

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Институт информационных технологий, математики и механики

Т.Ш. Утешева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКЦИРОВАНИЕ В ГИС

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ для студентов ННГУ,
обучающихся по направлению подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2016

УДК 004.021
ББК 32.973я73
У 84

У 84 Утешева Т.Ш. Математическое проецирование в ГИС: учебно-методическое пособие / Т.Ш. Утешева. – Нижний Новгород: "Нижегородский госуниверситет", 2016. – 60 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор В.П. Пономаренко

Пособие предназначено для студентов ИИТММ ННГУ направления подготовки «Фундаментальная информатика и информационные технологии», изучающих курсы «Математические основы ГИС», «Математическое проецирование в ГИС». В пособии достаточно подробно представлен математический аппарат проецирования, востребованный в геоинформатике. Рассмотрены различные виды проективных преобразований, дана их классификация по характеру и величинам искажений. Приведен анализ свойств картографических проекций. Рассмотрены преобразования проекций по известным уравнениям и параметрам. Дана оценка параметров уравнений проекций.

Изложенный материал предназначается для более углубленного изучения указанных курсов, а также может быть использован студентами, магистрантами и аспирантами, занимающимися проблемами в области обработки и использования пространственно распределенной информации и разработки геоинформационных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-01214 А, № 16-07-01198 А).

УДК 004.021
ББК 32.973я73

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016
© Утешева Т.Ш.

Оглавление

Введение	4
1. Элементы математической и геодезической основы карт	6
1.1. Шарообразная модель картографируемых тел.....	7
1.2. Сфероидическая модель картографируемых тел.....	8
1.3. Замена эллипсоида шаром.....	10
1.4. Отображение шара на шар	12
2. Картографическая проекция.....	13
2.1. Картографические сетки	13
2.2. Средний меридиан проекции.....	14
3. Искажения в картографических проекциях.....	15
3.1. Метрические элементы поверхности	15
3.2. Искажения длин	17
3.3. Искажения площадей.....	19
3.4. Искажения угловых величин	20
3.5. Искажения форм	21
4. Классификация проекций	22
4.1. Классификация проекций по характеру и величинам искажений.....	22
4.2. Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки	24
4.3. Получение картографических проекций - прямые способы.....	25
4.4. Графические способы получения проекций.....	25
4.5. Перспективное проектирование шара на плоскость.....	27
4.6. Перспективное проектирование шара на цилиндр	32
4.7. Перспективное проектирование шара на конус	35
4.8. Анализ свойств картографических проекций.....	36
5. Изыскание проекций с заданными свойствами.....	39
5.1. Получение равноугольных проекций.....	39
5.2. Наилучшие равноугольные проекции.....	42
5.3. Получение равновеликих проекций.....	45
5.4. Получение произвольных проекций	47
5.5. Оптимизация картографических проекций	49
6. Преобразования картографических проекций.....	52
6.1. Преобразования проекций по известным уравнениям и параметрам.....	52
6.2. Оценка параметров уравнений проекций	54
6.3. Преобразования картографических проекций с помощью аппроксимирующих математических моделей.....	56
Литература	60

Введение

Общие понятия о фигуре и размерах Земли

Физическая поверхность Земли имеет сложную и с геометрической точки зрения неправильную поверхность. Известно, что площадь земной поверхности 510 млн кв. км, из них Мировой океан занимает 71 %, а суша 29 % поверхности. Средняя глубина Мирового океана составляет примерно 3800 м, средняя высота суши – примерно 875 метров.

Учитывая, что поверхность Мирового океана составляет примерно $\frac{3}{4}$ общей поверхности Земли, то, говоря о форме Земли, имеют в виду не ее физическую поверхность со всеми неровностями (горы, возвышенности, овраги, ущелья и т. д.), а поверхность, совпадающую со средним уровнем вод Мирового океана, находящегося в спокойном состоянии. В геодезии и картографии эта поверхность называется *геоидом*. **Геоид** – это *уровенная поверхность морей и океанов в спокойном состоянии, мысленно продолженная под материками*.

Такое название для фигуры Земли дал в 1873 г. немецкий ученый И. Листинг.

Для удобства расчетов и измерений на земной поверхности геоид заменяют приближенной к фигуре Земли эллипсоидом (рис. 1).

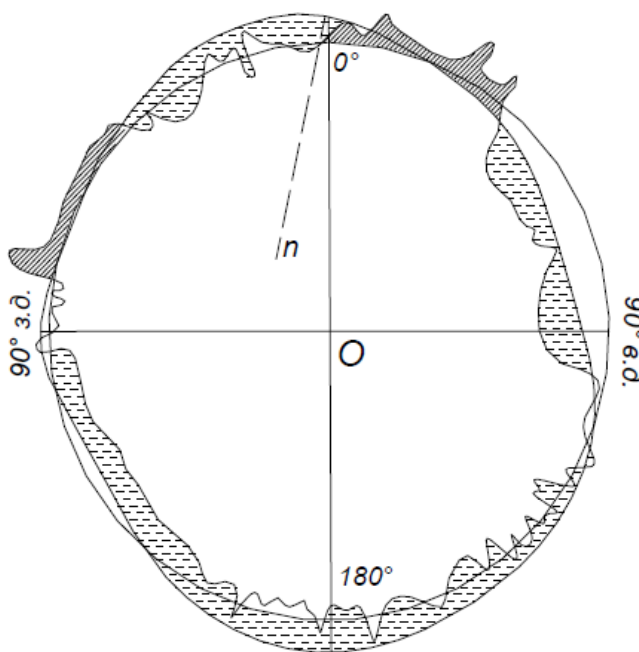


Рис. 1. Схема соотношений поверхности геоида и поверхности земного эллипсоида (разрез по экватору)

Эллипсоид вращения – тело, образованное вращением эллипса вокруг его малой оси.

Общий земной эллипсоид по объему равен геоиду, центр его совпадает с центром тяжести Земли, плоскость его экватора совпадает с плоскостью экватора Земли. Размеры земного эллипсоида вычисляются по данным геодезических, астрономических, гравиметрических измерений. Во многих странах ученые работали над определением параметров земного эллипсоида. Поэтому в разных странах значения эллипсоидов не совпадают между собой, так как ученые использовали различные исходные данные.

Наиболее точные размеры земного эллипсоида, подтвержденные космическими исследованиями, были получены в 1940 г. группой ученых, работавших под руководством члена-корреспондента АН СССР, профессора Ф.Н. Красовского. В 1946 г. постановлением правительства эти размеры были приняты в СССР, а эллипсоиду присвоено имя

Красовского. Из наблюдений искусственного спутника Земли было получено точное значение сжатия – 1:298,26, что подтвердило результат Красовского. Отклонения эллипсоида Красовского от геоида не превышают 40 метров. Ориентировка эллипсоида произведена по Пулкову (Пулковская обсерватория под Санкт-Петербургом). Сегодня в России принят референц-эллипсоид Ф.Н. Красовского. Его параметры приведены в таблице.

Таблица 1. Значения элементов референц - эллипсоида Красовского

Элементы земного эллипсоида	Размеры
Большая полуось (экваториальный радиус) – a	6 378 245 м
Малая полуось (полярный радиус) – b	6 356 863 м
Сжатие	1:298,3
Средний радиус Земли, принимаемый за шар	6371117,7 м
Длина меридиана	40008548 м
Длина экватора	4007504 м

Линии и плоскости земного эллипсоида. Географические координаты. Эллипсоид вращения (рис. 2) характеризуется большой полуосью a (экваториальной) и малой полуосью b (полярной), а также сжатием α , которое вычисляется как $\alpha = (a - b) / a$. Точки пересечения малой оси с поверхностью эллипсоида называются **полюсами**.

Круги, образуемые сечением эллипсоида плоскостями, перпендикулярными к малой оси, называются **параллелями**.

Наибольшая параллель, образуемая сечением плоскости, проходящей через центр эллипсоида, называется **экватором**.

Сечения эллипсоида плоскостями, проходящими через ось вращения, называются **меридианами**.

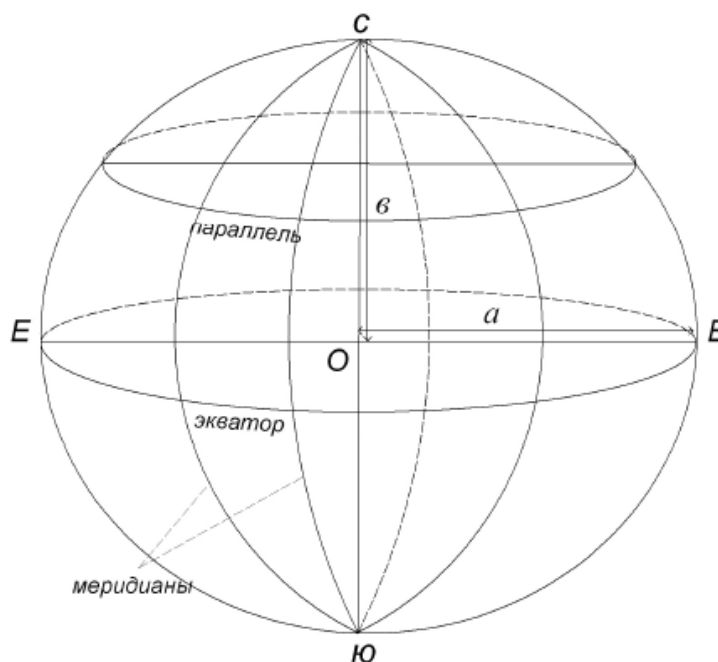


Рис. 2. Земной эллипсоид

Положение точки на поверхности земного эллипсоида определяется **географическими координатами** – широтой φ и долготой λ (рис. 3).

Из любой точки на поверхности эллипсоида можно провести отвесную линию, направленную внутрь эллипсоида. Эта линия называется *нормалью*, и она перпендикулярна к горизонту данной точки.

Нормаль – это отвесная линия, проведенная из любой точки на поверхности эллипсоида, направленная внутрь эллипсоида, и перпендикулярная к горизонту данной точки.

Географическая широта точки - угол между плоскостью экватора и нормалью, проведенной из данной точки.

Широты отсчитывают от 0° на экваторе до 90° на северном полюсе и до -90° на южном полюсе.

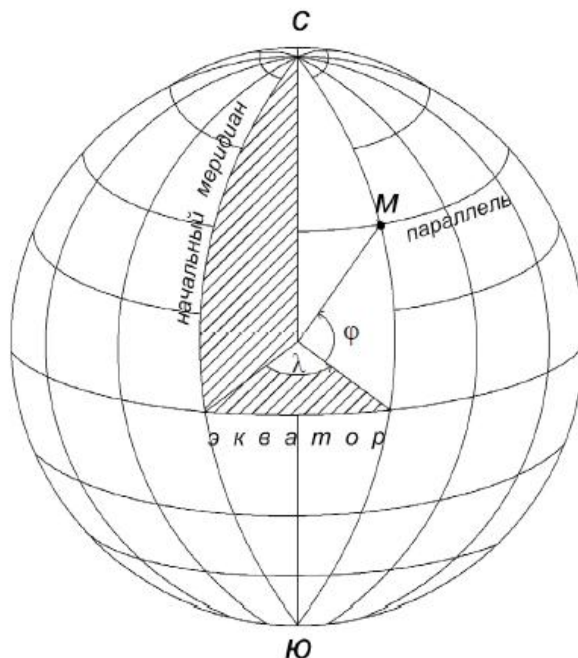


Рис. 3. Географические координаты: φ - широта; λ - долгота

Географическая долгота - это двугранный угол между плоскостью начального (нулевого Гринвичского) меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через данную точку.

Счет долгот ведут от 0 на начальном меридиане до $+180$ в восточном направлении и до -180 в западном направлении.

В 1884 г. Международная Вашингтонская конференция приняла за начальный меридиан Гринвичский, проходящий через Гринвичскую обсерваторию вблизи Лондона.

За начало высот принят нуль Крондштадского футштока (футшток – рейка с делениями для наблюдений уровня воды в море, реке, озере). Нуль Крондштатского футштока находится на высоте среднего многолетнего уровня Балтийского моря, которое практически не подвержено приливно-отливным явлениям.

1. Элементы математической и геодезической основы карт

Различные картографические изображения, как правило, имеют разную математическую основу.

Рассмотрим основные особенности математической основы карты. Для того, чтобы перейти от физической поверхности Земли к плоскому картографическому изображению, необходимо с математической точки зрения проделать три операции:

1. Физическую поверхность Земли спроектировать на условную поверхность

земного эллипсоида. Это делается с помощью *геодезической основы*.

2. Уменьшить эту территорию до видимых размеров с помощью *масштаба*.

3. Развернуть ее с поверхности эллипсоида на плоскость. Этот переход осуществляется с помощью *картографической проекции*.

Отсюда следует, что *геодезическая основа*, *масштаб* и *картографическая проекция* являются главными математическими элементами карты.

К математическим элементам карты относят также *координатную сетку*, *элементы компоновки* и *систему разграфки*.

1.1. Шарообразная модель картографируемых тел

Многие картографируемые тела могут быть аппроксимированы шаром. Например, если изготовить глобус Земли с экваториальным диаметром 1 м, то его полярный диаметр будет короче всего на 3,4 мм. Размеры неровностей на поверхности многих планет обычно значительно меньше диаметров их сфер. Так, в случае Земли максимальные величины параметров рельефа картографируемой поверхности, высоты гор и глубины впадин незначительны по сравнению с размерами самой планеты. Если вновь земной диаметр уменьшить до 1 м, то получится шар с довольно гладкой поверхностью. Наибольшая царапина на нем, Марианский желоб, будет не глубже 0,9 мм, а высочайшая вершина на Земле, Эверест, образует выступ высотой менее 0,7 мм.

Диаметр шара, совмещаемый с осью вращения Земли или соответственно другого космического тела, принимается за полярную ось вращения. Плоскость, проходящая через центр шара перпендикулярно его оси вращения, образует плоскость экватора. Основными координатами, определяющими положение точки на шаре, являются сферические широта и долгота (рис. 4).

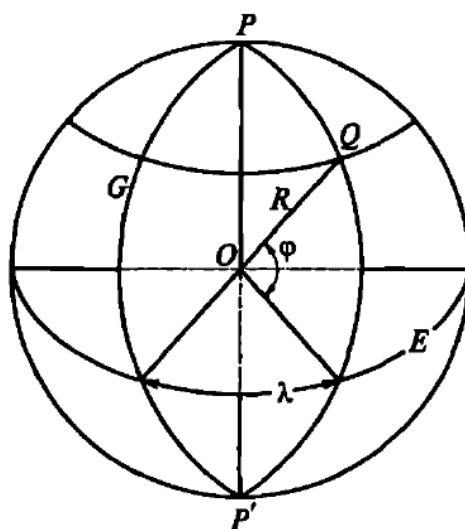


Рис. 4. Географические координаты точек шара радиусом R : φ — сферическая широта; λ — сферическая долгота; P, P' — географические полюса; G — Гринвичский (начальный) меридиан; E — экватор

Сферическая широта φ — угол, образованный нормалью к поверхности шара в данной точке Q и плоскостью экватора. Иначе, так как нормаль к сфере совпадает с ее радиусом, широта равна центральному углу между радиусом шара, направленным на заданную точку, и плоскостью экватора. Плоскость экватора пересекает поверхность шара по экватору. Система плоскостей, параллельных экватору, пересекая поверхность шара, образует на нем параллели. Плоскость любого меридиана проходит через ось вращения

шара. **Сферическая долгота** λ определяется двугранным углом между плоскостями меридиана данной точки и начального (Гринвичского) меридиана. Сетка меридианов и параллелей на шаре создает географическую сетку.

Дуги параллелей и меридианов. На сфере параллель является дугой окружности. Ее радиус (r) зависит от широты и равен:

$$r = R \cos\varphi;$$

Длина дуги параллели (s) между двумя точками с географическими долготами λ_1 и λ_2 равна:

$$s = r(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Разность долгот выражена в радианах.

Меридианы - также дуги окружностей, радиус которых равен радиусу шара R . Для длины дуги меридиана (S) между экватором и параллелью широты φ , выраженной в радианах, имеем

$$S = R \varphi.$$

Площадь сферической трапеции.

В математической картографии при построении так называемых равновеликих проекций используется площадь сферической трапеции, которая на шаре ограничена экватором, параллелью заданной широты φ и двумя меридианами, разность долгот которых равна одному радиану. Значение этой площади (P) определяется формулой

$$P = R^2 \sin \varphi.$$

Шаровая модель достаточно проста и имеет важное практическое значение. Эту модель применяют при мелкомасштабном картографировании Земли. Она также используется в качестве промежуточной поверхности, на которую предварительно отображают земной эллипсоид при создании картографических проекций так называемым способом «двойного проектирования». Поверхность сферы используется также в качестве исходной при картографировании тел исключительно сложной формы. В этом случае в модель такого тела вписывается сфера и от нее ведется отсчет высот картографируемой поверхности.

1.2. Сфероидическая модель картографируемых тел

Более точной моделью массивного тела, вращающегося вокруг неизменной оси, является сфероид — фигура, которую приняло бы тело, находясь только под влиянием сил взаимного тяготения его частиц и центробежной силы вращения. Простейшим из сфероидов является эллипсоид вращения с малым сжатием вдоль полярной оси.

Эллипсоид вращения — геометрическое тело, которое образуется при вращении эллипса вокруг его малой оси.

Если сферу определяет лишь один параметр — радиус, то эллипсоид вращения характеризуют два параметра. Основным параметром является большая экваториальная полуось эллипсоида a . В качестве второго параметра чаще всего используют либо полярное сжатие α , либо первый (e), либо второй (e') эксцентриситеты меридионального эллипса, либо малую полярную полуось b . Упомянутые величины взаимосвязаны следующим образом:

$$\alpha = (a - b)/a; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad (e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2}; \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \quad e^2 = \alpha(2 - \alpha);$$

Положение любой точки на эллипсоиде определяется геодезическими широтой и долготой (рис. 5).

Геодезическая широта B — угол, образованный нормалью к поверхности земного эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. Геодезическая долгота L — двугранный угол между плоскостями меридиана данной точки и начального меридиана.

Рассекая эллипсоид плоскостями, проходящими через полярную ось, получают меридианы, а плоскостями, проходящими перпендикулярно этой оси, — параллели. Экватор образуется сечением эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно полярной оси.

Сетка меридианов и параллелей на эллипсоиде формирует географическую сетку.

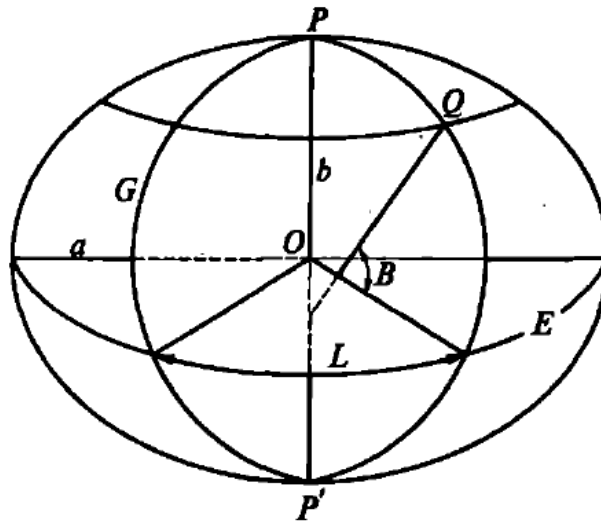


Рис. 5. Геодезические координаты точек эллипсоида вращения с полуосями a и b

В отличие от шара эллипсоид вращения имеет несколько радиусов. Наиболее важными радиусами эллипсоида вращения являются:

M — радиус кривизны меридиана;

N — радиус кривизны первого вертикала (радиус линии, получаемой сечением эллипсоида плоскостью, проходящей через нормаль в данной точке и перпендикулярно плоскости меридиана);

R — средний радиус кривизны линий, образованных сечением эллипсоида всевозможными плоскостями, проходящими через нормаль в данной его точке;

r — радиус параллели.

Перечисленные радиусы вычисляются по следующим формулам:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}};$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}};$$

$$R = \sqrt{MN};$$

$$r = N \cos B;$$

Радиус меридиана применяется для вычисления длин дуг меридианов и нахождения широт по этим дугам. Радиус кривизны первого вертикала нужен для вычислений радиусов параллелей и средних радиусов. На полюсах радиусы $M = N$. На других широтах из всех радиусов наибольшим является N , а наименьшим — M . Поэтому радиусы меридиана и первого вертикала называют *главными радиусами* кривизны. Средний радиус кривизны R равен среднему геометрическому из значений главных радиусов кривизны. Средний радиус применяется в задачах, связанных с развертыванием поверхности эллипсоида на поверхность шара.

Дуги параллелей и меридианов. Параллель на эллипсоиде вращения является окружностью. Длина ее дуги (s) между двумя точками с долготами L_1 и L_2 равна произведению радиуса (r) параллели на разность долгот в радианах:

$$s = r(L_2 - L_1).$$

Меридиан представляет собой эллипс. Вычисления его длин дуг более сложны. Для дуги меридиана от экватора до параллели заданной широты B имеем

$$S = \int_0^B M dB.$$

Этот интеграл решают численными методами или разложением в ряд подынтегрального выражения.

Наиболее точно фигуру Земли представляет трехосный эллипсоид. Однако в картографических работах трехосным эллипсоидом Земли пользуются сравнительно редко вследствие слабо выраженной трехосности и чрезвычайного усложнения расчетных формул.

1.3. Замена эллипсоида шаром

Во всех случаях, когда точность позволяет, эллипсоид или его часть заменяют поверхностью шара. Такая замена особенно актуальна при мелкомасштабном картографировании. Кроме того, как уже отмечалось, в математической картографии применяется способ двойного проектирования, когда эллипсоид сначала проектируется на шар, а после этого шар отображается в заданной проекции на плоскость.

При проектировании эллипсоида на шар возникает задача выбора радиуса шара и способа перехода от широт B и долгот L эллипсоида к широтам φ и долготам λ шара. Обычно эллипсоид с шаром совмещают так, чтобы совпадали их центры, оси вращения и плоскости начальных меридианов. В этом случае плоскости экваторов и плоскости всех меридианов также совпадают, и долготы остаются неизменными:

$$\lambda = L.$$

Преобразованию подлежат только широты. При этом их значения на полюсах и на экваторе остаются без изменений, и меняются тем сильнее, чем точки ближе к средним широтам. Значения сферических широт и выбор радиуса шара определяются способом отображения эллипсоида на шар. Существует несколько таких способов.

Сферическое отображение. В этом случае нормали в соответствующих точках сферы и эллипсоида полагаются взаимно параллельными. Поэтому текущие сферические и геодезические широты принимаются равными друг другу:

$$\varphi = B.$$

Для небольших территорий радиус шара приравнивается среднему радиусу R в центральной точке карты. При замене всей планеты шаром ее радиус вычисляют как среднее арифметическое из следующих трех значений:

- радиуса шара, равного среднему из трех полуосей эллипсоида (двух экваториальных

и одной полярной);

- радиуса шара, площадь поверхности которого равна площади поверхности эллипсоида;
- радиуса шара, объем которого равен объему эллипсоида.

Для Земли средний радиус шара $R = 6371$ км. Шар с таким радиусом по линейным размерам, площади поверхности и объему очень близок к земному эллипсоиду. На этом шаре дуга меридиана между экватором и полюсом на 5,6 км (0,05 %) длиннее, а дуга четверти экватора на 11,2 км (0,1 %) короче, чем на эллипсоиде вращения. Такие погрешности на мелкомасштабных географических картах никак не проявляются.

Равноугольное отображение. Углы с эллипсоида переносятся на шар без искажений. В способе Мольвейде, предложенном в 1807 г., радиус шара приравняется большой полуоси эллипсоида (a). Широты φ в радианах вычисляются по формуле

$$\varphi = B - \alpha \sin 2B + \beta \sin 4B;$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \frac{3e^6}{32} + \dots; \quad \beta = \frac{5e^4}{48} + \frac{7e^6}{80} + \dots;$$

Для эллипсоида Красовского после перевода в угловые секунды получают $\alpha = 692,234''$, $\beta = 0,963''$. Максимальное искажение длин образуется на полюсах и составляет 0,3 %. Наибольшая разность широт эллипсоида и шара имеет место на параллели 45° и составляет $11' 32,23''$. Это означает, что на шаре данная параллель по сравнению с ее положением на эллипсоиде смещается к экватору примерно на 21,4 км.

Равновеликое отображение. Площади объектов на шаре равны соответствующим площадям на эллипсоиде. Сферические широты в радианах вычисляются по формуле

$$\varphi = B - \alpha \sin 2B + \beta \sin 4B;$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2} + \frac{31e^4}{180} + \dots; \quad \beta = \frac{17e^4}{360} + \dots.$$

Для эллипсоида Красовского после перевода в угловые секунды получают $\alpha = 461,797''$, $\beta = 0,436''$. Радиус шара вычисляется из условия равенства площадей поверхностей шара и эллипсоида по формуле

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17e^4}{360} - \frac{201e^6}{9072} - \dots \right).$$

Для эллипсоида Красовского радиус такого шара составляет 6371 116 м. Максимальные искажения длин и углов возникают в точках экватора и составляют соответственно 0,1 % и 3,8'. Наибольшие расхождения широт имеются на параллели 45° и равны $7' 43,8''$. Эта параллель на шаре смещается в сторону экватора примерно на 14,3 км.

Равнопромежуточное отображение. Проектирование эллипсоида на шар может быть выполнено двояко: с сохранением длин меридианов или с сохранением длин параллелей.

Если длины меридианов на шаре остаются равными их значениям S на эллипсоиде, то сферические широты φ в радианах и радиус шара R вычисляются по следующим формулам:

$$\varphi = S/R;$$

$$R = \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots \right); \quad n = \frac{a-b}{a+b};$$

В случае эллипсоида Красовского $R = 6\,367\,558,5$ м.

Если эллипсоид проектируется на шар так, что длины параллелей на шаре равняются длинам соответствующих параллелей на эллипсоиде, то радиус шара приравнивается большой полуоси (a) эллипсоида вращения, а сферические широты вычисляются по формуле

$$tg\varphi = \sqrt{1 - e^2}tgB;$$

Величина смещения параллелей может служить своеобразным критерием, показывающим, при каких масштабах карт широты точек необходимо пересчитывать, а при каких это делать не следует.

Например, наибольшие смещения параллелей происходят при двух первых способах проектирования. В случае Земли, как уже отмечалось, они достигают 21,4 км. Так, на карте масштаба 1:20 000 000 это составляет 1,07 мм. Таким смещением линий, вероятно, можно пренебречь.

На мелкомасштабных картах, отображающих весь мир или значительные его части, искажения из-за замены эллипсоида шаром пренебрежимо малы по сравнению с искажениями, образующимися при переходе от сферической поверхности к плоскости. Например, на тематических картах мира масштаба 1:15 000 000 экватор укорочен на 0,1 % по причине замены эллипсоида сферой и на 15,7 % из-за отображения сферы на плоскости.

1.4. Отображение шара на шар

В некоторых случаях конструирования картографических проекций прибегают к отображению исходного шара, например земного, на другой промежуточный шар.

Примером специфического проектирования шара на шар может служить способ Гильберта (E.N.Gilbert), примененный для построения так называемой проекции «Двух миров» (рис. 6). Весь земной шар при условии равноугольности спроектирован на одно полушарие новой сферы. При этом широты и долготы вычисляются по формулам, в которых штрихом обозначены координаты для точек нового шара: $\lambda' = \lambda/2$; $\sin\varphi' = tg\varphi/2$.



Рис. 6. Весь земной шар отображен на одном полушарии

2. Картографическая проекция

Картографическая проекция — математически определенное отображение поверхности эллипсоида или шара на плоскости карты.

Картографической проекцией устанавливается взаимно-однозначное соответствие между прямоугольными координатами (x, y) точек на плоскости и широтами и долготами соответствующих точек на шаре (φ, λ) или на эллипсоиде (B, L) . Математически эта взаимосвязь определяется уравнениями картографической проекции.

Уравнения картографической проекции — два уравнения, определяющие связь между координатами точек на карте и соответствующих точек на поверхности эллипсоида или шара.

Например, для шара уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= f_1(\varphi, \lambda); & y &= f_2(\varphi, \lambda); \\ \varphi &= F_1(x, y); & \lambda &= F_2(x, y);\end{aligned}$$

Два первых уравнения задают прямое отображение поверхности шара на плоскость; два других — обратное отображение плоскости на шар. Записанные уравнения могут иметь довольно сложный вид. Особенно это относится к функциям обратного отображения.

В дальнейшем предполагается, что на плоскости, как это принято в геодезии и математической картографии, ось абсцисс направлена на карте вверх на север, а ось ординат — вправо на восток. Обычно ось абсцисс совмещается со средним, прямолинейным меридианом карты, или проводится параллельно ему.

К уравнениям картографических проекций предъявляются очевидные математические требования: они должны давать *однозначное* и в заданной области *непрерывное, имеющее геометрический смысл*, отображение.

Множество таких уравнений бесконечно, а разнообразие картографических проекций практически неограниченно. Их число ежегодно продолжает увеличиваться.

Важной составляющей частью уравнений картографических проекций являются их параметры. Изменением параметров можно изменить свойства проекции.

Параметры картографической проекции — постоянные величины, входящие в уравнения картографической проекции.

Например, радиус ρ альмукантаратов (параллелей) азимутальных проекций определяется уравнением с параметром k :

$$\rho = kR \sin(Z/k).$$

В зависимости от значения k меняются свойства проекций. При $k = 1$ имеет место так называемая ортографическая проекция. Если $k = 2$, то проекция становится равновеликой, в ней площади изображаются без искажений. При дальнейшем увеличении значений этого параметра проекция по своим свойствам будет приближаться к так называемым равнопромежуточным проекциям.

Две проекции одного класса, но имеющие разные параметры, могут существенно отличаться своими свойствами. Например, для отображения территории России построено около десятка равнопромежуточных конических проекций. Они отличаются друг от друга своими параметрами.

2.1. Картографические сетки

Картографическая сетка — изображение сетки меридианов и параллелей на карте.

Картографическая сетка — это портрет проекции. По ней одна проекция отличается от другой. Любая карта всегда построена в какой-то проекции. Географическая карта вне проекции не существует. Однако на карте картографическая сетка может и отсутствовать. Многие тематические карты, особенно крупных масштабов, не имеют картографических

сеток. Для представления их тематики она не нужна. Более того, она может перегружать карту и этим ухудшать ее наглядность и читаемость.

В зависимости от места расположения полюса сферической полярной системы координат различают следующие виды картографических сеток:

- **нормальная сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат совмещен с географическим полюсом;

- **поперечная сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат расположен на экваторе;

- **косая сетка картографической проекции** — картографическая сетка, получаемая в случае, когда полюс полярной сферической системы координат расположен между географическим полюсом и экватором.

Уравнения картографической проекции одновременно являются уравнениями меридианов и параллелей. Они определяют вид сетки. Правильно и обратное утверждение — вид меридианов и параллелей определяет вид уравнений. Меридианы и параллели изображаются разнообразными линиями: прямыми, а также дугами окружностей, синусоид, эллипсов, парабол, гипербол и других плоских кривых. Картографические проекции и их сетки в нормальной ориентировке разделяют на имеющие параллели **постоянной кривизны** и параллели **переменной кривизны**.

Среди сеток с параллелями постоянной кривизны выделяются те, в которых параллели представлены прямыми параллельными линиями, концентрическими или эксцентрическими окружностями или дугами окружностей. Это основные, имеющие наибольшее значение и распространение, проекции. Параллели переменной кривизны могут быть отображены эллипсами, параболлами, гиперболами, более сложными кривыми и их дугами.

Густота и наглядность сетки определяются ее шагом — расстоянием между меридианами и параллелями. Густая сетка перегружает карту и ухудшает ее читаемость, редкая сетка осложняет картографические измерения, глазомерные оценки и понижает их точность.

По изображению географических полюсов картографические сетки разделяются на те, в которых полюса показываются **точками, отрезками прямых** и **дугами кривых линий**.

Относительно меридиана и экватора картографические сетки могут быть как **симметричными**, так и **асимметричными**.

Важным свойством картографических сеток является их **ортогональность**. В ортогональных сетках линии меридианов и параллелей пересекаются под прямыми углами.

Узловые точки картографической сетки — точки пересечения на карте линий меридианов и параллелей.

Узловые точки имеют большое значение при построении, преобразовании и использовании проекций. В тех случаях, когда проекция неизвестна, или неизвестны ее параметры, узловые точки помогают их восстановить. Картографическая проекция может быть задана не только уравнениями, но и таблицей широт, долгот и прямоугольных координат узловых точек. В условиях геоинформационных технологий это не очень удобный способ задания картографической проекции; большей частью он встречается как наследие прошлого.

2.2. Средний меридиан проекции

Средний меридиан проекции — меридиан, принимаемый за начало счета долгот в данной картографической проекции.

На картах мира этот меридиан, как правило, располагается в середине карты. Поэтому его и

называют средним меридианом. Средний меридиан обычно изображается прямой линией. На картах средних и крупных масштабов, когда показываются территории ограниченных размеров, средний меридиан может не находиться в середине карты. Более того, он может располагаться даже за пределами карты (рис. 7).

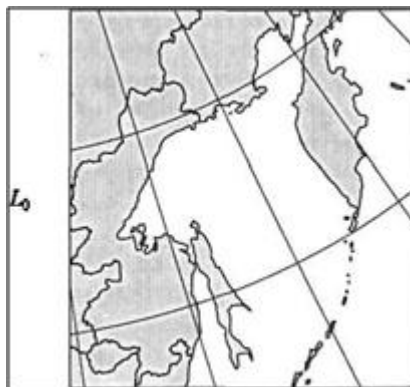


Рис. 7. Средний меридиан долготы L_0 находится за пределами внутренних рамок карты

3. Искажения в картографических проекциях

Учение об искажениях занимает центральное место в теории картографических проекций. Ни сферу, ни поверхность эллипсоида невозможно распрямить в плоскость — какие-то их участки будут сжаты, другие — растянуты. В плоскости, в общем случае, длины отрезков, углы между направлениями, формы участков и их площади не будут равны таковым на исходной поверхности. Они будут в той или иной степени искажены. При этом все виды искажений на карте взаимосвязаны и изменения одних влекут за собой изменения других.

Особый характер имеет связь между искажениями углов и площадей. Они находятся как бы в противоборстве друг с другом: стремление уменьшить искажения площадей тут же влечет за собой увеличение искажений углов, и наоборот. Поэтому в проекциях, где нет искажений углов, наблюдаются очень большие искажения площадей, а в проекциях с неискаженными площадями углы искажены значительно. Можно лишь добиться равновесия влияний искажения углов и искажения площадей.

Тем не менее в проекциях могут быть точки или линии, в которых искажения отдельных или всех видов отсутствуют. Их называют *точками нулевых искажений* и *линиями нулевых искажений*.

3.1. Метрические элементы поверхности

Свойства картографических проекций и искажения в них изучают, сопоставляя на поверхности и соответственно на плоскости значения метрических элементов: длин отрезков, углов между ними, площадей участков. При изучении метрики поверхностей используют разработки дифференциальной геометрии.

Пусть картографическая проекция задана уравнениями:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda);$$

Точке поверхности с широтой φ и долготой λ соответствует точка плоскости с координатами x и y . Смещению точки на поверхности при изменении широты и долготы на бесконечно малые величины $d\varphi$ и $d\lambda$ соответствуют смещения образа этой точки на плоскости на величины dx и dy . При этом

$$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda; \quad dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda;$$

где символами $x_\varphi, x_\lambda, y_\varphi, y_\lambda$ обозначены частные производные. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2; \quad g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2; \quad f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda;$$

$$h = x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = \sqrt{eg - f^2}; \quad e, g, h > 0.$$

Эти величины в дифференциальной геометрии называют *коэффициентами первой квадратичной формы*, а в математической картографии — *коэффициентами Гаусса*. Зная коэффициенты Гаусса, можно производить определения длин, углов и площадей как на отображаемой поверхности, так и в плоскости проекции. Они определяют метрику поверхности.

В плоскости проекции длина элементарного отрезка dl определяется простой зависимостью:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

Полагая $d\lambda = 0$, получают выражения для длины отрезка дуги меридиана dl_M , а при $d\varphi = 0$ — для длины отрезка дуги параллели dl_n .

Таблица 2. Формулы для анализа длин, углов и площадей на плоскости

Показатель	Формула для вычисления
Длина элементарного отрезка dl	$dl^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2$
Длины дуг меридиана dl_M и параллели dl_n	$dl_M = \sqrt{e}d\varphi; \quad dl_n = \sqrt{g}d\lambda$
Угол θ между положительными направлениями меридиана и параллели	$\cos\theta = \frac{f}{\sqrt{eg}}; \quad \sin\theta = \frac{h}{\sqrt{eg}}; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{h}{f};$
Азимут направления α	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h \frac{d\lambda}{d\varphi}}{e + f \frac{d\lambda}{d\varphi}}$
Площадь dF элементарного параллелограмма со сторонами dl_M, dl_n и углом θ между ними	$dF = hd\varphi d\lambda$

Угол β между направлениями двух векторов

$$dI_1 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}; \quad dI_2 = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix};$$

определяется из скалярного произведения этих векторов

$$\cos\beta = \frac{dI_1^T dI_2}{dl_1 dl_2}.$$

Предположим, что отрезок dl_1 ориентирован по меридиану, а отрезок dl_2 — по параллели. Тогда $d\lambda_1 = 0$ и $d\varphi_2 = 0$. Угол β в рассматриваемой точке карты равен углу θ между положительными

ми направлениями меридиана и параллели. Пусть, как и ранее, отрезок dl_1 ориентирован по меридиану, а отрезок dl_2 — по произвольному направлению азимута α на карте. В таком случае этот угол $\beta = \alpha$ и определяет азимут отрезка на карте.

Площадь dF элементарного параллелограмма со сторонами dl_u, dl_n и углом θ между ними равна

$$dF = dl_u dl_n \sin \theta.$$

Раскрыв вышеприведенные выражения и подставив коэффициенты Гаусса, получим соответствующие формулы, удобные для анализа в плоскости любой заданной проекции длин, углов и площадей (табл. 2).

Идентичные формулы существуют для метрических элементов поверхности. Их также удобно представлять с помощью коэффициентов Гаусса. Для вычисления метрических элементов соответственно следует принять на шаре

$$e = R^2; g = r^2; f = 0; h = rR$$

и на эллипсоиде вращения

$$e = M^2; g = r^2; f = 0; h = rM.$$

Таблица 3. Формулы для анализа длин, углов и площадей на эллипсоиде

Показатель	Формула для вычисления
Длина элементарного отрезка dD	$dD^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2$
Длины дуг меридиана dS и параллели ds	$dS = M dB; ds = r dL$
Угол θ между положительными направлениями меридиана и параллели	$\theta = \pi/2$
Азимут направления A	$tg A = \frac{r}{M} \frac{dL}{dB}$
Площадь dF элементарной трапеции на эллипсоиде	$dF = r M dB dL$

В табл. 3 приведены формулы для эллипсоида вращения. Чтобы получить из них формулы для шара, следует заменить широты B на ϕ , долготы — L на λ , радиус кривизны меридиана M — на радиус шара R , а радиус параллели r вычислять для шара.

Определив с помощью табл. 2 и 3 значения длин элементарных отрезков и площадей элементарных площадок и вычислив отношения этих величин на плоскости к соответствующим величинам на эллипсоиде или на шаре, получим частные масштабы длин и частные масштабы площадей.

3.2. Искажения длин

Искажения длин на карте выражаются в том, что масштаб длин меняется с переменной места точки. Вследствие этого на карте неправильно передаются соотношения линейных размеров разных географических объектов. Об искажениях длин легко судить по частным масштабам длин. В бесконечно малой окрестности каждой точки карты различают:

- m — частный масштаб длин по меридиану;
- n — частный масштаб длин по параллели;
- μ — частный масштаб длин по любому направлению.

По определению, частный масштаб равен отношению длины малого (строго говоря, бесконечно малого) отрезка карты к соответствующему отрезку, вычисленному для эллипсоида или шара и выраженному в главном масштабе. Взяв отношения соответствующих

отрезков на плоскости и на эллипсоиде и пользуясь коэффициентами Гаусса, для частных масштабов m и n получают

$$m = \frac{\sqrt{e}}{M}; \quad n = \frac{\sqrt{g}}{r}.$$

Перечисленные масштабы взаимосвязаны следующим образом:

$$\mu^2 = m^2 \cos^2 A + m n \cos \theta \sin(2A) + n^2 \sin^2 A,$$

где A — азимут того направления, для которого определяется частный масштаб длин μ , причем азимут измеряется на эллипсоиде; θ — угол между меридианом и параллелью в данной точке карты.

Формулы, как отмечалось выше, наглядно показывают, что в каждой точке карты значения частных масштабов длин зависят как от широты и долготы этой точки, так и от азимута направления.

Частные масштабы длин нетрудно определять по карте, если на ней имеется картографическая сетка. Для этого на карте следует измерить малые отрезки меридиана и параллели, вычислить, выразив в главном масштабе, их значения на эллипсоиде и найти их отношения. Таким путем будут определены масштабы m , n . Затем следует измерить угол θ между меридианом и параллелью и для направления, заданного азимутом α , по вышеуказанной формуле вычислить частный масштаб длин μ .

Длины отрезков, за исключением линий нулевых искажений, искажаются в любых проекциях. В каждой точке карты существуют два направления, по которым частные масштабы длин принимают *экстремальные* значения — по одному из них масштаб максимален, по другому — минимален. Значения азимутов этих направлений определяются формулой

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{n^2 \sin(2\theta)}{m^2 + n^2 \cos(2\theta)}.$$

Поскольку период тангенса равен π , то это уравнение дает два ответа: β и $\beta + 90^\circ$. Это означает, что *направления экстремальных масштабов являются взаимно перпендикулярными*.

Главные направления в картографической проекции—два взаимно перпендикулярных направления в каждой точке карты, по которым частные масштабы длин имеют наибольшее и наименьшее значения.

Обратим внимание на важную особенность, которая следует из приведенной формулы. Если на карте между меридианом и параллелью прямой угол ($\theta = 90^\circ$), то главные направления всегда будут ориентированы по меридиану и параллели. Таким образом, *в ортогональных проекциях экстремальными являются частные масштабы тип*.

Обычно экстремальные масштабы обозначаются буквами:

a — наибольший масштаб;

b — наименьший масштаб.

Из этого следует, что в ортогональных проекциях верны соотношения:

либо $a = m$, $b = n$;

либо $a = n$, $b = m$.

Для неортогональных проекций, используя значения частных масштабов по меридиану и по параллели m и n , а также угол между меридианом и параллелью θ , экстремальные масштабы длин a , b и азимут β главного направления на карте вычисляются по формулам:

$$a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin \theta};$$

$$a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \theta};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}$$

По тангенсу определяются четыре значения угла β . Для правильного нахождения знака β необходимо помнить, что направление наибольшего частного масштаба длин на карте расположено внутри острого угла между меридианом и параллелью.

Искажения длин в проекции оценивают относительными величинами, например, по одной из формул:

$$\nu = \mu - 1; \quad \nu = \ln \mu.$$

Применяется ряд критериев, характеризующих общую *по всем направлениям* величину относительных искажений длин в данной точке карты. Эти критерии предложены разными учеными и обычно их называют по именам авторов.

Критерии Эйри:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}[(a - 1)^2 + (b - 1)^2]; \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + (ab - 1)^2\right];$$

Критерий Эйри —Каврайского:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}[\ln^2 a + \ln^2 b];$$

Применяются и другие критерии. Следует заметить, что все они являются *локальными*, ибо характеризуют искажения лишь в данной точке карты.

3.3. Искажения площадей

Площади на картах могут иметь значительные искажения. На рис. 8, *а* показаны правильные соотношения площадей географических объектов. На рис. 8, *б* в проекции Меркатора, где нет искажений углов, Гренландия по величине сопоставима с Африкой, хотя Африка по площади почти в 15 раз больше Гренландии.

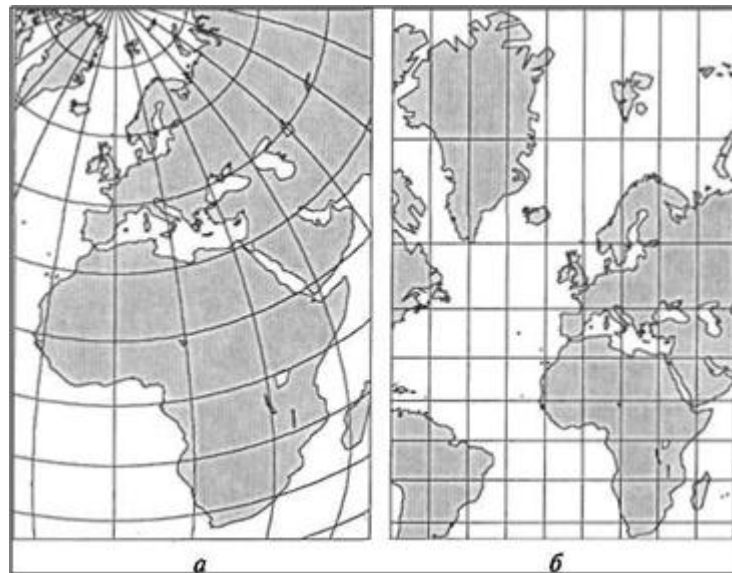


Рис. 8. Искажения: *а* — площади географических объектов отображены без искажений; *б* — площади искажены значительно

Частный масштаб площади может быть определен по одной из следующих формул:

$$p = \frac{h}{rM}; \quad p = mnsin\theta; \quad p = ab;$$

Таким образом, частный масштаб площади для каждой точки карты может быть вычислен путем определения частных масштабов длин по меридиану, по параллели и измерением угла между ними.

Искажения площадей характеризуются относительными величинами, вычисляемыми по одной из двух формул:

$$v = p - 1; \quad v = \ln p.$$

Они могут быть выражены в процентах. Эти показатели являются *локальными*.

3.4. Искажения угловых величин

Искажения азимутов. В общем случае азимут A некоторого направления на эллипсоиде не равен азимуту a того же направления на карте. Зависимость между этими значениями азимутов определяется следующей формулой:

$$tg\varphi = \frac{n\sin\theta tgA}{m + n\cos\theta tgA}.$$

Из этого выражения можно сделать вывод о том, что в проекциях с ортогональной сеткой ($\theta = 90^\circ$) и с одинаковыми частными масштабами длин по меридиану и по параллели ($m = n$) значения азимутов не искажены:

$$tg\alpha = tgA.$$

В других случаях в данной точке карты не искажены лишь азимуты, имеющие следующие значения:

$$tg\varphi = \frac{n\sin\theta - m}{n\cos\theta}.$$

Искажения углов между меридианами и параллелями. На сфере и на эллипсоиде вращения меридианы пересекают параллели под прямыми углами. На картах же эти углы прямые лишь в ортогональных проекциях. В других проекциях в общем случае углы между меридианами и параллелями искажены. Величина искажения оценивается отклонением угла на карте от прямого угла:

$$\varepsilon = \theta - 90^\circ.$$

Этот угол можно измерить на карте или вычислить с помощью коэффициентов Гаусса по одной из формул:

$$\sin\varepsilon = -\frac{f}{\sqrt{eg}}; \quad \cos\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{eg}}; \quad tg\varepsilon = -\frac{f}{h}.$$

Наибольшие искажения углов. Разные углы, имеющие вершину в заданной точке, искажаются по-разному. Так, углы между главными направлениями не искажаются вовсе. Поэтому оцениваются максимальные искажения (ω). Существует ряд формул для их вычисления. Приведем их:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad tg \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}; \quad tg \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p} - 2};$$

$$tg \left(\frac{\pi + \omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad tg \left(\frac{\pi - \omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{b}{a}};$$

Наибольшие искажения углов ω можно вычислять по величинам m , n , p , определяемым непосредственно по карте. Формулы весьма наглядно показывают, что в проекции углы не искажаются, если экстремальные масштабы одинаковы ($a = b$). Однако если одинаковы экстремальные масштабы, то это означает, что частный масштаб длин вообще *не зависит* от азимута направления. Следовательно, *в проекциях, не искажающих углы, частный масштаб длин не меняется с переменной направления.*

3.5. Искажения форм

Искажения длин ведут к искажению форм. Поскольку нет проекций, не искажающих длины, то и формы контуров конечных размеров искажаются в любых проекциях. Может возникнуть вопрос, а деформируются ли объекты в проекциях, в которых отсутствуют искажения углов? Ведь в таких проекциях частный масштаб длин не зависит от азимута направления. По этой причине такие проекции называют *конформными* (от лат. *conformis* — *подобный*). В равноугольных проекциях формы объектов также искажаются, и тем сильнее, чем больше размеры объекта. Дело в том, что в равноугольных проекциях подобие сохраняется лишь для бесконечно малых фигур. Бесконечно малый круг с эллипсоида на карту переносится также бесконечно малым кругом. Однако этот круг в разных местах карты будет иметь разные размеры. Где-то его размеры, возможно, будут соответствовать главному масштабу, а в других местах карты его масштаб будет или больше, или меньше главного. А это ведет к искажению формы объекта конечных размеров.

Особо необходимо остановиться на рассмотрении искажений форм в стереографической проекции сферы. В ней любая окружность, как бесконечно малая, так и конечных размеров, изображается окружностью. Поэтому может создаться впечатление, что в этой проекции нет искажений форм. На самом деле формы в стереографической проекции также искажаются. Происходит это потому, что окружность в проекции и окружность на сфере, в сущности, две разные фигуры. На карте при отображении происходит перераспределение точек окружности и смещение ее центра так, что окружность в стереографической проекции имеет новый центр, который не совпадает с изображением в этой проекции прежнего центра на сфере. В проекции одна часть радиусов подверглась сжатию, а другая — растяжению. В результате форма произвольной фигуры исказилась.



Рис. 9. Кольца, концентрические на шаре, в поперечной азимутальной стереографической проекции изобразились смещенными в направлении к экватору



Рис. 10. Круг на шаре в поперечной азимутальной стереографической проекции также изобразился кругом. В то же время в проекции расстояния от окружности до изображения ее первоначального центра в экваториальном направлении стали короче, нежели в полярных направлениях

На рис. 9 изображены кольца, которые на земном шаре были концентрическими. В проекции расстояния между кольцами в направлении экватора стали заметно короче, нежели в направлениях к полюсам. На рис. 10 в этой же проекции точки окружности соединены прямыми отрезками с точкой, отображающей центр этой окружности на шаре. Длины этих отрезков в экваториальном направлении значительно меньше длин отрезков полярных направлений.

Искажения форм контуров бесконечно малых размеров оценивают *коэффициентом форм*, равным отношению максимального частного масштаба длин (a) к минимальному частному масштабу длин (b), а также отклонением этого отношения от единицы (см. критерий Эйри):

$$K = \frac{a}{b}; \quad v_K = \frac{a}{b} - 1;$$

Чем больше отличаются частные масштабы длин a и b , тем сильнее на карте вытянут контур в направлении a .

4. Классификация проекций

4.1. Классификация проекций по характеру и величинам искажений

По характеру искажений проекции разделяют на *произвольные, равновеликие, равноугольные и равнопромежуточные*.

Произвольная картографическая проекция — картографическая проекция, в которой имеются искажения всех видов.

Равновеликая картографическая проекция — картографическая проекция, в которой отсутствуют искажения площадей.

Равноугольная картографическая проекция — картографическая проекция, в которой отсутствуют искажения углов.

Равнопромежуточная картографическая проекция — произвольная картографическая проекция, в которой одинаковы влияния искажений углов и площадей.

Приведенная классификация является одной из основных и наиболее важных.

Недостатком классификации является то, что она из огромного множества произвольных проекций выделяет, в сущности, три *частных случая*: два крайних — равноугольные и равновеликие проекции, и один случай посередине между ними — равнопромежуточные проекции.

В практических целях данная классификация часто детализируется — вводятся дополнительные ступени, количество которых может быть любым. Обычно применяется пятиступенчатая шкала.

1. Равновеликие проекции.
2. Проекции с небольшими искажениями площадей, стоящие посередине между равновеликими и равнопромежуточными проекциями.
3. Равнопромежуточные проекции.
4. Проекции с небольшими искажениями углов, стоящие посередине между равнопромежуточными и равноугольными проекциями.
5. Равноугольные проекции.

По мере движения от первой ступени к пятой искажения площадей нарастают, а искажения углов убывают.

Недостатком многоступенчатых классификаций является отсутствие количественных характеристик, четко отделяющих одну ступень от другой. В 70-х годах XX в. Г. И. Конусова в целях разделения этих ступеней предложила локальный критерий. Этот критерий является угловой величиной и называется *углом классификации*. Угол классификации вычисляется следующим образом:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{\left(\frac{a}{b} - 1 \right)}{(ab - 1)} \right].$$

В формуле под знаком арктангенса стоит дробь. В числителе дроби находится величина, характеризующая локальное искажение формы, а следовательно, и локальное искажение углов, в знаменателе — локальное искажение площадей.

Рассмотрим эту формулу подробнее. В равноугольных проекциях в любой точке карты частный масштаб длин не зависит от направления, $a = b$, и поэтому $\alpha = 0$. В равновеликих проекциях частный масштаб площади $p = ab = 1$, следовательно, $\alpha = \pi/2$. В равнопромежуточных проекциях влияния искажений форм (углов) и площадей одинаковы, в формуле числитель равен знаменателю, $\alpha = \pi/4$.

Поэтому количественная оценка разделения проекций по характеру искажений на отдельные ступени на основе величины угла классификации α производится следующим образом:

$\alpha = 0$ — равноугольные проекции;

$\alpha = \pi/4$ — равнопромежуточные проекции;

$\alpha = \pi/2$ — равновеликие проекции;

$0 < \alpha < \pi/2$ — произвольные проекции.

Как и прежде, выделены главные частные случаи: равноугольные, равнопромежуточные или равновеликие проекции. Так как значение вычисленного угла α может быть отягощено погрешностями, то в этой классификации предусмотрены зоны, сопровождаемые вербальными характеристиками: «практически равновеликие», «практически равноугольные» или «практически равнопромежуточные». Остаются довольно широкие полосы, куда умещаются проекции, расположенные между равноугольными и равнопромежуточными, а также находящиеся между равнопромежуточными и равновеликими.

4.2. Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки

Ограничимся рассмотрением лишь проекций регулярных поверхностей таких тел, как шар и эллипсоид вращения. В основу этой классификации положен рисунок параллелей и меридианов при нормальной ориентировке проекции. В случае проекций шара такой же рисунок имеет картографическая сетка альмукантаратов и вертикалов, (условных меридианов и параллелей). Весьма близкий к нему и рисунок сетки альмукантаратов и вертикалов эллипсоида вращения. Данная классификация ввиду своей наглядности получила широкое распространение. Существует целый ряд классов проекций, названия которых стали общепринятыми. Число классов постепенно увеличивается. Все эти проекции находят наибольшее практическое применение. Однако классификация основана на внешних признаках и не является генетической. Поэтому она не может охватить все разнообразие картографических проекций. Обнаруживается ряд проекций, для которых в этой классификации приходится отводить специальное место. Некоторые российские авторы этим проекциям присваивают название «условные». Идентично в зарубежной, например англоязычной, литературе их относят к классу «разнообразных» («miscellaneous») проекций.

Обычно выделяют следующие классы проекций: азимутальные, псевдоазимутальные, конические, псевдоконические, поликонические, цилиндрические и псевдоцилиндрические. Иногда этот список пополняется полиазимутальными и полицилиндрическими проекциями.

Профессор Л. М. Бугаевский подразделил все множество проекций на два больших подмножества. Первое из них включает проекции, параллели которых в нормальной ориентировке имеют *постоянную кривизну*. Сюда относятся проекции с параллелями в виде прямых линий, дуг окружностей или окружностей. Это подмножество охватывает подавляющее большинство практически используемых проекций.

Ко второму подмножеству отнесены проекции, параллели которых имеют *переменную кривизну*. В этом подмножестве параллели изображаются эллипсами, дугами эллипсов или любыми другими плоскими кривыми. Основу данного подмножества составляют полиазимутальные, поликонические и полицилиндрические проекции.

С математической точки зрения разнообразие и потенциальные возможности второго подмножества значительно больше, чем первого. Однако теория второго подмножества почти не разработана. Подавляющее большинство распространенных проекций принадлежит первому подмножеству, и лишь единичные практически используемые проекции можно отнести ко второму.

Как следует из названий классов, в рассмотренном множестве четко выделяются три группы проекций: А — *группа азимутальных*; К — *группа конических* и Ц — *группа цилиндрических*. Каждую группу подразделяют на четыре класса, причем три класса относятся к подмножеству с параллелями постоянной кривизны и один класс — к подмножеству с параллелями переменной кривизны. Проекции в каждой группе имеют общие черты, отличающие их от других групп, и имеется основной, базовый класс, определяющий в группе названия других классов. В группе названия других классов совпадают с названием основного класса и отличаются от него лишь приставкой «псевдо» или «поли» (табл. 4).

Проекции базовых классов (азимутальные, конические, цилиндрические) имеют ортогональную сетку. В них главные направления ориентированы по меридианам и параллелям. Изоколы в нормальной ориентировке совпадают с параллелями, а в косой и поперечной — с альмукантаратами. В нормальной ориентировке одна проекция базового класса отличается от другой только промежутками между параллелями (альмукантаратами).

Такая структура классификации облегчает запоминание классов проекций и изучение их свойств.

Таблица 4. Классификация проекций по виду нормальной картографической сетки

Группы картографических проекций		
А	К	Ц
<i>Параллели постоянной кривизны</i>		
Азимутальные	Конические	Цилиндрические
Псевдоазимутальные	Псевдоконические	Псевдоцилиндрические (полицилиндрические)
Полиазимутальные	Поликонические	
<i>Параллели переменной кривизны</i>		
Полиазимутальные	Поликонические	Полицилиндрические

4.3. Получение картографических проекций - прямые способы

Картографические проекции получают, решая *прямую* или *обратную задачу математической картографии*. В данной главе рассматриваются так называемые прямые способы. К прямым способам относятся те, которые основаны на решении прямой задачи математической картографии. В прямой задаче математической картографии вначале тем или иным путем задается проекция (а именно, способом ее построения, эскизом картографической сетки, уравнениями и др.), а затем в результате ее изучения получают различные показатели, характеризующие искажения и свойства этой проекции.

Для получения проекций чаще всего применяют:

- 1) способы графических построений;
- 2) способы перспективного проектирования шара (реже эллипсоида):
 - на плоскость;
 - на поверхность цилиндра, впоследствии разворачиваемую в плоскость;
 - на поверхность конуса, также впоследствии разворачиваемую в плоскость;
- 3) способы построения проекций обработкой их эскизов;
- 4) разные способы видоизменения и преобразования уже известных проекций, в результате чего получают так называемые *производные проекции*.

подавляющее большинство проекций получено прямыми способами. Основное достоинство этого подхода — его простота.

4.4. Графические способы получения проекций

Графические способы, игравшие исключительно важную роль в прошлом, в настоящее время большей частью имеют историческое и методическое значение. Тем не менее, и сегодня иногда ими пользуются для создания новых проекций.

За длительную историю развития картографических проекций разработано множество графических приемов их построения.

Наиболее просто строится нормальная равнопромежуточная цилиндрическая проекция. Для этого достаточно провести через заданные промежутки горизонтальные и перпендикулярно им вертикальные прямые. Здесь и далее предполагается, что ось абсцисс направлена вверх на север по среднему меридиану, ось ординат — направо по экватору; счет долгот ведется от среднего меридиана со знаком плюс на восток и со знаком минус на запад. При этом уравнения нормальной равнопромежуточной цилиндрической проекции шара радиусом R (широты и долготы выражены в радианах) принимают вид

$$x = R\varphi; y = R\lambda.$$

Хорошо известны графические способы построения различных азимутальных

проекций. Достаточно просто строится равнопромежуточная азимутальная проекция шара радиусом R . Для этого следует вычертить серию равноотстоящих концентрических окружностей и провести их радиусы. Радиус каждой окружности равен произведению RZ , где Z — зенитное расстояние текущей точки. В нормальной ориентировке окружности отображают параллели, а их радиусы — меридианы; центральные углы между меридианами равны разности их долгот. В косой и поперечной ориентировках окружности отображают альмукантараты (условные параллели), а радиальные линии — вертикалы (условные меридианы), исходящие из условного полюса под азимутами a . Уравнения проекции имеют вид

$$x = RZ \cos a; \quad y = RZ \sin a.$$

В средние века был разработан ряд так называемых *глобулярных проекций*, предназначенных для построения карт полушарий.

Глобулярная проекция Бируни. Проекцию в XI в. предложил ученый - энциклопедист Бируни (973 —ок. 1050). В окружности радиусом $R\pi/2$, построенной в масштабе карты, проводят два взаимно-перпендикулярных диаметра. Один из них отображает экватор, другой — средний меридиан. За крайние меридианы принимается сама окружность. Диаметры и каждые четверти окружности, лежащие между полюсом и экватором, разделяют на равные части. Через три точки, расположенные на среднем и двух крайних меридианах, проводят окружности. Так получают параллели. Через полюса и точки на экваторе также проводят окружности и получают меридианы. В XVIII в. эту проекцию вновь предложил Николози (Nicolosi, 1610—1670). В XVIII—XIX вв. ее применяли для карт полушарий.

Глобулярная проекция Бэкона. Проекцию предложил в XIII в. английский ученый Р.Бэкон (Bacon, 1214—1292). Меридианы строят таким же способом, как и в проекции Бируни. Крайние меридианы также разделяют на равные части. Параллели — прямые линии, проведенные через точки на двух крайних меридианах.

Глобулярная проекция Апиана. Ее предложил в Саксонии в 1524 г. Апиан (Apian, 1495—1552). Средний меридиан и экватор разделяют на равные части. Через полученные на среднем меридиане точки проводят параллели — параллельные экватору линии. Меридианы строятся как в проекции Бируни: проводятся окружности через полюса и точки на экваторе.



Рис. 11. Карта Восточного полушария в глобулярной проекции Апиана

Проекция Апиана показана на рис. 11. Известна и другая проекция Апиана — в ней круговые меридианы заменены эллиптическими.

4.5. Перспективное проектирование шара на плоскость

Перспективным проектированием шара на плоскость получают разнообразные азимутальные проекции. Из некоторой точки, ее называют центром проектирования (точкой глаза), поверхность шара прямыми лучами переносится на плоскость. Плоскость проектирования может касаться шара или пересекать его. На плоскости координаты точки определяются азимутом a и радиусом ρ , зависящим от зенитного расстояния Z . Сказанное иллюстрирует рис. 12, на котором для большей наглядности плоскость проектирования несколько приподнята над шаром.

На плоскости координаты точки вычисляются по известным формулам

$$x = \rho \cos a; \quad y = \rho \sin a.$$

Положение плоскости проектирования определяется зенитным расстоянием Z_k . При $Z_k = 0$ эта плоскость становится касательной к шару.

Все точки шара с одинаковыми зенитными расстояниями Z на плоскости отображаются на одной окружности (альмукунтарате). Радиус альмукунтарата ρ на плоскости зависит от расстояния d между центром проектирования и центром шара.

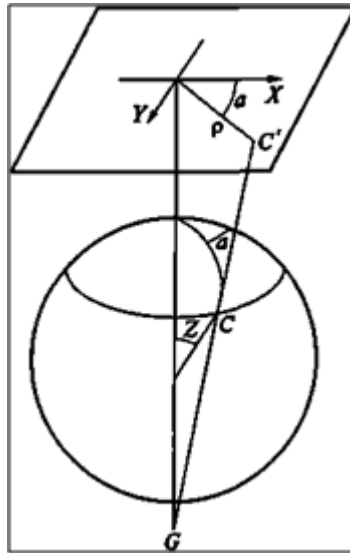


Рис. 12. Азимутальное перспективное проектирование поверхности шара на плоскость, на которой координаты точки определяются азимутом a и радиусом ρ , зависящим от зенитного расстояния Z (G — центр проектирования)



Рис. 13. Перспективное проектирование поверхности шара радиусом R на плоскость (наиболее важные случаи положения центров проектирования); d — расстояние между центром шара и центром проектирования

Выразим расстояние d в единицах радиуса шара R . Оно будет равно некоторому числу этих радиусов и может изменяться от нуля до бесконечности. Из рис. 13 следует, что

$$\rho = \frac{d + \cos Z_k}{d + \cos Z} R \sin Z.$$

На рис. 13 представлены наиболее важные случаи положения центров проектирования, а на рис. 14 — основные перспективные азимутальные проекции. Рассмотрим их, полагая для простоты, что плоскость проектирования касается шара ($Z_k = 0$).

Если центр проектирования находится в бесконечности, то получают *ортографическую* проекцию. Из бесконечности лучи проектирования приходят параллельными. Формула для вычисления радиуса альмукантарата принимает вид

$$\rho = R \sin Z.$$

В этой проекции наблюдатель видит, например, все космические тела. Изображения Земли и других космических тел в ортографической проекции обладают эффектом пространственной объемности.

Если центр проектирования находится на конечном удалении от шара, получают *внешние* проекции. Эти проекции могут быть двух типов. Когда центр и плоскость проектирования лежат по разные стороны от центра шара, наблюдатель видит шар как бы изнутри; тогда получают внешнюю проекцию с *негативным изображением*. При расположении плоскости проектирования между центрами проектирования и центром сферы получают проекцию с *позитивным изображением*. В этом случае наблюдатель видит шар снаружи. Так Земля видна из космоса. На космических фотоснимках Земля изображена в позитивной внешней проекции. Приведенная выше формула радиуса альмукантарата дана для негативных проекций. Чтобы она стала пригодной и для позитивных изображений, в ней расстояние d следует заменить величиной $-d$.

Когда удаление $d = 1$, т.е. центр проектирования лежит на шаре и проектирование негативное, имеет место *стереографическая* проекция. Формула для вычисления радиуса альмукантарата принимает вид

$$\rho = 2R \operatorname{tg}(Z/2).$$

Как уже отмечалось, эта проекция равноугольная. Любая окружность на шаре в этой проекции также отображается окружностью. Поскольку на шаре ортодромия, меридианы и параллели являются дугами окружностей, в проекции они также изображаются окружностями, в частных случаях — прямыми линиями.

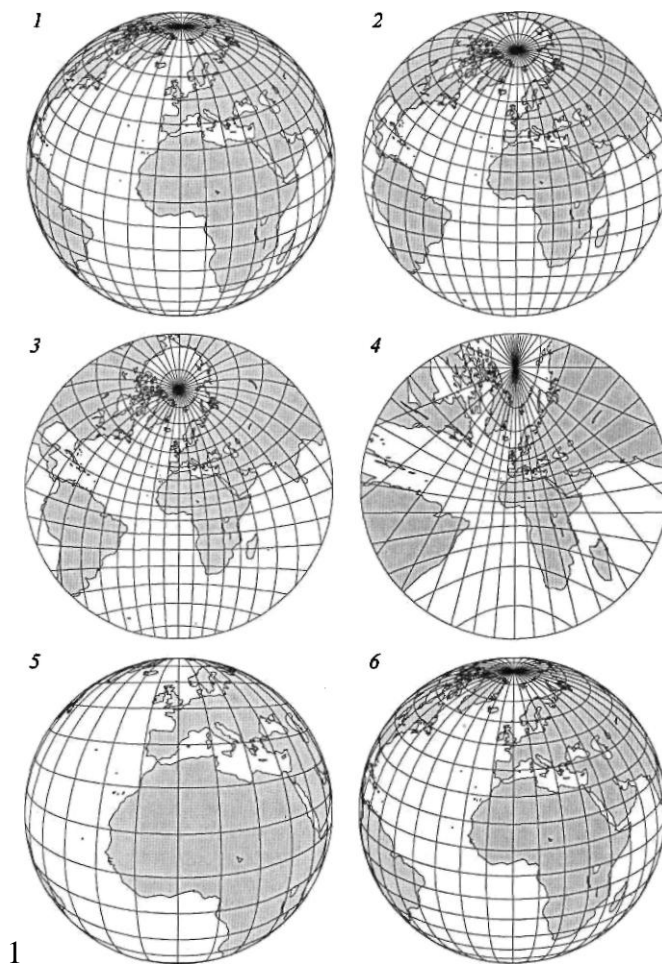


Рис. 14. Азимутальные перспективные проекции земного шара: 1 — ортографическая; 2 — внешняя с негативным изображением на расстоянии одного земного радиуса от Земли; 3 — стереографическая; 4 — гномоническая; 5 — внешняя с позитивным изображением на расстоянии одного радиуса от Земли; 6 — внешняя с позитивным изображением на расстоянии ста радиусов от Земли

Когда удаление $d = 0$ и проектирование ведется из центра шара, получают *гномоническую* проекцию. Радиус p определяется по формуле

$$P = R \operatorname{tg} Z.$$

Если поместить наблюдателя в центр окружности довольно большого радиуса, то любые ее дуги, не превышающие полуокружности, ему будут видны как отрезки прямых линий. Иными словами, в гномонической проекции все дуги большого круга, ортодромии — кратчайшие расстояния между двумя точками на шаре, всегда изображаются прямыми линиями.

В гномонической проекции при зенитном расстоянии $Z = \pi/2$ лучи проектирования идут параллельно плоскости проектирования. Поэтому альмукантарат, соответствующий такому зенитному расстоянию, а в нормальной гномонической проекции он отображает экватор, проектируется «в бесконечность». На карте его не будет. Таким образом, в гномонической проекции можно отобразить площадь размером менее полушария.

На рис. 14 проекции даны в косо́й ориентировке при координатах условного полюса $\varphi_0 = 25^\circ$ и $\lambda_0 = 0^\circ$. Вид картографических сеток и величина кругозора для различных проекций различны. В ортографической проекции видно полушарие, $Z_{\max} = \pi/2$. Во внешних перспективных проекциях величина кругозора зависит от расстояния до Земли: на малых расстояниях отображаются ее небольшие участки, с удалением охват увеличивается до полушария. В

стереографической проекции можно отобразить весь шар, за исключением точки, где расположен центр проектирования, при этом искажения по мере приближения к краям изображения интенсивно нарастают. В гномонической проекции видно менее полушария, а у краев полушария искажения просто огромные. На рис. 14 в гномонической проекции показано примерно $\frac{3}{4}$ полушария.

При перспективном проектировании земной шар предварительно может быть спроектирован на вспомогательную поверхность, например, на сферу, эллипсоид, гиперboloид или параболоид. После этого вспомогательная поверхность отображается на плоскости.

Профессор М.Д.Соловьев разработал способ многократного перспективного проектирования одной сферы на другую. Сфера радиусом R последовательно переносится на ряд вспомогательных сфер, например с радиусами $2R$, $4R$ и т.д. Последняя вспомогательная сфера проектируется на плоскость. В качестве примера рассмотрим случай, когда проектирование сферы на следующую сферу выполняется стереографически (рис. 15).

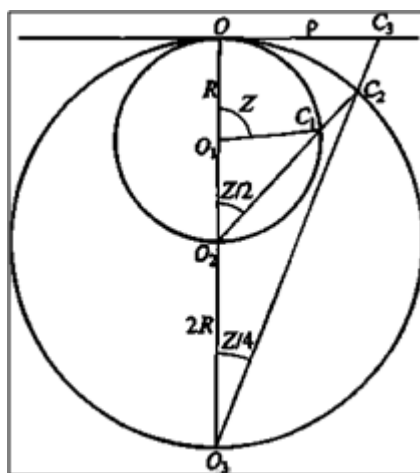


Рис. 15 . Построение перспективных азимутальных проекций многократным предварительным проектированием земной сферы на вспомогательные сферы

Первая сфера с центром O_1 — земная, радиусом R . На ней выделена точка C_1 , определяемая зенитным расстоянием Z . На второй сфере радиусом $2R$ с центром O_2 эта точка изобразится точкой C_2 . Ей соответствует зенитное расстояние $Z/2$. Последовательно продолжая проектирование, увидим, что на n -й сфере радиусом $2^{n-1}R$ зенитное расстояние изображаемой точки будет $Z/2^{n-1}$. Она проектируется на плоскость.

Для вычисления радиуса ρ альмукантарата на плоскости можно воспользоваться формулой однократного проектирования, заменив в ней соответственно значения зенитных расстояний и радиусов сфер. Например, при стереографическом промежуточном и завершающем ортографическом проектировании этот радиус будет:

$$\rho = 2^{n-1}R \sin(Z/2^{n-1}).$$

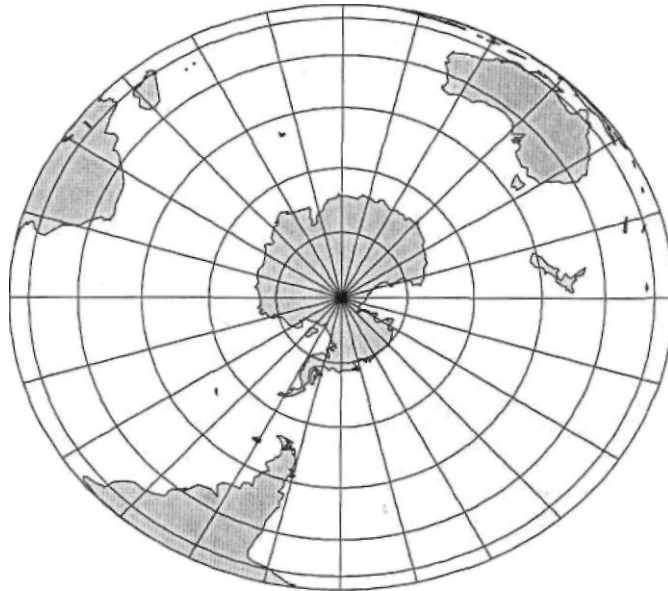


Рис. 16. *а*. Нормальная ортографическая проекция трехосного эллипсоида, на который предварительно гномонически спроектирован земной шар

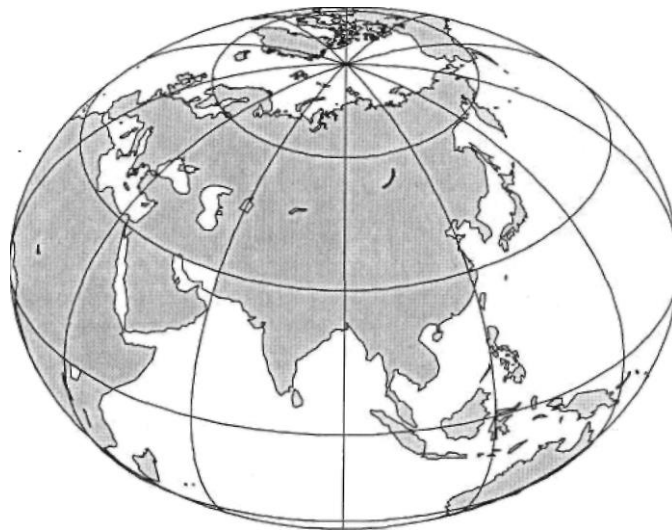


Рис. 16. *б*. Косая ортографическая проекция трехосного эллипсоида, на который предварительно гномонически спроектирован земной шар; широта условного полюса 50° , долгота 90°

Многократное перспективное проектирование позволяет получать проекции, которые не удавалось строить однократным проектированием шара на плоскость. Например, приняв $n = 2$, получаем радиус равновеликой азимутальной проекции

$$\rho = 2R\sin(Z/2).$$

Далее, полагая n достаточно большим (например, $n > 7$), после разложения синуса малого угла в ряд, получаем радиус равнопромежуточной по меридианам азимутальной проекции

$$\rho = RZ.$$

Как уже подчеркивалось, получить эти проекции однократным перспективным проектированием не представляется возможным.

На рис. 16.*а* и 16.*б* приведены примеры перспективных проекций, полученных при предварительном начального меридиана и экватора шара и эллипсоида совмещены. Радиус шара равен полярной полуоси эллипсоида и составляет 0,75 и 0,80 части от двух его экваториальных

полуосей. Максимальная полуось эллипсоида лежит на пересечении плоскостей экватора и Гринвичского меридиана. Шар на эллипсоид спроектирован гномонически (из центра), а эллипсоид на плоскость — ортографически (из бесконечности).

4.6. Перспективное проектирование шара на цилиндр

Перспективные цилиндрические проекции получают проектированием поверхности шара на боковую поверхность цилиндра. Методику их построения можно проследить по рис. 13, представив себе на нем вместо плоскости проектирования образующую цилиндра. Из центра проектирования изображение с текущего меридиана в нормальных проекциях или с вертикала в косых и поперечных проекциях переносится на эту образующую цилиндра. Последовательным перемещением центра проектирования по кругу вокруг цилиндра на цилиндр переносится вся поверхность шара. Цилиндр может быть секущим или касательным. Касается он экватора или условного экватора шара. Поэтому, чтобы приспособить рис. 13 к цилиндрическим проекциям, зенитные расстояния Z следует заменить широтами φ или в общем случае условными широтами φ' .

Заменяя в формуле для радиусов параллелей (альмукунтаратов) перспективных азимутальных проекций зенитные расстояния Z на условные широты φ' , получаем формулу для абсцисс перспективных цилиндрических проекций. Ординаты точек равны произведению радиуса цилиндра на их долготы или условные долготы λ' . Имеем:

$$x = \frac{d + \cos\varphi'_k}{d + \cos\varphi'} R \sin\varphi'; \quad y = R\lambda' \cos\varphi'_k.$$

Широта φ'_k определяет положение секущего цилиндра. При $\varphi'_k = 0$ цилиндр касается условного экватора (или экватора).

Проекция данной ориентировки отличается только значениями абсцисс. Вид проекции определяется удалением d центра проектирования от центра шара. Перспективные цилиндрические проекции также бывают с негативными (d) и позитивными ($-d$) изображениями. Рассмотрим основные случаи проектирования.

Гномоническую перспективно-цилиндрическую проекцию получают проектированием на цилиндр поверхности шара из его центра (рис. 17). Абсциссы точек на касательном цилиндре равны

$$x = Rtg\varphi.$$

При широтах $\pm\pi/2$ проектирующие лучи из центра шара идут параллельно образующим цилиндра. Поэтому в нормальной проекции географические полюса не изображаются. Соответственно в косых и поперечных проекциях не изображаются условные полюса. В гномонической проекции искажения очень велики.

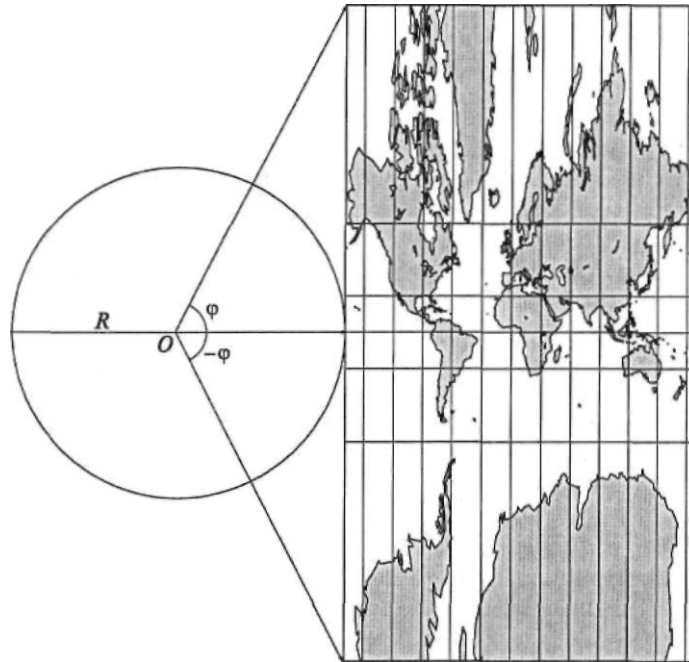


Рис. 17. Построение нормальной гномонической перспективно-цилиндрической проекции

Стереографическую перспективно-цилиндрическую проекцию получают, расположив центр проектирования на шаре в точке, диаметрально противоположной той образующей цилиндра, на которую в данный момент проектируется изображение. Если проектирование нормальное и цилиндр касается экватора, то будет получена проекция Брауна (рис. 18). Она предложена в 1868 г. немецким физиком К. Брауном. По характеру искажений проекция произвольная. Абсциссы ее точек вычисляют по формуле

$$x = 2R \operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Если вместо касательного использовать секущий цилиндр, то искажения в проекции будут распределены более равномерно. Поэтому кроме проекции Брауна известны и другие проекции. Проекция Голла (J.Gall, 1855) построена на цилиндре, секущем шар по параллелям $\pm 45^\circ$. Проекция БСАМ (Большой советский атлас мира) использует цилиндр с параллелями сечения $\pm 30^\circ$.

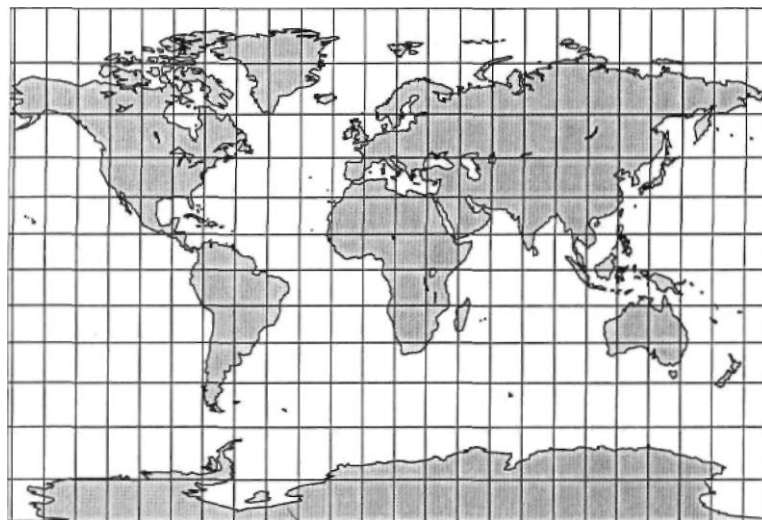


Рис. 18. Нормальная перспективная стереографическая цилиндрическая проекция Брауна



Рис. 19. Косая стереографическая перспективно-цилиндрическая проекция М.Д.Соловьева

На рис. 19 представлена косая перспективно-цилиндрическая проекция М.Д.Соловьева. Она получена перспективным проектированием земной поверхности на цилиндр, секущий шар по альмукантарату 45° условной широты. Средний меридиан на карте имеет долготу 100° . Координаты условного полюса $\varphi_0 = 75^\circ$, $\lambda_0 = -80^\circ$. Условный полюс расположен не на среднем меридиане, как это обычно бывает, а на его продолжении за географическим полюсом, т.е. за рамкой карты. Из-за этого Южный полюс в проекции изображается не в одной, а в двух точках. Проекция применялась для школьных карт в СССР. Она ограничивалась с юга примерно параллелью 30° , с запада — Гринвичским меридианом, а с востока — меридианом долготы -160° . Это придавало изображению Земли куполообразный вид с расположением Северного полюса на вершине этого купола.

Ортографическую цилиндрическую проекцию получают перемещением центра проектирования в бесконечность. Проектирование идет параллельными лучами. Для касательного цилиндра абсциссы вычисляют по формуле (рис. 20):

$$x = R \sin \varphi.$$

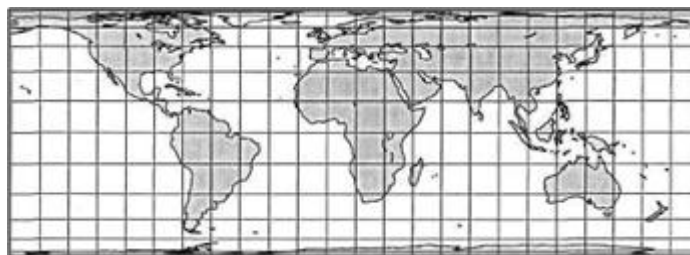


Рис. 20. Нормальная перспективная ортографическая равновеликая цилиндрическая проекция — изоцилиндрическая

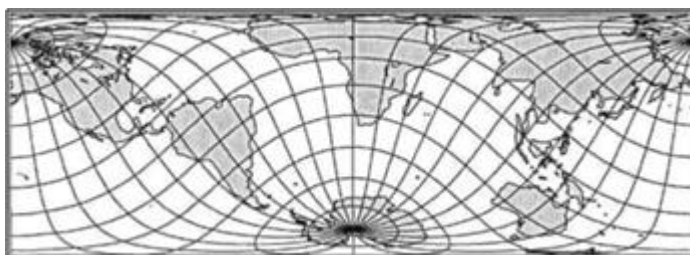


Рис. 21. Косая ($\varphi_0 = 50^\circ$) перспективная ортографическая равновеликая цилиндрическая проекция

Поверхность шара на карте отображается в прямоугольнике, высота которого равна

$2R$, а основание — $2\pi R$. Площадь прямоугольника составляет $4\pi R^2$, т. е. равна площади сферы. Как видим, получена равновеликая проекция. Ее называют *изоцилиндрической*. Равновеликость проекции следует из теоремы Архимеда о том, что поверхность шарового пояса равна поверхности цилиндра, имеющего ту же высоту, и основание, равное большому кругу шара. При косом и поперечном проектировании сферические координаты φ , λ пересчитывают в условные широты и долготы φ' , λ' . Дальнейшее проектирование выполняется так же, как для случая нормальных проекций, за тем исключением, что вместо условных меридианов и параллелей рисуется картографическая сетка географических меридианов и параллелей (рис. 21).

Перспективные цилиндрические и азимутальные проекции, полученные с одинаковыми удалениями центров проектирования от центра шара, различны по характеру искажений. Так, при стереографическом проектировании цилиндрическая проекция, в отличие от азимутальной, не является равноугольной, а при ортографическом — азимутальная проекция, в отличие от цилиндрической, не является равновеликой.

4.7. Перспективное проектирование шара на конус

Перспективные конические проекции получают проектированием сферы на поверхность конуса. В отличие от перспективных цилиндрических и особенно перспективных азимутальных, применение перспективных конических проекций весьма ограничено. Их свойства изучены менее других. Они могут быть построены в любой ориентировке — нормальной, косой или поперечной. Центр проектирования также может располагаться как в центре шара, так и на любых расстояниях от него. Конус может касаться шара или рассекать его по двум главным параллелям (в косой и поперечной ориентировке — по условным главным параллелям). Проектирование может быть как с позитивным изображением, так и с негативным. Свойства проекции во многом зависят от того, где находится центр проектирования, где расположен условный полюс и как выбраны главные параллели.

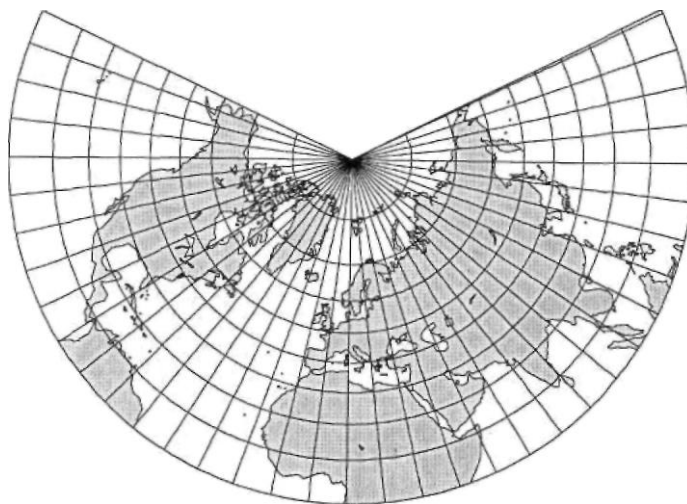


Рис. 22. Нормальная гномоническая перспективно-коническая проекция. Секунций конус. Широты главных параллелей 20 и 60°. Долгота среднего меридиана 11°

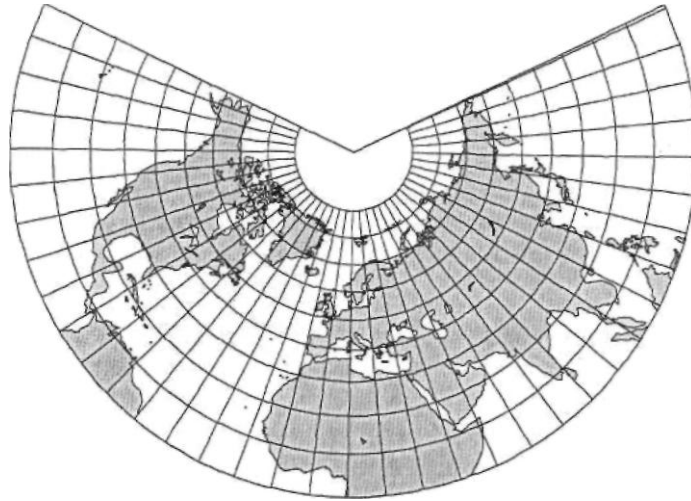


Рис. 23. Нормальная стереографическая перспективно-коническая проекция. Секущий конус. Широты главных параллелей 20° и 60° . Долгота среднего меридиана 11°

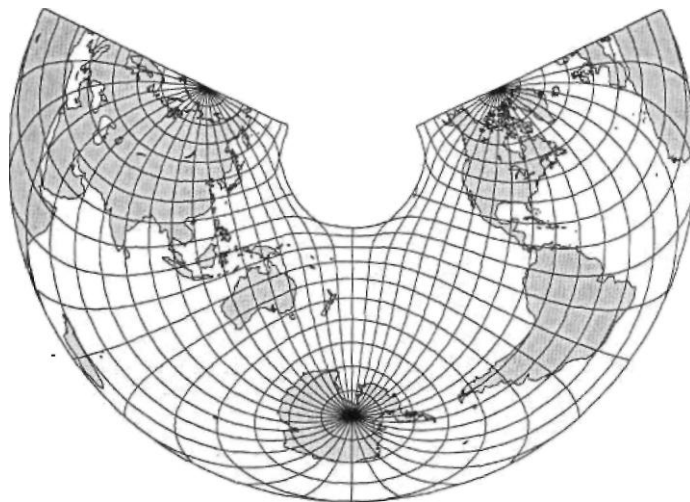


Рис. 24. Косая с негативным изображением перспективно-коническая проекция. Секущий конус. Широты главных параллелей 30° и 50° . Широта условного полюса 20° . Долгота среднего меридиана 170° . Максимальное зенитное расстояние 150° . Удаление центра проектирования от центра шара составляет десять его радиусов

На рис. 22 и 23 даны примеры перспективных конических проекций в нормальной ориентировке, полученных проектированием земной поверхности на конус из центра шара и с поверхности шара. По аналогии с перспективными азимутальными и цилиндрическими проекциями назовем эти случаи соответственно гномоническим и стереографическим проектированием. На рис. 24 показан пример косо́й проекции при расположении центра проектирования на расстоянии десяти радиусов от центра шара. По характеру искажений проекции являются произвольными.

4.8. Анализ свойств картографических проекций

Прямые способы получения проекций предполагают, что вначале каким-то образом будут определены уравнения картографической проекции, а затем последует анализ ее свойств. С этой целью используется весьма удобный математический аппарат — частные производные от соответствующих функций и рассмотренные выше коэффициенты Гаусса. Дадим сводку общих формул по группам проекций, необходимых для вычисления коэффициентов Гаусса и анализа величин и характера искажений. Основные свойства проекции, ее класс можно указать

простым сравнением полученных формул с их общими вариантами.

Уравнения для проекций цилиндрической группы:

$$\begin{aligned}x &= x(B, L); \quad y = y(B, L); \\e &= x_B^2 + y_B^2; \quad g = x_L^2 + y_L^2; \\f &= x_B x_L + y_B y_L; \quad h = x_B y_L - y_B x_L;\end{aligned}$$

Уравнения для проекций конической и азимутальной групп:

$$\begin{aligned}x &= d - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \\e &= d_B^2 + \rho_B^2 + \rho^2 \delta_B^2 + 2d_B(\rho \delta_B \sin \delta - \rho_B \cos \delta); \\g &= \rho_L^2 + \rho^2 \delta_L^2; \\f &= \rho_L(\rho_B - d_B \cos \delta) + \rho \delta_L(\rho \delta_B - d_B \sin \delta); \\h &= \rho_L(\rho \delta_B - d_B \sin \delta) + \rho \delta_L(\rho_B - d_B \cos \delta);\end{aligned}$$

Задание проекций уравнениями параллелей и меридианов:

$$\begin{aligned}B &= B(x, y); \quad L = L(x, y); \\x_B &= h L_y; \quad y_B = -h L_x; \quad x_L = -h B_y; \quad y_L = h B_x; \\h &= 1/(B_x L_y - B_y L_x).\end{aligned}$$

В табл. 5 дана сводка общих уравнений картографических проекций с указанием того, какие частные производные в данном конкретном случае равны нулю.

Таблица 5. Сводка общих уравнений картографических проекций

Классы	Группы классов проекций		
	А	К	Ц
Параллели постоянной кривизны			
Базовый	$d = const; \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(L);$ $d_B = \rho_L = \delta_B = 0.$		$x = x(B);$ $y = y(L);$ $x_L = y_B = 0.$
Псевдоазимутальный, псевдоконический, псевдоцилиндрический	$d = const; \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(B, L);$ $d_B = \rho_L = 0.$		$x = x(B);$ $y = y(B, L);$ $x_L = 0.$
Полиазимутальный, поликонический, псевдоцилиндрический	$d = d(B); \quad \rho = \rho(B); \quad \delta = \delta(B, L);$ $\rho_L = 0.$		
Параллели переменной кривизны			
Полиазимутальный, поликонический, полицилиндрический	$d = d(B); \quad \rho = \rho(B, L);$ $\delta = \delta(B, L);$		$x = x(B, L);$ $y = y(B, L);$

В случае использования шара радиус кривизны меридиана M заменяется радиусом шара R ; радиусы параллелей r также вычисляются для шара. При этом в производных индексы B меняются на индексы φ , а индексы L — на λ . В случае перехода от сферических географических координат φ и λ к сферическим полярным координатам Z и a следует полагать $\varphi_Z = \lambda_a = -1$. Иначе, чтобы получить производные функций по зенитному расстоянию Z или азимуту a , нужно соответствующие производные по широте φ или долготе λ умножить на коэффициент -1 . Например, $\rho_z = -\rho_\varphi$.

Не следует забывать о том, что после перехода к полярным координатам (Z, a) анализируется уже не картографическая сетка меридианов и параллелей, а сетка вертикалов и альмукантаратов (условных меридианов и параллелей). Обычно частные масштабы длин по вертикалам обозначают через μ_1 а по альмукантаратам — через μ_2 .

Поэтому после перехода к полярным координатам в приведенных ранее формулах надо заменить обозначение частных масштабов m на μ_1 , а n — на μ_2 .

Проиллюстрируем применение расчетных формул несколькими простыми примерами.

Пример 1. Изучить свойства проекции, заданной уравнениями

$$x = \int_0^B M dB; \quad y = CL;$$

Проекция задана уравнениями в прямоугольной системе координат. Обратим внимание, что абсциссы являются только функцией широты, а ординаты — только функцией долготы. Кроме того, в формулах фигурирует величина M — радиус кривизны меридиана эллипсоида вращения. Поэтому из табл. 5 следует, что это нормальная цилиндрическая проекция эллипсоида вращения. Для производных, коэффициентов Гаусса и показателей искажений получаем

$$\begin{aligned} x_B = M; \quad y_L = C; \quad e = M^2; \quad g = C^2; \quad f = 0; \\ m = 1; \quad n = \frac{C}{r}; \quad p = n; \\ \varepsilon = 0; \quad tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-n}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

На основе этих формул можно заключить, что это равнопромежуточная по меридианам проекция. Искажения на параллелях будут зависеть от выбора параметра C . При $C = r_0$ (r_0 — радиус некоторой параллели) частный масштаб длин на этой параллели будет $n_0 = 1$.

Пример 2. Определить показатели искажений нормальной конической проекции эллипсоида, заданной полярными уравнениями

$$\delta = \alpha L; \quad \rho^2 = \frac{2}{\alpha} \left(C - \int_0^B Mr dB \right).$$

Получаем

$$\begin{aligned} \rho_B = -\frac{Mr}{\alpha\rho}; \quad \delta_L = \alpha; \\ \sqrt{e} = \frac{Mr}{\alpha\rho}; \quad \sqrt{g} = \alpha\rho; \quad f = 0; \quad h = Mr; \\ n = \frac{\alpha\rho}{r}; \quad m = \frac{l}{n}; \quad p = 1; \\ \varepsilon = 0; \quad tg(\omega/2) = \frac{n^2 - 1}{2n}. \end{aligned}$$

Проекция равновеликая, так как частный масштаб площади $p = 1$. Искажения длин и углов зависят от выбора параметров α и C . В частности, можно принять $\alpha = r_0/\rho_0$ т.е. равным отношению радиусов на эллипсоиде и на карте той параллели, для которой $n = 1$.

5. Изыскание проекций с заданными свойствами

5.1. Получение равноугольных проекций

Равноугольные проекции – такие проекции, в которых:

- частный масштаб длин бесконечно малого отрезка не зависит от его азимута;
- сохраняется подобие бесконечно – малых фигур в плоскости и на отображаемой поверхности;
- нет искажений углов.

Все три характеристики взаимосвязаны, и каждая из них имеет следствием две другие.

Построение равноугольного изображения поверхности на плоскости равнозначно установлению на этой поверхности изометрических координат. Вкратце ознакомимся с ними. Начнем с эллипсоида вращения. Для элементарного отрезка на эллипсоиде вращения имеем:

$$dD^2 = (MdB)^2 + (rdL)^2;$$

Радиус меридиана не равен радиусу параллели ($M \neq r$). Поэтому при равенстве дифференциалов $dB = dL$ изменения отрезков меридиана не равны изменениям отрезков параллели ($MdB \neq rdL$). Указанное обстоятельство означает, что на эллипсоиде геодезические координаты (широта B и долгота L) не обладают *изометрией*. Такое же положение с широтами φ и долготами λ на шаре. Поэтому географические широты и долготы, как координаты, неудобны для построения равноугольных проекций.

Положение можно исправить, если ввести такие координаты, при равенстве дифференциалов которых элементарные дуги координатных линий на эллипсоиде между собой также были бы равны. Для этого вышеприведенное выражение для элементарного отрезка на эллипсоиде перепишем следующим образом:

$$dD^2 = r^2(dq^2 + dL^2);$$
$$dq = (M/r)dB.$$

Теперь дифференциалам $dq = dL$ соответствуют отрезки одинаковой длины на координатных линиях эллипсоида ($rdq = rdL$). Взяв интегралы от dq и dL , получаем выражения для изометрических координат:

$$q = \int_0^B \frac{M}{r} dB; \quad l = \int_{L_0}^L dL = L - L_0.$$

Изометрическими координатами эллипсоида вращения являются *изометрическая широта q* и *геодезическая долгота l* . При этом координата l отсчитывается в радианах от некоторого осевого меридиана долготы L_0 .

После интегрирования для изометрической широты получают:

$$q = \ln \sqrt{\left(\frac{l + \sin B}{l - \sin B}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^e},$$

где e — первый эксцентриситет эллипсоида вращения. Геодезическая широта B вычисляется последовательными приближениями по формуле

$$B = 2 \operatorname{arctg} \left[e^q \sqrt{\frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B}} \right] - \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления широты B могут также использоваться формулы

$$B = \varphi + k_2 \sin 2\varphi + k_4 \sin 4\varphi + \dots; \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg}(e^q) - \frac{\pi}{2};$$

$$k_2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \dots; \quad k_4 = \frac{7}{48} e^4 + \dots;$$

В уравнениях равноугольных проекций часто применяется функция U , связанная с изометрической широтой q следующим образом:

$$q = \ln U; \quad U = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left[\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right]^{\frac{e}{2}}.$$

Для сферы эксцентриситет $e = 0$. Поэтому для сферы, заменив эллипсоидальную широту B сферической широтой φ или зенитным расстоянием Z , получают

$$U = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad \text{или} \quad U = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{Z}{2} \right)}.$$

Условие равноугольности в картографических проекциях обеспечивается применением аналитических функций комплексного переменного, переменными в которых являются изометрические координаты:

$$x + iy = f(q + il); \quad i = \sqrt{-1}.$$

Как обычно, ось абсцисс ориентирована на север по осевому меридиану, а ось ординат — на восток.

Покажем, что действительно эта функция комплексного переменного осуществляет равноугольное отображение. Для этого потребуется найти соответствующие частные производные и вычислить коэффициенты Гаусса. Аналитические функции комплексного переменного удовлетворяют следующим условиям дифференцируемости:

$$x_q = y_l; \quad y_q = -x_l.$$

Учитывая взаимосвязь dq и dB , получают

$$x_q = x_B \frac{r}{M}; \quad y_q = y_B \frac{r}{M}.$$

Отсюда и из условий дифференцируемости следует, что

$$x_l = -y_B \frac{r}{M}; \quad y_l = x_B \frac{r}{M}.$$

Этими выражениями устанавливается взаимосвязь между частными производными прямоугольных координат (x, y) по геодезическим координатам (B, l) . Используя эти производные для вычисления коэффициентов Гаусса, получают

$$\frac{\sqrt{e}}{M} = \frac{\sqrt{g}}{r}; \quad f = 0.$$

Из данных выражений следуют все признаки равноугольности. Первое уравнение обозначает равенство частных масштабов длин по меридиану и параллели, а второе — ортогональность картографической сетки. Как известно, при ортогональной сетке частные масштабы длин по меридиану и параллели являются экстремальными. Следовательно, наименьший и наибольший масштабы равны. Иначе, величина масштаба не зависит от азимута направления. При равенстве экстремальных масштабов длин искажения форм бесконечно малых фигур и искажения углов равны нулю. Упрощается и формула частного масштаба площади p . Сказанное можно выразить следующими уравнениями:

$$\varepsilon = 0; \quad m = n = a = b;$$

$$v_k = \frac{a}{b} - 1 = 0; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = 0; \quad p = n^2.$$

Находим значения частного масштаба n . Для проекций с параллелями постоянной кривизны они указаны ниже:

цилиндрическая $n = C/r;$

азимутальная $n = \rho/r;$

коническая $n = \alpha(\rho/r);$

поликоническая $n = \delta_L(\rho/r);$

Рассмотрим примеры функций комплексного переменного, определяющие уравнения известных равноугольных проекций.

Линейная функция

$$x + iy = C(q + il).$$

Левая и правая части этой функции связаны коэффициентом пропорциональности C . После деления действительных и мнимых частей получают уравнения нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора:

$$x = Cq; \quad y = C(L - L_0).$$

На экваторе абсцисса $x = 0$, а при максимально возможной разности долгот $\pm\pi$ ордината $y = \pm\pi C$. Следовательно, длина экватора в проекции составляет $2\pi C$. Отсюда ясен геометрический смысл коэффициента C — это радиус цилиндра, на который проектируется отображаемая поверхность эллипсоида, в частном случае шара. Если цилиндр касается экватора, то коэффициент C равен экваториальному радиусу эллипсоида или шара. Если цилиндр является секущим, то коэффициент C равен радиусу главной параллели.

Показательная функция

$$x + iy = C e^{-\alpha[q - i(\pi - l)]}.$$

Разделяя действительные и мнимые части, получаем уравнения нормальной равноугольной конической проекции

$$\rho = C e^{-\alpha q} = \frac{C}{U^\alpha}; \quad \delta = \alpha(L - L_0);$$

$$x = -\rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta, \quad \text{где } \alpha \text{ и } C \text{ — параметры.}$$

Параметр α — это коэффициент пропорциональности, связывающий угол между прямолинейными меридианами на карте с их разностью долгот ($0 < \alpha < 1$). Как следует из приведенных формул, при $q = 0$ параметр C есть радиус дуги окружности, изображающей на плоскости экватор.

Приняв $\alpha = 1$, получим формулы нормальной равноугольной (стереографической) азимутальной проекции.

Степенные ряды

$$x + iy = \sum_{k=0}^N a_k (il)^k.$$

Для получения новых равноугольных проекций функцию комплексного переменного представляют в виде степенного ряда, где величины a_k зависят от широты отображаемой точки. Например, такого вида ряды используют при получении поперечных цилиндрических проекций Гаусса—Крюгера (осевой меридиан проектируется без искажений) и UTM (частный масштаб длин на осевом меридиане $m_0 = 0,9996$).

В более общем случае применяется выражение

$$x + iy = \sum_{k=0}^N (a_k + ib_k)(x' + iy')^k,$$

где x', y' либо равны изометрическим координатам q, l , либо это координаты некоторой базовой (исходной) проекции. Базовой может быть, например, азимутальная стереографическая проекция.

Чтобы упростить вычисления, связанные с возведением в степень комплексных чисел, эту запись преобразуют. Разделив действительную и мнимую части, их выражают через так называемые гармонические полиномы P, Q :

$$x = \sum_{k=0}^N (a_k P_k - b_k Q_k); \quad y = \sum_{k=0}^N (a_k Q_k + b_k P_k).$$

Величины P, Q вычисляют по удобным рекуррентным формулам:

$$P_k = P_{k-1}P_1 - Q_{k-1}Q_1; \quad Q_k = P_{k-1}Q_1 + Q_{k-1}P_1;$$

$$P_0 = 1; \quad Q_0 = 0; \quad P_1 = x'; \quad Q_1 = y';$$

В некоторых задачах прямоугольные координаты предпочитают выражать через полярные координаты (дирекционный угол α и расстояние ρ). В этом случае гармонические полиномы представляют в следующей форме:

$$P_k = \rho^k \cos(k\alpha); \quad Q_k = \rho^k \sin(k\alpha);$$

Вид проекции зависит от степени полинома и его коэффициентов a_k и b_k .

Приведенные уравнения имеют большое значение для конструирования равноугольных картографических проекций.

5.2. Наилучшие равноугольные проекции

Важной является теорема о равноугольных проекциях, высказанная в 1853 г. П.Л.Чебышевым и доказанная в 1894 г. Д.А. Граве. Теорема гласит:

Наилучшая равноугольная проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину.

Построенные в соответствии с этой теоремой проекции называют **проекциями Чебышева**. В таких проекциях частный масштаб длин наименее уклоняется от 1. По контуру территории идет изокола с наибольшим значением частного масштаба длин. В центре территории частный масштаб длин имеет минимальное значение.

В равноугольных проекциях частный масштаб площади $p = m^2$, а его логарифм равен $\ln p = 2 \ln m$. Поэтому если масштаб m наименее уклоняется от единицы, то значения $\ln m$ и $\ln p$ наименее уклоняются от нуля. Это означает, что в проекциях Чебышева искажения площадей сведены к минимуму. Другими словами, среди равноугольных проекций проекции Чебышева наиболее близки к равновеликим проекциям.

Теорема П.Л.Чебышева о наилучших равноугольных проекциях имеет важное теоретическое и практическое значение. Этой теоремой руководствуются при выборе проекций. Как известно, в азимутальных проекциях изоколы являются окружностями и совпадают с параллелями, или альмукантаратами. Поэтому в соответствии с теоремой Чебышева азимутальные проекции наиболее приспособлены для отображения округлых территорий. В нормальных конических и цилиндрических проекциях изоколы также совпадают с параллелями. Поэтому они наиболее выгодны для территорий, вытянутых по параллелям (альмукантаратам).

Разработанные численные методы получения проекций Чебышева сводятся к решению двух задач:

1) нахождению показателей искажений карты по заданному значению частного масштаба длин на контуре области;

2) определению прямоугольных координат проекции по значениям частных масштабов длин.

Решения громоздки и тем труднее, чем сложнее контур территории. Однако не столь уж важно учитывать мельчайшие извилины контуров территорий. Достаточно их обобщать, заменяя плавными, например овальными, приспособленными к контуру территории, изоколами. В течение XIX—XX вв. разработан ряд способов построения равноугольных проекций с *приспосабливаемой* к контуру территории изоколой.

К приспособляемым относится одна из основных равноугольных проекций — проекция Лагранжа. Ее можно использовать для картографирования любых по площади территорий, кроме полярных регионов. На полюсах проекция Лагранжа теряет свойства равноугольности. Для полярных регионов применяется нормальная стереографическая проекция.

В равноугольной круговой проекции Лагранжа вся земная поверхность изображается в круге, ограниченном двумя меридианами с долготами $\lambda = \pm 180^\circ$, отсчитываемыми от среднего прямолинейного меридиана. Уравнения проекции, по которым вычисляются координаты точек на плоскости, имеют вид

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \lambda' \cos \delta}; \quad y = \frac{k \sin \lambda' \cos \delta}{1 + \cos \lambda' \cos \delta};$$

$$\lambda' = \alpha \lambda; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2} \right) = \beta U^\alpha.$$

В данных формулах ось X направлена по среднему прямолинейному меридиану на север, а ось Y — по прямолинейной параллели на восток. Уравнения содержат три параметра — α , β и k . От выбора значений этих параметров зависят свойства и вид проекции. Рассмотрим алгоритм построения приспособляемых проекций Лагранжа.

На какой-нибудь карте, не слишком искажающей очертания контуров, намечается центральная точка $O(\varphi_0, \lambda_0)$. Из этой точки как из центра строится эллиптическая изокола с полуосями a и b (рис. 25). Полуось a направлена по меридиану, полуось b — по параллели.

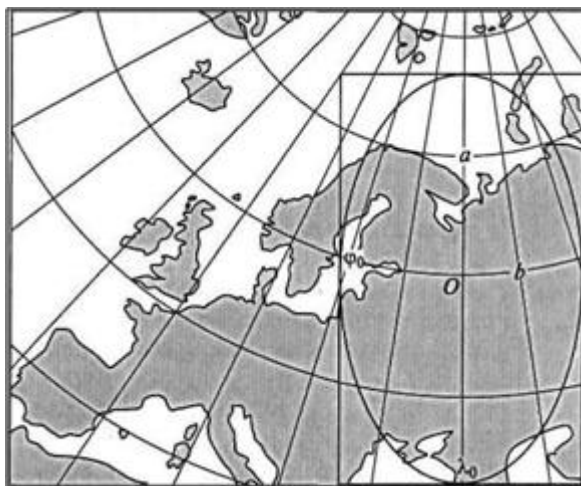


Рис. 25. Построение наилучшей по Чебышеву равноугольной проекции Лагранжа; картографируемую территорию ограничивает эллиптическая изокола с центром в точке $O(\varphi_0, \lambda_0)$ и полуосями a и b

На карте оцениваются значения полуосей в градусной мере: a — по широте; b — по долготе. Например, $a = 17^\circ$; $b = 21^\circ$. Вычисляется параметр α :

$$\alpha^2 = 1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \cos^2 \varphi_0; \quad n = \frac{b}{a}.$$

Этот параметр очень важен. Параметр α определяется полуосями изоколы, ограничивающей контур. Форма изоколы зависит от значения параметра:

- $\alpha > 1$ — изоколы — овалы, вытянутые вдоль меридианов;
- $\alpha = 1$ — изоколы — окружности;
- $\alpha < 1$ — изоколы — овалы, вытянутые вдоль параллелей;
- $\alpha = 0$ — изоколы — параллельные экватору прямые.

Параметр β находится из уравнения

$$\beta = \frac{\alpha + \sin\varphi_0}{\alpha - \sin\varphi_0} U_0^{-\alpha}.$$

Параметр β определяет широту той единственной параллели, которая в проекции Лагранжа изобразится прямой. Остальные параллели — дуги окружностей. Для этой параллели $\delta = 0$. Ее широта $\delta_{\text{пр}}$ может быть определена из формулы

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_{\text{пр}}}{2}\right) = \sqrt[\alpha]{\beta}.$$

Если $\beta = 1$, то прямой линией будет изображен экватор.

Параметр k — радиус крайнего кругового меридиана, следовательно, он равен половине длины среднего меридиана или половине расстояния между полюсами в проекции. Он вычисляется по формулам

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec\delta_0); \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_0}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\varphi_0.$$

Для вычисления параметра k надо знать m_0 — масштаб в центральной точке проекции $O(\varphi_0, \lambda_0)$. Его можно принять равным 1 или вычислить по приближенной формуле, предложенной В. В. Каврайским. В этой формуле используется диаметр эллиптической граничащей изоколы, делящий пополам угол между ее осями. Выразив полуоси a и b эллипса в радианах, а упомянутый диаметр эллипса — через его радиус, получаем формулу

$$m_0 = 1 - \frac{a^2 b^2}{4(a^2 + b^2)}.$$

По этой методике рассчитаны проекции рис. 26, 27. На этих картах показаны также прямоугольники, в которые вписаны граничащие эллиптические изоколы. Как видно из рис. 26, окружности, имеющие одинаковые размеры на шаре, в проекции за пределами выделенного прямоугольника изображаются значительно преувеличенными. В самом прямоугольнике они изображены с наименьшими искажениями. На граничащей изоколе частный масштаб длин $m = 1,350$. Минимальные искажения в центральной точке проекции, где частный масштаб $m_0 = 0,675$.

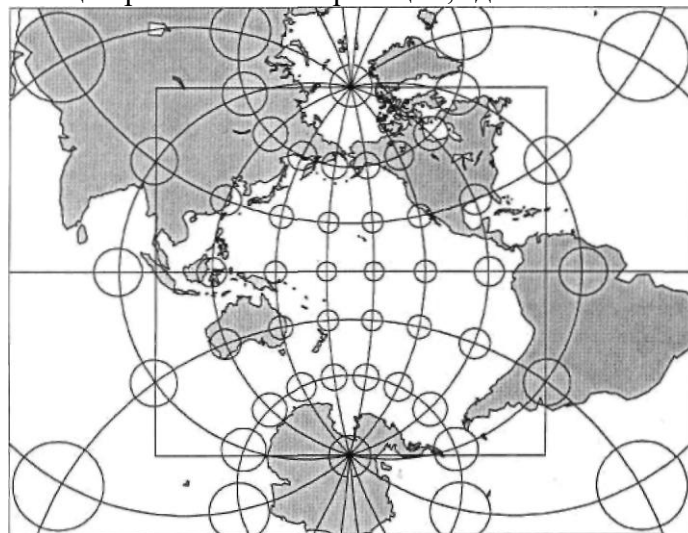


Рис. 26. Построение наилучшей по Чебышеву равноугольной проекции Лагранжа для карты Тихого океана — наименьшие искажения в выделенном прямоугольнике, полуоси изоколы $a = 90^\circ$, $b = 95^\circ$

Карта мира (см. рис. 27) построена при значениях полуосей изоколы $a = 90^\circ$, $b = 180^\circ$ и параметрах проекции Лагранжа $\alpha = 0,632$, $\beta = 1$, $m_0 = 0,507$. Более строгие расчеты показывают, что частный масштаб длин в центральной точке должен был быть больше на 10 %. Поэтому расчеты, выполняемые по описанной методике, следует рассматривать как предварительные. Окончательные построения проекции выполняются после уточнения ее параметров.

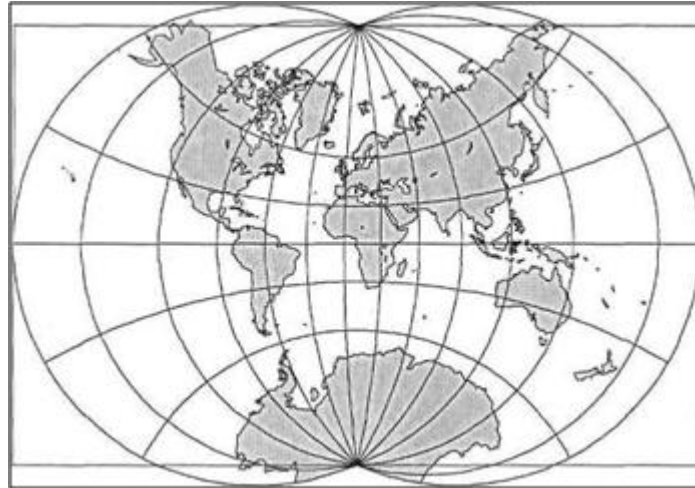


Рис. 27. Карта мира, построенная в приспособляемой равноугольной проекции Лагранжа

5.3. Получение равновеликих проекций

Основное условие получения равновеликих проекций есть равенство единице частного масштаба площадей: $p = 1$. С учетом выражений для коэффициентов Гаусса это условие для эллипсоида вращения записывается в виде

$$h = H; \quad x_B y_L - y_B x_L = Mr.$$

Идентичное условие для шара имеет вид

$$x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = R^2 \cos \varphi.$$

Однако для однозначного определения уравнений проекции основного условия $p = 1$ недостаточно, и его следует дополнять другими.

В табл. 6 выделены основные и дополнительные условия и по ним определены уравнения для наиболее употребительных проекций эллипсоида вращения. Их упрощением нетрудно получить соответствующие формулы для шара. Приняты следующие обозначения: P — площадь поверхности эллипсоида, ограниченная экватором, параллелью широты B и двумя меридианами с разностью долгот в 1 радиан; S — длина дуги меридиана от экватора до параллели широты B ; C — постоянная интегрирования (параметр проекции, определяемый из дополнительных условий). Предполагается, что координаты в азимутальных и конических группах проекций вычисляются по формулам:

$$x = d - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

Таблица 6. Исходные условия и общие формулы равновеликих проекций

Классы	Группы картографических проекций		
	A ($\alpha = 1$)	K ($0 < \alpha < 1$)	Ц ($\alpha = 0$)
Базовый	$\varepsilon = 0; \quad \alpha \rho \rho_B = -Mr;$ $\delta = \alpha(L - L_0); \quad \rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - P);$ $n = \frac{\alpha \rho}{r}; \quad m = \frac{1}{n}; \quad p = 1;$ $tg\left(\frac{\pi + \omega}{4}\right) = \alpha;$		$\varepsilon = 0; \quad Cx_\varphi = R^2 \cos\varphi;$ $x = \frac{R^2}{C} \sin\varphi; \quad y = C(L - L_0);$ $n = \frac{C}{r}; \quad m = \frac{1}{n}; \quad p = 1;$ $tg\left(\frac{\pi + \omega}{4}\right) = \alpha;$
Псевдоазимутальный, псевдоконический, псевдоцилиндрический	$\rho \rho_B \delta_L = -Mr; \quad \rho \delta_L = r;$ $\delta = \frac{r}{\rho}(L - L_0); \quad \rho = C - S;$ $n = 1; \quad m = \frac{1}{\cos\varepsilon}; \quad p = 1;$ $tg\varepsilon = (L - L_0)\left(\sin B - \frac{r}{\rho}\right);$ $tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}tg\varepsilon;$		$x_\varphi y_\lambda = R^2 \cos\varphi;$ $x = \int_0^\varphi x_\varphi d\varphi;$ $y = \frac{R^2 \cos\varphi}{x_\varphi}(\lambda - \lambda_0);$ $n = \frac{y_\lambda}{r}; \quad m = \frac{1}{n \cos\varepsilon};$ $p = 1; \quad tg\varepsilon = -\frac{y_\varphi}{x_\varphi};$ $tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2};$
Полиазимутальный, поликонический, псевдоцилиндрический	$\rho d_B \delta_L \cos\delta - \rho \rho_B \delta_L = Mr;$ $d = d(B); \quad \rho = \rho(B);$ $\delta = -\frac{Mr(L - L_0)}{\rho \rho_B} + \frac{d_B \sin\delta}{\rho_B};$ $tg\varepsilon = \frac{d_B \sin\delta + \rho \delta_B}{d_B \cos\delta + \rho_B};$ $n = \frac{\rho \delta_L}{r}; \quad m = \frac{1}{n \cos\varepsilon}; \quad p = 1;$ $tg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 2};$		

Ортогональные равновеликие проекции.

Дополнительное условие получения равновеликих проекций есть требование ортогональности картографической сетки:

$$\varepsilon = 0;$$

Значительный вклад в исследования равновеликих ортогональных проекций внес Л. Эйлер. В честь ученого такие проекции иногда называют *эйлеровскими*. К ортогональным относятся азимутальные, конические и цилиндрические проекции. Поэтому для получения их уравнений условие $p = 1$ является достаточным.

В азимутальных проекциях ($\alpha = 1$) может быть использована как касательная, так и секущая плоскости. В нормальных проекциях сечение будет происходить по некоторой параллели широты B_k . В этом случае масштаб площади хотя и постоянен, но не равен 1. Значения частных масштабов ρ , m и n , вычисленные по формулам табл. 6, должны быть изменены умножением на коэффициент

$$k = \frac{r_k}{\rho_k}$$

После умножения на коэффициент k масштаб по параллели сечения станет равным главному масштабу, а частный масштаб площади будет $p = k^2$.

Псевдоазимутальные и псевдоконические проекции. Для их нахождения обычно ставят два условия, позволяющие сохранить без искажений как размеры площадей территорий, так и длины параллелей. Средний меридиан также сохраняет свою длину ($m_0 = 1$). Этими условиями являются следующие:

$$p = 1, \text{ и } n = 1.$$

Псевдоцилиндрические проекции. Их обычно строят для шара. Для этих проекций условие равновеликости принимает вид

$$x_\varphi y_\lambda = R^2 \cos \varphi.$$

Уравнения проекции получают, интегрируя выражение

$$y_\lambda = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi}.$$

Вид равновеликой псевдоцилиндрической проекции зависит от выбора производной абсцисс по широте. Например, пусть

$$x_\varphi = R.$$

Отсюда следуют уравнения:

$$\begin{aligned} x &= R\varphi; \quad y = \lambda R \cos \varphi; \\ n &= 1; \quad m = \frac{1}{\cos \varepsilon}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \lambda \sin \varphi. \end{aligned}$$

Это есть уравнения и характеристики равновеликой псевдоцилиндрической синусоидальной проекции Сансона.

Полиазимутальные и поликонические проекции. Для их определения, кроме условия равновеликости ($p = 1$), задают:

- 1) вид уравнения $d = d(B)$ положения центра параллелей на среднем меридиане;
- 2) вид уравнения $\rho = \rho(B)$ радиусов параллелей на карте.

143

Например, Т.И.Толстова в 1981 г. для равновеликой полиазимутальной проекции шара единичного радиуса приняла

$$d = \rho + \frac{\pi}{2} - Z; \quad \rho^2 = 2(1 - \cos Z).$$

Л. М. Бугаевский в 1986 г. для равновеликой поликонической проекции эллипсоида принял

$$d = N \operatorname{ctg} B + S; \quad \rho = N \operatorname{ctg} B.$$

По мнению Г. А. Мещерякова, для равновеликих проекций не существует аналога теоремы Чебышева. Тем не менее на практике при выборе равновеликих проекций поступают так же, как и при выборе равноугольных проекций: стремятся к тому, чтобы изоколы повторяли очертания отображаемых территорий.

5.4. Получение произвольных проекций

Прежде всего отметим равнопромежуточные проекции — те, в которых масштаб по одному из главных направлений есть величина постоянная. Практическое значение имеют ортогональные равнопромежуточные проекции эллипсоида вращения или шара. В них главные направления

ориентированы по меридианам и параллелям и экстремальными являются частные масштабы длин m и n . Важное практическое значение имеют равнопромежуточные азимутальные, конические и цилиндрические проекции.

Выводы теоремы Чебышева, доказанной для равноугольных проекций, распространены и на ортогональные равнопромежуточные вдоль меридианов проекции. При их выборе также стремятся к тому, чтобы крайняя изокола повторяла контур картографируемой области.

Равнопромежуточные по меридианам проекции. Практически эти проекции наиболее важны. Главное условие — требование $m = 1$. В табл. 7 дана сводка удовлетворяющих этому требованию формул для азимутальной, конической и цилиндрической проекций, где S — длина дуги меридиана от экватора до параллели широты B ; C — параметр проекции.

Возможны равнопромежуточные проекции с частным масштабом длин постоянным, но не равным 1. Выбор такого масштаба в азимутальных проекциях позволяет использовать секущую плоскость вместо касательной. Плоскость сечет поверхность по главной параллели широты B_k . В этом случае вычисленные по вышеуказанным формулам величины ρ , m , n при $a = 1$ следует умножить на коэффициент:

$$k = \frac{r_k}{\rho_k}$$

Таблица 7. Общие формулы главных равнопромежуточных проекций

Азимутальные ($\alpha = 1$)	Конические ($0 < \alpha < 1$)	Цилиндрические ($\alpha = 0$)
$\rho_B = -M; \quad \rho = C - S; \quad \delta = \alpha(L - L_0);$ $m = 1; \quad n = \frac{\alpha\rho}{r}; \quad p = n;$ $a = m; \quad b = n \text{ либо } a = n; \quad b = m;$ $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b};$		$x_D = M; \quad x = S; \quad y = C(L - L_0);$ $m = 1; \quad n = \frac{C}{r}; \quad p = n;$ $a = m; \quad b = n \text{ либо } a = n; \quad b = m;$ $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a - b}{a + b};$

Обобщенные равнопромежуточные по меридианам проекции. Н.А.Урмаев разработал обобщенную по меридианам коническую проекцию шара. В такой проекции по сравнению с обычными коническими проекциями уменьшены искажения и улучшено их распределение. Позже эта идея в работах Л. М. Бугаевского была распространена и на эллипсоид вращения. Решение обратной задачи математической картографии при условиях $E = 0$ и $m = 1$ привело к формулам:

$$x = -(C - S)\cos\delta; \quad y = (C - S)\sin\delta;$$

$$m = 1; \quad n = \frac{\alpha(V - S)l}{r}$$

Для симметричной относительно среднего меридиана сетки верны следующие формулы:

$$l = 1 + b_2L^2 + b_4L^4 + \dots;$$

$$\delta = L + \frac{b_2}{3}L^3 + \frac{b_4}{5}L^5 + \dots$$

Для асимметричной сетки формулы имеют вид:

$$l = 1 + b_1L + b_2L^2 + 3L^3 + \dots;$$

$$\delta = \alpha \left(L + \frac{b_1}{2}L^2 + \frac{b_2}{3}L^3 + \frac{b_3}{4}L^4 + \dots \right).$$

В формулах, приведенных выше: S — длина дуги меридиана, считаемая от экватора; L — долгота, вычисляемая от среднего меридиана; C , α , b_i — параметры проекции. Значения этих параметров получают, задав величины частных масштабов на параллелях или приняв на контуре

картографируемой области $n = \text{const}$.

Произвольные цилиндрические проекции с заданным распределением искажений. Такие проекции были предложены Н.А.Урмаевым. Рассмотрим случай шарообразной Земли радиусом R .

В нормальных цилиндрических проекциях, симметричных относительно экватора, масштаб по меридианам есть четная функция широты и может быть представлен многочленом вида:

$$m = \frac{x_\varphi}{R} = \frac{dx}{Rd\varphi} = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \dots$$

Неизвестные коэффициенты a_i могут быть вычислены, если на нескольких параллелях задать значения частных масштабов m . Н.А.Урмаев предложил принять эти масштабы на параллелях с широтами $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 80^\circ$, соответственно равными $m_1 = 1,0$; $m_2 = 1,5$; $m_3 = 2,0$. Отсюда три неизвестных коэффициента нетрудно найти или из решения трех линейных уравнений, или по интерполяционной формуле Ньютона с разделенными разностями. Выполнив интегрирование, получают формулу для абсцисс x ; значения ординат y вычисляют по общей для цилиндрических проекций формуле. Уравнения проекции принимают вид:

$$x = R \left(a_0\varphi + \frac{a_2}{3}\varphi^3 + \frac{a_4}{5}\varphi^5 \right); \quad y = R(\lambda - \lambda_0).$$

5.5. Оптимизация картографических проекций

В любой проекции имеется определенный набор достоинств и недостатков. Наилучшая проекция для одной карты может оказаться совсем непригодной для другой. Что следует понимать под наилучшей проекцией?

Наилучшая проекция — это картографическая проекция, которая оптимально удовлетворяет всей совокупности требований к ней в соответствии с конкретным назначением создаваемой карты.

Задачи поиска наилучших проекций выдвигались давно и решались многими известными учеными. Как уже отмечалось, в 1853 г. российский математик П.Л.Чебышев впервые поставил и решил такую задачу по отношению к наилучшим равноугольным проекциям. В 1861 г. британский астроном и геодезист Г.Эйри высказал концепцию о проекции с минимальными искажениями. Это проекция с наименьшими искажениями среди всех возможных проекций данного класса, удовлетворяющих одним и тем же критериям конструируемой карты.

Часто поиск наилучших проекций связан с искажениями в них. Однако не всегда, а в тематическом картографировании даже очень часто, искажения в проекции являются определяющими. Куда более важной становится, например, наглядность, способствующая выявлению специфических тематических особенностей карты. В этом отношении проекция может рассматриваться как важный элемент дизайна карты.

При поисках наилучшей проекции учитывается большая совокупность требований:

- географическое положение и размеры картографируемой области;
- специфические тематические требования, например, показ на одной карте полярных и экваториальных районов, передача сферичности, показ зональности в распределении картографируемого явления, изменения масштабов в определенных частях карты и др.;
- критерии дизайна — требования соотношений среднего меридиана и экватора, определенного расположения материков, форма показа полюсов и полярных регионов, соблюдение соотношений кривизны параллелей и меридианов и др.;

• способы использования карты — настенные, настольные, походные, электронные и др. Большое значение имеют традиции, сложившиеся в конкретной сфере пользователей и обусловившие их способность воспринимать содержание карты только в том случае, если она построена в определенных проекциях;

- требования к характеру, величинам и распределению искажений.

Большинство требований не поддается формализации. Поэтому наилучшую проекцию ищут итеративно и в интерактивном режиме.

Наиболее полно разработана та часть процедуры поиска наилучшей проекции, которая связана с искажениями. При этом выбирают определенный класс проекций, подбирают критерии искажений и ищут параметры проекции, наиболее полно удовлетворяющие выбранным критериям.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В 1977 г. В.Хойовец предложил следующий путь оптимизации искажений проекции. Уравнения выбранного класса проекций дополняются новыми уравнениями с неизвестными параметрами, которые и предстоит найти. В частности:

$$x = x(\varphi, \lambda) + \Delta x(\varphi, \lambda); \quad y = y(\varphi, \lambda) + \Delta y(\varphi, \lambda).$$

Правая часть каждого уравнения состоит из двух слагаемых: первое — известные исходные уравнения, второе — добавка, выбором параметров которой минимизируются искажения.

В качестве примера В.Хойовец рассмотрел уравнения равновеликой псевдоцилиндрической проекции Сансона, дополнив их полиномами, обеспечивающими симметричность сетки относительно среднего меридиана и экватора и определив коэффициенты полинома минимизацией вариационного критерия Эйри:

$$I = \frac{1}{2} \iint_F [(a - 1)^2 + (b - 1)^2] d\varphi d\lambda.$$

Минимизация этой функции выполнена на участке, ограниченном экватором, параллелью 80° с.ш., средним меридианом и меридианом, отстоящим от среднего по долготе на 180° . Учитывая симметрию проекции Сансона, можно сказать, что минимизация искажений выполнена для карты мира в полосе между параллелями $\pm 80^\circ$. В проекции Сансона значение $I = 0,9398$. В новой проекции $I = 0,2624$, т.е. в 3,5 раза меньше. Для новой проекции сферы единичным радиусом ($R = 1$) получены следующие уравнения:

$$x = 0,839660\varphi - 0,044600\varphi^3 + 0,040118\varphi\lambda^2;$$

$$y = \cos(\varphi)\lambda - 0,227240\lambda + 0,224915\varphi^2\lambda - 0,005347\lambda^3.$$

На рис. 28 приведен макет карты в этой проекции. Исследования показывают, что локальные круги на сфере, построенные в узлах сетки, в проекции изображаются почти без искажений. Они несколько деформированы только по краям карты. Круг больших размеров на сфере, охватывающий большую часть Азии и европейскую часть России, искажен значительно меньше, чем такой же круг в проекции Сансона: длины искажены в 2 раза меньше, а форма контуров — в 4 раза меньше. Однако появились и особенности, которые можно расценить, как недостатки.

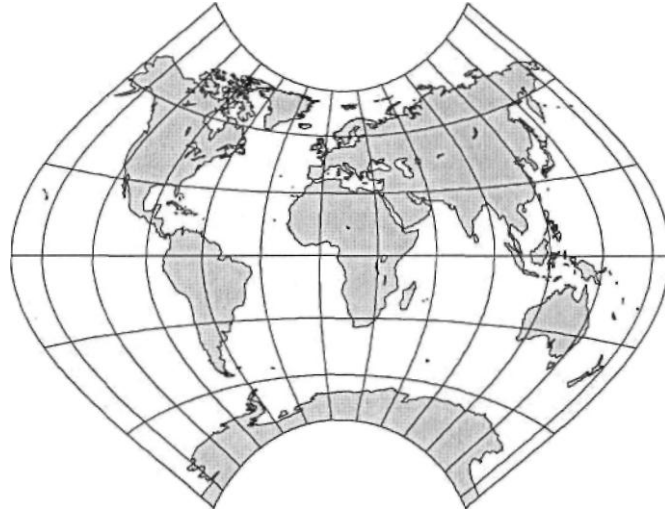


Рис. 28. Макет карты в проекции, полученной оптимизацией равновеликой псевдоцилиндрической проекции Сансона

Проекция перестала быть равновеликой. В пределах упомянутого большого круга площади преуменьшены на 20 %, а полюса из точек превратились в дуги значительной длины и кривизны. Полученная новая проекция значительно отличается от ее исходного оригинала — синусоидальной псевдоцилиндрической проекции Сансона.

Пример 2. П. Ласковский (P. Laskowski) в 1997 г. оптимизацией получил проекцию, которую назвал «три-оптимальной». Макет карты в этой проекции приведен на рис. 29.

Использованы бисимметричные полиномы пятой степени с девятью параметрами. Значения параметров определены минимизацией функции средневзвешенных искажений (w — веса):

$$F = wE_{\text{площади}} + w_{\text{формы}}E_{\text{формы}} + w_{\text{длин}}E_{\text{длин}}.$$

Искажения площадей, формы и длин оценены по формулам:

$$E_{\text{площади}} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N (a_i b_i - 1)^2; \quad E_{\text{формы}} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_i}{b_i} - 1\right)^2;$$

$$E_{\text{длин}} = \left(\frac{1}{QN}\right) \sum_{i=1}^N (d_i - D_i)^2; \quad Q = \sqrt{\left(N^{-1} \sum_{i=1}^N d_i^2\right) \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N D_i^2\right)},$$

где N — число измерений; a, b — экстремальные частные масштабы длин; d — расстояния в проекции; D — соответствующие расстояния на шаре. Уравнения проекции единичного шара ($R = 1$, ось X направлена на север, ось Y — на восток) имеют вид:

$$x = 1,00384\varphi + 0,0802894\varphi\lambda^2 + 0,0998909\varphi^3 + 0,000199025\varphi\lambda^4 - 0,02855\varphi^3\lambda^2 - 0,0491032\varphi^5;$$

$$y = 0,975534\lambda - 0,119161\varphi^2\lambda - 0,0143059\varphi^2\lambda^3 - 0,0547009\varphi^4\lambda.$$

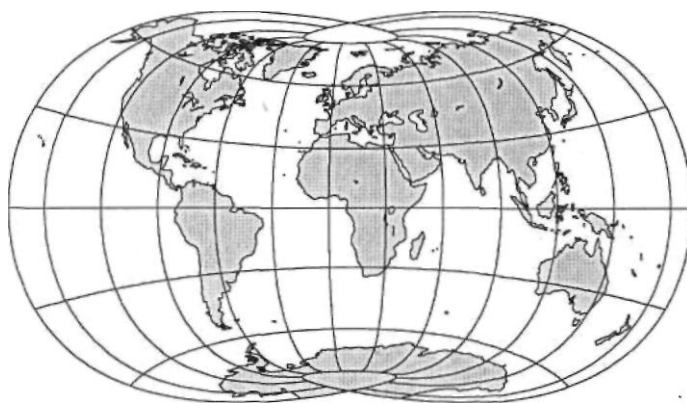


Рис. 29. Макет карты в «три-оптимальной» проекции

Для вычислений проекции выбрано $N = 5000$ точек, равномерно распределенных на шаре. Расстояния между ними изменялись в угловой мере от 10° до 40° . В вычислениях пары точек выбирались случайно. Главным было требование наглядности. В проекции не должно было быть перекрытий, причудливых вывертов, превращений площадей в линии или точки. При сбалансированности искажений должен быть отображен весь мир и сохранена овальная форма Антарктиды. В «три-оптимальной» проекции мир показан в овальном непрерывном контуре. Полуса изображены кривыми линиями. Перспектива полярных регионов создает эффект сферичности. Сохранена симметрия относительно экватора и среднего меридиана. Масштаб по экватору выдержан постоянным.

В этой проекции площади и длины искажены одинаково, формы же искажены почти в 2 раза больше. В пределах большого круга, покрывающего значительную часть Азии и европейскую часть России, площади преувеличены и, по сравнению с проекцией рис. 28, искажены в 2 раза больше. Искажения же длин и форм в обеих проекциях примерно одного порядка.

6. Преобразования картографических проекций

Преобразования, или трансформирование, изображений производятся, когда новая карта создается по картографическим источникам, составленным в других, нежели составляемая карта, проекциях. Преобразования, т. е. перенос изображений из одной проекции в другую, могут осуществляться и для иных целей, например, для картометрических работ, повышения наглядности или информативности изображений и т. п.

При геоинформационном картографировании упомянутые преобразования выполняются аналитическим путем, а именно пересчетом координат всех точек карты из одной проекции в координаты другой проекции. Существуют два варианта таких преобразований: 1) вычисления выполняются по известным уравнениям и параметрам преобразуемых проекций; 2) используется некий набор математических моделей, аппроксимирующих уравнения взаимосвязи проекций.

6.1. Преобразования проекций по известным уравнениям и параметрам

Этот путь является наиболее строгим и точным. Для его выполнения должны быть известны уравнения и параметры как проекций картографических источников, так и проекции создаваемой карты. Процесс трансформирования складывается из нескольких этапов.

- 1) Перевод исходных источников из аналоговой формы (карты, снимка) в цифровую, например цифрованием карты с помощью цифрователей или сканированием изображений сканерами.
- 2) Пересчет координат точек картографического материала из координатной системы цифрового изображения в координатную систему картографической проекции.
- 3) Вычисление по прямоугольным координатам, известным уравнениям и параметрам проекции

- широт и долгот всех точек преобразуемого изображения.
- 4) Вычисление по широтам и долготам прямоугольных координат в проекции составляемой карты и воспроизведение преобразованного картографического изображения.
 - 5) Корректурa и оценка качества трансформированных изображений.
- Цифровой материал может быть представлен как в растровом формате, так и в векторном. В дальнейшем главным образом предполагается векторное представление материала.

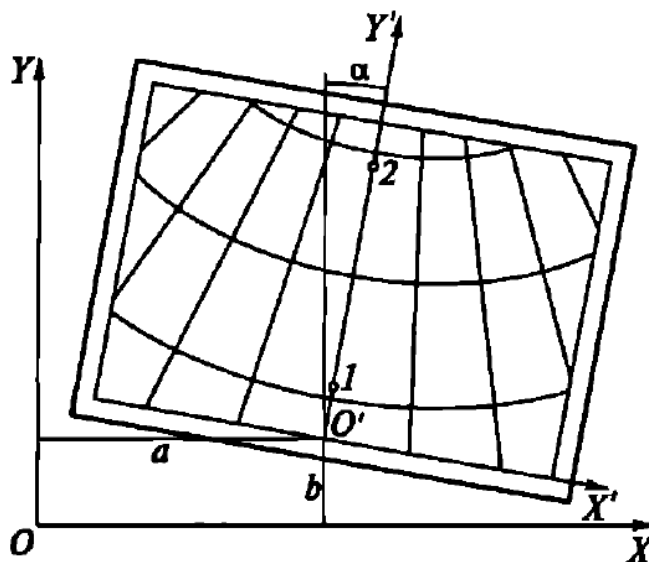


Рис. 30. Взаимное расположение координатных осей цифрового изображения и картографической проекции

Координатные оси X, Y цифрового изображения и оси X', Y' картографической проекции, как правило, не совпадают. В общем случае эти две координатные системы будут смещены и несколько повернуты относительно друг друга. В данном случае пользуемся математической ориентацией координатных осей — ось абсцисс направлена направо, ось ординат — вверх.

Для пересчета координат необходимо определить смещения на карте a и b начала координат и определить угол α поворота осей. Для этого должны быть выбраны, по крайней мере, две точки, координаты которых известны в обеих системах. Можно эти точки выбирать на среднем меридиане карты, например точки 1 и 2 на рис. 30. Тогда искомые величины вычисляются по следующим формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)};$$

$$a = x - x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \quad b = y + x' \sin \alpha - y' \cos \alpha.$$

Вычисления координат точек проекции x', y' по оцифрованным координатам x, y выполняются по формулам

$$x' = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha; \quad y' = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha.$$

От вычисленных координат следует перейти к значениям, соответствующим координатной системе, применяемой в математической картографии. Для этого достаточно x' переименовать в y , а y' — в x .

Вычисление прямоугольных координат в проекции составляемой карты и визуализация по координатам преобразованного картографического изображения проблемой не являются. Оценка качества трансформированного изображения производится визуально. Обнаруженные ошибки устраняются.

Подробнее рассмотрим лишь вычисления по прямоугольным координатам широт и

долгот точек. При этом уравнения и параметры проекции исходной карты полагаются известными. Рассмотрим характерные примеры, связанные с использованием в вычислениях трех геодезических функций: q — изометрической широты; S — длины дуги меридиана протяженностью от экватора до заданной параллели и P — площади сфероидической трапеции, ограниченной экватором, заданной параллелью и двумя меридианами с разностью долгот в 1 радиан. Во всех примерах используются параметры эллипсоида Красовского. В случае применения других эллипсоидов числовые параметры в формулах должны быть пересчитаны.

Пример. Исходная карта составлена в нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора. Масштаб карты 1:10 000 000. Долгота среднего меридиана $L_0 = 100^\circ$. Параметр проекции (радиус цилиндра, на который спроектирована земная поверхность) $C = 4892,7$ км. Нужно по прямоугольным координатам точек вычислить их широты и долготы.

Решим задачу на примере точки с координатами в масштабе карты $x = 49,199$ см и $y = 34,158$ см. В проекции Меркатора прямоугольные координаты вычисляются по уравнениям:

$$x = Cq; \quad y = C(L-L_0),$$

где L — восточная долгота точки, считаемая от меридиана Гринвича; q — изометрическая широта.

Учитывая масштаб карты, координаты точки выразим в километрах: $x = 4919,9$ км, $y = 3415,8$ км. Находим долготу

$$L = L_0 + \frac{y}{C} \frac{180^\circ}{\pi} = 100 + 40,0006 = 140,0006;$$

Особенность задачи заключается в вычислении геодезической широты по изометрической широте. Для этого можно применить следующий алгоритм:

находим изометрическую широту

$$q = x/C = 1,0055593;$$

вычисляем вспомогательную величину

$$\varphi = 2 \arctg(e^q) - \frac{\pi}{2};$$

находим геодезическую широту (эллипсоид Красовского):

$$B = \varphi + [33560,7 \sin(2\varphi) + 65,7 \sin(4\varphi)] 10^{-7} \text{ рад.}$$

В градусной мере получаем $\varphi = 49,81092^\circ$, $B = 50,0004^\circ$.

6.2. Оценка параметров уравнений проекций

Для трансформирования проекций рассматриваемыми способами необходимо знать параметры их уравнений. Во многих случаях выходные данные по математической основе на картах отсутствуют. Их приходится восстанавливать измерением координат узловых точек картографических сеток. Рассмотрим определения параметров на примерах нормальных азимутальной и конической проекций.

Нормальная равнопромежуточная азимутальная проекция. Для мелкомасштабных карт обычно используются проекции земного шара. Для радиуса ρ параллели на карте в равнопромежуточной азимутальной проекции можно составить следующее уравнение поправок (v):

$$v = mRZ - \rho,$$

где m — частный масштаб длин по меридиану; R — радиус земного шара; Z — зенитное расстояние данной параллели. Радиусы параллелей вычисляются по снятым с карты координатам

полюса (x'_0, y'_0) и координатам узлов картографической сетки (x', y') :

$$\rho' = \sqrt{(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2}.$$

Решение по методу наименьших квадратов позволяет вычислить произведение параметров mR :

$$mR = \frac{[Z\rho']}{[ZZ]}.$$

Квадратными скобками, в соответствии с символикой Гаусса, обозначены суммы заключенных в них величин.

Метод был применен к батиметрической карте Антарктики масштаба 1:15000000. В результате получено $mR = 6241,546$ км, или в масштабе карты 416,103 мм. Для земного радиуса было принято $R = 6371,1$ км. Шар таким радиусом по размерам, площади поверхности и объему весьма близок к референц - эллипсоиду Красовского. Для параметра данной азимутальной проекции было получено $m = 0,979\ 665$.

Нормальная коническая проекция. Для карт России, начиная с масштабов 1:1 000000 и мельче, применяются нормальные равнопромежуточные или равноугольные конические проекции. Для этих проекций верны формулы

$$x = x_0 - m\rho(L - L_0)\cos\alpha; \quad y = y_0 - m\rho(L - L_0)\sin\alpha;$$

где x_0, y_0 — координаты центра окружностей радиусов ρ , отображающих параллели на карте; L — текущая долгота; L_0 — долгота среднего меридиана; α — параметр, равный отношению угла между линиями меридианов на карте к разности долгот этих меридианов, при этом $0 < \alpha < 1$; m — масштабный коэффициент, учитывающий деформацию бумажной основы карты и частный масштаб длин вдоль меридианов. Если бумажная основа карты не подверглась деформированию, то большей частью $m = 1$, а для проекции Красовского и проекций карт ГУГК СССР (1958—1993) $m < 1$. Радиусы параллелей равнопромежуточных и равноугольных проекций вычисляются соответственно по формулам

$$\rho = C - S; \quad \rho = Ce^{-\alpha q},$$

где C — параметр проекции, равный радиусу окружности, отображающей на карте экватор; S — длина дуги меридиана от экватора до заданной параллели; e — основание натуральных логарифмов; q — изометрическая широта.

Итак, картографические сетки нормальных конических проекций имеют по шесть неизвестных параметров — $x_0, y_0, L_0, \alpha, C, m$. Они вычисляются сопоставлением координат x, y , определяемых по формулам, со значениями координат x', y' , снятым с карты. Задача решается по методу наименьших квадратов минимизацией целевой функции:

$$F(x) = \sum (x - x')^2 + \sum (y - y')^2.$$

Для минимизации функции $F(x)$ можно использовать стандартные программы, например, алгоритм квадратичной интерполяции—экстраполяции. Минимизируемая функция $F(x)$ вычисляется в трех точках: $(x - H)$, x ; $(x + H)$, где x — текущее приближение данного искомого параметра (не путать с абсциссами точек); H — шаг интерполяции.

После этого она заменяется параболой, проходящей через эти три точки. Искомое значение параметра x соответствует минимуму параболы. Обозначим через $W = F(x - H)$; $V = F(x)$; $U = F(x + H)$ значения функции, вычисленные в трех указанных точках. Искомый параметр x , соответствующий минимуму параболы, определяется по простой формуле:

$$x = \frac{[W(2x + H) - 4Vx + U(2x - H)]}{[2(W - 2V + U)]}.$$

Задача решается последовательными приближениями попеременно по каждому параметру до тех пор, пока абсолютная разность двух последовательных значений x будет не более установленного допуска ϵ .

Точность вычисленных параметров зависит от точности определения по карте координат, числа узлов, в которых эти координаты определяются, и равномерности их расположения на карте. Используемые в расчетах узлы должны быть распределены по всему полю карты.

6.3. Преобразования картографических проекций с помощью аппроксимирующих математических моделей

Трансформирование выполняется с помощью некоторой математической модели с неопределенными параметрами a, b, c, \dots . Она позволяет установить функциональную взаимосвязь между координатами точек x, y на исходной карте и координатами тех же точек x', y' на составляемой карте

$$x' = f_1(x, y, a, b, c, \dots); \quad y' = f_2(x, y, a, b, c, \dots).$$

Координаты можно будет перевычислить из одной проекции в другую, если определить параметры выбранной математической модели. Для этого на каждой из карт, исходной и составляемой, опознаются соответственные *опорные точки* и тем или иным способом определяются их прямоугольные координаты x, y на одной карте и x', y' — на другой. Опорными точками могут служить изображения на картах населенных пунктов, слияний рек, пересечений дорог и т.п. Удобно использовать координаты узловых точек картографической сетки. Каждая опорная точка представляется двумя записанными выше уравнениями. Отсюда легко сообразить, сколько потребуется опорных точек, чтобы определить все параметры выбранной математической модели. Как правило, набирается избыточное число опорных точек, и задача решается по методу наименьших квадратов. Параметры модели отыскиваются минимизацией суммы квадратов отклонений вычисляемых координат от их измеренных значений:

$$\sum \{ [x' - f_1(x, y, a, b, c, \dots)]^2 + [y' - f_2(x, y, a, b, c, \dots)]^2 \} = \min.$$

Часть опорных точек в обработку не включается. Эти точки служат для контроля и оценки качества преобразований. Контроль и оценка качества производятся сопоставлением вычисленных координат контрольных опорных точек с заданными их значениями.

Таблица 8. Модели преобразования картографических проекций

Название модели	Уравнения модели	Число определяемых параметров	Минимальное число опорных точек
Аффинная	$x' = a_0 + a_1x + a_2y;$ $y' = b_0 + b_1x + b_2y;$	6	3
Проективная	$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1};$ $y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1}$	8	4
Полиномиальная	$x' = \sum_{S=0}^n \sum_{k=0}^{n-S} a_{Sk} x^S y^k;$ $y' = \sum_{S=0}^n \sum_{k=0}^{n-S} b_{Sk} x^S y^k;$	$(n+1)(n+2)$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Гармонически полиномиальная	$x' = \sum_{k=0}^N (a_k P_k - b_k Q_k);$ $y' = \sum_{k=0}^N (a_k Q_k - b_k P_k);$ $P_0 = 1; Q_0 = 1; P_1 = x; Q_1 = y;$ $P_k = P_{k-1} P_1 - Q_{k-1} Q_1;$ $Q_k = P_{k-1} Q_1 - Q_{k-1} P_1;$	2(n + 1)	(n + 1)
-----------------------------	---	----------	---------

В табл. 8 указаны основные наиболее часто применяемые модели преобразований. Параметры моделей обозначены латинскими буквами a, b, c, \dots . Там же для каждой модели указано количество определяемых параметров и минимально необходимое для их определения число опорных точек.

Аффинное преобразование сдвигает, поворачивает, равномерно сжимает или растягивает изображение по одному или двум направлениям (рис. 31). Поэтому прямые параллельные линии до трансформирования остаются прямыми параллельными линиями и после преобразования.

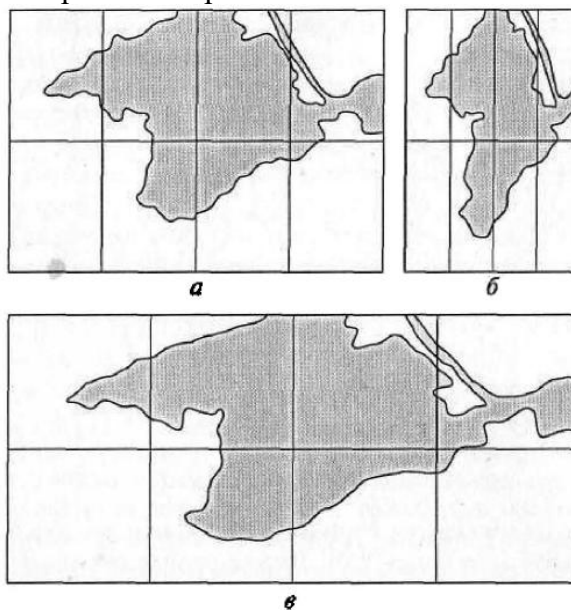


Рис. 31. Аффинное преобразование: a — исходный рисунок; b — равномерное сжатие вдоль параллели; v — растяжение вдоль параллели

Возможности этой модели в случае ее применения ко всей карте весьма ограничены. Однако допустимы локальные аффинные преобразования, для реализации которых исходная карта разбивается на треугольники с вершинами в опорных точках. Для нахождения параметров достаточно иметь три опорные точки. Поэтому параметры определяются для каждого треугольника. Изображение трансформируется с проекции исходной карты в проекцию составляемой карты по треугольникам, при этом в каждом из них используются только соответствующие ему параметры. Так как два смежных треугольника имеют общую для них сторону, которая соединяет одни и те же опорные точки, на границах треугольников непрерывность изображения не нарушается. Это очень важное свойство.

Проективное преобразование позволяет изображение с одной плоскости пучком прямых перенести на другую плоскость (рис. 32), изменяя масштаб, нарушая параллельность линий, однако по-прежнему прямые линии вновь преобразуются только в прямые линии.

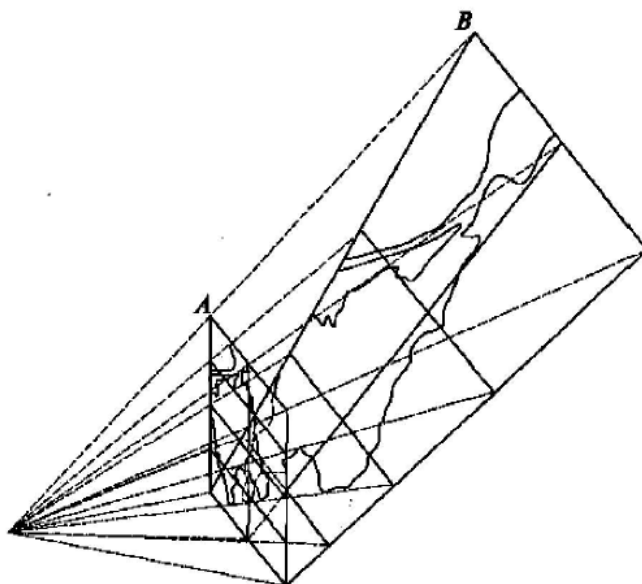


Рис. 32. Проективное преобразование плоскости A на плоскость B

В данном случае также строятся локальные кусочно-проективные преобразования (рис. 33). Для определения параметров проективного преобразования необходимы четыре опорные точки. Ими, например, могут быть четыре узловые точки трапеции между двумя смежными параллелями и меридианами на карте. Непрерывность изображений на стыках трапеций также сохраняется. Смежные трапеции имеют общую сторону, и хотя каждая из трапеций имеет свои параметры преобразования, точка на общей стороне, как для одной, так и для другой трапеции получит одинаковые значения. Поэтому, если линия, например река, пересекает несколько трапеций, то она сохранит непрерывность изображения.

Выбор опорных точек и разбиение плоскости карты на треугольники при аффинном преобразовании, или на четырехугольники при проективном преобразовании осуществляется программными средствами.

Возможность собирать фрагменты в единое целое с сохранением непрерывности изображений — большое достоинство аффинных и проективных преобразований. Другие модели этим свойством не обладают.

Существенный недостаток аффинных и проективных преобразований — потеря точности при переводе кривых линий в прямые, или наоборот — прямых в кривые.



Рис.33. Кусочно-проективное преобразование: a — исходное изображение в конической проекции; b — преобразованное изображение в цилиндрической проекции

Полиномиальные преобразования являются более сложными, чем вышерассмотренные. С их помощью можно изменять кривизну линий и, следовательно, прямые линии преобразовывать в кривые, и наоборот.

Если вообразить, что преобразуемая проекция построена на эластичном листе, то полиномиальный способ трансформирования можно интерпретировать как способ совмещения опорных точек эластичного листа путем его деформаций с соответствующими опорными точками в проекции создаваемой карты. По этой причине данный способ называют способом «*резинового листа*». Это не совсем адекватное название, так как лист «не натягивается», а деформируется — в одних местах он растягивается, а в других — сжимается.

Чем выше степень полинома, тем с большей детальностью и точностью может быть выполнено трансформирование проекций. Однако полиномы высокой степени существенно увеличивают трудоемкость вычислений. Компромисс между качеством и трудоемкостью достигается преобразованием карт по частям. На стыках фрагментов изображений непрерывность в данном случае не сохраняется. Поэтому приходится выделять фрагменты с перекрытиями и использовать специальные программные процедуры для «сшивания» отдельных фрагментов.

Гармонические полиномы используются для преобразований в равноугольные проекции. Это более сложные полиномиальные модели, построенные разложением аналитической функции комплексного переменного в степенной ряд. Частный случай применения этой модели — преобразования, например, координат равноугольных проекций УТМ и Гаусса—Крюгера.

Сплайн - аппроксимации используются для построения изолинейных карт. В этом случае в опорных точках с координатами x , y на исходной карте задаются не аппликаты z , по которым рисуются изолинии, а значения координат x' и y' в проекции составляемой карты. Задача становится как бы в два раза объемнее, чем при рисовке изолиний. Для реализации на компьютере модели сплайн - аппроксимации число опорных точек не должно быть очень большим, так как с увеличением их числа увеличивается потребный объем оперативной памяти и снижается точность преобразований. Оптимальным можно считать $n < 150$. Поэтому трансформирование ведется разбиением всей плоскости проекции на взаимно перекрывающиеся на 20 — 25 % участки.

Статистический метод трансформирования основан на использовании метода *кригинга*, при котором по данным в опорных точках строится выборочная (экспериментальная) вариограмма для проведения дальнейших вычислений.

Точность преобразований с помощью аппроксимирующих математических моделей всегда будет ниже, чем при использовании соответствующих строгих формул, и существенно зависит от количества опорных точек и их взаимного расположения на картах.

Литература

- 1) Серапинас Б.Б. Математическая картография. Учебник для вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 336 с.
- 2) Аляутдинов Р. А., Кошель С.М. Геометрическая трансформация картографических проекций. // Геодезия и картография. – 2000, № 6, с. 36–39.
- 3) Бугаевский Л.М. Математическая картография. Учебник для вузов. — М.: Златоуст, 1998. — 400 с.
- 4) Бугаевский Л.М., Вахрамеева Л.А. Картографические проекции / Справ. пособ. М.: Недра, 1992. – 293 с.
- 5) Берлянт А.М. Картография. М.: Аспект Пресс, 2001. – 336 с.