

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
радиофизического факультета для студентов ННГУ,
обучающихся по специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические
системы»

Нижний Новгород
2018

УДК 537.8
ББК 22.3
3-15

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Е.Ю. Петров**

3-15 ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ. Составители:
Гильденбург В.Б., Зайцева А.С., Юрасова Н.В.: Учебно-методическое пособие.
– Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2018. – 53 с.

Пособие представляет собой сборник задач по основным разделам курсов классической и прикладной электродинамики (электро- и магнитостатика, постоянные токи, квазистационарные процессы, волновые поля в однородных и неоднородных средах, линиях передач и резонаторах, излучение и дифракция волн). Часть задач, входящих в пособие, взята из сборника задач по электродинамике В.Б. Гильденбурга и М.А. Миллера (М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001), другая часть составлена на основе многолетней практики проведения занятий, коллоквиумов, зачетов и экзаменов по электродинамике на радиофизическом факультете Нижегородского госуниверситета. Практически все задачи снабжены ответами, а некоторые из них (как правило, наиболее трудные) – решениями и указаниями. В задачнике принята международная система единиц СИ.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей и студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ к.ф.-м.н., доцент **Н.Д. Миловский**

УДК 537.8
ББК 22.3

СОДЕРЖАНИЕ

Используемые обозначения		4
Принятые сокращения		5
Универсальные константы		5
	задачи	ответы
Часть I. Классическая электродинамика	6	19
Часть II. Прикладная электродинамика	15	44

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- E** – напряженность электрического поля
- H** – напряженность магнитного поля
- D** – индукция электрического поля
- B** – индукция магнитного поля
- A** – векторный потенциал
- φ – скалярный потенциал
- ε – диэлектрическая проницаемость среды
- μ – магнитная проницаемость среды
- U – разность потенциалов
- W – энергия
- w – объемная плотность энергии
- S** – вектор Пойнтинга (плотность потока энергии)
- P – мощность
- q – заряд
- ρ – объемная плотность заряда
- Ω – поверхностная плотность заряда
- κ – линейная плотность заряда
- p** – дипольный момент
- C – емкость конденсатора
- L – индуктивность (коэффициент самоиндукции)
- C_1 – погонная емкость
- L_1 – погонная индуктивность
- R – сопротивление
- σ – проводимость среды
- I – сила электрического тока
- j** – плотность тока
- j_s** – поверхностная плотность тока
- r** – радиус-вектор
- k** – волновой вектор
- k – волновое число
- h – продольное волновое число
- \varkappa – поперечное волновое число

- λ – длина волны
- ω – циклическая частота
- v_{ϕ} – фазовая скорость
- c – скорость света в вакууме
- Z_{\perp} – поперечный волновой импеданс
- Z_s – поверхностный импеданс
- $Z_{\text{в}}$ – волновое сопротивление (импеданс) линии передачи
- Γ – коэффициент отражения волны
- T – коэффициент прохождения волны
- R_r – сопротивление излучения
- $\sigma_{\text{рл}}$ – радиолокационное сечение рассеяния

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

- КСВ – коэффициент стоячей волны
- КНД – коэффициент направленного действия
- ДН – диаграмма направленности

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Диэлектрическая проницаемость вакуума $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Магнитная проницаемость вакуума $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м

I. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1.1. Дана функция $f(r) = \frac{1}{r}$. Найти $\text{grad } f$; $\text{div}(\mathbf{a}f)$; $\text{rot}(\mathbf{a}f)$ (r — радиальная координата, \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор).

1.2. Дана функция $f = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3}$. Найти $\text{grad } f$ (\mathbf{r} — радиус-вектор, r — радиальная координата, \mathbf{p} — произвольный постоянный вектор).

1.3. Даны скалярное поле $\varphi = \varphi_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и векторное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Найти $\nabla\varphi$, $\text{div } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{E}$ ($\varphi_0 = \text{const}$, \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} — постоянные векторы).

1.4. Пусть $\mathbf{r} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 + z\mathbf{z}_0$ — радиус-вектор точки. Вычислить $\text{grad}|\mathbf{r}|$; $\text{div } \mathbf{r}$; $\text{rot } \mathbf{r}$; $(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{r}$ (\mathbf{a} — постоянный вектор).

1.5. Даны векторы $\mathbf{A} = A(x)\mathbf{x}_0$, $\mathbf{B} = B(y)\mathbf{x}_0$. Найти $\text{div } \mathbf{A}$; $\text{rot } \mathbf{A}$; $\text{div } \mathbf{B}$; $\text{rot } \mathbf{B}$.

1.6. Найти поток радиус-вектора \mathbf{r} через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V .

1.7. Доказать тождества $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$, $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

1.8. Найти поток вектора \mathbf{H} через площадь круга радиуса a , лежащего в плоскости xy , для случаев а), б) и в). Центр круга совпадает с началом координат. Направление нормали к площади круга совпадает с положительным направлением оси z .

а) $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 A$ ($A = \text{const}$);

б) $\mathbf{H} = \mathbf{x}_0 A$ ($A = \text{const}$);

в) $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 Pr^3$ ($P = \text{const}$, r — расстояние до центра круга).

1.9. Найти циркуляцию вектора \mathbf{E} вдоль контура в виде окружности радиуса a , лежащей в плоскости xy , для случаев а), б) и в). Центр окружности совпадает с началом координат, положительное направление обхода контура и направление оси z связаны правилом правого винта.

а) $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 A$ ($A = \text{const}$);

б) $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 A$ ($A = \text{const}$);

в) $\mathbf{E} = \varphi_0 Br(1 + \cos \varphi)$ ($B = \text{const}$, r и φ — радиальная и азимутальная цилиндрические координаты соответственно).

1.10. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор напряженности электрического поля заданы в декартовой системе координат (x, y, z) в виде $\varepsilon(y) = a + by$, $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 Ax + \mathbf{y}_0 B$ ($a, b, A, B = \text{const}$). Найти плотность свободного заряда ρ .

1.11. Вектор напряженности магнитного поля в вакууме имеет компоненты H_x и H_y . Известно, что $H_y = Ay$, а компонента $H_x = 0$ при $x = 0$. Найти зависимость $H_x(x)$.

1.12. Вектор напряженности магнитного поля в вакууме задан в декартовой системе координат в виде: $\mathbf{H} = \mathbf{x}_0 Ay$, где $A = \text{const}$. Плотность тока $\mathbf{j} = 0$. Напряженность электрического поля \mathbf{E} в момент времени $t = 0$ равна нулю. Найти $\mathbf{E}(t)$.

1.13. Вектор напряженности электрического поля в однородной среде с магнитной проницаемостью μ задан в декартовой системе координат (x, y, z) в виде $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 Py$, где $P = \text{const}$. Напряженность магнитного поля \mathbf{H} в момент времени $t = 0$ равна нулю. Найти $\mathbf{H}(t)$.

1.14. Плоскость $z = 0$ в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ заряжена с плотностью поверхностного заряда Ω . Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} при $z < 0$ равен $\mathbf{E}(-0) = \mathbf{x}_0 C_1 + \mathbf{z}_0 C_2$ ($C_1, C_2 = \text{const}$). Найти вектор $\mathbf{E}(+0)$ при $z > 0$.

1.15. Найти напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной сферой. Заряд сферы равен q , ее радиус — a .

1.16. Найти напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Плотность поверхностного заряда плоскости равна Ω .

1.17. Найти напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме электрическим диполем с дипольным моментом \mathbf{p} .

1.18. Найти напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме бесконечной прямой нитью с линейным зарядом κ .

1.19. Найти напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженным шаром с диэлектрической проницаемостью ϵ . Объемная плотность заряда равна ρ , радиус шара — a .

1.20. Заряд распределен равномерно с постоянной поверхностной плотностью Ω по плоскостям $x = 0$ и $y = 0$. Найти электрическое поле, создаваемое им в вакууме. Нарисовать картину силовых линий.

1.21. Центры двух одинаковых проводящих шаров радиуса a лежат на оси z в точках с координатами $z = b$ и $z = -b$. Заряды шаров равны соответственно q и $-q$.

1) Найти величину и направление вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} в точке 1 с координатами $(x_1, 0, 0)$, $x_1 \gg b \gg a$;

2) Найти величину и направление вектора напряженности электрического

поля \mathbf{E} в точке 2 с координатами $(0, 0, z_2)$, $z_2 \gg b \gg a$;

3) Найти потенциал φ и напряженность электрического поля \mathbf{E} в точке 3, лежащей на биссектрисе прямого угла, образованного осями y и z на расстоянии r_3 от начала координат ($r_3 \gg b \gg a$);

4) Построить качественно зависимости потенциала $\varphi(0, 0, z)$ и $\varphi(0, y, 0)$ на осях z и y соответственно.

1.22. Заряд q распределен равномерно по длине окружности радиуса a , лежащей в плоскости xy . Центр окружности совпадает с началом координат. Диэлектрическая проницаемость окружающего пространства равна ε . Найти потенциал $\varphi(z)$ и электрическое поле $E_z(z)$ на оси z . Определить максимальные значения поля и потенциала на оси. В каких точках они достигаются?

1.23. Поверхностный заряд распределен равномерно с плотностью Ω по площади круга радиуса a , лежащего в плоскости xy . Центр круга совпадает с началом координат. Найти потенциал и электрическое поле на оси z .

1.24. Найти разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя незаряженными проводящими концентрическими сферами, создаваемую точечным зарядом q , расположенным на расстоянии b от центра. Радиусы сфер r_1 и r_2 . Рассмотреть случаи: а) $b < r_1 < r_2$, б) $r_1 < b < r_2$, в) $r_1 < r_2 < b$.

1.25. Плоский конденсатор образован двумя одинаковыми параллельными пластинами, расстояние между которыми d намного меньше их размеров. Заряд каждой пластины равен нулю. Точечный заряд q расположен вне конденсатора на большом (по сравнению с размерами пластин) расстоянии R от центральной точки конденсатора O . Направление из точки O на заряд образует угол θ с нормалью к пластинам. Найти разность потенциалов между пластинами U .

1.26. С помощью теоремы взаимности найти потенциал изолированного незаряженного проводящего шара радиуса a , на расстоянии b от центра которого расположен точечный заряд q .

1.27. Точечный заряд q расположен на расстоянии b от центра O заземленной проводящей сферы радиуса a ($a < b$). Показать, что поле этой системы совпадает (вне сферы) с полем заряда q и заряда $q' = -q \frac{a}{b}$, помещенного в «инверсную» точку, которая лежит на прямой Oq на расстоянии $b' = \frac{a^2}{b}$ от центра сферы.

1.28. Как изменится эквивалентная система точечных зарядов-изображений, описанная в предыдущей задаче, если проводящая сфера изолирована и не заряжена?

1.29. Найти распределение поверхностной плотности заряда Ω по бесконеч-

ной плоской поверхности проводника, на расстоянии l от которой находится точечный заряд q .

1.30. На плоскости $x = 0$ электростатический потенциал задан в виде функции $\varphi(0, y) = U \cos ky$, где $k, U = \text{const}$. Плотность заряда вне этой плоскости (при $x \neq 0$) равна нулю. Диэлектрическая проницаемость среды равна ε . Полагая, что при $x \rightarrow \pm\infty$ потенциал не стремится к бесконечности, а $\varphi(x, y) = \varphi(-x, y)$, найти

- 1) потенциал во всем пространстве $\varphi(x, y)$;
- 2) поверхностную плотность заряда $\Omega(y)$ на плоскости $x = 0$.

1.31. Потенциал электрического поля в вакууме задан в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в виде $\varphi(r, \theta) = f(r) \cos n\theta$, где n — целое число. Найти общий вид функции $f(r)$. Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеет вид $\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

1.32. Плоский конденсатор образован двумя одинаковыми прямоугольными пластинами с размерами a и b и расстоянием между ними d . Пространство между пластинами заполнено неоднородным диэлектриком. Найти емкость конденсатора, пренебрегая краевым эффектом, если зависимость диэлектрической проницаемости ε от координат задана в виде: а) $\varepsilon = \varepsilon(x)$; б) $\varepsilon = \varepsilon(y)$ (ось x параллельна одной из сторон пластин, ось y перпендикулярна пластинам).

1.33. Какими источниками создается в вакууме следующее одномерное распределение потенциала:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \quad x > x_2 \\ Cx & \text{при } 0 < x < x_1 \\ Cx_1 & \text{при } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

($C, x_1, x_2 = \text{const}$)? Построить качественно графики зависимости потенциала φ , проекции электростатического поля E_x и объемной плотности заряда ρ от x .

1.34. Какими источниками создается в вакууме распределение потенциала $\varphi(x) = C|x|$ ($C = \text{const}$)? Построить качественно графики зависимости потенциала φ и проекции электростатического поля E_x от x .

1.35. Какими источниками создается в вакууме распределение потенциала $\varphi(x) = C \exp(-\alpha|x|)$ ($C, \alpha = \text{const}$)? Построить качественно графики зависимости потенциала φ , проекции электростатического поля E_x и объемной плотности заряда ρ от x .

1.36. Векторный потенциал статического магнитного поля задан в виде $\mathbf{A} = \mathbf{x}_0 P y^2$ ($P = \text{const}$). Магнитная проницаемость среды $\mu = \text{const}$. Найти

1) векторы магнитной индукции $\mathbf{B}(x, y, z)$ и напряженности $\mathbf{H}(x, y, z)$ магнитного поля;

2) вектор плотности тока \mathbf{j} и количество заряда q , протекающего за время Δt через площадь прямоугольника со сторонами a и b , лежащего в плоскости $x = \text{const}$.

1.37. По плоскости $z = 0$ в однородной среде с магнитной проницаемостью μ течет электрический ток с поверхностной плотностью $\mathbf{j}_s = \mathbf{y}_0 J_0$. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} при $z > 0$ равен $\mathbf{B}(+0) = \mathbf{x}_0 C_1 + \mathbf{z}_0 C_2$ ($C_1, C_2 = \text{const}$). Найти поле $\mathbf{B}(-0)$ при $z < 0$.

1.38. Постоянный электрический ток с поверхностной плотностью j_s течет по поверхности бесконечно длинного кругового цилиндра радиуса a перпендикулярно его образующей. Магнитная проницаемость среды $\mu = \text{const}$. Полагая, что на бесконечном удалении от соленоида магнитное поле отсутствует, найти

1) векторы \mathbf{H} и \mathbf{B} внутри и вне цилиндра;

2) энергию магнитного поля W_1 , приходящуюся на единицу длины соленоида;

3) циркуляцию векторного потенциала \mathbf{A} вдоль контура \mathcal{L} в виде окружности радиуса r , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси симметрии соленоида z , с центром на оси z (рассмотреть случаи $r < a$ и $r > a$);

4) векторный потенциал \mathbf{A} как функцию расстояния до оси r .

1.39. Ток с силой I течет по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса a . Ось провода совмещена с осью z . Магнитная проницаемость среды $\mu = \text{const}$. Найти

1) напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(r)$ внутри и вне провода (при $r < a$ и $r > a$; r — расстояние до оси z);

2) энергию магнитного поля, запасенную в объеме, ограниченном цилиндрическими поверхностями $r = R_1$, $r = R_2$ ($a < R_1 < R_2$) и плоскостями $z = 0$, $z = l$.

1.40. Постоянный ток с силой I течет по полупрямой, обрывающейся в точке O , где происходит накопление точечного заряда. Найти напряженность магнитного поля \mathbf{H} .

1.41. Найти магнитное поле, создаваемое током, текущим в одном направлении по плоской проводящей поверхности. Плотность тока постоянна и равна j_s .

1.42. Нарисовать картину силовых линий магнитного поля, создаваемого системой двух перпендикулярных плоскостей. Электрический ток с постоянной плотностью j_s течет по плоскостям в противоположных направлениях параллельно линии их пересечения.

1.43. В круглой рамке радиуса a течет постоянный электрический ток с силой I . Найти напряженность магнитного поля \mathbf{H} на оси z , проходящей через центр рамки перпендикулярно ее плоскости.

1.44. Круглая проволочная рамка радиуса a лежит в плоскости $z = 0$. Центр рамки находится в начале координат O . В рамке течет постоянный электрический ток с силой I , направление которого связано правилом правого винта с направлением вектора \mathbf{z}_0 . Магнитная проницаемость среды равна μ . Найти направление и величину магнитного поля $\mathbf{H}(x)$ в точках, лежащих на оси x , при $x \gg a$.

1.45. Найти коэффициент самоиндукции L_1 единицы длины коаксиальной линии, образованной сплошным цилиндрическим проводником радиуса a , вложенным внутрь тонкостенной проводящей трубы радиуса $b > a$. По сечению центрального проводника ток распределен равномерно.

1.46. Соленоид радиуса a (цилиндр, обтекаемый круговым током — см. задачу **1.38.**) имеет конечную длину l . По какому закону убывает напряженность магнитного поля $H(R)$ при увеличении расстояния до него R в области, где $R \gg l, a$?

1.47. Через границу раздела сред с различными значениями проводимости (σ_1, σ_2) и диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) течет ток с нормальной компонентой плотности j_n . Найти плотность поверхностного заряда Ω на границе.

1.48. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длины l заполнено однородной проводящей средой с конечной проводимостью σ . Между обкладками протекает постоянный ток с силой I . Радиусы внутренней и внешней обкладок равны соответственно a и b ($l \gg a, b$). Найти разность потенциалов U между обкладками.

1.49. Обкладки плоского конденсатора представляют собой одинаковые прямоугольные пластины с размерами $a \times b$. Расстояние между пластинами равно d . Пространство между обкладками заполнено однородной проводящей средой с конечной проводимостью σ . Между обкладками через проводящую среду протекает постоянный ток с силой I . Найти, пренебрегая краевым эффектом,

1) векторы плотности тока \mathbf{j} и напряженности электрического поля \mathbf{E} между пластинами;

2) разность потенциалов между пластинами U .

1.50. Плоский незаполненный конденсатор с круглыми пластинами подключен к источнику переменного напряжения $V = V_0 \sin \omega t$. Найти магнитное поле \mathbf{H} внутри конденсатора при условии $d \ll a \ll c/\omega$, где d — расстояние между пластинами, a — радиус пластин, c — скорость света в вакууме.

1.51. Бесконечный соленоид с числом витков в обмотке на единицу длины n питается переменным током $I = I_0 \sin \omega t$. Найти электрическое поле внутри соленоида при условии $a \ll c/\omega$ (a — радиус соленоида).

1.52. Вектор электрического поля гармонической плоской однородной волны задан в комплексной форме $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$. Векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} лежат в плоскости xz .

1) Записать комплексные и действительные выражения для проекций электрического и магнитного полей на направления x , y , z , которые содержали бы явные зависимости от переменных x , y , z , t и параметров $|\mathbf{E}_0|$, ω , k_x , k_z в случае, когда волна распространяется в вакууме.

2) Определить пространственные периоды поля λ_x , λ_z по осям x и z , если заданы: частота ω , диэлектрическая и магнитная проницаемости среды ε , μ и угол α между вектором \mathbf{k} и осью z .

3) Определить λ_x , если заданы ω , ε , μ , λ_z .

4) Определить частоту ω , если заданы ε , μ , λ_x и $v^{(z)}$, где $v^{(z)}$ — скорость, с которой перемещается вдоль оси z точка пересечения фазового фронта с этой осью.

5) Построить графики зависимости отличных от нуля компонент электрического и магнитного полей от координат x , y , z в различные моменты времени t для случая, когда вектор \mathbf{k} направлен по оси z .

6) Построить графики зависимости поля от координат x , y , z для различных значений угла между \mathbf{k} и осью z .

1.53. Записать выражения для проекций электрического и магнитного полей в виде явных зависимостей от координат x , y , z и времени t для плоской волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$, у которой векторы \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} лежат в плоскости zy , а угол между осью y и вектором \mathbf{k} равен α . Определить пространственные масштабы λ_y и λ_z , если заданы параметры ω , ε , μ .

1.54. Записать выражения для компонент магнитного поля \mathbf{H} плоской волны, для которой заданы амплитуда поля $\mathbf{E}_0 = \mathbf{y}_0 A$ ($A = \text{const}$) и волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{x}_0 \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \theta + \mathbf{z}_0 \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \theta$. Найти длину волны λ .

1.55. Волновой вектор \mathbf{k} плоской однородной волны направлен под углом α к оси z . Среда имеет проницаемости ε и μ . Найти поперечные (по отношению к оси z) характеристические импедансы волны Z_\perp , связывающие поперечные компоненты полей соотношением $\mathbf{E}_\perp = Z_\perp [\mathbf{H}_\perp, \mathbf{z}_0]$, для поляризаций типа ТЕ ($E_z = 0$), ТМ ($H_z = 0$) и ТЕМ ($E_z = H_z = 0$).

1.56. Выразить амплитуды электрического и магнитного полей гармонической плоской однородной волны \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 в среде с проницаемостями ε и μ через среднюю за период плотность потока энергии S .

1.57. Электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух гармонических плоских однородных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Векторы напряженности электрического поля в обеих волнах параллельны оси x . Волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 лежат в плоскости yz , причем $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1y} = -k_{2y}$. Написать выражения для векторов суммарного поля. Изобразить схематически поведение полей в пространстве и времени.

1.58. Найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, если ее магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$, а для плоской волны, распространяющейся в данной среде, известны ее частота ω , скорость перемещения волнового фронта v и расстояние l , на котором амплитуда убывает в e раз.

1.59. Получить выражения для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} стоячей волны в вакууме. Чему равен сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между полями? Изобразить «моментальные» снимки полей в различные моменты времени.

1.60. Найти магнитное поле \mathbf{H} неоднородной плоской волны в среде с проницаемостями ε и μ , если электрическое поле волны задано в следующем виде: $E_y = E_0 \exp(i(\omega t - hz) - \alpha x)$, $E_x = E_z = 0$. Каким образом связаны между собой параметры α , h , ω , ε , μ ?

1.61. Плоская волна с вектором электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ падает в среде с проницаемостями ε и μ , занимающей область $z < 0$, на плоскость $z = 0$ с заданным поверхностным импедансом $Z_s = E_x(0)/H_y(0)$.

1) Найти коэффициент отражения волны Γ от плоскости.

2) Получить формулу пересчета импеданса, позволяющую определять импеданс $Z(-l)$ на расстоянии l от границы.

3) Найти $|E|^2(z)$ и коэффициент стоячей волны $\text{КСВ} = |E|_{\text{max}}^2 / |E|_{\text{min}}^2$.

4) Что можно сказать об импедансе Z_s при $\text{КСВ} = 1$ и при $\text{КСВ} = \infty$?

1.62. Пользуясь формулой пересчета импеданса, получить выражение для коэффициента отражения Γ плоской волны с длиной λ от плоского слоя толщины d с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε , μ . Слой разделяет среды 1 и 2 с проницаемостями ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 , волна падает на слой по нормали из среды 1. Найти условия, при которых $\Gamma = 0$, для случаев, когда среды 1 и 2: а) одинаковы, б) различны.

1.63. Найти коэффициент отражения Γ плоской волны от плоского слоя толщиной d с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 0$. Угол падения волны равен θ_0 . Вектор электрического поля волны \mathbf{E} перпендикулярен к плоскости падения.

1.64. Выразить коэффициенты отражения (Γ) и прохождения (T) плоской волны, падающей наклонно на плоскую границу раздела двух сред 1 и 2, через

поперечные (по отношению к направлению нормали к границе) характеристические импедансы сред $Z_{\perp 1}$, $Z_{\perp 2}$. Выразить величины $Z_{\perp 1}$, $Z_{\perp 2}$ через значения диэлектрической и магнитной проницаемостей обеих сред ε_1 , μ_1 , ε_2 , μ_2 и угол падения α (волна падает на границу из среды 1). Рассмотреть две различные поляризации волны: а) поперечно-электрическую (ТЕ); б) поперечно-магнитную (ТМ).

1.65. Однородная плоская волна с частотой ω и амплитудой магнитного поля H_0 падает на границу раздела вакуума и идеального проводника под углом α к нормали. Найти плотность поверхностного тока, наведенного на проводник. Рассмотреть две различные поляризации волны: а) ТЕ; б) ТМ.

II. ПРИКЛАДНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

2.1. Найти коэффициент отражения волны Γ от конца двухпроводной линии и входной импеданс $Z_{\text{вх}}(l)$ на расстоянии l от ее конца, если ее волновое сопротивление равно $Z_{\text{в}}$, расстояние между проводами много меньше длины волны, а к концу линии подключена следующая нагрузка:

- а) емкость C ;
- б) индуктивность L ;
- в) сопротивление R ;
- г) другая линия передачи бесконечной длины с волновым сопротивлением $Z'_{\text{в}}$;
- д) сопротивление $R = 0$ (режим короткого замыкания);
- е) сопротивление $R = \infty$ (линия разомкнута).

2.2. Найти коэффициент отражения волны от нагрузки, включенной в бесконечную двухпроводную линию с волновым сопротивлением $Z_{\text{в}}$. Нагрузка имеет импеданс Z' и включена в линию

- а) последовательно (в разрыв одного из проводов),
- б) параллельно (между проводами).

2.3. Найти волновой импеданс $Z_{\text{в}}$ и длину отрезка линии l , с помощью которого можно обеспечить согласование двух линий передач с волновыми импедансами $Z_{\text{в1}}$ и $Z_{\text{в2}}$.

2.4. Рассчитать погонные параметры (коэффициент самоиндукции L_1 и емкость C_1) и волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ для главной волны коаксиальной линии без диэлектрического заполнения (радиусы проводников равны a и b).

2.5. Рассчитать погонные параметры (коэффициент самоиндукции L_1 и емкость C_1) и волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ для главной волны полосковой линии без диэлектрического заполнения с шириной полосков a и расстоянием d между ними ($d \ll a$).

2.6. Длина волны в волноводе в 2 раза превышает критическую длину волны для данной моды. Во сколько раз частота волны превышает критическую частоту?

2.7. С двух концов прямоугольного волновода навстречу друг другу запущены два радиоимпульса с высокочастотным заполнением: один на волне TE_{10} , второй — на волне TE_{m0} . Центры импульсов встречаются точно посередине волновода. Каково соотношение между длинами волн обоих импульсов в свободном пространстве (λ_1/λ_2) и в волноводе ($\lambda_{\text{в1}}/\lambda_{\text{в2}}$)?

2.8. Радиоимпульс с высокочастотным заполнением на частоте ω распространяется вдоль линии передач. Найти время, за которое импульс пройдет отрезок

линии длины l для двух случаев:

а) это импульс первой распространяющейся волны в незаполненном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения $a \times b$ ($a > b$);

б) это импульс главной волны (ТЕМ) в незаполненной коаксиальной линии.

2.9. Найти сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между поперечными компонентами полей **E** и **H** волноводной моды в двух случаях: а) $\omega > \omega_{кр}$; б) $\omega < \omega_{кр}$ ($\omega_{кр}$ — критическая частота волноводной моды).

2.10. Определить длину волны ТЕ₁₀, ее фазовую скорость и волновое сопротивление, если прямоугольный волновод с сечением $a \times b$ ($a > b$) заполнен диэлектриком с проницаемостями ε и μ , а частота поля равна ω .

2.11. В прямоугольном волноводе с сечением $a \times b$ ($a > b$), заполненном диэлектриком с проницаемостями ε и μ , распространяется волна ТЕ₃₂ с частотой ω . Определить длину волны, ее фазовую скорость и волновое сопротивление. Нарисовать структуру электрического и магнитного полей этой волны.

2.12. В идеальном прямоугольном волноводе с поперечным сечением $a \times b$ ($a > b$) распространяется низшая мода на частоте ω , несущая вдоль волновода мощность P . Найти максимальное значение амплитуды электрического поля E_{\max} .

2.13. Определить максимальную мощность волны ТЕ₀₁, которую можно пропускать по прямоугольному волноводу с поперечным сечением $a \times b$ ($a > b$), если известно значение пробойного поля $E_{\text{проб}}$ и частота ω .

2.14. Определить постоянную затухания волны ТЕ₁₀, распространяющейся в прямоугольном волноводе с поперечным сечением $a \times b$ ($a > b$). Волновод заполнен диэлектриком с тангенсом угла потерь $\text{tg } \chi = \varepsilon_i / \varepsilon_r$, частота волны ω .

2.15. Найти коэффициент отражения волны Γ от скачка диэлектрической проницаемости в линии передач: при $z < 0$ $\varepsilon = \varepsilon_1$, при $z > 0$ $\varepsilon = \varepsilon_2$ (z — продольная координата). Волна имеет поперечное волновое число α и частоту ω . Рассмотреть две различные поляризации волны: а) поперечно-электрическую (ТЕ); б) поперечно-магнитную (ТМ).

2.16. Нарисовать мгновенную картину токов, наведенных в стенках прямоугольного волновода с поперечным сечением $a \times b$ ($a > b$) полем волны а) ТЕ₁₀; б) ТЕ₀₁. Где и как следует разрезать измерительную щель в каждом из этих случаев?

2.17. Нарисовать картину токов, наведенных в стенках круглого волновода волнами ТМ₀₁ и ТМ₁₁.

2.18. Определить амплитуду волны ТЕ₀₁, возбуждаемую штырем длины l с током $I_0 e^{i\omega t}$ в бесконечном прямоугольном волноводе. Штырь расположен вдоль

оси x в точке (y_0, z_0) . Размеры поперечного сечения волновода $a \times b$ ($a > b$).

2.19. Найти сопротивление излучения дипольного штыря длины l в моду TE_{10} незаполненного прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения $a \times b$ ($a > b$). Штырь расположен перпендикулярно широкой стенке на расстоянии l_1 от узкой стенки. Ток частоты ω распределен по длине штыря равномерно.

2.20. Где и как надо расположить а) штырь с током; б) виток с током, чтобы возбудить волну TE_{11} в круглом волноводе?

2.21. В пустом прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times d$ ($a < b < d$) возбужден низший тип колебаний с максимальной амплитудой электрического поля E_0 . Найти собственную частоту колебаний ω и полную запасенную в резонаторе энергию W .

2.22. Определить добротность колебаний типа TE_{011} в резонаторе с размерами $a \times b \times d$ ($a < b < d$), заполненном диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε и тангенсом угла потерь $\operatorname{tg} \chi$.

2.23. Указать самый низкий тип колебаний и найти его собственную частоту ω для цилиндрического резонатора с высотой d и радиусом a в двух случаях: а) $d \gg a$; б) $d \ll a$.

2.24. Найти коэффициент возбуждения e_1 колебания TE_{011} , создаваемого в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times d$ ($a < b < d$) током $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 I_0 \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) e^{i\omega t}$ ($0 \leq x \leq l < a$) с частотой $\omega \simeq \omega_{011}$, где ω_{011} — частота колебания TE_{011} . Резонатор заполнен средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_r (1 - i \operatorname{tg} \chi)$ (χ — тангенс угла потерь среды).

2.25. Как ориентировать а) штырь с током; б) виток с током, чтобы возбудить колебания в коаксиальном резонаторе?

2.26. Определить диаграмму направленности тонкой антенны длины $2l$ с током $I_0 e^{i\omega t}$. Ток вдоль антенны распределен равномерно.

2.27. Найти диаграмму направленности тонкой антенны длины $2l \gg \lambda$ с током $I_0 e^{i(\omega t - hz)}$ ($h = \operatorname{const}$, ось z направлена вдоль антенны). Рассмотреть случаи а) $h \geq k$, б) $h < k$.

2.28. Определить КНД короткой дипольной антенны ($2l \ll \lambda$) с переменным током $I_0 e^{i\omega t}$. Ток вдоль антенны распределен равномерно.

2.29. Определить сопротивление излучения короткой дипольной антенны ($2l \ll \lambda$) с переменным током $I_0 e^{i\omega t}$.

2.30. Как зависит сопротивление излучения круговой рамочной антенны с током $I_0 e^{i\omega t}$ от ее радиуса a ($a \ll \lambda$)?

2.31. Найти векторный потенциал \mathbf{A} и поля \mathbf{E} , \mathbf{H} в дальней зоне излучателя, представляющего собой прямоугольник $|x| < a$, $|z| < b$ в плоскости $y = 0$ с равномерно распределенным по нему поверхностным током $\mathbf{j}_s = \mathbf{z}_0 J_0 e^{i\omega t}$. Изобразить диаграмму направленности излучения в плоскостях xy и yz при больших значениях параметров ka и kb . Как зависит угловая ширина основного лепестка диаграммы направленности в этих плоскостях от размеров излучателя и длины волны?

2.32. Найти направление максимального излучения вертикального электрического диполя, расположенного на высоте $h \ll \lambda$ над бесконечной идеально проводящей плоскостью.

2.33. Определить диаграмму направленности малого ($a \ll \lambda$) витка с током $I_0 e^{i\omega t}$, расположенного параллельно бесконечной идеально проводящей плоскости на высоте $h \ll \lambda$ от нее.

2.34. Плоская волна с волновым числом k рассеивается на диэлектрическом шаре малого радиуса a ($ka \ll 1$), расположенном в вакууме. Диэлектрическая проницаемость шара равна ε . Найти радиолокационное сечение рассеяния шара $\zeta_{рл}$ в квазистатическом приближении.

2.35. Найти радиолокационное сечение рассеяния $\zeta_{рл}$ прямоугольной металлической пластинки с размерами $a \times b$ в случае облучения по нормали плоской волной с волновым числом k ($ka \gg 1$, $kb \gg 1$).

2.36. Круглая металлическая пластинка радиуса a облучается по нормали плоской волной амплитуды E_0 , длина волны $\lambda \ll a$. Найти амплитуду поля отраженной волны E_r в точках, лежащих на оси симметрии пластинки и удаленных от нее на расстояние z для следующих случаев: а) $z \ll a^2/\lambda$; б) $z \gg a^2/\lambda$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1.2. $\frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$.

1.3. $\nabla\varphi = i\mathbf{k}\varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{E} = (i\mathbf{k}, \mathbf{E})$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = [i\mathbf{k}, \mathbf{E}]$.

1.6. $3V$.

1.10. $\rho(y) = bAy + aA + bB$.

1.11. $H_x(x) = -Ax$.

1.12. $\mathbf{E}(t) = -\mathbf{z}_0 \frac{A}{\varepsilon_0} t$.

1.13. $\mathbf{H}(t) = \mathbf{z}_0 \frac{P}{\mu} t$.

1.14. $\mathbf{E}(+0) = \mathbf{x}_0 C_1 + \mathbf{z}_0 \left(C_2 + \frac{\Omega}{\varepsilon} \right)$.

1.15. Вне сферы ($r > a$) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$, $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$; внутри сферы ($r < a$)
 $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a}$, $\mathbf{E} = 0$.

1.16. $\mathbf{E} = \pm \frac{\Omega}{2\varepsilon_0} \mathbf{x}_0$ (вектор \mathbf{x}_0 перпендикулярен плоскости).

1.17. $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$.

1.18. $\mathbf{E} = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}$.

1.19. Вне шара ($r > a$) $\mathbf{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r}$; внутри шара ($r < a$) $\mathbf{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon} \mathbf{r}$.

1.20. Внутри каждого квадранта плоскости xy поле однородно и параллельно соответствующей биссектрисе. Величина поля $E = \frac{\Omega}{\sqrt{2}\varepsilon_0}$.

1.21. 1) $\mathbf{E}(x_1, 0, 0) = -\mathbf{z}_0 \frac{bq}{2\pi\varepsilon_0 x_1^3}$; 2) $\mathbf{E}(0, 0, z_2) = \mathbf{z}_0 \frac{bq}{\pi\varepsilon_0 z_2^3}$; 3) $\varphi(r_3) = \frac{bq}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r_3^2}$, $\mathbf{E}(r_3) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r_3^3} (3\mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_0)$.

1.22. *Решение.* Воспользуемся общим решением уравнения Пуассона (для линейного заряда): $\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{L}'} \frac{\rho_{\text{лин}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl'$, где \mathcal{L}' — окружность радиуса a ,

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$ — величина, не зависящая от r' .

Поскольку заряд распределен по окружности равномерно, то $\rho_{\text{лин}} = \frac{q}{2\pi a} = \text{const}$. Тогда выражение для потенциала приобретает вид

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{L}'} \frac{q/2\pi a}{\sqrt{z^2 + a^2}} dl' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{2\pi a \sqrt{z^2 + a^2}} \int_{\mathcal{L}'} dl' = \frac{q}{4\pi\epsilon \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

Из симметрии задачи следует, что поле на оси z имеет только компоненту E_z : $\mathbf{E} = E_z \mathbf{z}_0$, поэтому

$$E_z(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{2z}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \right) = \frac{qz}{4\pi\epsilon(\sqrt{z^2 + a^2})^3}.$$

Следовательно, $\mathbf{E}(z) = \frac{qz}{4\pi\epsilon(\sqrt{z^2 + a^2})^3} \mathbf{z}_0$.

Найдем точку на оси z , в которой напряженность поля достигает максимума. Для этого рассмотрим производную функции $\frac{dE_z(z)}{dz}$ и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dE_z}{dz} &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{(\sqrt{z^2 + a^2})^3} + (-3/2) z \frac{2z}{(\sqrt{z^2 + a^2})^5} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{(\sqrt{z^2 + a^2})^3} - \frac{3z^2}{(\sqrt{z^2 + a^2})^5} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{dE_z}{dz} = 0, \quad \frac{1}{(\sqrt{z^2 + a^2})^3} = \frac{3z^2}{(\sqrt{z^2 + a^2})^5}, \quad z^2 + a^2 = 3z^2, \quad z_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Итак, $E_{z \max} = E_z(z_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\pm a/\sqrt{2}}{(\sqrt{a^2/2 + a^2})^3} = \pm \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon a^2}$. При этом $\varphi(z_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2/2 + a^2}} = \frac{q}{2\sqrt{6}\pi\epsilon a}$.

Чтобы найти точку, в которой потенциал достигает наибольшего значения, приравняем к нулю производную $\frac{d\varphi}{dz}$: $\frac{qz}{4\pi\epsilon(\sqrt{z^2 + a^2})^3} = 0$. Отсюда следует, что

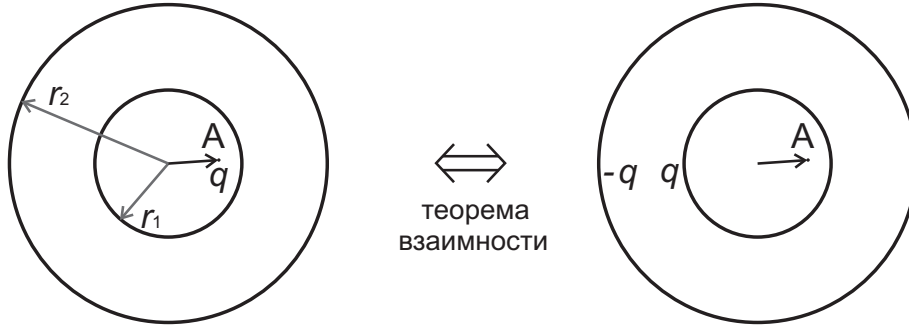
$$z_2 = 0, \quad \varphi(z_2) = \varphi_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon a}.$$

Очевидно, что $E_z(z_2) = 0$ (т.к. $E_z(z) = -\partial\varphi/\partial z$).

$$\mathbf{1.23.} \quad \varphi(z) = \frac{\Omega}{2\epsilon} (\sqrt{z^2 + a^2} - |z|), \quad E_z(z) = \frac{\Omega z}{2\epsilon} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right).$$

1.24. Решение. а) $b < r_1 < r_2$.

Воспользуемся теоремой взаимности и рассмотрим 3 объекта: внутреннюю сферу, внешнюю сферу и точечный заряд в точке A .



Выберем второе распределение зарядов при той же конфигурации проводников: на поверхность внутренней сферы поместим заряд q , на поверхность внешней сферы — заряд $-q$, а из точки A заряд уберем. В этом случае теорема взаимности запишется в виде выражения

$$q_1^{(1)} \cdot \varphi_1^{(2)} + q_2^{(1)} \cdot \varphi_2^{(2)} + q_3^{(1)} \cdot \varphi_3^{(2)} = q_1^{(2)} \cdot \varphi_1^{(1)} + q_2^{(2)} \cdot \varphi_2^{(1)} + q_3^{(2)} \cdot \varphi_3^{(1)}, \quad (*)$$

в котором верхними индексами (1) и (2) обозначены два распределения заряда: (1) — заряд q находится в точке A , сферы не заряжены; (2) — внутренняя сфера заряжена зарядом q , внешняя — зарядом $-q$, в точке A заряда нет.

Требуется найти разность потенциалов между сферами $U = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(2)}$.

Заряды известны:

$q_1^{(1)} = 0$	$q_2^{(1)} = 0$	$q_3^{(1)} = q$
$q_1^{(2)} = q$	$q_2^{(2)} = -q$	$q_3^{(2)} = 0$
внутренняя сфера	внешняя сфера	точечный заряд

Подставим их в теорему взаимности (*):

$$0 \cdot \varphi_1^{(2)} + 0 \cdot \varphi_2^{(2)} + q \cdot \varphi_3^{(2)} = q \cdot \varphi_1^{(1)} - q \cdot \varphi_2^{(1)} + 0 \cdot \varphi_3^{(1)},$$

следовательно $\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)} = \varphi_3^{(2)}$, $U = \varphi_3^{(2)}$.

Здесь $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_2^{(1)}$ — это потенциалы внутренней и внешней сфер в первоначальном распределении зарядов (т.е. когда они были не заряжены), а $\varphi_3^{(2)}$ — это потенциал, который создается в точке A двумя заряженными сферами.

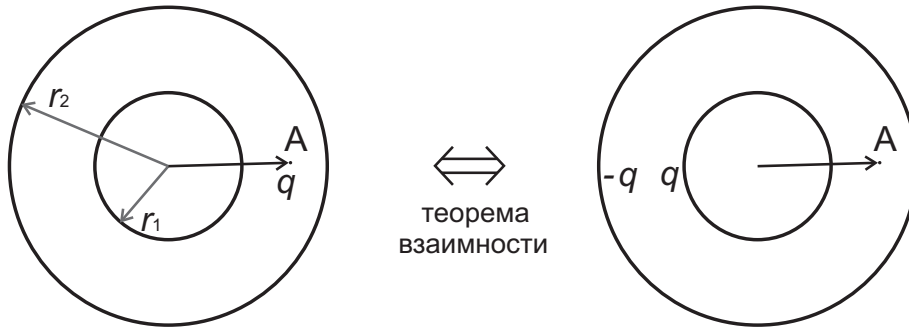
Из принципа суперпозиции имеем

$$\varphi_3^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

(здесь учтено, что потенциал внутри сфер постоянен и совпадает с потенциалом на их поверхности). Таким образом, $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

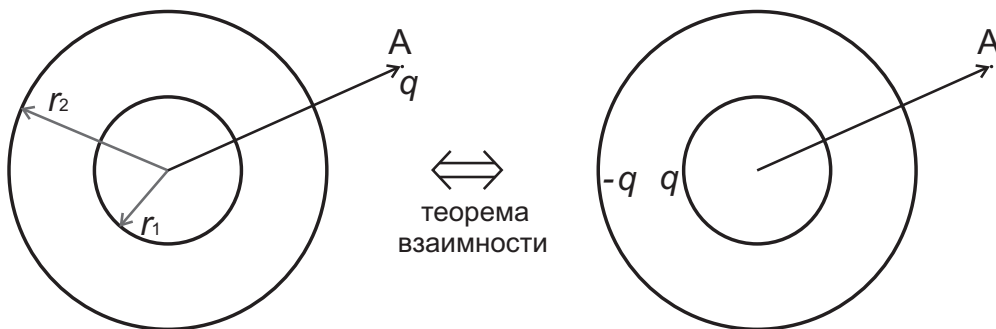
Отметим, что этот результат не зависит от величины b , т.е. если перемещать точечный заряд внутри меньшей сферы, то разность потенциалов между сферами изменяться не будет.

б) $r_1 < b < r_2$.



Аналогично случаю а), применяя теорему взаимности, получим $\varphi_3^{(2)} = U = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}$. Однако теперь потенциал, создаваемый внутренней сферой, будет определяться расстоянием b от ее центра до точки наблюдения: $\varphi_1^{(1)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$, поэтому $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r_2} \right)$.

в) $r_1 < r_2 < b$.

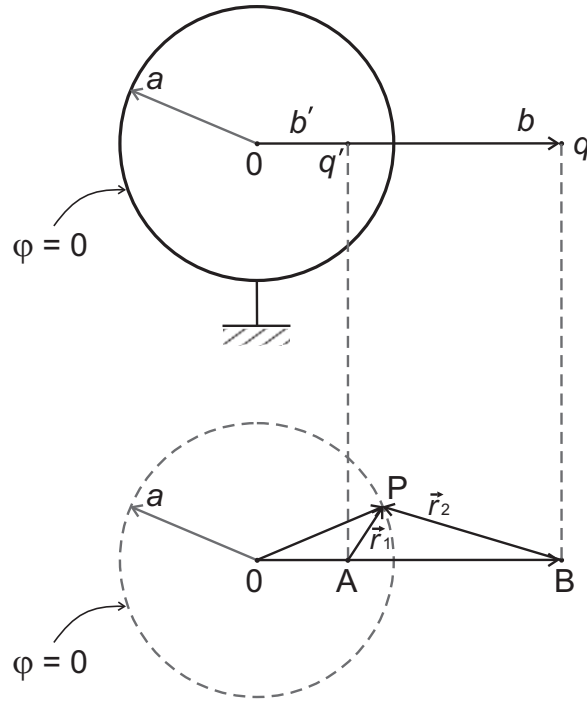


По теореме взаимности $\varphi_3^{(2)} = U = \varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}$. Теперь точка A находится снаружи обеих сфер, поэтому $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b} \right) = 0$.

1.25. $U = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

1.26. $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}$.

1.27. *Решение.* Покажем, что величина и расположение заряда-изображения подобраны правильным образом, т.е. система зарядов q и заряд $-q$ (см. рисунок) обеспечивает нужные граничные условия на поверхности сферы. По условию сфера заземлена, поэтому надо доказать, что потенциал φ_P в каждой точке P на ее поверхности равен нулю.



Согласно принципу суперпозиции, $\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2$.

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{q}{|\mathbf{r}_2|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{a}{b} \frac{q}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{q}{|\mathbf{r}_2|} \right).$$

Из геометрических соображений следует, что треугольники OAP и OPB подобны (т.к. угол POB у них общий, $\frac{OP}{OB} = \frac{a}{b}$ и $\frac{OA}{OP} = \frac{b'}{a} = \frac{a^2/b}{a} = \frac{a}{b}$).

Тогда и для третьей пары сторон выполняется аналогичное соотношение $\frac{AP}{BP} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{a}{b}$, т.е. $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2| \frac{a}{b}$. Отсюда имеем

$$\varphi_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{a}{b} \frac{1}{|\mathbf{r}_2| \frac{a}{b}} + \frac{1}{|\mathbf{r}_2|} \right) = 0,$$

т.е. потенциал в любой точке P на поверхности сферы равен нулю.

Таким образом, суперпозиция потенциалов двух точечных зарядов q и q' , выбранных указанным выше способом, удовлетворяет граничным условиям на поверхности заземленной сферы. Это значит, что вне сферы поле этих двух зарядов совпадает с полем системы «заряд + сфера».

1.28. В центр сферы надо поместить дополнительный точечный заряд $-q' = -q \frac{a}{b}$.

1.29. Решение. Проводящая плоскость $x = 0$ представляет собой эквипотенциальную поверхность, в каждой точке которой потенциал равен нулю.

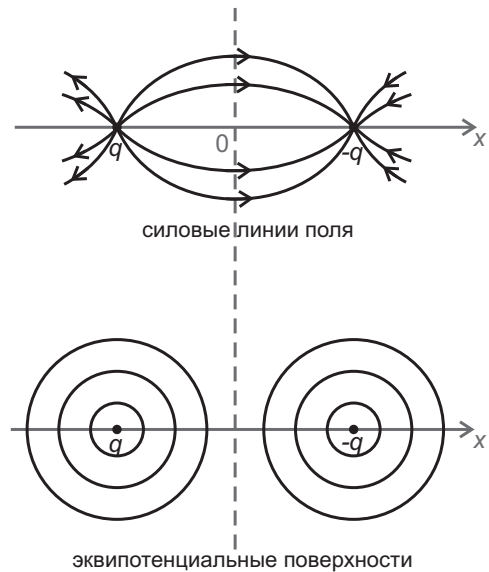
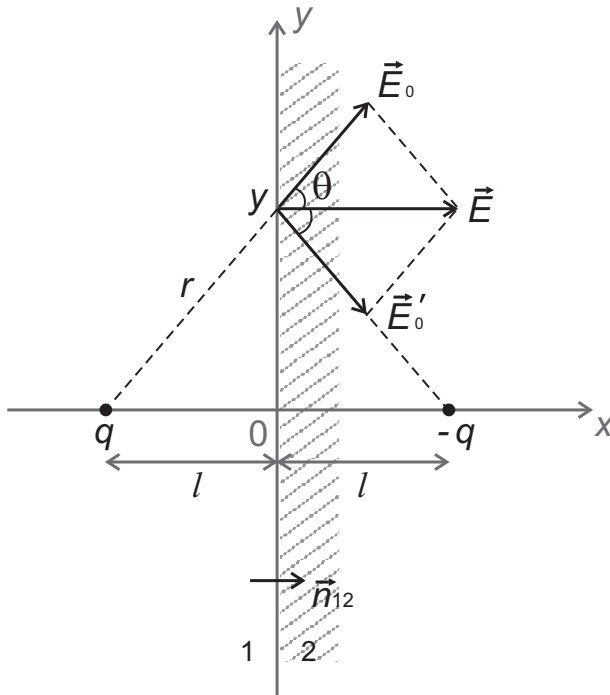
Найдем подходящую систему зарядов-изображений, которая обеспечивает нулевой потенциал в каждой точке плоскости. Поместим фиктивный заряд $-q$

симметрично исходному заряду относительно плоскости $x = 0$. Используя принцип суперпозиции, нетрудно показать, что одна из эквипотенциальных поверхностей такой системы совпадает с плоскостью $x = 0$, причем она как раз соответствует нулевому значению потенциала.

Электростатическое поле в любой точке плоскости $x = 0$ представляет собой суперпозицию полей двух точечных зарядов q и $-q$: $E_x = E_{0x} + E'_{0x} = 2E_0 \cos \theta$, где $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ — поле точечного заряда, $r^2 = l^2 + y^2$, $\cos \theta = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}}$.

Тогда
$$E_x = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0(l^2 + y^2)^{3/2}}.$$

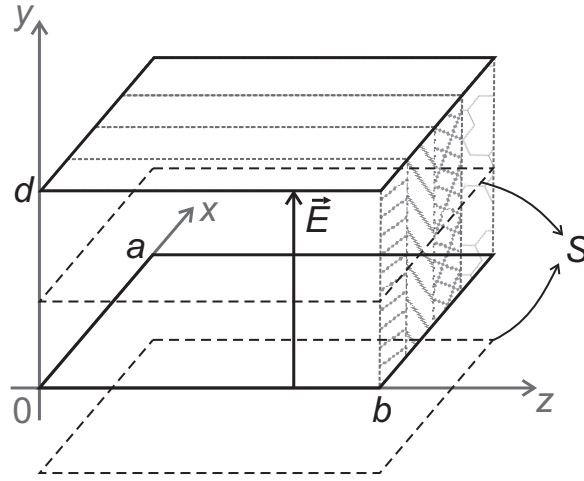
Чтобы найти плотность поверхностного заряда, воспользуемся граничным условием $D_{n2} - D_{n1} = \Omega$ ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$). При этом $E_{n2} = 0$ (внутри проводника поля нет), поэтому $0 - \epsilon_0 E_{n1} = \Omega$, $-\epsilon_0 E_x = \Omega$, следовательно $\Omega(y) = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + y^2)^{3/2}}$.



1.30. 1) $\varphi(x, y) = CU \cos ky e^{-k|x|}$; 2) $\Omega(y) = -2\epsilon C k U \cos ky$ ($C = \text{const}$).

1.31. $f(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$ ($C_1, C_2 = \text{const}$).

1.32. *Решение.* а) В незаполненном конденсаторе (при $\epsilon = \epsilon_0$) электростатическое поле однородно, напряженность и индукция поля не зависят от координат: $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_0$, $\mathbf{D} = \mathbf{y}_0 \epsilon_0 E_0$.



заполнение вдоль силовых линий

Выясним, как изменится поле при наличии неоднородного заполнения.

Внутри конденсатора объемный заряд отсутствует, поэтому поле может быть описано уравнением $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$. С учетом соотношений $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ имеем $\operatorname{div}(-\varepsilon \nabla \varphi) = 0$.

Применяя известное тождество, получим

$$\varepsilon(x) \operatorname{div}(\nabla \varphi) + (\nabla \varepsilon, \nabla \varphi) = 0, \quad \varepsilon(x) \Delta \varphi + (\nabla \varepsilon, \nabla \varphi) = 0.$$

Поскольку $\varepsilon = \varepsilon(x)$, то $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0$, и уравнение для потенциала принимает вид

$$\varepsilon(x) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

В этой задаче величина диэлектрической проницаемости ε постоянна вдоль силовых линий поля незаполненного плоского конденсатора. Легко убедиться, что в этом случае структура поля \mathbf{E} остается такой же, как и в отсутствие заполнения: $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_y$, т.е. $E_z = E_x = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$,

$$\varepsilon(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy} = -C_1 = \text{const}.$$

Таким образом, $\mathbf{E} = -C_1 \mathbf{y}_0$ — напряженность поля не зависит от координат (как и в случае незаполненного конденсатора).

Очевидно, что индукция поля зависит от x : $\mathbf{D} = \varepsilon(x) \mathbf{E} = -C_1 \varepsilon(x) \mathbf{y}_0$.

Найдем заряд на обкладках конденсатора с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = Q.$$

В качестве поверхности интегрирования выберем параллелепипед, содержащий внутри одну из пластин (его верхняя и нижняя грани параллельны пластинам конденсатора).

Таким образом, $\int_0^b dz \int_0^a -C_1 \varepsilon(x) dx = Q$, $Q = -C_1 b \int_0^a \varepsilon(x) dx$.

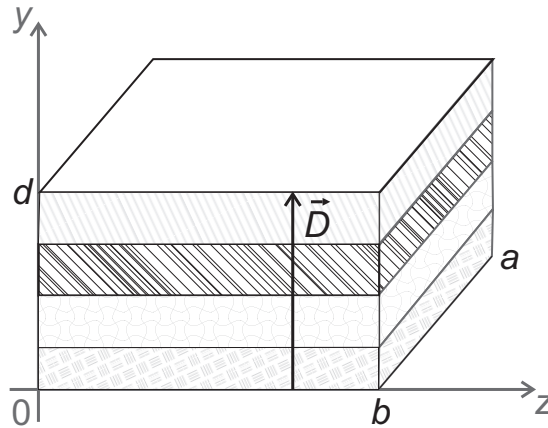
Найдем разность потенциалов между пластинами:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_0^d E_y dy = \int_0^d -C_1 dy = -C_1 d$$

и емкость конденсатора:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{-C_1 b \int_0^a \varepsilon(x) dx}{-C_1 d} = \frac{b}{d} \int_0^a \varepsilon(x) dx.$$

б) Рассмотрим неоднородное заполнение конденсатора $\varepsilon = \varepsilon(y)$.



заполнение поперек силовых линий

Аналогично случаю а) из уравнения $\text{div} \mathbf{D} = 0$ получим $\varepsilon(y) \Delta \varphi + (\nabla \varepsilon, \nabla \varphi) = 0$, откуда имеем $\varepsilon(y) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d\varepsilon}{dy} \frac{d\varphi}{dy} = 0$, $\frac{d}{dy} \left(\varepsilon(y) \frac{d\varphi}{dy} \right) = 0$, $\varepsilon(y) \frac{d\varphi}{dy} = C_2 = \text{const}$, $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{C_2}{\varepsilon(y)} = -E_y$.

Таким образом, $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}_0 = -\frac{C_2}{\varepsilon(y)} \mathbf{y}_0$, т.е. напряженность поля теперь зависит от координаты y (в отличие от незаполненного конденсатора). При заполнении вдоль эквипотенциалов структура поля \mathbf{E} изменяется.

Индукция поля остается такой же, как и в незаполненном конденсаторе:
 $\mathbf{D} = \varepsilon(y) \mathbf{E} = -C_2 \mathbf{y}_0$.

Найдем заряд на обкладках конденсатора: $Q = -C_2 \int_0^b dz \int_0^a dx = -C_2 ab$,

разность потенциалов между пластинами: $\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_0^d \frac{-C_2}{\varepsilon(y)} dy$ и емкость

$$\text{конденсатора } C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{-C_2 ab}{-C_2 \int_0^d \frac{dy}{\varepsilon(y)} dy} = \frac{ab}{\int_0^d \frac{dy}{\varepsilon(y)}}.$$

1.33. Найдем напряженность электростатического поля, соответствующую заданному потенциалу: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\mathbf{x}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathbf{x}_0 E_x$.

$$E_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \quad x > x_2 \\ -C & \text{при } 0 < x < x_1 \\ 0 & \text{при } x_1 < x < x_2. \end{cases}$$

Вычислим объемную плотность заряда: $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$, поэтому $\rho = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = 0$ (объемный заряд отсутствует).

Рассмотрим отдельно плоскости $x = 0$ и $x = x_1$, в которых поле E_x терпит разрыв. Очевидно, на этих плоскостях расположен поверхностный заряд Ω , величину которого найдем из граничных условий: $D_{n2} - D_{n1} = \Omega$.

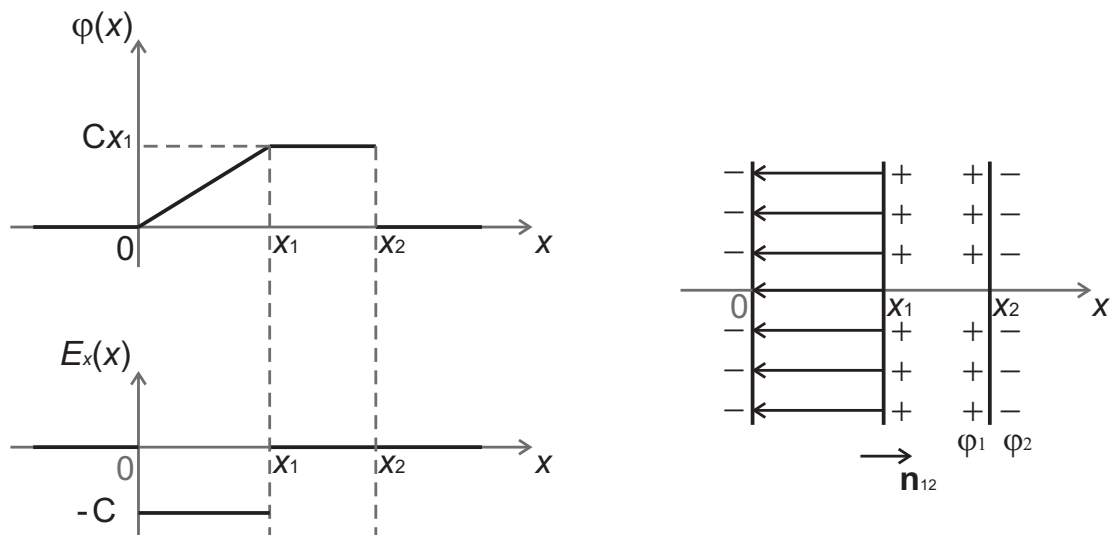
а) $x = 0$: $\Omega = \varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = -\varepsilon_0 C - 0 = -\varepsilon_0 C$,

б) $x = x_1$: $\Omega = \varepsilon_0 E_{n2} - \varepsilon_0 E_{n1} = 0 - (-\varepsilon_0 C) = \varepsilon_0 C$.

Заметим, что в плоскости $x = x_2$ терпит разрыв сам потенциал (при этом поле остается непрерывным). Это значит, что в ней есть двойной электрический слой, представляющий собой систему диполей, перпендикулярных плоскости. Его мощность (дипольный момент единицы площади) определяется по формуле $P = \varepsilon_0(\varphi_2 - \varphi_1) = \varepsilon_0(0 - Cx_1) = -\varepsilon_0 Cx_1$.

Таким образом, заданное распределение потенциала создается системой двух заряженных плоскостей ($x = 0$ и $x = x_1$) с поверхностными плотностями заряда $-\varepsilon_0 C$ и $\varepsilon_0 C$ и двойного слоя в плоскости $x = x_2$ с мощностью $P = -\varepsilon_0 Cx_1$.

Ниже приведены графики зависимости $\varphi(x)$ и $E_x(x)$, а также показано схематичное распределение зарядов в данной системе.



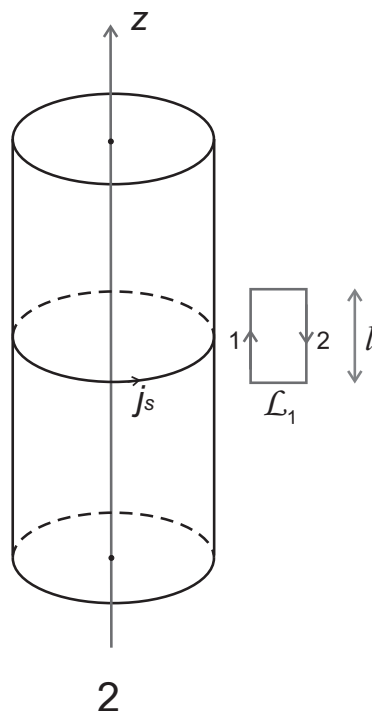
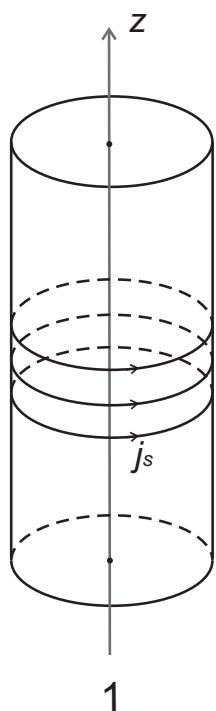
1.34. Поверхностный заряд с плотностью $\Omega = -2\epsilon_0 C$ в плоскости $x = 0$.

1.35. Объемный заряд с плотностью $\rho = -\alpha^2 \epsilon_0 C \exp(-\alpha|x|)$ и поверхностный заряд с плотностью $\Omega = 2\alpha \epsilon_0 C$ при $x = 0$.

1.36. 1) $\mathbf{B} = -\mathbf{z}_0 2Py$, $\mathbf{H} = -\mathbf{z}_0 \frac{2P}{\mu} y$; 2) $\mathbf{j} = -\mathbf{x}_0 \frac{2P}{\mu}$, $q = \frac{2P}{\mu} ab \Delta t$.

1.37. $\mathbf{B}(-0) = \mathbf{x}_0(C_1 - \mu J_0) + \mathbf{z}_0 C_2$.

1.38. Решение. 1) Напряженность магнитного поля находится из уравнения Максвелла $\oint_{\mathcal{L}_1} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = I$.

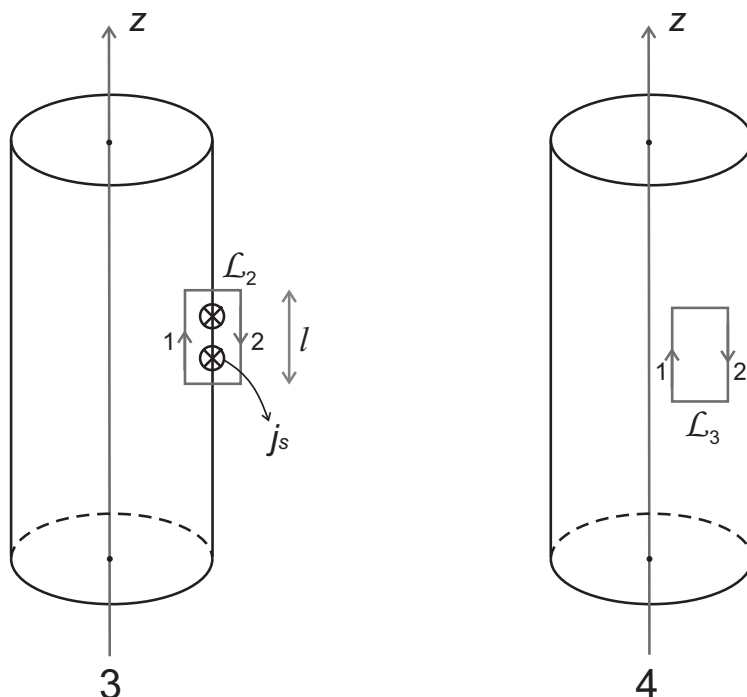


а) Найдем поле вне соленоида (при $r > a$).

В качестве контура возьмем прямоугольник \mathcal{L}_1 вне цилиндра (см. рис. 2).

Из симметрии задачи очевидно, что у магнитного поля есть только компонента H_z : $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 H_z$. Действительно, из уравнения Максвелла $\text{div}\mathbf{B} = 0$ следует, что радиальная компонента поля равна нулю ($H_r = 0$). Кроме того, $H_\varphi = 0$, т.к. в противном случае существовала бы ненулевая циркуляция поля по контуру, площадь которого не пронизывается током.

Учтем, что ненулевой вклад в циркуляцию магнитного поля по прямоугольнику \mathcal{L}_1 дадут только стороны 1 и 2 с длиной l , поэтому $(H_{1z} - H_{2z})l = 0$ (ток не пронизывает контур \mathcal{L}_1), т.е. $H_{1z} = H_{2z}$ (поле снаружи соленоида постоянно). С учетом того, что $H(\infty) = 0$, получаем $\mathbf{H} = 0$ при $r > a$.

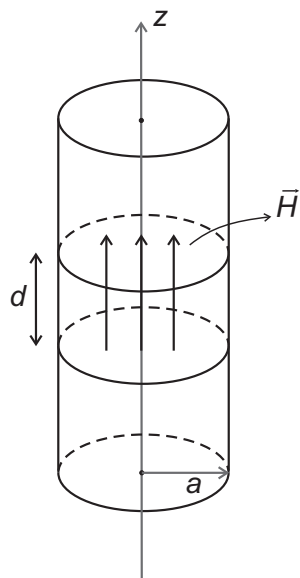


б) Вычислим циркуляцию поля вдоль контура \mathcal{L}_2 , показанного на рис. 3. $(H_{1z} - \underbrace{H_{2z}}_{=0})l = j_s l$, $H_{1z} = j_s = \text{const}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{z}_0 j_s$.

в) Найдем поле внутри соленоида (при $r < a$).

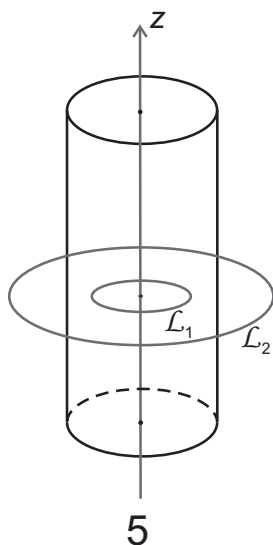
Теперь в качестве контура возьмем прямоугольник \mathcal{L}_3 внутри цилиндра (см. рис. 4). В этом случае $(H_{1z} - H_{2z})l = 0$ (т.к. ток не пронизывает контур), поэтому $H_{1z} = H_{2z} = j_s = \text{const}$, $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 j_s$ при $r < a$.

2) Вычислим энергию, приходящуюся на единицу длины соленоида. Для этого рассмотрим часть цилиндра, имеющую длину d .



$$W_1 = \frac{1}{d} \int_V w dV = \frac{1}{d} \int_V \frac{(\mathbf{H}, \mathbf{B})}{2} dV = \frac{\mu}{2d} \int_V |\mathbf{H}|^2 dV = \frac{\mu}{2d} j_s^2 \underbrace{d\pi a^2}_V = \frac{\pi a^2 \mu j_s^2}{2}.$$

3) Найдем циркуляцию векторного потенциала по контуру \mathcal{L} , а также зависимость $\mathbf{A}(r)$.



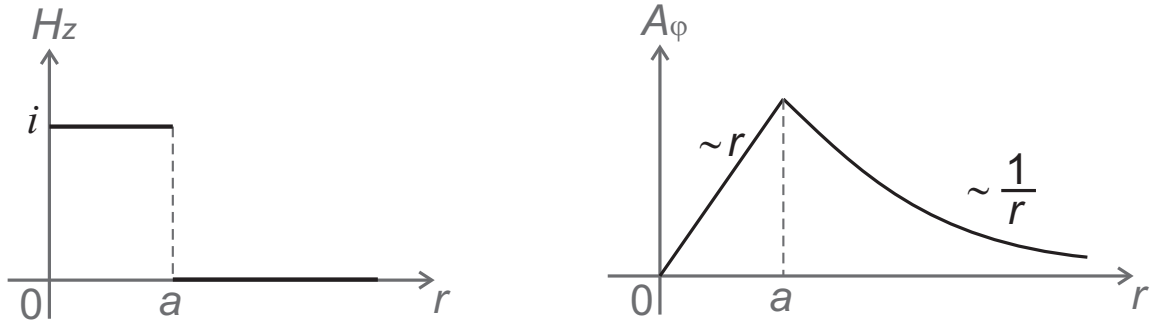
5

Воспользуемся формулой Стокса:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{A}, d\mathbf{l}) &= \iiint_S (\text{rot} \mathbf{A}, d\mathbf{S}) = \iiint_S (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \iiint_S \mu (\mathbf{H}, d\mathbf{S}) = \\ &= \begin{cases} \mu j_s \pi r^2, & r < a \text{ (контур } \mathcal{L}_1 \text{ на рис. 5)} \\ \mu j_s \pi a^2, & r > a \text{ (контур } \mathcal{L}_2 \text{ на рис. 5)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, при $r < a$ имеем $A_\varphi 2\pi r = \mu j_s \pi r^2$, $A_\varphi = \frac{\mu j_s}{2} r$, $\mathbf{A} = \varphi_0 \frac{\mu j_s}{2} r$;
 при $r > a$ $A_\varphi 2\pi r = \mu j_s \pi a^2$, $A_\varphi = \frac{\mu j_s a^2}{2r}$, $\mathbf{A} = \varphi_0 \frac{\mu j_s a^2}{2r}$.

На следующем рисунке показаны радиальные распределения напряженности поля $H_z(r)$ и потенциала $A_\varphi(r)$.

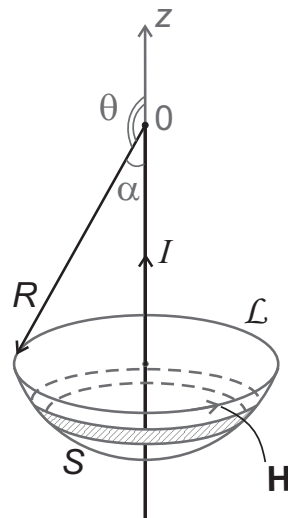


1.39. 1) Вне цилиндра ($r > a$) $\mathbf{H} = \varphi_0 \frac{I}{2\pi r}$, внутри цилиндра ($r < a$)
 $\mathbf{H} = \varphi_0 \frac{I}{2\pi a^2} r$; 2) $W_m = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

1.40. *Решение.* Воспользуемся уравнением Максвелла

$$\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S})}_{I_s}$$

(первое слагаемое в правой части — ток проводимости, а второе — ток смещения).



Поскольку провод обрывается в точке O , в ней накапливается заряд q , изменяющийся во времени: $q = q(t)$. Этот заряд создает переменное электрическое поле с напряженностью $E(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t)}{R^2}$ и индукцией $D(R, t) = \epsilon_0 E(R, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{q(t)}{R^2}$.

Запишем ток смещения: $I_s = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \iint_S \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R^2} \underbrace{\frac{dq(t)}{dt}}_I dS$.

Поверхность интегрирования S представляет собой часть сферы (сферический сегмент, опирающийся на окружность \mathcal{L}), поэтому в качестве элемента поверхности dS выберем поясок (см. рисунок), для которого $dS = \underbrace{2\pi R \sin \theta}_{\text{радиус пояска}} \underbrace{R d\theta}_{\text{ширина}}$.

Тогда

$$I_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^\alpha \frac{I}{R^2} 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha = \frac{I}{2} \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{I}{2} (1 - \cos \alpha).$$

Подставим I_s в уравнение для циркуляции, учитывая, что поле в силу симметрии будет иметь только компоненту H_φ : $\mathbf{H} = \varphi_0 H_\varphi$. Заметим также, что ток смещения направлен противоположно току I :

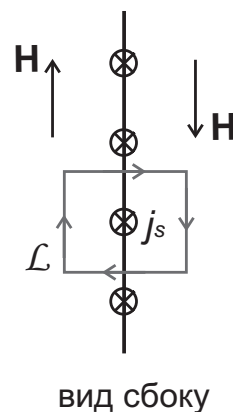
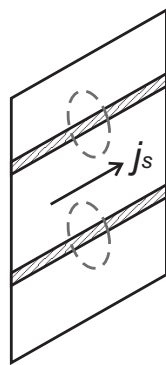
$$H_\varphi 2\pi R \sin \alpha = I - \frac{I}{2}(1 - \cos \alpha),$$

поэтому $H_\varphi = \frac{I}{4\pi R} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Перейдем к полярному углу θ : $\alpha = \pi - \theta$, $\cos \alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, $\sin \alpha = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, тогда

$$H = \frac{I}{4\pi R} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{I}{4\pi R} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

1.41. Решение.



Разобьем мысленно плоскость с током на тонкие нити с током. Рассмотрим две такие нити, симметричные относительно некоторой прямой, параллельной направлению тока (см. рисунок). Используя принцип суперпозиции и учитывая симметрию задачи, можно установить, что результирующее поле \mathbf{H} направлено

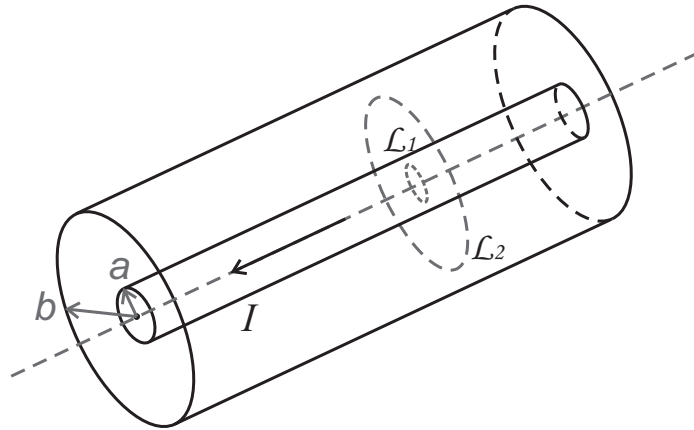
параллельно плоскости с током (направления векторов \mathbf{H} с двух сторон плоскости противоположны друг другу).

Чтобы найти напряженность магнитного поля, воспользуемся уравнением Максвелла $\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = I$. В качестве контура \mathcal{L} выберем квадрат со стороной l , параллельной вектору \mathbf{H} (плоскость этого квадрата ортогональна плоскости с током и пересекает ее). Таким образом, $Hl + Hl = I$, $2Hl = j_s l$, поэтому $H = \frac{j_s}{2}$ (с обеих сторон плоскости поле однородно).

$$1.43. H_z(z) = \frac{Ia^2}{2(\sqrt{a^2 + z^2})^3}.$$

$$1.44. \mathbf{H}(x, 0, 0) = -\mathbf{z}_0 \frac{Ia^2}{4\mu x^3}.$$

1.45. *Решение.*



Чтобы найти магнитное поле в данной системе, воспользуемся уравнением Максвелла $\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \underbrace{\iint_S (\mathbf{j}, d\mathbf{S})}_I$.

Поскольку ток распределен равномерно по внутреннему проводу, $j = \frac{I}{\pi a^2}$.

В силу симметрии у поля \mathbf{H} будет только компонента H_φ .

1) Вычислим напряженность магнитного поля внутри провода (т.е. при $r < a$):

$$H_\varphi 2\pi r = \underbrace{\frac{I}{\pi a^2}}_j \underbrace{\pi r^2}_S, \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi a^2} r.$$

2) Найдем напряженность магнитного поля внутри коаксиальной линии (т.е.

$$\text{при } a < r < b): H_\varphi 2\pi r = I, \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}.$$

Рассмотрим отрезок коаксиальной линии длины l и найдем энергию, запасенную внутри него:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_V \frac{(\mathbf{B}, \mathbf{H})}{2} dV = \int_0^a \int_0^l \frac{\mu_0 |\mathbf{H}_1|^2}{2} 2\pi r dr dz + \int_0^b \int_0^l \frac{\mu_0 |\mathbf{H}_2|^2}{2} 2\pi r dr dz = \\
 &= \mu_0 \pi l \left(\int_0^a \left(\frac{I}{2\pi a^2} r \right)^2 r dr + \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 r dr \right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\int_0^a \frac{r^3}{a^4} dr + \int_a^b \frac{dr}{r} \right) = \\
 &= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{1}{a^4} \frac{r^4}{4} \Big|_0^a + \ln |r| \Big|_a^b \right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).
 \end{aligned}$$

Тогда энергия W_1 , приходящаяся на единицу длины линии, запишется в виде

$$W_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

С другой стороны, $W_1 = \frac{L_1 I^2}{2}$, где L_1 — коэффициент самоиндукции единицы длины линии.

Таким образом,

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{L_1 I^2}{2}, \quad L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

1.46. $H(R) \sim \frac{1}{R^3}$.

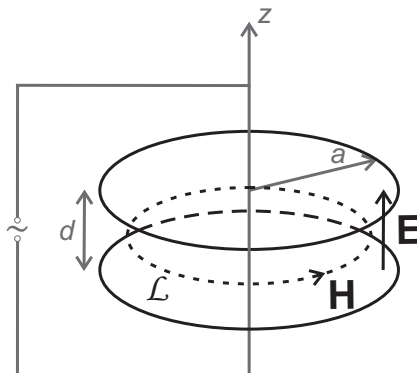
1.47. $\Omega = j_n \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right)$.

1.48. $U = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$.

1.49. 1) $\mathbf{j} = \mathbf{y}_0 \frac{I}{ab}$, $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 \frac{I}{ab\sigma}$ (ось y перпендикулярна пластинам); 2)

$$U = \frac{Id}{ab\sigma}.$$

1.50. Решение.



Используем уравнения Максвелла в дифференциальной форме и материальные соотношения:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Очевидно, $\mathbf{j} = 0$ (в конденсаторе нет тока проводимости).

Изменяющийся во времени заряд является источником переменного электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}(t)$ и индукцией $\mathbf{D}(t)$, которая, согласно первому уравнению, порождает переменное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H}(t)$ и индукцией $\mathbf{B}(t)$. В свою очередь, изменяющееся во времени поле $\mathbf{B}(t)$, согласно второму уравнению, приводит к появлению вихревого электрического поля $\mathbf{E}_{\text{вихр}}(t)$. Вихревую компоненту необходимо прибавить к напряженности $\mathbf{E}(t)$, чтобы получить суммарное переменное электромагнитное поле.

В рамках квазистатики вихревым электрическим полем можно пренебречь (можно не учитывать запаздывание, т.е. время, за которое волна со скоростью света пройдет расстояние a). В нашем случае условие квазистатики оказывается выполненным, поскольку $a \ll \frac{c}{\omega} = \frac{c}{2\pi f} = \frac{c}{2\pi c/\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Таким образом, уравнения для электромагнитного поля запишутся в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{кв/ст}} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_{\text{кв/ст}} = \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе можно приближенно найти так же, как в электростатической задаче: $E_{\text{кв/ст}} = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d} \sin \omega t$,

$$\mathbf{E}_{\text{кв/ст}} = \frac{U_0}{d} \sin \omega t \mathbf{z}_0.$$

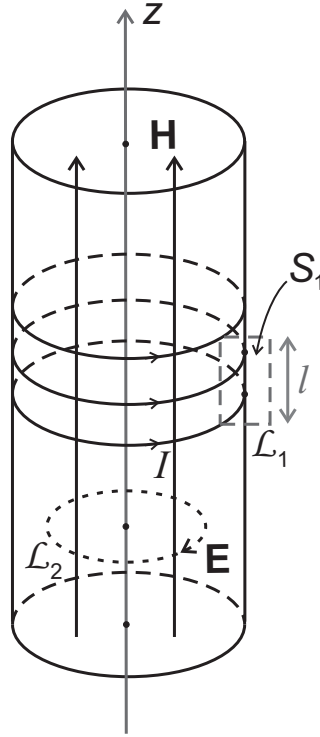
Чтобы определить напряженность магнитного поля, применим к первому уравнению из системы (*) формулу Стокса: $\oint_{\mathcal{L}} (\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\mathbf{D}, d\mathbf{S})$.

Очевидно, у поля \mathbf{H} есть только компонента H_φ : $\mathbf{H} = H_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0$, поэтому

$$\oint_{\mathcal{L}} H_\varphi dl = \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_0}{d} \varepsilon \sin \omega t \right) dS.$$

В качестве контура интегрирования \mathcal{L} возьмем окружность радиуса r ($r < a$) с центром на оси z (S — площадь круга, ограниченного данной окружностью). В этом случае $H_\varphi 2\pi r = \frac{U_0 \varepsilon}{d} \omega \cos \omega t \pi r^2$, следовательно $H_\varphi(r) = \frac{U_0 \varepsilon \omega}{2d} r \cos \omega t$, $\mathbf{H}(r, t) = \varphi_0 \frac{U_0 \varepsilon \omega}{2d} r \cos \omega t$.

1.51. *Решение.*



Используем уравнения Максвелла в дифференциальной форме и материальные соотношения:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Изменяющаяся во времени плотность тока \mathbf{j} является источником переменного магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}(t)$ и индукцией $\mathbf{B}(t)$, которая, согласно второму уравнению, порождает вихревое электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}(t)$ и индукцией $\mathbf{D}(t)$. В свою очередь, изменяющееся во времени поле $\mathbf{D}(t)$, согласно первому уравнению, приводит к появлению дополнительного магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{доп}}(t)$. Эту компоненту нужно добавить к напряженности $\mathbf{H}(t)$, чтобы получить полное переменное электромагнитное поле.

В рамках квазистатики можно пренебречь током смещения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ в первом уравнении, т.е. не учитывать создаваемое им дополнительно поле $\mathbf{H}_{\text{доп}}(t)$. Это справедливо при $a \ll \lambda$ (когда можно пренебречь запаздыванием).

Поскольку $a \ll \frac{c}{\omega} = \frac{c}{2\pi f} = \frac{c}{2\pi c/\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$, то условие квазистационарности магнитного поля выполняется, и систему уравнений можно записать в следующем приближенном виде:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Найдем напряженность магнитного поля так же, как в магнитостатической задаче: $\oint_{\mathcal{L}_1} H_l dl = \iint_{S_1} j_n dS$.

Очевидно, у поля \mathbf{H} есть только компонента H_z : $\mathbf{H} = H_z \mathbf{z}_0$.

В качестве контура интегрирования \mathcal{L}_1 выберем прямоугольник, как это показано на рисунке (S_1 — площадь этого прямоугольника), тогда $H_l l = \underbrace{\iint_{S_1} j_n dS}_{nI}$,

где $n l$ — количество витков, пронизывающих прямоугольник, I — сила тока в каждом витке. Отсюда имеем $H_z = n I = n I_0 \sin \omega t$, т.е. поле \mathbf{H} внутри однородно (как и в соответствующей статической задаче, оно не зависит от координат).

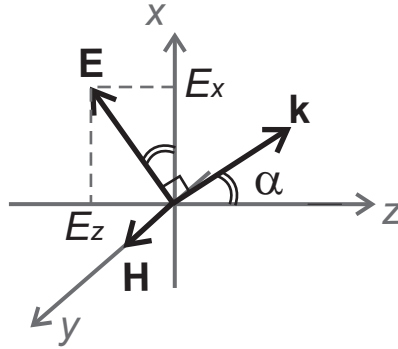
Найдем теперь напряженность электрического поля из уравнения Максвелла $\oint_{\mathcal{L}_2} (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_2} (\mathbf{B}, d\mathbf{S})$. В качестве контура интегрирования \mathcal{L}_2 выберем окружность радиуса r ($r < a$) с центром на оси z (S_2 — площадь круга, ограниченного данной окружностью).

У поля \mathbf{E} есть только компонента E_φ : $\mathbf{E} = E_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0$, следовательно

$$E_\varphi 2\pi r = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (n I_0 \sin \omega t) \underbrace{\pi r^2}_{S_2}, \quad E_\varphi 2\pi r = -\mu n I_0 \omega \cos \omega t \pi r^2,$$

откуда получаем $\mathbf{E}(r, t) = -\boldsymbol{\varphi}_0 \frac{\mu n I_0 \omega}{2} r \cos \omega t$.

1.52.



$$1) E_x = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} |\mathbf{E}_0| \exp [i(\omega t - k_x x - k_z z)],$$

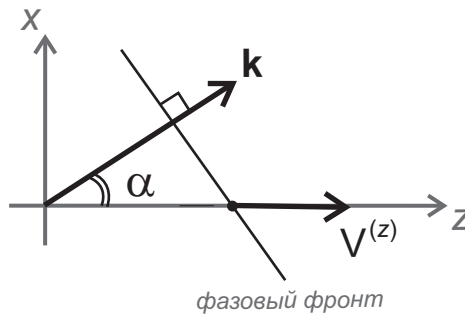
$$E_z = -\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} |\mathbf{E}_0| \exp [i(\omega t - k_x x - k_z z)],$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0| \exp [i(\omega t - k_x x - k_z z)];$$

$$2) \lambda_x = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon \mu} \sin \alpha}, \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon \mu} \cos \alpha};$$

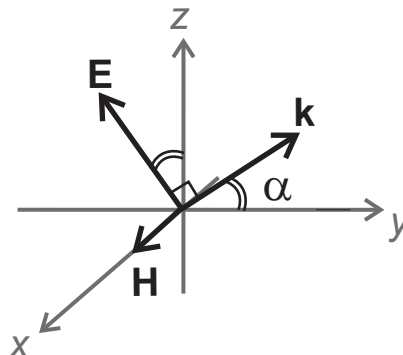
$$3) \lambda_x = \frac{\lambda_z}{\sqrt{\left(\frac{\omega \lambda_z}{2\pi}\right)^2 \epsilon \mu - 1}};$$

4)



$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda_x} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu - \left(\frac{1}{v(z)}\right)^2}}.$$

1.53.



$$1) E_x(x, y, z, t) = 0,$$

$$\operatorname{Re} E_y(x, y, z, t) = -|\mathbf{E}_0| \sin \alpha \cos(\omega t - k \cos \alpha y - k \sin \alpha z),$$

$$\operatorname{Re} E_z(x, y, z, t) = |\mathbf{E}_0| \cos \alpha \cos(\omega t - k \cos \alpha y - k \sin \alpha z)$$

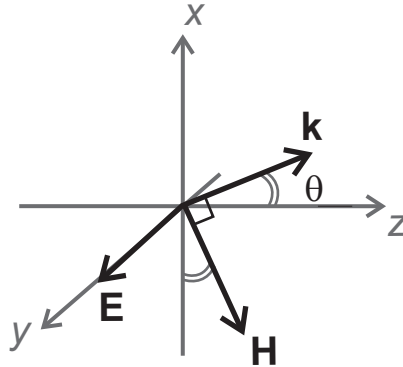
$$\operatorname{Re} H_x(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0| \sin \alpha \cos(\omega t - k \cos \alpha y - k \sin \alpha z)$$

$$H_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$H_z(x, y, z, t) = 0;$$

$$2) \lambda_y = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \alpha}, \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \alpha}.$$

1.54.



$$\operatorname{Re} H_x(x, y, z, t) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \cos \theta \cos(\omega t - \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \theta x - \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \theta z),$$

$$H_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$\operatorname{Re} H_z(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \sin \theta \cos(\omega t - \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \theta x - \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \theta z);$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

$$1.55. Z_{\perp TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\cos \alpha}; \quad Z_{\perp TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cos \alpha; \quad Z_{\perp TEM} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

$$1.56. E_0 = \sqrt{2S \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}, \quad H_0 = \sqrt{2S \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}.$$

$$1.57. E_x = 2E_0 \cos k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad H_y = 2E_0 \frac{k_z}{\omega \mu} \cos k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad H_z = 2iE_0 \times \\ \times \frac{k_y}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

1.58. Решение.

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega \sqrt{(\varepsilon_r + i\varepsilon_i) \mu} = k_r + ik_i.$$

Мнимая часть диэлектрической проницаемости ε и, следовательно, мнимая часть k свидетельствуют о наличии потерь энергии в среде. Однородная плоская волна, бегущая в такой среде, будет затухать.

Пусть волна распространяется вдоль оси z , тогда

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - (k_r + ik_i)z)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k_r z - ik_i z)} = \mathbf{E}_0 e^{k_i z} e^{i(\omega t - k_r z)},$$

т.е. амплитуда волны экспоненциально падает ($k_i < 0$). Возьмем действительную часть комплексного поля: $\text{Re } \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{k_i z} \cos(\omega t - k_r z)$.

Плоскости постоянной фазы и постоянной амплитуды такой волны совпадают (плоскости $z = \text{const}$) и движутся вдоль оси z с фазовой скоростью $v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_r}$, откуда $k_r = \frac{\omega}{v_\phi}$.

Возведя в квадрат обе части равенства $k = \omega \sqrt{(\varepsilon_r + i\varepsilon_i) \mu} = k_r + ik_i$, получим $\omega^2 (\varepsilon_r + i\varepsilon_i) \mu = k_r^2 + 2k_r k_i - k_i^2$, следовательно

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{k_r^2 - k_i^2}{\mu \omega^2} \\ \varepsilon_i = \frac{2k_r k_i}{\mu \omega^2}. \end{cases}$$

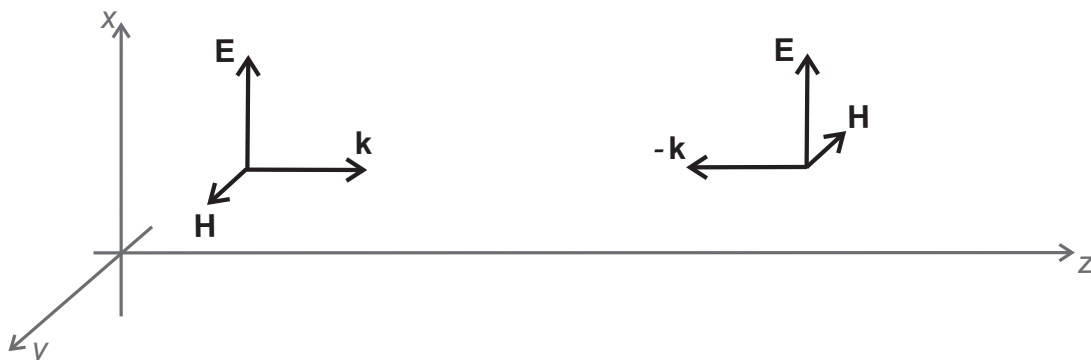
Поскольку по условию амплитуда поля волны падает в e раз на длине l , имеем $|E(l)| = \frac{E_0}{e}$, $E_0 e^{k_i l} = \frac{E_0}{e}$, так что $e^{k_i l} = e^{-1}$, $k_i = -\frac{1}{l}$, поэтому $k = \frac{\omega}{v_\phi} - i\frac{1}{l}$.

Итак,

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{\mu \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{v_\phi^2} - \frac{1}{l^2} \right) \\ \varepsilon_i = \frac{1}{\mu \omega^2} 2 \frac{\omega}{v_\phi} \left(-\frac{1}{l} \right) = -\frac{2}{\mu \omega v_\phi l}, \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu \omega^2} \left(\frac{\omega^2}{v_\phi^2} - \frac{1}{l^2} \right) - i \frac{2}{\mu \omega v_\phi l}.$$

1.59. Решение. Рассмотрим стоячую волну, представляющую собой суперпозицию двух плоских однородных волн одинаковой амплитуды E_0 , бегущих навстречу друг другу: $\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t - kz)}}_{\text{волна вдоль оси } z} + \underbrace{\mathbf{x}_0 E_0 e^{i(\omega t + kz)}}_{\text{волна против оси } z} = \mathbf{x}_0 E_0 (e^{-ikz} + e^{ikz}) e^{i\omega t} = \mathbf{x}_0 2E_0 \cos(kz) e^{i\omega t}$.



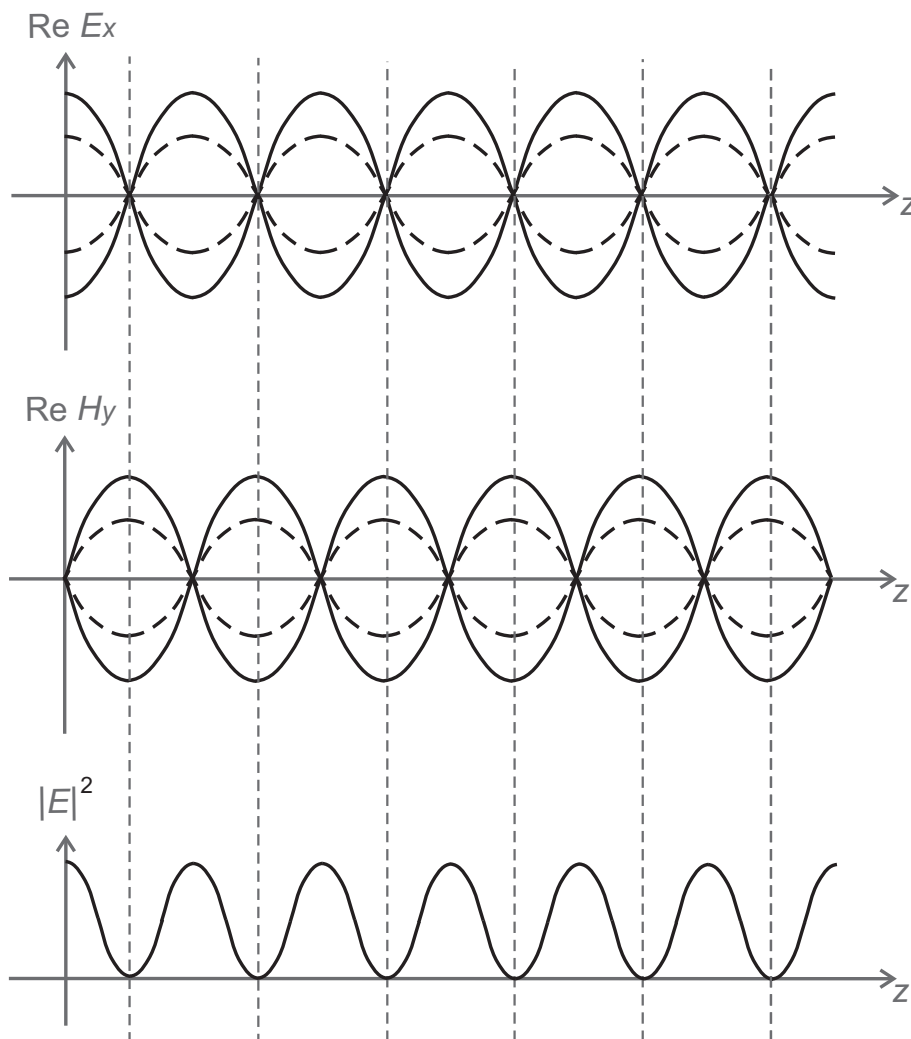
Найдем выражение для магнитного поля стоячей волны. Для этого сложим магнитные поля плоских волн, бегущих навстречу друг другу, учитывая, что $\frac{E_x}{H_y} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, т.е. $H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{y}_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{i(\omega t - kz)} - \mathbf{y}_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 e^{i(\omega t + kz)} = \mathbf{y}_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \underbrace{(e^{-ikz} - e^{ikz})}_{-2i \sin(kz)} e^{i\omega t} = \\ &= -\mathbf{y}_0 2i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \sin(kz) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Чтобы найти физические поля, возьмем действительные части от комплексных \mathbf{E} и \mathbf{H} : $\text{Re } \mathbf{E} = \mathbf{x}_0 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t)$, $\text{Re } \mathbf{H} = \mathbf{y}_0 2E_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin(kz) \sin(\omega t)$.

Таким образом, $\text{Re } E \sim \cos(\omega t)$, а $\text{Re } H \sim \sin(\omega t)$, т.е. электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе на величину $\Delta\varphi = \pi/2$.

На следующих рисунках показаны «мгновенные снимки» полей стоячей волны. Сплошная и пунктирная кривые соответствуют полям в два различных момента времени.



1.60. $\mathbf{H} = -\frac{1}{\omega\mu} (\mathbf{x}_0 h + \mathbf{z}_0 i\alpha) E_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - hz)}$; между компонентами магнитного поля H_x и H_z существует сдвиг фаз $\pi/2$; $\omega^2 \varepsilon \mu = h^2 - \alpha^2$.

1.61. 1) $\Gamma = \frac{Z_s - Z_b}{Z_s + Z_b}$, $Z_b = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$; 2) $Z(-l) = Z_b \frac{Z_s \cos(kl) + iZ_b \sin(kl)}{Z_b \cos(kl) + iZ_s \sin(kl)}$; 3) $|E|^2(z) = E_0^2 (1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(2kz + \varphi))$, где φ — фаза коэффициента отражения ($\Gamma = |\Gamma| e^{i\varphi}$), КСВ = $\frac{(1 + |\Gamma|)^2}{(1 - |\Gamma|)^2}$; 4) КСВ = 1 при $Z_s = Z_b$, КСВ = ∞ при $\text{Re } Z_s = 0$.

1.62. $\Gamma(-d) = \frac{Z_b(Z_{b2} \cos(kd) + iZ_b \sin(kd)) - Z_{b1}(Z_b \cos(kd) + iZ_{b2} \sin(kd))}{Z_b(Z_{b2} \cos(kd) + iZ_b \sin(kd)) + Z_{b1}(Z_b \cos(kd) + iZ_{b2} \sin(kd))}$,
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $Z_b = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, $Z_{b1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\varepsilon_{1,2}}}$; а) $d = n \frac{\lambda}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$; б) $Z_b = \sqrt{Z_{b1} Z_{b2}}$,
 $d = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

1.63. Решение. Воспользуемся формулой для коэффициента отражения, полученной в задаче **1.62** для нормального падения:

$$\Gamma = \frac{Z_b(Z_{b2} + iZ_b \text{tg } kd) - Z_{b1}(Z_b + iZ_{b2} \text{tg } kd)}{Z_b(Z_{b2} + iZ_b \text{tg } kd) + Z_{b1}(Z_b + iZ_{b2} \text{tg } kd)}.$$

Эта же формула будет справедлива и для случая наклонного падения волны, если заменить волновые импедансы Z_b , Z_{b1} и Z_{b2} на соответствующие поперечные импедансы Z_{\perp} , $Z_{\perp 1}$ и $Z_{\perp 2}$, а волновое число k — на проекцию волнового вектора k_z на ось z :

$$\Gamma = \frac{Z_{\perp}(Z_{\perp 2} + iZ_{\perp} \text{tg } k_z d) - Z_{\perp 1}(Z_{\perp} + iZ_{\perp 2} \text{tg } k_z d)}{Z_{\perp}(Z_{\perp 2} + iZ_{\perp} \text{tg } k_z d) + Z_{\perp 1}(Z_{\perp} + iZ_{\perp 2} \text{tg } k_z d)},$$

где $k_z = k \cos \theta_t = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}$, θ_t — угол прохождения волны.

Согласно закону Снеллиуса, $\sin^2 \theta_t = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \sin^2 \theta_0$ (предполагается, что слева и справа от слоя — вакуум), поэтому

$$k_z = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \sin^2 \theta_0} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0}.$$

Поперечные волновые импедансы запишутся в следующем виде:

$$Z_{\perp 1} = Z_{\perp 2} = \frac{Z_{b1,2}}{\cos \theta_0} = \frac{Z_0}{\cos \theta_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

$$Z_{\perp} = \frac{Z_b}{\cos \theta_t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \sin^2 \theta_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0}}.$$

В частном случае, когда $\varepsilon = 0$, $\mu = \mu_0$, имеем

$$k_z = \omega \sqrt{0 - \varepsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0} = i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sin \theta_0,$$

$$Z_{\perp} = \frac{\mu_0}{\sqrt{0 - \varepsilon_0 \mu_0 \sin^2 \theta_0}} = \frac{\mu_0}{i\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sin \theta_0} = -i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sin \theta_0} = -i \frac{Z_0}{\sin \theta_0}.$$

Из формулы для коэффициента отражения с учетом $Z_{\perp 1} = Z_{\perp 2}$ получим:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{i(Z_{\perp}^2 - Z_{\perp 1}^2) \operatorname{tg} k_z d}{2Z_{\perp} Z_{\perp 1} + i(Z_{\perp}^2 + Z_{\perp 1}^2) \operatorname{tg} k_z d} = \frac{i\left(-\frac{Z_0^2}{\sin^2 \theta_0} - \frac{Z_0^2}{\cos^2 \theta_0}\right) \operatorname{tg} k_z d}{2\frac{-iZ_0^2}{\sin \theta_0} + i\left(-\frac{Z_0^2}{\sin^2 \theta_0} + \frac{Z_0^2}{\cos^2 \theta_0}\right) \operatorname{tg} k_z d} = \\ &= \frac{-i \operatorname{tg}(i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} d \sin \theta_0)}{-i 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - i(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \operatorname{tg}(i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} d \sin \theta_0)}. \end{aligned}$$

Используя тригонометрические соотношения $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\operatorname{th} x = -i \operatorname{tg}(ix)$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, окончательно получим

$$\Gamma = \frac{\operatorname{th}(\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} d \sin \theta_0)}{\operatorname{th}(\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} d \sin \theta_0) \cos 2\theta_0 - i \sin 2\theta_0}.$$

1.64. а) $T = \frac{2Z_{\perp 2}}{Z_{\perp 1} + Z_{\perp 2}}$, $\Gamma = \frac{Z_{\perp 2} - Z_{\perp 1}}{Z_{\perp 1} + Z_{\perp 2}}$; $Z_{\perp 1} = \frac{Z_{\text{в}1}}{\cos \alpha}$, $Z_{\perp 2} = \frac{Z_{\text{в}2}}{\cos \beta}$;

б) $T = \frac{2Z_{\perp 1}}{Z_{\perp 1} + Z_{\perp 2}}$, $\Gamma = \frac{Z_{\perp 1} - Z_{\perp 2}}{Z_{\perp 1} + Z_{\perp 2}}$, $Z_{\perp 1} = Z_{\text{в}1} \cos \alpha$, $Z_{\perp 2} = Z_{\text{в}2} \cos \beta$; где

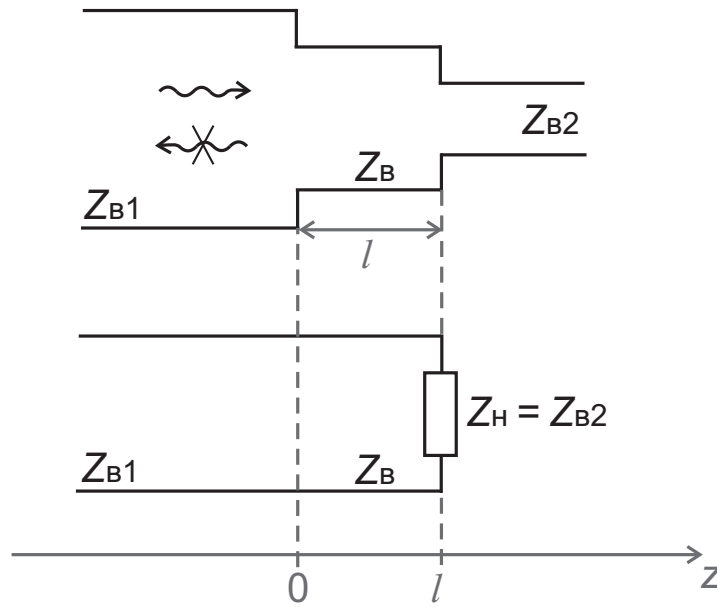
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \alpha}, \quad Z_{\text{в}1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\varepsilon_{1,2}}}.$$

1.65. а) $j_s = 2H_0 \cos \alpha \cos(\omega t - \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sin \alpha)$; б) $j_s = 2H_0 \cos(\omega t - \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \times \sin \alpha)$.

$$\begin{aligned}
2.1. \text{ а) } \Gamma &= \frac{1 - i\omega C Z_B}{1 + i\omega C Z_B}, \quad Z_{\text{BX}} = iZ_B \frac{Z_B \omega C \sin kl - \cos kl}{Z_B \omega C \cos kl + \sin kl}; \quad \text{б) } \Gamma = \frac{i\omega L - Z_B}{i\omega L + Z_B}, \\
Z_{\text{BX}} &= iZ_B \frac{Z_B \sin kl + \omega L \cos kl}{Z_B \cos kl - \omega L \sin kl}; \quad \text{в) } Z_{\text{BX}} = Z_B \frac{R \cos kl + iZ_B R \sin kl}{Z_B \cos kl + i \sin kl}, \quad \Gamma = \frac{R - Z_B}{R + Z_B}; \\
\text{г) } \Gamma &= \frac{Z'_B - Z_B}{Z'_B + Z_B}, \quad Z_{\text{BX}} = Z_B \frac{Z'_B \cos kl + i Z_B \sin kl}{Z_B \cos kl + i Z'_B \sin kl}; \quad \text{д) } \Gamma = -1, \quad Z_{\text{BX}} = i Z_B \operatorname{tg} kl; \quad \text{е) } \\
\Gamma &= 1, \quad Z_{\text{BX}} = -i Z_B \operatorname{ctg} kl.
\end{aligned}$$

$$2.2. \text{ а) } \Gamma = \frac{Z'}{2Z_B + Z'}; \quad \text{б) } \Gamma = -\frac{Z_B}{2Z' + Z_B}.$$

2.3. Решение. Воспользуемся эквивалентной схемой линии передачи, в которой $Z_{\text{H}} = Z_{\text{B2}}$ (см. рисунок). Нужно подобрать согласующий отрезок таким образом, чтобы от плоскости $z = 0$ не было отражения: $\Gamma(0) = 0$.



Поскольку $\Gamma(0) = \frac{Z(0) - Z_{\text{B1}}}{Z(0) + Z_{\text{B1}}}$, условие согласования запишется в следующем виде: $Z(0) = Z_{\text{B1}}$.

Чтобы найти величину $Z(0)$, используем формулу пересчета импедансов: $Z(z) = Z_B \frac{Z(z_0) - iZ_B \operatorname{tg} k(z - z_0)}{Z_B - iZ(z_0) \operatorname{tg} k(z - z_0)}$, где $z = 0$, $z_0 = l$, $Z(l) = Z_{\text{B2}}$, откуда имеем $Z(0) = Z_B \frac{Z_{\text{B2}} \cos kl + iZ_B \sin kl}{Z_B \cos kl + iZ_{\text{B2}} \sin kl}$.

Таким образом, длина согласующего отрезка и его волновой импеданс определяются из уравнения $Z_{\text{B1}} = Z_B \frac{Z_{\text{B2}} \cos kl + iZ_B \sin kl}{Z_B \cos kl + iZ_{\text{B2}} \sin kl}$.

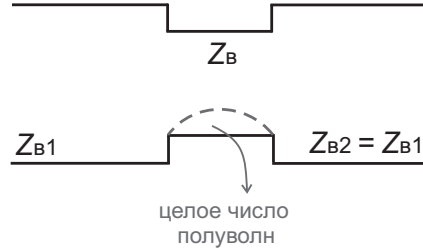
Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $\cos kl = 0$, $kl = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, следовательно $l = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$ (четвертьволновый отрезок). Отрезок такой длины обеспечивает согласование

при условии $Z_{в1} = Z_{в} \frac{Z_{в2}}{Z_{в1}}$, т.е. $Z_{в} = \sqrt{Z_{в1} Z_{в2}}$.

2) $\sin kl = 0$, $kl = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = n \frac{\lambda}{2}$ (полуволновый отрезок).

При этом $Z_{в1} = Z_{в} \frac{Z_{в2}}{Z_{в1}}$, т.е. $Z_{в1} = Z_{в2}$ (величина волнового импеданса $Z_{в}$ согласующего полуволнового отрезка может быть любой). Другими словами, если в линию включить полуволновый отрезок с произвольным значением импеданса, то он не нарушит согласование.



$$2.4. C_1 = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln b/a}, \quad L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad Z_{в} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{b}{a}.$$

$$2.5. C_1 = \frac{a\epsilon_0}{d}, \quad L_1 = \mu_0 \frac{d}{a}, \quad Z_{в} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{d}{a}.$$

$$2.6. \frac{\omega}{\omega_{кр}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2.7. *Решение.* Запишем поперечные волновые числа для двух заданных мод: $\alpha_{10} = \frac{\pi}{a}$, $\alpha_{m0} = \frac{m\pi}{a}$ (предполагается, что $a > b$).

Так как по условию задачи запущенные одновременно импульсы встречаются посередине волновода, они должны иметь одинаковые групповые скорости: $v_{гр1} = v_{гр2}$.

Далее воспользуемся известной формулой $v_{гр} v_{ф} = \text{const}$ (в волноводе без заполнения эта константа равна c^2), из которой следует, что фазовые скорости импульсов также одинаковы: $v_{ф1} = v_{ф2}$. Таким образом, $\frac{\omega_1}{h_1} = \frac{\omega_2}{h_2}$, $\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\epsilon\mu}}$, следовательно

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{k_1^2 - \alpha_{10}^2}}{\sqrt{k_2^2 - \alpha_{m0}^2}}. \quad (**)$$

Итак, $\frac{(\lambda_2)^2}{(\lambda_1)^2} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$, $(2\pi)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \lambda_2^2 = (2\pi)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \lambda_1^2$, откуда

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m.$$

Наконец, из соотношения (***) следует, что $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{2\pi/\lambda_{в2}}{2\pi/\lambda_{в1}} = \frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = m$.

$$2.8. \text{ а) } t = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}}, \quad \text{ б) } t = \frac{l}{c}.$$

$$2.9. \text{ а) } \Delta\varphi = 0; \quad \text{ б) } \Delta\varphi = \pi/2.$$

$$2.10. \lambda_{в} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}}, \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}}, \quad Z = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

$$2.11. \lambda_{в} = \frac{2\pi}{h_{23}}, \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{h_{23}}, \quad Z = \frac{\omega\mu}{h_{23}}, \quad \text{где } h_{23} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{9\pi^2}{a^2} - \frac{4\pi^2}{b^2}}.$$

$$2.12. E_{\max} = \sqrt{\frac{4\omega\mu P}{abh}}, \quad \text{где } h = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

$$2.13. P_{\max} = \frac{abh}{4\omega\mu} E_{\text{проб}}^2, \quad \text{где } h = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{b^2}}.$$

2.14. Решение. Поскольку волновод заполнен средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i$, в среде происходит поглощение энергии. Волна, распространяющаяся вдоль такого волновода, будет затухать.

Вспользуемся дисперсионным соотношением для волн в волноводе: $k^2 = h^2 + \varkappa^2$.

Волновое число k комплексно, поскольку $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu = \omega^2(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)\mu_0 = \omega^2\mu_0\varepsilon_r\left(1 - i\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right) = k_0^2(1 - itg\chi)$, где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_r$, $tg\chi = \varepsilon_i/\varepsilon_r$ — тангенс угла потерь среды.

Поперечное волновое число \varkappa является чисто действительным (оно определяется только геометрическими размерами волновода и для моды \mathbf{TE}_{10} равно π/a). Таким образом, продольное волновое число h в волноводе с потерями тоже комплексно: $h = h_1 - ih_2$; его мнимая часть h_2 и есть искомая постоянная затухания.

Подставим выражения для k^2 и h^2 в дисперсионное соотношение:

$$k_0^2(1 - itg\chi) = (h_1 - ih_2)^2 + \varkappa^2,$$

$$k_0^2 - ik_0^2 tg\chi = h_1^2 - 2ih_1h_2 - h_2^2 + \varkappa^2.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} k_0^2 = h_1^2 - h_2^2 + \varkappa^2 \\ k_0^2 tg\chi = 2h_1h_2. \end{cases}$$

Если потери в среде малы (т.е. $\text{tg } \chi \ll 1$), то $h_2^2 \ll h_1^2$, поэтому в первом уравнении системы можно пренебречь величиной h_2^2 . В этом случае получим $h_1^2 \simeq k_0^2 - \alpha^2$, $h_1 \simeq \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_r - (\pi/a)^2}$.

Из второго уравнения следует, что $h_2 = \frac{k_0^2}{2h_1} \text{tg } \chi$, следовательно

$$h_2 \simeq \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_r}{2\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_r - (\pi/a)^2}} \text{tg } \chi.$$

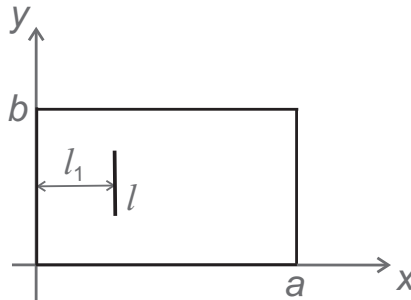
2.15. а) $\Gamma = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$; б) $\Gamma = \frac{\varepsilon_2 h_1 - \varepsilon_1 h_2}{\varepsilon_2 h_1 + \varepsilon_1 h_2}$, где $h_{1,2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_0 - \alpha^2}$.

2.18. $E_{\max} = \frac{I_0 l \omega \mu_0}{ab h_{01}} \sin\left(\frac{\pi}{b} y_0\right)$, где $h_{01} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{b^2}}$.

2.19. *Решение.* Запишем распределение плотности тока в виде

$$\mathbf{j} = \begin{cases} 0, & \text{вне отрезка } l \\ \mathbf{y}_0 I_0 \delta(x - l_1) \delta(z) e^{i\omega t}, & \text{внутри отрезка } l \end{cases}$$

(см. рисунок) и найдем амплитуду моды TE_{10} , возбуждаемую этим током в волноводе.



Воспользуемся формулой возбуждения:

$$a_1 = \frac{1}{N_1} \int_V (\mathbf{j}_e, \mathbf{E}_{-1}) dV, \text{ где } N_1 = -4 \iint_S \frac{1}{2} [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1^*] d\mathbf{S} \text{ — норма волны.}$$

Запишем выражения для компонент напряженности электрического и магнитного полей моды TE_{10} :

$$E_{1y} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{\mp i h z}, \quad H_{1x} = \frac{1}{Z} E_{1y} = \frac{h}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_y,$$

т.е. $N_1 = 2 \int_0^b dy \int_0^a dx E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \frac{h}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = 2E_0^2 \frac{h}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} b \frac{a}{2} = E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{h}{k} a b.$

Коэффициент возбуждения имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{h}{k} a b} \int_{y_0}^{y_0+l} dy \int_0^a dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \underbrace{I_0 \delta(x-l_1) \delta(z)}_{j_y} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{ihz} =$$

$$= \frac{I_0 l}{E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{h}{k} a b} \sin\left(\frac{\pi}{a}l_1\right).$$

Таким образом, электрическое поле моды TE_{10} , возбуждаемой заданным током, принимает вид $E_y = a_1 E_{1y} = \frac{I_0 l k}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} h a b} \sin\left(\frac{\pi}{a}l_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{\mp ihz}$.

Чтобы найти сопротивление излучения штыря в эту моду, вычислим полную мощность, переносимую волной по волноводу в двух направлениях:

$$W = 2 \iint_S \frac{1}{2} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] d\mathbf{S} = \iint_S E_y \underbrace{\frac{h}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_y}_{H_x} dS =$$

$$= \frac{h}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_0^b dy \int_0^a dx \frac{(I_0 l k)^2}{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} (h a b)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}l_1\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{k(I_0 l)^2}{h a b} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}l_1\right).$$

С другой стороны, эту же мощность можно выразить через сопротивление излучения штыря R_r : $W = \frac{1}{2} I_0^2 R_r$. Таким образом,

$$R_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{k l^2}{a b h} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}l_1\right) = \frac{\omega \mu_0 l^2}{a b h} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}l_1\right),$$

где $h = h_{10} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}}$.

$$\mathbf{2.21.} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{d^2}}; \quad W = \frac{a b d}{8} \varepsilon_0 E_0^2.$$

2.22. Решение. Запишем диэлектрическую проницаемость поглощающей среды, заполняющей резонатор, в виде комплексной величины $\varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i = \varepsilon_r \left(1 - i \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}\right) = \varepsilon_r (1 - i \operatorname{tg} \chi)$, мнимая часть которой характеризует поглощение.

Покажем, что наличие потерь в заполнении резонатора приводит к затуханию колебаний во времени. Для этого воспользуемся формулой, справедливой

для колебаний типа TE_{011} в резонаторе: $\underbrace{\omega^2 \varepsilon \mu}_{k^2} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2$. Поскольку справа стоит чисто действительная величина, а ε — величина комплексная, частота ω должна быть комплексной: $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Тогда в зависимости полей от времени появится экспоненциальное затухание: $E, H \sim e^{i\omega t} = e^{i(\omega_1 + i\omega_2)t} = e^{i\omega_1 t} e^{-\omega_2 t}$, величина которого характеризуется декрементом затухания ω_2 .

Определим добротность резонатора: $Q = \frac{\omega_1}{2\omega_2} = \frac{\omega_1}{k^2}$.

Запишем квадрат частоты $(\omega_1 + i\omega_2)^2 = \frac{k^2}{(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)\mu}$, откуда

$$\omega_1^2 + 2i\omega_1\omega_2 - \omega_2^2 = \frac{k^2}{\mu} \frac{\varepsilon_r + i\varepsilon_i}{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{k^2}{\mu|\varepsilon|^2} \varepsilon_r = \omega_1^2 - \omega_2^2 \\ \frac{k^2}{\mu|\varepsilon|^2} \varepsilon_i = 2\omega_1\omega_2, \end{cases}$$

где $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2$.

Разделив первое уравнение на второе $\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = \frac{\omega_1}{2\omega_2} - \frac{\omega_2}{2\omega_1}\right)$, придем к квадратному уравнению относительно Q : $Q^2 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} Q - \frac{1}{4} = 0$.

Таким образом, $Q = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_r^2}{\varepsilon_i^2} + 1} \right) = \frac{\varepsilon_r \pm |\varepsilon|}{2\varepsilon_i}$.

Выберем знак «+»: $Q = \frac{\varepsilon_r + |\varepsilon|}{2\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_r + |\varepsilon|}{2\varepsilon_r \operatorname{tg} \chi}$, где $\varepsilon_r = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \chi}}$.

Если потери в среде малы ($\operatorname{tg} \chi \ll 1$), то $|\varepsilon| \simeq \varepsilon_r$, тогда $Q \simeq \frac{1}{\operatorname{tg} \chi}$.

2.23. а) TE_{111} , $\omega_{111} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{\mu_{11}^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{d^2}}$, где $\mu_{11} = 1,84$; б) TM_{010} , $\omega_{010} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\nu_{01}}{a}$, где $\nu_{01} = 2,4$.

2.24. $e_1 = -\frac{4I_0 l}{abd \varepsilon_r \omega_{011} \operatorname{tg} \chi} \sin\left(\frac{\pi}{b} y_0\right) \sin\left(\frac{\pi}{d} z_0\right)$.

$$2.26. f^2(\theta) = \frac{\sin^2(kl \cos \theta)}{(kl \cos \theta)^2} \sin^2 \theta.$$

$$2.27. f^2(\theta) = \frac{\sin^2(kl \cos \theta - hl)}{(kl \cos \theta - hl)^2} \sin^2 \theta; \quad \text{а) при } h \geq k \text{ главного максимума}$$

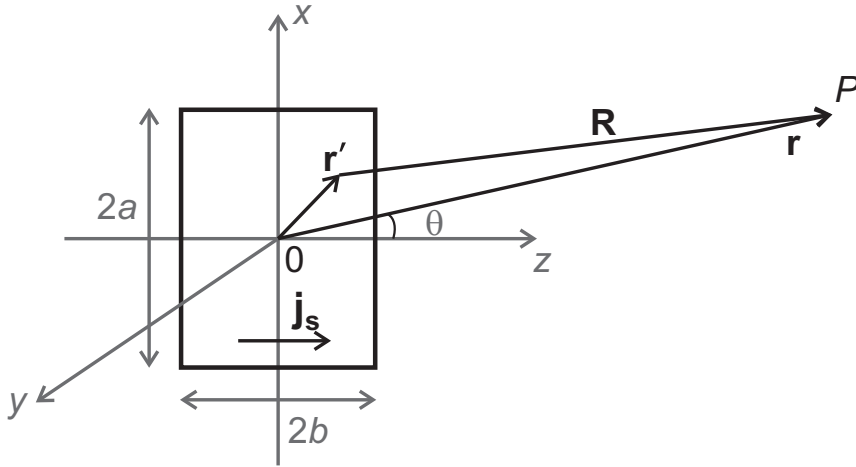
нет: ДН многолепестковая, вписанная в огибающую $\sin^2 \theta$; б) При $h < k$ ДН имеет главный максимум в направлении $\theta_{\max} = \arccos \frac{h}{k}$, а также ряд боковых лепестков.

$$2.28. \text{КНД} = 1,5.$$

$$2.29. R_r = \frac{32\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (kl)^2.$$

$$2.30. R_r \sim (a/\lambda)^4.$$

2.31. Решение.



Воспользуемся выражением для векторного потенциала в дальней зоне:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{N},$$

где $\mathbf{N} = \int_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} dV'$ — вектор излучения, $\mathbf{r}' = x'\mathbf{x}_0 + z'\mathbf{z}_0$ — радиус-вектор

точки интегрирования, $\mathbf{k} = k \sin \theta \cos \varphi \mathbf{x}_0 + k \sin \theta \sin \varphi \mathbf{y}_0 + k \cos \theta \mathbf{z}_0$ (θ — сферический полярный угол, φ — азимутальный угол), V' — объем, занятый источниками.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{V'} \mathbf{z}_0 J_0 \delta(y') e^{i(k_x x' + k_y y' + k_z z')} dx' dy' dz' = \mathbf{z}_0 J_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{ik_x x'} e^{ik_z z'} dx' dz' = \\ &= \mathbf{z}_0 J_0 \int_{-b}^b e^{ik \cos \theta z'} dz' \int_{-a}^a e^{ik \sin \theta \cos \varphi x'} dx' = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{z}_0 J_0 2b \frac{\sin(kb \cos \theta)}{kb \cos \theta} 2a \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \varphi)}{ka \sin \theta \cos \varphi} = \mathbf{z}_0 4J_0 ab \frac{\sin \eta}{\eta} \frac{\sin \xi}{\xi},$$

где $\eta = ka \sin \theta \cos \varphi$, $\xi = kb \cos \theta$.

$$\text{Таким образом, } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{z}_0 4J_0 ab \mu \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin \eta}{\eta} \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Далее найдем напряженности магнитного и электрического полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} [-i\mathbf{k}, \mathbf{A}] = \frac{1}{\mu} \underbrace{[-ik\mathbf{r}_0, \mathbf{z}_0]}_{ik \sin \theta \varphi_0} 4J_0 ab \mu \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin \eta}{\eta} \frac{\sin \xi}{\xi} = \\ &= \varphi_0 4J_0 ab ik \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \frac{\sin \eta}{\eta} \frac{\sin \xi}{\xi}, \end{aligned}$$

где $\eta = ka \sin \theta \cos \varphi$, $\xi = kb \cos \theta$.

$$\mathbf{E} = Z_b \left[\mathbf{H}, \frac{\mathbf{k}}{k} \right] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi \underbrace{[\varphi_0, \mathbf{r}_0]}_{\theta_0} = \theta_0 4J_0 ab \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} ik \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \frac{\sin \eta}{\eta} \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Исследуем диаграмму направленности такой антенны:

$$f^2(\varphi, \theta) = \sin^2 \theta \frac{\sin^2 \eta}{\eta^2} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} = \sin^2 \theta \frac{\sin^2(ka \sin \theta \cos \varphi)}{(ka \sin \theta \cos \varphi)^2} \frac{\sin^2(kb \cos \theta)}{(kb \cos \theta)^2}.$$

Главный максимум определяется соотношениями

$$\begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \cos \varphi = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \varphi = \pi/2, \varphi = 3\pi/2. \end{cases}$$

Оценим ширину главного лепестка.

а) В плоскости xy : $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. $f^2(\varphi) = \frac{\sin^2(ka \cos \varphi)}{(ka \cos \varphi)^2}$.

Нули диаграммы направленности находятся из условия $\sin(ka \cos \varphi) = 0$, т.е. $ka \cos \varphi = n\pi$, $n = \pm 1, 2, 3, \dots$

Для углов φ_1 и φ_{-1} , соответствующих двум соседним нулям ДН с $n = 1$ и $n = -1$, получим: $ka \cos \varphi_1 = \pi$ и $ka \cos \varphi_{-1} = -\pi$.

Ширина главного лепестка диаграммы направленности определяется из разности косинусов $\Delta \cos = \cos \varphi_1 - \cos \varphi_{-1}$. В нашем случае $\Delta \cos = \frac{2\pi}{ka} = \frac{\lambda}{a}$.

б) В плоскости yz : $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. $f^2(\theta) = \frac{\sin^2(kb \cos \theta)}{(ka \cos \theta)^2} \sin^2 \theta$.

Аналогично случаю а) оценим ширину главного лепестка ДН в плоскости yz :

$$\Delta \cos \theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{\lambda}{b}.$$

2.33. $f^2(\theta) = \sin^2 2\theta.$

2.34. $\zeta_{\text{пл}} = 4\pi \frac{k^4}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right)^2 a^6.$

2.35. $\zeta_{\text{пл}} = 16\pi k^2 (ab)^2.$

2.36. а) $E_r = E_0;$ б) $E_r = \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda z} E_0.$

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Составители:

Владимир Борисович Гильденбург

Анна Сергеевна Зайцева

Надежда Валерьевна Юрасова

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.