cos x)^2\cdot\cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx +$$

$$+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C;$$

3) $$\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C;$$

4) $$\int \sin^4 x\cdot\cos^6 x dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cdot\cos x)^4\cdot\cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\cdot(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x dx + \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\cdot\cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{128}\int (1-\cos 4x)^2 dx + \frac{1}{64}\int \sin^4 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{128}\int \left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx + \frac{\sin^5 2x}{320} = \frac{x}{128} - \frac{\sin 4x}{256} +$$

$$+\frac{1}{256}\int (1+\cos 8x)dx + \frac{\sin^5 2x}{320} = \frac{x}{128} - \frac{\sin 4x}{256} + \frac{x}{256} + \frac{\sin 8x}{2048} + \frac{\sin^5 2x}{320} +$$

$$+C = \frac{3x}{256} - \frac{\sin 4x}{256} + \frac{\sin 8x}{2048} + \frac{\sin^5 2x}{320} + C.$$

6. Если в интеграле вида (1) оба показателя m и n четные, но хотя бы один из них отрицателен, то при вычислении такого интеграла выполняется замена $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$ и используются следующие тригонометрические формулы:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Примеры.

1) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg} x) =$

$$= \int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

Приведенные примеры показывают, что если в четной отрицательной степени в интеграле вида (1) присутствует $\cos x$, то для вычисления интеграла предпочтительнее выполнить замену $t = \operatorname{tg} x$. Если же в четной отрицательной степени в интеграле вида (1) присутствует $\sin x$, то для вычисления интеграла предпочтительнее выполнить замену $t = \operatorname{ctg} x$.

3) $\displaystyle J = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx = \int (1-\sin^2 x)^2\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right)^2 d(\operatorname{ctg} x) =$

$$= |t = \operatorname{ctg} x| = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - 1 - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt = -2\operatorname{arcctg} t - t - \int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$$

К вычислению последнего интеграла применим рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}. \qquad (2)$$

Получим

$$J = -2\operatorname{arcctg} t - t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = -2\operatorname{arcctg} t - t - \frac{t}{2(1+t^2)} +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} t + C = -\frac{3}{2}\operatorname{arcctg} t - t - \frac{t}{2(1+t^2)} + C = -\frac{3}{2}\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) - \operatorname{ctg} x -$$

$$-\frac{\operatorname{ctg} x}{2(1+\operatorname{ctg}^2 x)} + C = -\frac{3x}{2} - \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg} x\cdot\sin^2 x}{2} + C = -\frac{3x}{2} - \operatorname{ctg} x - \frac{\cos x\cdot\sin x}{2} +$$

$$+C = -\frac{3x}{2} - \operatorname{ctg} x - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Но проще было в этом интеграле замену $t = \operatorname{ctg} x$ не использовать, а преобразовать подынтегральную функцию:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}dx = \int \frac{(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)}{\sin^2 x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x \right) dx = -\operatorname{ctg} x - 2x + \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx =$$
$$= -\operatorname{ctg} x - 2x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C = -\operatorname{ctg} x - \frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Таким образом, если в интеграле вида (1) одно из чисел m или n четное положительное, а другое – четное отрицательное, но при этом положительное больше модуля отрицательного, то вычисление интеграла упрощается, если преобразовать подынтегральную функцию с применением тригонометрических формул. Замена переменной $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$ в таких интегралах приводит к более сложным вычислениям.

7. Для вычисления интегралов вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx dx,$$

где m и n – различные положительные числа, используют следующие тригонометрические формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\Big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\Big),$$
$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\Big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big),$$
$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\Big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\Big).$$

Примеры.

1) $\displaystyle\int \cos 2x \cdot \sin 4x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 2x) dx = \frac{1}{12} \int \sin 6x d(6x) +$
$\displaystyle+ \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C;$

2) $\displaystyle\int \sin 2x \cdot \sin \frac{2x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{4x}{3} - \cos \frac{8x}{3} \right) dx = \frac{3}{8} \sin \frac{4x}{3} - \frac{3}{16} \sin \frac{8x}{3} + C;$

3) $\displaystyle\int \cos 6x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos 5x) dx = \frac{\sin 7x}{14} + \frac{\sin 5x}{10} + C;$

4) $\displaystyle\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x dx.$

Преобразуем сначала подынтегральную функцию:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = (\cos 2x \cdot \cos x) \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) \cdot \cos 5x =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 5x \cdot \cos 3x + \cos 5x \cdot \cos x) = \frac{1}{4}(\cos 8x + \cos 2x + \cos 6x + \cos 4x).$$

Таким образом, имеем

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 8x + \cos 2x + \cos 6x + \cos 4x)dx =$$

$$= \frac{\sin 8x}{32} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 4x}{16} + C.$$

8. Интегралы $\int \operatorname{tg} x dx$, $\int \operatorname{ctg} x dx$ вычисляются с применением приема подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Для вычисления интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, где m – положительное целое число, применяется замена переменной $t = \operatorname{tg} x$ и $t = \operatorname{ctg} x$ соответственно или используются формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

Примеры.

1) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^7 x dx.$

Выполним в интеграле замену переменной: $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Получим

$$\int \operatorname{tg}^7 x dx = \int t^7 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(t^7+t^5) - (t^5+t^3) + (t^3+t) - t}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Вычислим данный интеграл последовательно понижая степень $\operatorname{tg} x$ с помощью тригонометрических формул:

$$\int \operatorname{tg}^7 x dx = \int \operatorname{tg}^5 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} -$$

$$- \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

2) $$\int \operatorname{ctg}^6 x dx = \int \operatorname{ctg}^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\int \operatorname{ctg}^4 x d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^4 x dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C.$$

9. Интегралы вида $\int R(\sin x, \ \cos x) dx$, где $R(\sin x, \ \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, сводятся к вычислению интеграла от рациональной функции с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Применяя ее, найдем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-t^2}{2t},$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} x, \quad x = 2\operatorname{arctg} x, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{2dt}{2t^2+8t+8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + C;$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cdot(2+\cos x-2\sin x)}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)}.$

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$t(t^2-4t+3)=t(t-1)(t-3).$$

Подынтегральную функцию разложим на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{t-3}=\frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Dt(t-1)}{t(t-1)(t-3)}.$$

Найдем коэффициенты разложения, приравняв числители дробей левой и правой частей тождества:

$$1+t^2=A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Dt(t-1).$$

При $t=0$ имеем $1=3A$, значит, $A=\dfrac{1}{3}$; при $t=1$ имеем $2=-2B$, значит, $B=-1$; при $t=3$ имеем $10=6D$, значит, $D=\dfrac{5}{3}$. Получим

$$\int \frac{dx}{\sin x\cdot(2+\cos x-2\sin x)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=\frac{1}{3}\ln|t|-$$

$$-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C.$$

10. Преимущество универсальной тригонометрической подстановки состоит в том, что она применима к вычислению любого интеграла вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$, где $R(\sin x,\ \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Но универсальная тригонометрическая подстановка имеет один очень существенный недостаток: во многих случаях ее применение приводит к сложным вычислениям интегралов от рациональной функции, так как при ее применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются в виде рациональных дробей, содержащих t^2. Поэтому в тех случаях, когда к вычислению интеграла от тригонометрической функции можно применить другую подстановку, приводящую к более простым вычислениям, универсальную тригонометрическую подстановку не используют.

Рассмотрим частные случаи, в которых вычисление интегралов вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ может быть упрощено.

10.1 Если подынтегральная функция $R(\sin x,\ \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $t = \cos x$.

Пример.

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$R(\sin x,\ \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} = \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1}.$$

$$R(-\sin x,\ \cos x) = \frac{-\sin x + (-\sin x)^3}{2\cos^2 x - 1} = -\frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} = -R(\sin x,\ \cos x),$$

значит, подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$, поэтому для вычисления интеграла можно воспользоваться подстановкой $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $dt = -\sin x dx$. Таким образом,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{(t^2 - 2)dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2t^2 - 4)dt}{2t^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\Big((2t^2 - 1) - 3\Big)dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{(t\sqrt{2})^2 - 1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1}\right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

10.2 Если подынтегральная функция $R(\sin x,\ \cos x)$ является нечетной относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x,\ -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$.

Пример.

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию $R(\sin x,\ \cos x) = \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

$$R(\sin x,\ -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3 + (-\cos x)^5}{\sin^2 x + \sin^4 x} = -\frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} = -R(\sin x,\ \cos x),$$

значит, подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$, поэтому для вычисления интеграла можно воспользоваться подстановкой $t = \sin x$. Тогда $\cos^2 x = 1 - t^2$, $dt = \cos x dx$. Следовательно,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x(1 + \cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x(1 + \sin^2 x)} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)dt}{t^2(1 + t^2)}.$$

Подынтегральная функция представляет собой рациональную неправильную дробь, поэтому выделим у нее целую часть:

$$\frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2(1 + t^2)} = \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^4 + t^2} = \frac{(t^4 + t^2) - 4t^2 + 2}{t^4 + t^2} = 1 + \frac{-4t^2 + 2}{t^2(t^2 + 1)}.$$

Представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{-4t^2 + 2}{t^2(t^2 + 1)} = \frac{-6t^2 + 2t^2 + 2}{t^2(t^2 + 1)} = \frac{2(t^2 + 1) - 6t^2}{t^2(t^2 + 1)} = \frac{2}{t^2} - \frac{6}{t^2 + 1}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{t^2 + 1}\right) dt = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

11. Для вычисления интегралов вида $\int R(\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin x \cos x)dx$, где R – рациональная функция от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x \cos x$, делают замену $t = \operatorname{tg} x$ и находят

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x \cdot \cos x = \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{t}{1 + t^2}.$$

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t + 1)^2 - 2} = \int \frac{d(t + 1)}{(t + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Выполнение замены переменной в интеграле упрощается, если числитель и знаменатель подынтегральной функции разделить на $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1};$$

2) $$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = \int \frac{2\frac{t}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2tdt}{1+t^4} = \int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}(t^2)+C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)+C.$$

12. Рассмотренная выше подстановка $t = \operatorname{tg} x$ применяется и для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ в случае, когда подынтегральная функция $R(\sin x,\ \cos x)$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$ одновременно, то есть если $R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$.

Примеры.

1) $$\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию $R(\sin x,\ \cos x) = \dfrac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}$. Так как

$$R(-\sin x,\ -\cos x) = \frac{(-\sin x)^2\cdot(-\cos x)}{-\sin x+(-\cos x)} = \frac{-\sin^2 x\cdot\cos x}{-(\sin x+\cos x)} = \frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x} =$$

$= R(\sin x,\ \cos x)$, то для вычисления интеграла можно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$. Для удобства применения подстановки, числитель и знаменатель подынтегральной функции разделим на $\cos x$. Получим

$$\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x+1}dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{t+1}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2dt}{(t+1)(1+t^2)^2}.$$

Подынтегральная функция представляет собой рациональную правильную дробь. Представим ее в виде суммы простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t^2}{(t+1)(1+t^2)^2} = \frac{A}{t+1}+\frac{Bt+D}{t^2+1}+\frac{Mt+N}{(t^2+1)^2};$$

$$\frac{t^2}{(t+1)(1+t^2)^2} = \frac{A(t^2+1)^2+(Bt+D)(t+1)(1+t^2)+(Mt+N)(t+1)}{(t+1)(1+t^2)^2}.$$

Приравняем числители дробей левой и правой частей тождества:

$$t^2 = A(t^2+1)^2 + (Bt+D)(t+1)(1+t^2) + (Mt+N)(t+1);$$

$$t^2 = A(t^4+2t^2+1) + (Bt+D)(t^3+t^2+t+1) + (Mt+N)(t+1);$$

$$t^2 = (A+B)t^4+(B+D)t^3+(2A+B+D+M)t^2+(B+D+M+N)t+(A+D+N).$$

Найдем коэффициенты разложения, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях тождества. Получим линейную систему пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B+D=0, \\ 2A+B+D+M=1, \\ B+D+M+N=0, \\ A+D+N=0. \end{cases}$$

Выразим все неизвестные через A. Из первого уравнения системы получим $B=-A$; из второго уравнения находим $D=-B=A$; из последнего уравнения получим $N=-(A+D)=-2A$; из четвертого уравнения с учетом второго находим $M=-N=2A$. Подставим полученные значения неизвестных в третье уравнение системы. Получим $2A-A+A+2A=1$, откуда находим $A=\dfrac{1}{4}$. Тогда $B=-\dfrac{1}{4}$, $D=\dfrac{1}{4}$, $M=\dfrac{1}{2}$, $N=-\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{8}\int \frac{2tdt}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{8}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{8}\ln(t^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{4(t^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой (2). Получим:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{8}\ln(t^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{4(t^2+1)} - \frac{t}{4(t^2+1)} -$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}\right| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{t^2+1} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}}\right| -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+1} + C = \frac{1}{4}\ln|\cos x(\operatorname{tg} x+1)| - \frac{1}{4}\cos^2 x(\operatorname{tg} x+1) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x) + C.$$

2) $$\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x} dx = \int \frac{(2\operatorname{tg} x+3)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2} = \int \frac{2t+3}{t^2+2} dt = \int \frac{d(t^2)}{t^2+2} +$$

$$+3\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \ln(\operatorname{tg}^2 x+2) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

§2. Примеры для самостоятельного решения

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int \sin 7x dx$;	2. $\int \cos 8x dx$;	3. $\int \sin 6x dx$;
4. $\int \cos 9x dx$;	5. $\int \sin\frac{3x}{4} dx$;	6. $\int \cos\frac{6x}{11} dx$;
7. $\int \sin(3x-4) dx$;	8. $\int \cos\left(\frac{7x}{13}-\frac{\pi}{4}\right) dx$;	9. $\int \sin\left(\frac{3\pi}{5}-\frac{x}{2}\right) dx$;
10. $\int \sin^5 x dx$;	11. $\int \cos^3 x dx$;	12. $\int \sin^7 x dx$;
13. $\int \cos^9 x dx$;	14. $\int \sin^9 x dx$;	15. $\int \cos^7 x dx$;
16. $\int \sin^{11} x dx$;	17. $\int \cos^{13} x dx$;	18. $\int \cos^8 x dx$;

19. $\int \sin^4 x dx$; 20. $\int \sin^6 x dx$; 21. $\int \cos^{10} x dx$;

22. $\int \sin^8 x dx$; 23. $\int \sin^{10} x dx$; 24. $\int \cos^8 x dx$;

25. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$; 26. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 27. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;

28. $\int \sin^4 x \cos^7 x dx$; 29. $\int \sin^7 x \cos^2 x dx$; 30. $\int \sin^6 x \cos^9 x dx$;

31. $\int \sin^9 x \cos^4 x dx$; 32. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$; 33. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$;

34. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx$; 35. $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x} dx$; 36. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$;

37. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; 38. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx$; 39. $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^8 x} dx$;

40. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \cdot \sqrt[5]{\cos x}}$; 41. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[7]{\cos x}}$; 42. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[8]{\cos^7 x}}$;

43. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^2 x}}$; 44. $\int \frac{\sin^7 x dx}{\sqrt[9]{\cos^5 x}}$; 45. $\int \frac{\cos^7 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

46. $\int \sin^2 x \cos^6 x dx$; 47. $\int \sin^6 x \cos^2 x dx$; 48. $\int \sin^8 x \cos^2 x dx$;

49. $\int \sin^4 x \cos^8 x dx$; 50. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$; 51. $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$;

52. $\int \sin^8 x \cos^4 x dx$; 53. $\int \sin^2 x \cos^8 x dx$; 54. $\int \sin^6 x \cos^8 x dx$;

55. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$; 56. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$; 57. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx$;

58. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x} dx$; 59. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} dx$; 60. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;

61. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; 62. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$; 63. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$;

64. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} dx$; 65. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$; 66. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} dx$;

67. $\int \sin 3x \cos 4x dx$; 68. $\int \cos 3x \cos 6x dx$; 69. $\int \sin 4x \sin 5x dx$;

70. $\int \sin 6x \cos 8x dx$; 71. $\int \sin 9x \cos 7x dx$; 72. $\int \cos 4x \cos 8x dx$;

73. $\int \sin 3x \cos \frac{3x}{4} dx$; 74. $\int \sin \frac{4x}{5} \sin 2x dx$; 75. $\int \cos 6x \cos \frac{8x}{5} dx$;

76. $\int \sin \frac{6x}{7} \sin \frac{7x}{8} dx$; 77. $\int \cos \frac{4x}{9} \cos \frac{6x}{5} dx$; 78. $\int \sin \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{9} dx$;

79. $\int \sin x \cos 2x \cos 3x dx$; 80. $\int \cos 2x \cos 3x \cos 5x dx$;

81. $\int \sin 3x \sin 4x \sin 5x dx$; 82. $\int \sin 2x \sin 4x \cos 6x dx$;

83. $\int \operatorname{tg} 3x dx$; 84. $\int \operatorname{ctg} \frac{5x}{9} dx$; 85. $\int \operatorname{ctg}(5x+1) dx$;

86. $\int \operatorname{tg}(7-4x) x dx$; 87. $\int \operatorname{tg}\left(\frac{8x}{7}+\frac{2\pi}{3}\right) dx$; 88. $\int \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{7}-\frac{3x}{5}\right) dx$;

89. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; 90. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; 91. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;

92. $\int \operatorname{ctg}^7 x dx$; 93. $\int \operatorname{tg}^8 x dx$; 94. $\int \operatorname{ctg}^9 x dx$;

95. $\int \operatorname{tg}^9 x dx$; 96. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$; 97. $\int \operatorname{ctg}^8 x dx$;

98. $\int \operatorname{ctg}^{10} x dx$; 99. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; 100. $\int \operatorname{tg}^6 x dx$;

101. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$; 102. $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$; 103. $\int \frac{dx}{\sin x-3\cos x}$;

104. $\int \frac{dx}{\cos x-3}$; 105. $\int \frac{dx}{\sin x+4}$; 106. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x+1}$;

107. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x+1}$; 108. $\int \frac{\sin x dx}{\sin x\cos x+2}$; 109. $\int \frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-3\cos x} dx$;

110. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x-3}$; 111. $\int \frac{4\cos x-3}{5-\sin x} dx$; 112. $\int \frac{\sin x+1}{3\cos x-2} dx$;

113. $\int \frac{\cos x+\cos^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x} dx$; 114. $\int \frac{\sin^3 x+\sin^5 x}{\cos^2 x+\cos^4 x} dx$; 115. $\int \frac{2\sin x-\sin^5 x}{\cos x+\sin^2 x} dx$;

116. $\int \frac{\cos^2 x-\cos^4 x}{\sin x-\sin^3 x} dx$; 117. $\int \frac{(\sin x-2)\cos x}{\cos^2 x+2\sin x} dx$; 118. $\int \frac{\cos x+3}{\cos^2 x\sin x} dx$;

119. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$; 120. $\int \frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx$; 121. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$;

122. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^4 x-\cos^6 x}$; 123. $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sin^2 x-3\cos^4 x}$; 124. $\int \frac{dx}{2\sin^6 x-\cos^2 x}$;

125. $\int \frac{dx}{\cos^2 x-3}$; 126. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2}$; 127. $\int \frac{\sin x\cos x+1}{5\cos^2 x-4} dx$;

128. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x}$; 129. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x\cos x-\sin^2 x}$;

130. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x-\sin x\cos x}$; 131. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$;

132. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+2\cos^2 x} dx$; 133. $\int \frac{\sin x\cos^2 x}{\sin x-\cos x} dx$; 134. $\int \frac{\operatorname{tg} x-1}{2\sin^2 x-\cos^2 x} dx$;

135. $\int \frac{\sin^2 x\cos^3 x}{\sin x-3\cos x} dx$; 136. $\int \frac{\sin^3 x\cos^2 x}{\sin x+2\cos x} dx$; 137. $\int \frac{\sin x\cos x}{\operatorname{tg} x+2} dx$.

§3. Контрольная работа

Найти интегралы:

Вариант 1

1. $\int \sin \frac{5x}{4} dx$;
2. $\int \cos^3 2x dx$;
3. $\int \sin^4 5x dx$;
4. $\int \sin^3 3x \cos^2 3x dx$;
5. $\int \sin 20x \cos 25x dx$;
6. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$;
7. $\int \operatorname{tg}^9 x dx$;
8. $\int \sin^2 2x \cos^2 3x dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;
10. $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 + \sin^2 x}$.

Вариант 2

1. $\int \cos \frac{3x}{4} dx$;
2. $\int \sin^3 4x dx$;
3. $\int \cos^4 7x dx$;
4. $\int \sin^2 4x \cos^3 4x dx$;
5. $\int \cos 31x \cos 22x dx$;
6. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;
7. $\int \operatorname{ctg}^8 x dx$;
8. $\int \sin^2 4x \cos^2 5x dx$;
9. $\int \frac{\sin x dx}{\sin x - \cos x}$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

Вариант 3

1. $\int \sin \frac{7x}{5} dx$;
2. $\int \cos^3 6x dx$;
3. $\int \sin^4 8x dx$;
4. $\int \sin^3 5x \cos^4 5x dx$;
5. $\int \sin 32x \sin 17x dx$;
6. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$;
7. $\int \operatorname{ctg}^9 x dx$;
8. $\int \sin^2 7x \cos^2 9x dx$;
9. $\int \frac{\cos x dx}{2\sin x - \cos x}$;
10. $\int \frac{dx}{4 - \sin^2 x}$.

Вариант 4

1. $\int \cos \frac{5x}{11} dx$;
2. $\int \sin^3 5x dx$;
3. $\int \cos^4 6x dx$;
4. $\int \sin^6 9x \cos^3 9x dx$;
5. $\int \sin 13x \cos 26x dx$;
6. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$;
7. $\int \operatorname{tg}^8 x dx$;
8. $\int \sin^2 3x \cos^2 9x dx$;
9. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$;
10. $\int \frac{\sin^2 x dx}{4 + 5\cos^2 x}$.

Вариант 5

1. $\int \sin \frac{15x}{7} dx$;

2. $\int \cos^5 3x dx$;

3. $\int \sin^6 6x dx$;

4. $\int \sin^3 8x \cos^4 8x dx$;

5. $\int \sin 18x \cos 13x dx$;

6. $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{10} x} dx$;

7. $\int \mathrm{tg}^5\, x dx$;

8. $\int \sin^2 5x \cos^2 11x dx$;

9. $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$;

10. $\int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + 3\sin^2 x} dx$.

Вариант 6

1. $\int \cos \frac{9x}{8} dx$;

2. $\int \sin^5 7x dx$;

3. $\int \cos^6 2x dx$;

4. $\int \sin^6 10x \cos^3 10x dx$;

5. $\int \cos 53x \cos 12x dx$;

6. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x} dx$;

7. $\int \mathrm{ctg}^4\, x dx$;

8. $\int \sin^2 6x \cos^2 8x dx$;

9. $\int \frac{3\sin x dx}{4\sin x + \cos x}$;

10. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$.

Вариант 7

1. $\int \sin \frac{3x}{8} dx$;

2. $\int \cos^5 4x dx$;

3. $\int \sin^4 3x dx$;

4. $\int \sin^3 7x \cos^6 7x dx$;

5. $\int \sin 19x \sin 27x dx$;

6. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^{10} x} dx$;

7. $\int \mathrm{ctg}^5\, x dx$;

8. $\int \sin^2 3x \cos^2 13x dx$;

9. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}$;

10. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{3 - 4\cos^2 x}$.

Вариант 8

1. $\int \cos \frac{6x}{19} dx$;

2. $\int \sin^5 8x dx$;

3. $\int \cos^4 9x dx$;

4. $\int \sin^8 11x \cos^3 11x dx$;

5. $\int \sin 34x \cos 14x dx$;

6. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx$;

7. $\int \mathrm{tg}^{10}\, x dx$;

8. $\int \sin^2 4x \cos^2 8x dx$;

9. $\int \frac{\cos x dx}{4\sin x - 3\cos x}$;

10. $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x - 3\sin^2 x}$.

Вариант 9

1. $\int \sin \frac{2x}{7} dx;$

2. $\int \cos^3 4x dx;$

3. $\int \sin^6 9x dx;$

4. $\int \sin^3 17x \cos^{10} 17x dx;$

5. $\int \sin 41x \cos 37x dx;$

6. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx;$

7. $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$

8. $\int \sin^2 7x \cos^2 11x dx;$

9. $\int \frac{dx}{5 \sin x - \cos x};$

10. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + 5 \sin^2 x}.$

Вариант 10

1. $\int \cos \frac{8x}{5} dx;$

2. $\int \sin^3 7x dx;$

3. $\int \cos^6 8x dx;$

4. $\int \sin^8 19x \cos^3 19x dx;$

5. $\int \cos 38x \cos 26x dx;$

6. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^2 x} dx;$

7. $\int \operatorname{ctg}^7 x dx;$

8. $\int \sin^2 5x \cos^2 13x dx;$

9. $\int \frac{\sin x dx}{3 \sin x + 4 \cos x};$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}.$

Литература

1. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. — М.: Наука, 1973. — 399 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Аст: Мир и Образование, 2014. — 816 с.
3. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа: в 2 ч. — М.: Просвещение, 1971. — Ч. 1. — 343 с.
4. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. — СПб.: Профессия, 2007. — 432 с.
5. Гаврилов В.И., Макаров Ю.Н., Чирский В.Г. Математический анализ. — М.: Academia, 2013. — 336 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. — М.: Интеграл-Пресс, 2008. — Т. 1. — 416 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа: в 2 т. — СПб.: Лань, 2008. — Т. 1. — 448 с.

Содержание

Людмила Кузьминична **Додунова**

Ирина Юрьевна **Ястребова**

Интегрирование тригонометрических функций

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского".
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.