

К 100-лЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ЕВГЕНИИ АЛЕКСАНДРОВНЫ
ЛЕОНТОВИЧ-АНДРОНОВОЙ
(1905 — 1997)²



Евгения Александровна Леонтович родилась 19 сентября 1905 года в Киеве в семье преподавателя Киевского Университета Александра Васильевича Леонтовича (впоследствии академика АН УССР). Ее мать, Вера Викторовна Кирпичева, была врачом-окулистом. Кроме Евгении Александровны, в семье было еще двое детей: старший — Михаил Александрович (впоследствии физик, академик АН СССР), а также младшая дочь Вера Александровна.

²Использованы материалы из сборника очерков и воспоминаний "Личность в науке: женщины-ученые Нижнего Новгорода"/Под ред. З.Х. Саралиевой и Т.И. Ковалевой.- Н.Новгород: Изд-во ННГУ,1999

В 1913 г. семья Леонтович переезжает в Москву в связи с избранием А.В. Леонтовича профессором Петровско-Разумовского института (ныне — Тимирязевская академия). Здесь А.В. Леонтович работает до 1936 г., а затем возвращается в Киев. Мать работает во время войны 1914-1918 гг. в госпитале, а затем — в детском санатории. Она умерла в 1919 г.

В 1921 г. Женя Леонтович оканчивает школу и поступает в МГУ на физико-математический факультет по отделению математики. На этом факультете уже учился ее брат Михаил, но на физическом отделении. В это время Михаил Александрович уже входил в удивительное объединение — в коммуну³, которая организовалась в арбатском переулке Сивцев Вражек. В эту компанию, кроме Михаила Александровича, входили А.А. Андронов, П.С. Новиков, И.Е. Тамм (впоследствии все они — академики АН СССР, а И.Е. Тамм к тому же — лауреат Нобелевской премии по физике), А.А. Витт (впоследствии профессор, трагически погиб в 1938 г. в результате сталинских репрессий), Н.И. Парийский (астроном, впоследствии член-корреспондент АН СССР) и др. Перечисленные мужчины, определявшие основное содержание и дух всего сообщества, учились на физико-математическом факультете МГУ. В эту компанию входили и женщины, например, Л.В. Келдыш. Благодаря брату, к ним примкнула и Е.А. Леонтович.

Все эти люди были яркими индивидуальностями и, конечно, очень отличались друг от друга. Однако было многое, что их объединяло, и основным стержнем, конечно, была наука. Смыслом и целью существования для них было узнавание, открытие научного факта, и все остальное было второстепенным. Важно отметить также, что они не делали карьеры в науке, хотя отчетливо понимали свое место в ней.

Естественно, что образовались несколько супружеских пар. В 1927г. Е.А. Леонтович становится женой А.А. Андронова. Из других укажем математическую пару — П.С. Новиков и Л.В. Келдыш.

Приобщение Евгении Александровны к научной деятельности началось с участия в семинаре Н.Н. Лузина. Лузин вошел в историю науки, в частности, как создатель первой в России большой математической школы — "Лузитании". Становление Лузитании началось еще в годы Первой мировой войны, поэтому в нее входило несколько поколений: старшее — В.В. Степанов, И.И. Привалов, П.С. Александров, М.Я. Суслин, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин и др., среднее — П.С. Урысон, А.Н. Колмогоров, В.В. Немыцкий, Н.К. Бари, В.И. Гливенко, Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман и др. К младшему поколению относились П.С. Новиков, Л.В. Келдыш, Е.А. Леонтович.

1922 – 1926 гг. были годами расцвета Лузитании. В это время были решены сравнительно доступные задачи из теории функций действительного переменного и дескриптивной теории множеств. В то же время, начиная с 1925 – 1928 гг.,

³Жизнь в России в то время, после двух разрушительных войн, была чрезвычайно тяжелой, поэтому многие студенты (и не только студенты) объединялись для совместного ведения хозяйства в коммуны, что позволяло облегчить эти тяготы.

многие участники семинара Лузина устремились в другие области математики. Именно к этому периоду относятся выступления Е.А. Леонтович на семинаре Лузина. Автору неизвестно название и содержание докладов, поскольку их результаты Евгения Александровна не публиковала. Известно только с ее слов, что темы выступлений она выбирала самостоятельно (и этим Евгения Александровна особенно гордилась).

В 1928 г. Евгения Александровна заканчивает МГУ, а затем до 1932 г. работает ассистентом в Менделеевском химико-технологическом институте.

В 1931 г. в Горьком вновь открывается университет, а при нем организуется Горьковский научно-исследовательский физико-технический институт (ГИФТИ). А.А. Андронов подает заявление о желании работать в Горьком. 1 ноября 1931 г. Андронов зачисляется в штат университета, а в 1932 г. вся семья переезжает в Горький.

В 1932 г. Е.А. Леонтович становится научным сотрудником отдела теории колебаний ГИФТИ, а ее основной областью научных интересов становится качественная теория динамических систем. Понятно, что выбор новой тематики произошел под влиянием А.А. Андропова, к этому времени уже известного специалиста по теории нелинейных колебаний. Хотя А.А. Андронов закончил физико-математический факультет МГУ по отделению физики, он обладал вполне достаточной математической подготовкой. Дело в том, что курсы математики были едиными как для математиков, так и для физиков, и А.А. Андронов, настойчиво занимавшийся математикой, приобрел математическую культуру, значительно превышавшую ту, которая была необходима физику-теоретику. Это позволило ему активно контактировать с математиками, из которых укажем Л.С. Понтрягина, А.А. Маркова, П.С. Новикова, И.Г. Петровского, В.В. Степанова.

В Горьком А.А. Андронов привлек к сотрудничеству А.Г. Майера, который также окончил математическое отделение физико-математического факультета МГУ и после окончания аспирантуры по аналитической теории чисел (руководитель А.Я. Хинчин) был направлен в Горьковский пединститут. Сначала аспирантом, а затем сотрудником Андропова стал выпускник Горьковского пединститута Н.Н. Баутин.

Эта группа, образовавшая в ГИФТИ отдел теории колебаний, и составила ядро Горьковской школы теории колебаний.

К этому времени в теории колебаний двумерных систем остро стоял вопрос: что нужно знать о системе, чтобы полностью определить качественную структуру поведения траекторий? Или, на современном языке: каков полный инвариант системы относительно топологической сопряженности? Основные положения этого вопроса фактически были изложены в докладе А.А. Андропова "Математические проблемы теории автоколебаний" на Всесоюзном физическом съезде в 1931 г. В 1937 г. А.А. Андронов в соавторстве с Л.С. Понтрягиным решают эту проблему для выделенных ими грубых систем. Полный инвариант

грубой системы, названный ими схемой — это набор траекторий: особых (состояний равновесия, периодических движений и сепаратрис седел), а также по одной траектории из каждой ячейки блуждающих траекторий. Конечность инварианта вытекала из грубости системы в компактной области на плоскости.

Понятие схемы грубой системы позволило заложить прочный математический фундамент теории нелинейных систем. Однако оставалась острейшая необходимость распространения понятия схемы на негрубые системы. Это было важно потому, что физические модели — это явно заданные конечнопараметрические векторные поля, допускающие при изменении параметров перестройку фазового портрета. Обычно с этими бифуркационными перестройками и связаны различные динамические явления, имеющие большое прикладное значение. К решению этой проблемы Андронов и привлек Е.А. Леонтович и А.Г. Майера.

Однако первой совместной работой Е.А. Леонтович и А.Г. Майера была заметка "Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье", опубликованная в ДАН СССР в 1934 г. Она относится к теории линейных систем и содержит ответ на вопрос Л.И. Мандельштама о соотношении между продолжительностью радиоимпульса и его размытостью, имеющего фундаментальное значение для теории связи. С другой стороны, Е.А. Леонтович и А.Г. Майер в этой заметке дали и точную формулировку аналога квантового соотношения неопределенности.

Следующей работой Е.А. Леонтович и А.Г. Майера была статья "О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения на траектории". Она вышла в том же году, что и упомянутая выше работа Андронова и Понтрягина о грубых системах, и была посвящена нахождению полного топологического инварианта двумерных систем на сфере без предположения грубости. Поэтому потребовалось дополнительное условие — конечность числа особых траекторий. Отметим, что в техническом плане эта работа оказалась более сложной по сравнению с работой Андронова и Понтрягина, поскольку требовала рассмотрения состояний равновесия любого порядка вырождения. Построение гомеоморфизма для систем, в которых состояние равновесия имеют эллиптические, параболические и гиперболические секторы, было делом весьма кропотливым и трудоемким. Окончательная формулировка была дана в заметке "О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории", опубликованной в 1955 г. (т.е. уже после смерти второго автора).

Естественно, что дальнейшая деятельность Е.А. Леонтович оказалась связанной с изучением негрубых систем и их бифуркаций. Так, в 1938 г. появляется работа А.А. Андронова и Е.А. Леонтович "К теории изменений качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории". Здесь речь шла о так называемых системах первой степени негрубости, которые естественно было считать релятивно грубыми, поскольку они являлись грубыми по отношению к множеству негрубых систем. Было выяснено, что такие системы выделяются девятью условиями. В частности, системам первой степени негрубости разреша-

ются иметь в качестве негрубых элементов:

- состояние равновесия типа сложный фокус, у которого первые ляпуновские величины отличны от нуля;
- предельный цикл с нулевым характеристическим показателем и не равной нулю первой ляпуновской величиной (двойной цикл);
- одномерная неустойчивая (устойчивая) сепаратриса простейшего негрубого состояния равновесия типа седло-узел стремится при продолжении снова к седло-узлу, но не лежит в сильно устойчивом (неустойчивом) многообразии седло-узла, разделяющего окрестность седло-узла на устойчивую (неустойчивую) и седловую области;
- петлю сепаратрисы седла, в котором седловая величина, равная сумме характеристических корней, отлична от нуля.

Вообще, говоря современным языком, все системы 1-ой степени негрубости локально образуют в пространстве всех C^3 -гладких векторных полей бифуркационное множество коразмерности 1, вне малой окрестности которого нет других негрубых систем. Поэтому к таким системам не принадлежат системы, у которых

1) сепаратриса седла накручивается (скручивается) на петлю сепаратрисы другого седла;

2) сепаратриса седла не может накручиваться на двойной цикл, если есть сепаратриса какого-либо седла, скручивающаяся с этого же цикла;

Системы, имеющие такой негрубый элемент, также образуют бифуркационное множество коразмерности 1, однако в любой их окрестности есть негрубые системы со схемой, отличной от исходной. Поэтому в любой окрестности точки указанного бифуркационного множества с одной его стороны имеется еще счетное множество бифуркационных поверхностей также коразмерности 1, накаливающиеся к указанной.

На основе этой работы 1938 г. и возникла задача: изучить все основные бифуркации предельных циклов двумерных систем. Она была решена А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович в цикле из четырех работ. Первая из них, "Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров", была опубликована в 1939 г. в труднодоступном издании "Ученые записки Горьковского университета". Есть все основания полагать, что она предшествовала упоминавшейся выше работе 1938 года. Особенностью этой работы 1939 г. является рассмотрение бифуркаций в однопараметрическом семействе систем. Для двух первых локальных бифуркаций (см. выше перечисление негрубых элементов) этот вопрос был исчерпывающе решен. Именно, в случае сложного фокуса с ненулевой первой ляпуновской величиной было установлено рождение единственного предельного

цикла. Это позволило подвести математический фундамент под проблемы генерации колебаний и дать объяснение явлениям мягкого и жесткого режимов колебаний. Также была полностью исследована бифуркация двойного цикла и приведена бифуркационная диаграмма. В основе этого исследования лежало построение одномерного отображения Пуанкаре. В современной литературе эта бифуркация носит название касательной бифуркации (tangent bifurcation).

Два оставшихся случая являются глобальными, т.е. требуют рассмотрения не только окрестности негрубого элемента, но и некоторой траектории, выходящей из этой окрестности и возвращающейся в нее. Это рождение предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла и из петли сепаратрисы седла. Первый из этих случаев встретился впервые в работе А.А. Андронова и А.А. Витта в 1930 г. и явился основой для объяснения перехода от режима синхронизации к режиму биений в рамках усредненного уравнения Ван-дер-Поля. При исследовании этой бифуркации А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович было установлено, что при исчезновении седло-узла из петли сепаратрисы рождается по крайней мере один предельный цикл.

Все три перечисленных выше случая описывают переходы от систем 1-ой степени негрубости. Что касается 4-го случая, то здесь условие 1-ой степени негрубости в явном виде сформулировано не было, поэтому основное утверждение, связанное с существованием предельного цикла при расщеплении петли, носило характер достаточного условия (на языке функции последования). Таким образом, два последних случая требовали дополнительного рассмотрения. Это было сделано в те же годы и достаточно быстро. В случае петли сепаратрисы седло-узла была доказана единственность рождающегося предельного цикла, а в случае петли сепаратрисы седла при условии, что седловая величина отлична от нуля, были указаны условия рождения предельного цикла и его единственность. Однако по ряду причин (война, трудности послевоенной жизни, смерть Андронова (1952 г.) и Майера (1951 г.)) публикация на эту тему относится только к 1955 г. Тем самым, было закончено исследование основных случаев бифуркации предельных циклов на плоскости.

В те же предвоенные годы Е.А. Леонтович обратила внимание на решение задачи о бифуркации предельных циклов из петли сепаратрисы в общем математическом контексте.

Вопросы поведения траектории в малой окрестности петли сепаратрисы седла были предметом исследования Дюлака в аналитическом случае. Им было установлено, что это поведение может быть одним из следующих:

- 1) все траектории наматываются на петлю;
- 2) все траектории замкнутые.

Первый случай имеет место, если в бесконечной последовательности

$$\sigma_0, A_1, \sigma_1, A_2, \dots, \sigma_k, A_{k+1}, \dots$$

хотя бы одна из величин не равна нулю. В частности, величина σ_0 есть сумма

характеристических чисел в седле, а $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots$ есть не что иное, как коэффициенты нормальной формы в седле, когда $\sigma_0 = 0$ (т.е. седловой индекс равен 1). По понятным причинам σ_i получили название седловых величин. Величины A_i , в свою очередь, носят название глобальных, или сепаратрисных, величин. По существу, это производные от функции соответствия вдоль дуги сепаратрисы, лежащей вне окрестности седла.

Приступая к решению задачи о бифуркациях предельных циклов, Е.А. Леонтович сразу же столкнулась с важным обстоятельством: в работе Дюлака нормальные формы в окрестности седла были различными в зависимости от того, являлся ли седловой индекс (абсолютная величина отношения характеристических корней в седле) рациональным или иррациональным. Поэтому ей потребовалось построение необходимой нормальной формы с помощью специальной конструкции, связанной с убиванием нерезонансных функций. В результате нормальную форму (в случае, когда седловой индекс равен 1) удалось записать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}[1 + \nu + c_1xy + c_2x^2y^2 + \dots + c_nx^ny^n + x^ny^n F_1(x, y)],$$

где F_1 начинается с членов первого порядка малости по x, y . При этом для того, чтобы привести к такому виду, можно потребовать C^r -гладкость правых частей, где $r \geq 4n + 2$.

В общем случае, когда $\sigma_0 \neq 0$, от петли сепаратрисы может отродиться не более одного цикла. Этот результат, как уже говорилось выше, был установлен А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович, причем важно отметить, что для C^1 -гладких семейств векторных полей — без использования нормальной формы.

Случай, когда $\sigma_0 = 0$, а $A_1 \neq 0$ соответствует, на современном языке, коразмерности два. В этом случае A_1 есть не что иное, как интеграл от дивергенции векторного поля вдоль петли сепаратрисы. Здесь от петли сепаратрисы может отродиться не более двух предельных циклов. В общем же случае, как было установлено Е.А. Леонтович, если

$$\sigma_0 = A_1 = \dots = \sigma_{n-2}, A_{n-1} = 0, \sigma_{n-1} \neq 0,$$

то от петли сепаратрисы может отродиться не более $2n - 1$ предельных циклов, а если

$$\sigma_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = \sigma_{n-1} = 0, A_n \neq 0$$

— не более $2n$. При этом ею было показано, что существуют такие добавки, что от петли сепаратрисы рождается точно $2n - 1$ предельных циклов в первом случае и $2n$ — во втором, т.е. оценки точные.

Этот результат мы излагаем особенно подробно, поскольку, в отличие от предыдущих, он, по существу, опубликован только в 1951 г., в заметке "О рождении предельных циклов от сепаратрисы" в ДАН СССР.

По этим результатам Е.А. Леонтович в 1946 г. защитила кандидатскую диссертацию.⁴ К этому же периоду относится также весьма нетривиальное событие — выход в свет на русском языке мемуаров Пуанкаре по качественной теории дифференциальных уравнений под общим названием "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями" в серии "Классики естествознания" в издательстве ГИТТЛ, 1947 г. Перевод был осуществлен Е.А. Леонтович и А.Г. Майером под редакцией А.А. Андропова. В книгу были включены дополнения: Е.А. Леонтович и А.Г. Майер, "Общая качественная теория"; А.Г. Майер, "Центр"; В.В. Степанов, "Интегральные кривые на поверхности тора"; И.Г. Петровский, "О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки"; Ю. Рожанская, "Особые точки векторных полей". Книга содержит также многочисленные комментарии с указанием дополнительной литературы, позволяющие создать весьма целостное представление о многих проблемах теории динамических систем, которые разрабатывались после Пуанкаре.

Теперь перед горьковчанами встает задача дать подробное изложение своих результатов, полученных в 30-х годах. И в конце 40-х ими принимается решение — писать книгу. Но судьба распорядилась по-своему: в 1951 г. в возрасте 46 лет умирает А.Г. Майер, а в следующем году в возрасте 51 года — А.А. Андронов. Написание книги целиком ложится на Е.А. Леонтович.

* * *

При жизни А.А. Андропова и А.Г. Майера внешне казалось, что Евгения Александровна находится как бы на вторых ролях. Теперь все меняется, Евгения Александровна становится неформальным лидером. Естественно, что в этом ей помогает высокая нравственность, характерная для старой интеллигенции, профессионализм, основанный на отличной математической культуре, доброта и обязательность, позволяющие легко контактировать с ней.⁵

Первым делом Евгения Александровна принимает научное руководство над последними учениками и аспирантами А.А. Андропова, которые, в основном, были радиофизиками, поскольку Андронов заведовал кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Горьковского

⁴Позднее свою диссертацию она опубликовала в ВИНТИ в двух частях. Но и в таком виде эта работа недоступна зарубежному читателю.

⁵Первое из этих ее свойств отчетливо проявилось еще в 1952 г., когда она, вместе с другим горьковским математиком профессором А.Г. Сигаловым, открыто выступила в защиту Г.С. Горелика, обвинявшегося в том, что его книга "Колебания и волны" написана с позиции идеализма. В те годы это было небезопасно — еще был жив Сталин.

университета. Здесь ее работа, по существу, сводилась к математической экспертизе. Однако этим ее педагогическая деятельность не исчерпывается. В 1954 г. она начинает чтение спецкурса по теории динамических систем на плоскости для студентов-математиков. Этот годовой спецкурс включал теорию Пуанкаре–Бендиксона, теорию грубых систем и основные бифуркации предельных циклов. Сначала он читался для студентов 4-го курса, а в 60-х годах — для 3-го курса. На этом спецкурсе были воспитаны многие поколения студентов Горьковского (Нижегородского) университета. Более того, с этого спецкурса начинался путь в науку нескольких десятков будущих исследователей. Евгения Александровна осталась хранительницей и носительницей многих научных идей Горьковской школы, которые как бы перешли к ней по наследству. В этом плане особенно примечательно ее выступление в 1956 г. на III-ем Всесоюзном математическом съезде. Уже название доклада — "Некоторые математические работы горьковской школы А.А. Андропова" — говорит само за себя. В этом докладе были изложены результаты, о которых шла речь выше, и ряд результатов А.Г. Майера: установление возможного характера поведения траекторий на поверхностях и решение проблемы Биркгофа о порядковом числе центральных траекторий в неаналитическом случае. В докладе также ставился ряд проблем, как высказанных самой Евгенией Александровной, так и А.А. Андроновым. На одной из них, связанной с перенесением идеи грубости на многомерные системы, а точнее, на двумерные диффеоморфизмы и на трехмерные потоки, мы остановимся подробнее, сохранив комментарии самой Евгении Александровны:

"Не нужно думать, что в обоих этих случаях понятие грубости переносится тривиально. Не говоря уже о том, что в случае неавтономной системы второго порядка (периодически зависящей от времени) этот вопрос тесно связан с вопросом об особых и обыкновенных траекториях, в котором нет ясности, здесь есть ряд принципиальных затруднений. Аналогичные затруднения существуют также и в случае автономной динамической системы в трехмерном пространстве. Я не имею возможности подробно на них останавливаться. Могу только бегло сказать, что корень этих затруднений связан с гомоклинической точкой преобразования плоскости в плоскость".

В процитированном высказывании, по существу, речь идет о хорошо известной сейчас проблеме Андропова: могут ли грубые диффеоморфизмы двумерной сферы иметь счетное множество периодических точек?

К этому времени Е.А. Леонтович опубликовала (естественно, в соавторстве с А.А. Андроновым) в "Математическом сборнике" работу "О рождении предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла". Любопытно, что в подстрочном примечании они констатируют, что эта работа была выполнена в 1937 г. Это же отмечается и в следующей работе "О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел", опубликованной в "Математическом сборнике" (1959 г.). На этом 20-летняя эпопея публикации основных случаев рождения предельных

циклов двумерных динамических систем закончилась. И если до этого момента эти результаты были хорошо известны и использовались, в основном, только в Горьком, то теперь они становятся достоянием широкой научной общественности. Этому способствует также выход в свет в 1959 г. второго издания "Теории колебаний" (А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин) под ред. Н.А. Железцова⁶, в котором в дополнениях, написанных Е.А. Леонтович, весьма подробно излагаются бифуркации рождения предельных циклов от сложного фокуса, от негрубого предельного цикла и, несколько конспективно — глобальные бифуркации.

Помимо сказанного, в 50-х годах Евгения Александровна интенсивно занимается подготовкой научных кадров. Она руководит курсовыми и дипломными работами студентов, а также диссертационными работами аспирантов. Под ее руководством в эти годы защищаются две диссертации. Их тематика целиком посвящена ряду проблем теории двумерных систем. Однако перед очередной своей ученицей Р.М. Минц Евгения Александровна уже ставит задачу из теории многомерных систем.

В диссертации Р.М. Минц рассматривалась структура негрубых состояний равновесия с одним нулевым характеристическим показателем, Благодаря ей в научный обиход совершенно естественным образом вошли многомерный седло-узел и седло-седло. Последнее легче всего представить как такое состояние равновесия, которое получается в результате слияния двух грубых седловых, но различного топологического типа (с различной размерностью устойчивых многообразий). Позже на основании этого Л.П. Шильников изучил основные глобальные бифуркации, связанные с исчезновением таких состояний равновесия. А кроме того, обобщил на многомерный случай основную глобальную бифуркацию, связанную с рождением устойчивого периодического решения из петли сепаратрисы седло-узла. По существу, теперь изучение многомерных систем и, в особенности, теории бифуркаций становится одним из основных направлений деятельности отдела. И главная роль в этом принадлежит Е.А. Леонтович. И, как теперь понятно, произошло это вовремя, так как с 60-х годов начинается бурное развитие теории грубых многомерных динамических систем.

О многомерной тематике в отделе теории колебаний нужно сказать особо. Из сказанного выше видно, что в 1937 г. была разработана теория грубых двумерных систем, бифуркации периодических движений и построен полный топологический инвариант — схема. Как говорила Евгения Александровна автору этой статьи: "Мы собирались вплотную заниматься многомерными системами". К этому моменту в отделе была проведена "мобилизация информации" (термин А.А. Андронova), т.е. были собраны основные публикации в этой области, включая работы Пуанкаре, Биркгофа, Морса, Хедлунда и других, причем не только

⁶Уже со всеми тремя авторами — в первом издании 1937 г. фамилию репрессированного А.А. Витта пришлось снять, иначе книга не могла быть опубликована. Так была восстановлена историческая справедливость.

по качественной теории, но и по эргодической. Однако после 1937 г. интересы А.А. Андропова смещаются в сторону теории автоматического регулирования. Особенностью систем автоматического регулирования является, как правило, разрывный характер нелинейностей, обусловленных сухим трением, реле и т.д. Для решения подобных задач Андронов использует метод приписывания, который позволяет получить соответствующее отображение Пуанкаре, обычно задаваемое в параметрической форме. В случае трехмерных задач отображение Пуанкаре получается двумерным. Поэтому, с определенной точки зрения, это тоже многомерная задача, требующая использования математического аппарата теории двумерных отображений в нестандартных ситуациях. К этой проблематике А.А. Андронов привлекает также А.Г. Майера, Н.Н. Баутина. Что касается Е.А. Леонтович, то ее интересуют, в частности, проблемы теории бифуркации. И здесь отметим дипломную работу А.Ф. Леонтьева 1939 г., выполненную под ее руководством, в которой для трехмерных аналитических систем была изучена основная бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса. Метод работы естественным образом переносится и на многомерный случай, при условии, что в сложном фокусе отсутствуют положительные характеристические показатели. Результаты этого исследования были существенно использованы в диссертации Н.Н. Баутина по теории опасных и безопасных границ областей устойчивости состояний равновесия. После войны диссертация Н.Н. Баутина была опубликована в виде книги, а вот работа А.Ф. Леонтьева осталась неопубликованной. После демобилизации А.Ф. Леонтьев сменил тематику и стал видным специалистом по теории функции комплексного переменного, членом-корреспондентом АН СССР. Из послевоенных работ по теории динамических систем отметим также исследования А.Г. Майера по проблеме Биркгофа о порядковом числе центральных траекторий.

* * *

В начале 60-х годов происходит ряд важных событий. В 1961 г. на конференции по нелинейным колебаниям в Киеве С. Смейл дает положительный ответ на вопрос Андропова: он приводит пример грубого диффеоморфизма плоскости, имеющего счетное множество периодических точек. На конференции присутствовала и Евгения Александровна, где произошла ее встреча со Смейлом и его учителем С. Лефшецем. После приезда в Горький Евгения Александровна с большим воодушевлением рассказывала об открытии С. Смейла, добавляя при этом, что, по ее мнению, С. Смейл весьма напоминает Геккльбери Финна. Именно в результате этих обсуждений в отделе появился термин "подкова Смейла", который был затем принят в Советском Союзе. После окончания конференции

в Киеве С. Смейл побывал и в Москве, где высказал утверждения, что геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны и алгебраические автоморфизмы тора являются грубыми. Справедливость этого была установлена Д.В. Аносовым, который к тому же ввел широкий класс грубых систем с гиперболическим поведением, получивших название систем Аносова. Тем самым было опровергнуто широко распространенное мнение, что консервативные системы не могут быть грубыми.

И в отделе теории колебаний ГИФТИ, руководимом Е.А. Леонтович, также произошло немаловажное событие. В декабре 1962 г. я защитил диссертацию, в которой изучил многомерный аналог теоремы Андронова и Леонтович о рождении устойчивого предельного цикла из петли сепаратрисы. Основное условие рождения цикла состояло в том, что седловая величина $\sigma_0 = \lambda_n + \max_{1 \leq i \leq n-1} \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, где $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n-1$, а $\lambda_n > 0$. У меня возник вопрос: а что будет, если $\sigma_0 > 0$? Казалось бы, ничего особенного. Однако уже в конце января 1963 г. я устанавливаю, что в случае 3-мерной системы, когда $\sigma_0 > 0$, а состояние равновесия является седло-фокусом, в любой окрестности петли седло-фокуса имеется счетное множество периодических движений седлового типа. Более того, отображение Пуанкаре имеет счетное множество подков Смейла. Естественно, что первым, кому я рассказал об этом, была Леонтович. Свою реакцию на это она высказала позднее: "Мне сразу хотелось сказать, что этого не может быть". По понятной причине этому результату подивился также и Л.С. Понтрягин, которому об этом рассказала Е.А. Леонтович.

С этого момента тематика, связанная с исследованием многомерных систем со сложной динамикой, прочно вошла в число основных задач отдела. Этому способствовало также еще и весьма немаловажное событие. В 1964 г. ГИФТИ получает новое здание. Возникает идея: в оставшемся корпусе на базе отдела теории колебаний, руководимом Е.А. Леонтович, организовать новый институт — Институт прикладной математики и кибернетики. Естественно, что Евгения Александровна — один из создателей института. Ее обращение за поддержкой к президенту АН СССР М.В. Келдышу, ректору МГУ И.Г. Петровскому, руководителю Сибирского отделения АН СССР М.М. Лаврентьеву и др. встречает полную поддержку — авторитет Горьковской школы теории колебаний ни у кого не вызывает сомнения.

В новом институте Евгения Александровна возглавила также отдел, но название его изменилось. Он стал называться отделом дифференциальных уравнений. Причина этого вполне понятна: отдел состоял из сотрудников, окончивших университет по специальности "математика" и прослушавших спец. курс Евгении Александровны. Примечательно, что самому старшему по возрасту сотруднику отдела Евгении Александровны, а им являлся автор этих строк, было 30 лет. Естественно, что регулярно (раз в неделю) заработал научный семинар. На этих семинарах царил исключительно демократический дух. На них не было авторитетов, каждый из присутствующих мог задать любой вопрос, добиваясь

полной ясности, не взирая на личность выступающего. И конечно, в этом была огромная заслуга Евгении Александровны. В научных вопросах она была исключительно требовательной к себе и к своим сотрудникам. В научных статьях и докладах она требовала шлифовки, взвешивания каждого слова, была особенно щепетильна в вопросах ссылок на исследователей, работавших над теми же проблемами. Поэтому выступление на семинарах было огромной школой научного взросления молодых сотрудников отдела. На долгие годы этот семинар, традиции которого были заложены Евгенией Александровной, стал влиятельным притягательным центром для многих специалистов по качественной теории. Конечно, основными темами семинара были как традиционные, связанные с качественной теорией двумерных динамических систем и теорией бифуркаций, так и новые, связанные с многомерными системами со сложной динамикой, качественная теория неавтономных систем, гамильтонова динамика интегрируемых и неинтегрируемых систем и ряд других.

Системы со сложной динамикой и их бифуркации особенно привлекали Евгению Александровну. И хотя сама она лично в их разработке не принимала участие, тем не менее, когда в 1969 г. возник вопрос о докладе на конференции по нелинейным колебаниям в Киеве, она сама предложила мне сделать совместный доклад. В конце этого доклада, написанного собственной рукой Евгенией Александровны, была высказана надежда, что системы со сложной динамикой займут естественное место в современном естествознании. Я на это обращаю внимание еще и потому, что исследователи старшего поколения того времени далеко не так легко восприняли этот новый сложный нелинейный мир. А ведь до теории странных аттракторов как математического образа динамического хаоса оставалось совсем немного времени.

Конечно, нужно понимать, что Евгенией Александровне было, в некотором смысле, легче ввиду влияния Андронова с его пониманием ценности науки.

Продолжается также работа над книгой. В начале 60-х годов Евгения Александровна заканчивает развернутое доказательство того, что схема есть полный топологический инвариант, и защищает в МГУ докторскую диссертацию. В своем отзыве один из ее оппонентов, М.А. Красносельский, отмечает, что доказательство топологической инвариантности схемы (оно занимало несколько сот страниц диссертации) — одно из самых больших по объему доказательств, которое он знает.

Становится ясно, что объем книги, в которую должны войти результаты о схеме динамической системы, настолько велик, что ее необходимо разделить на две части. Первая получила название "Качественная теория динамических систем", вторая — "Теория бифуркаций динамических систем на плоскости". Чтобы ускорить дело, Евгения Александровна приглашает И.И. Гордона. В 1966 г. выходит первая книга, в 1967 г. — вторая. Вскоре обе книги переводятся на английский язык. Трудно переоценить значение этих монографий. Достаточно заметить, что они стали настольными книгами многих специалистов по нелиней-

ной динамике и по сей день постоянно цитируются в многочисленных работах. Однако Евгения Александровна не остановилась на этом. Вместе с Н.Н. Баутиным она готовит справочную монографию "Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости". Книга выходит в Советском Союзе в 1976 г., а затем переиздается в 1990 г. Для Евгении Александровны это было окончательным подведением итогов того фундаментального труда, который так бурно начался в 30-х годах.

Теперь осталась еще одна недоделанная работа, а именно, результаты по оценке числа предельных циклов, рождающихся из петли сепаратрисы, опубликованные в виде заметки в ДАН СССР в 1951 г. Конечно, существовала диссертация, но она была известна только узкому кругу сотрудников отдела. Теперь Евгения Александровна приступает к ее обработке для публикации. Сначала она готовит первую часть, связанную с построением нормальной формы, а затем и вторую часть, посвященную доказательству основного утверждения. В совокупности эта работа составила 164 страницы. Вероятно, в силу большого объема Евгения Александровна не включила ее в книгу. Но объем работы превышал допустимые размеры журнальных статей. По этой причине эта работа публикуется в весьма своеобразном издании — ВИНТИ, которое позволяет всем желающим выписать ее в личное пользование. Недостатком всего этого явилось то, что эта работа оказалась фактически недоступной зарубежным исследователям.

Теперь можно считать, основное дело жизни Евгении Александровны завершено. В 1982 г. она уходит с поста заведующего отделом, при этом оставаясь в отделе в качестве старшего научного сотрудника, а спустя несколько лет по состоянию здоровья уходит на пенсию. Тем не менее, и в последние годы она проявляла живейший интерес к работе сотрудников отдела, являющихся, в той или иной форме, ее учениками.

В 1996 г. в Нижнем Новгороде состоялась международная конференция "Современные проблемы теории динамических систем". Участниками конференции было единодушно направлено приветствие старейшему представителю Горьковской школы теории колебаний — Е.А. Леонтович (Н.Н. Баутин умер 3 апреля 1993 г.). Затем на дому ее посетила достаточно представительная делегация. Евгения Александровна была весьма довольна. Она шутила, рассказывала разные истории из научной жизни 20-х – 30-х годов. Так уж случилось, что это была ее прощальная встреча с научной общественностью. Через полгода ее не стало.

Л.П. Шильников