Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Вступительный экзамен в магистратуру (2023)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ В ФОРМЕ ТЕСТА (ДЕМОНСТРАЦИОННАЯ ВЕРСИЯ)

I. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Задача 1. Исследуйте на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функцию $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, ответив на вопросы:

1) каким условием является наличие частных производных функции в заданной точке?
a) необходимым; b) достаточным; c) необходимым и достаточным

2) вычислите значения: $A = f'_x(0,0) =$________, $B = f'_y(0,0) =$________

3) что можно сказать о пределе $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(f(x,y)-f(0,0))-(A(x-0)+B(y-0))}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}$?
a) предел существует и равен нулю
b) предел существует, но не равен нулю
c) предел не существует

4) дифференцируема ли функция в точке $O(0;0)$?
a) да b) нет
(5 баллов за каждый пункт)

Задача 2. Линейное преобразование задано формулой $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2+x_3 \\ ax_1+x_2+2x_3 \\ -3x_1-x_2-2x_3 \end{pmatrix}$ где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1) При каком значении параметра a число 3 является собственным числом преобразования?

2) При найденном значении a перечислить все собственные числа преобразования с учетом кратности.

3) Для собственного числа 3 найти собственный вектор с взаимно простыми целыми координатами, в котором первая координата положительна, и записать сумму его координат.

4) При каком значении параметра a вектор $\begin{pmatrix} 6 \\ a+7 \\ -6 \end{pmatrix}$ является собственным вектором преобразования?

5) Какому собственному числу соответствует собственный вектор из пункта 4)?
(4 балла за каждый пункт)

Задача 3. Дано дифференциальное уравнение:

$$y''(x) - 10y'(x) + 21y(x) = 0.$$

1) Какого типа это уравнение? (4 балла)
a) с разделяющимися переменными;
b) линейное однородное с постоянными коэффициентами;
c) задача Коши;
d) линейное неоднородное с переменными коэффициентами

2) Определите характеристическое уравнение этого уравнения: (4 балла)
a) $\lambda = 0$; b) $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$, c) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, d) $21\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$

3) Какую структуру имеет решение данного уравнения: (4 балла)
a) $y(x) = 3C_1e^x + 7C_2e^x$, b) $y(x) = C_1e^{3x}\sin 7x + C_2e^{7x}\cos 3x$,
c) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{7x}$, d) $y(x) = C_1e^x\cos 3x + C_2e^x\sin 7x$

4) Определите значения числовых коэффициентов C_1, C_2, при которых $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (8 баллов)

II. ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Задача (дифференциальная геометрия). (20 баллов) На поверхности: $\overrightarrow{r} = \{u\cos v, u\sin v, av\}$, $a = \text{const}$ найти линии, которые в каждой точке делят пополам углы между координатными линиями.

Задача (методы оптимизации). Найти глобальное решение и вектор множителей Лагранжа в задаче математического программирования

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 \to \min\,,$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 0,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = -6.$$

1. (6 баллов) Напишите вид функции Лагранжа
2. (6 баллов) Напишите вид множителей Лагранжа
3. (8 баллов) Введите координаты вектора глобального решения: $x_1 =$______, $x_2 =$______, $x_3 =$______

Задача (програмирование). (20 баллов) Решения принимаются на языках программирования C, C++, C# и Java

Вдоль железной дороги расположены станции, пронумерованные от 1 до 10^9. Скорый поезд всегда едет по маршруту, состоящему из n станций u_1, u_2, …, u_n, где ($1 \leq u_i \leq 10^9$). Поезд едет по маршруту слева направо. Он начинает свой путь на станции u_1, затем останавливается на станции u_2, затем на u_3 и так далее. Станция u_n — конечная.

Допустимо, что поезд посетит одну станцию более одного раза. То есть среди чисел u_1, u_2, …, u_n могут быть дубликаты.

Вам даны k запросов, каждый из которых содержит два различных целых числа a_j и b_j ($1 \leq a_j, b_j \leq 10^9$). Для каждого запроса необходимо определить, можно ли доехать на поезде от станции с номером a_j до станции с номером b_j.

Например, пусть маршрут поезда состоит из 6 станций с номерами [3, 7, 1, 5, 1, 4] и даны 3 следующих запроса:

• $a_1 = 3, b_1 = 5$. Доехать от станции 3 до станции 5 можно, проехав по участку маршрута, состоящего из станций [3, 7, 1, 5]. Ответ: YES.

• $a_2 = 1, b_2 = 7$. Доехать от станции 1 до станции 7 нельзя, так как поезд не может ехать в обратном направлении. Ответ: NO.

• $a_3 = 3$, $b_3 = 10$. Доехать от станции 3 до станции 10 нельзя, так как станция 10 не входит в маршрут поезда. Ответ: NO.

Входные данные

В первой строке записано единственное целое число t ($1 \leq t \leq 10^4$) — количество наборов входных данных в тесте.

Далее следуют описания наборов входных данных.

Первая строка каждого набора пустая.

Во второй строке каждого набора входных данных содержится два целых числа: n и k ($1 \leq n \leq 2\cdot10^5$, $1 \leq k \leq 2\cdot10^5$) — количество станций, из которых состоит маршрут поезда и количество запросов соответственно.

В третьей строке каждого набора входных данных записано ровно n целых чисел u_1, u_2, …, u_n ($1 \leq u_i \leq 10^9$). Числа u_1, u_2, …, u_n необязательно различны.

В следующих k строках содержатся два различных целых числа a_j и b_j ($1 \leq a_j, b_j \leq 10^9$), описывающие запрос с номером j.

Гарантируется, что сумма значений n по всем наборам входных данных в тесте не превышает $2\cdot10^5$. Аналогично гарантируется, что сумма значений k по всем наборам входных данных в тесте также не превышает $2\cdot10^5$.

Выходные данные. Для каждого запроса в каждом наборе входных данных в отдельной строке выведите:

• YES, если на поезде можно доехать от станции a_j до станции b_j.

• NO в противном случае.

Пример

входные данные	выходные данные
3	YES
	NO
6 3	NO
3 7 1 5 1 4	YES
3 5	YES
1 7	NO
3 10	NO
	YES
3 3	YES
1 2 1	NO
2 1	YES
1 2	
4 5	
7 5	
2 1 1 1 2 4 4	
1 3	
1 4	
2 1	
4 1	
1 2	

Задача (теория вероятностей). (20 баллов) Гуляя по парку, Августин и Бореслава молчали и, чтобы сгладить неловкость, подбирали прямолинейные палочки-веточки и ломали их в случайных местах на три части. С какой вероятность и Августин из своих трех кусочков, и Бореслава из своих трех кусочков, смогут сложить каждый по треугольнику (обломки используются на полную длину)?

Задача (дискретная математика). Логическая функция $odd_n(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $n \geq 0$, принимает значение 1, если число аргументов, равных 1, нечётно, и значение 0, если чётно.

1. (2 балла) Какой логической операции соответствует функция odd_2?

2. (3 балла) Постройте СДНФ функции odd_3.

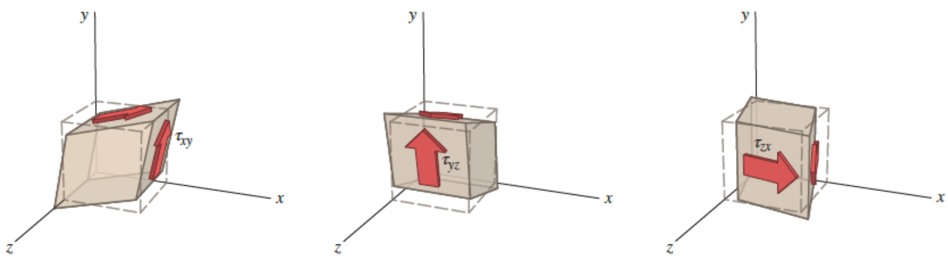
3. (10 баллов, по 2 за каждый класс) В зависимости от n, определите принадлежнсть функции odd_n классам T_0, T_1, S, M, L.

4. (5 баллов) Докажите, что $[\{odd_3, \&\}] = T_0 \cap T_1$.

Здесь T_0, T_1 — классы функций, сохраняющих 0 и 1 соответственно, S — класс самодвойственных функций, M — класс монотонных функций, L — класс линейных функций.

Задача (теоретическая механика). (20 баллов) Выберите верные утверждения:...
Сформулированы 10 определений и утверждений из области теоретической механики.
Примеры утверждений:

- Относительные линейные деформации вызываются действием касательных напряжений τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} и характеризуют изменение первоначально прямых углов площадок элементарного параллелепипеда.

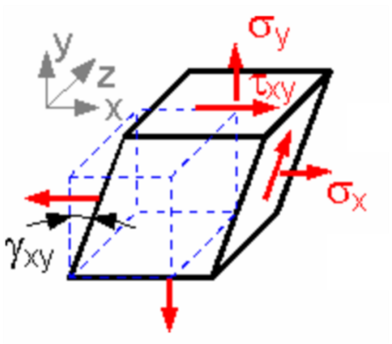


- Формула для определения интенсивности деформаций ε_u через главные деформации ε_1, ε_2, ε_3 имеет вид:

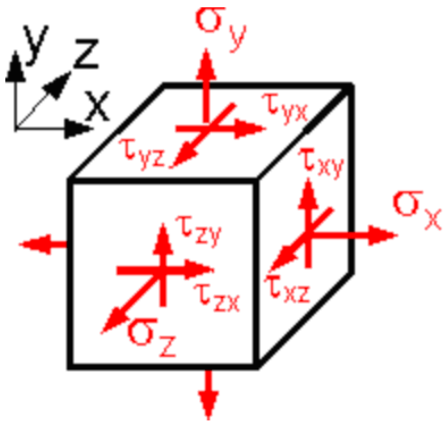
$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

- Модуль упругости второго рода (модуль сдвига) G имеет вид: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), ν – коэффициент Пуассона.

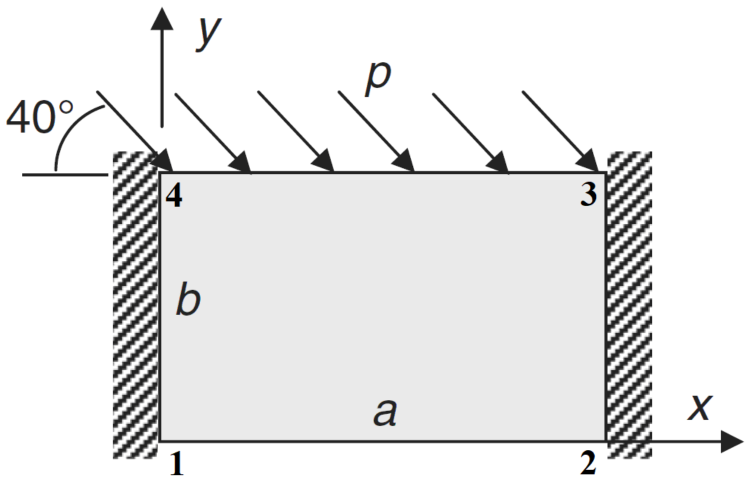
- Относительная угловая деформация γ_{xy}, создаваемая в элементе касательным напряжением τ_{xy} описывается выражением: $\gamma_{xy} = \frac{1}{E}\tau_{xy}$.



- Количество независимых компонент тензора напряжений в произвольной точке линейно упругого изотропного тела равно девяти.



- Статические граничные условия для границы 3-4, координаты точек которой $0 \le x \le a, y = b$, имеют вид: $\tau_x y(x,b) = p\cos 40°$, $\sigma_y(x,b) = -p\sin 40°$.



Общий комментарий

Билет состоит из 8 практических заданий (3 заданий базового уровня и 5 заданий повышенного уровня). Задания базового уровня являются обязательными, из 5 заданий повышенного уровня нужно решить два на выбор.

Решение выбранных заданий оценивается по 100-бальной шкале: каждое задание дает до 20 баллов. Итоговая оценка формируется суммированием баллов за три базовых задания и за два решённых задания, повышенного уровня. В случае, если решено более 2 задач повышенного уровня, если нужные задачи явно не указаны абитуриентом, проверяются те, номера которых идут раньше; решение остальных задач не оценивается.