

Первый вариант

I. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Задача 1. Две кривые на координатной плоскости заданы формулами:

$$\begin{cases} y = x - x^2, \\ y = x\sqrt{1-x}. \end{cases}$$

1. Найти абсциссы пересечения кривых. (7 баллов)
2. Каким из следующих интегралов выражается площадь фигуры, ограниченной кривыми? (6 баллов)

(a) $\int_{x_1}^{x_2} (x - x^2) dx$

(b) $\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1-x} dx$

(c) $\int_{x_1}^{x_2} ((x - x^2) - x\sqrt{1-x}) dx$

(d) $\int_{x_1}^{x_2} (x\sqrt{1-x} - (x - x^2)) dx$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми. (7 баллов)

Задача 2. Отношение R на множестве A задано формулой:

$$xRy \Leftrightarrow |x - y|(x - 8)(y - 3) \geq 0.$$

1. При каком A отношение R является отношением эквивалентности?
 - (a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - (b) $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$;
 - (c) $A = \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}$.
2. Для найденного A найдите классы эквивалентности по отношению R .
3. При каком A отношение R является отношением порядка?
 - (a) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
 - (b) $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$;
 - (c) $A = \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}$.
4. В найденном упорядоченном множестве (A, R) найдите минимальные элементы.

(5 баллов за каждый пункт)

Задача 3. Линейное преобразование задано формулой $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$ где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

- 1) При каком значении параметра a число 3 является собственным числом преобразования? (6 баллов)
- 2) При найденном значении a перечислить все собственные числа преобразования с учетом кратности. (7 баллов)
- 3) Для собственного числа 3 найти собственный вектор с взаимно простыми целыми координатами, в котором первая координата положительна. (7 баллов)

II. ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Задача 4. (20 баллов) Августин после длительных наблюдений установил, что настроение у Бореславы устанавливается утром на весь день, бывает *хорошее* либо *плохое* и меняется по следующему закону: после хорошего настроения сегодня будет плохое настроение завтра с вероятностью $1/5$, а плохое настроение сегодня поменяется на хорошее настроение завтра с вероятностью $5/6$. Предполагая, что 1 января 2024 года, в понедельник, настроение Бореславы будет хорошим с вероятностью $25/31$ и плохим с вероятностью $6/31$, помогите Августину вычислить следующие величины:

- 1) Вероятность того, что за первые четыре дня 2024 года Бореслава будет в хорошем настроении больше половины времени.
- 2) Вероятность того, что 29 февраля 2024 года Бореслава будет в хорошем настроении
- 3) Если 1 января она в хорошем настроении, сколько в среднем дней подряд она будет в хорошем настроении?

Задача 5. Найти глобальное решение и вектор множителей Лагранжа в задаче математического программирования

$$\begin{aligned}(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -6.\end{aligned}$$

1. (6 баллов) Напишите вид функции Лагранжа.
2. (6 баллов) Напишите вид множителей Лагранжа.
3. (8 баллов) Найдите вектор глобального решения.

Задача 6. (20 баллов)

Решения принимаются на языках программирования C, C++, C# и Java

В магазин привезли партию из n товаров (n – чётное число), i -й из которых имеет вес a_i . Перед продажей товары нужно расфасовать по упаковкам. После фасовки будет выполнено следующее:

- всего получится $\frac{n}{2}$ упаковок, в каждой упаковке лежит ровно два товара;
- вес упаковки, в которой лежат товары с индексами i и j ($1 \leq i, j \leq n$) будет равен $a_i + a_j$.

При этом стоимость упаковки веса x всегда равна $\lfloor \frac{x}{k} \rfloor$ рублей

Распределите товары по упаковкам так, чтобы выручка с их продажи была максимальна. Другими словами, составьте такие $\frac{n}{2}$ пар из заданных товаров, чтобы сумма величин $\lfloor \frac{x_i}{k} \rfloor$, где x_i – вес упаковки с номером i ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$), была максимальна.

Например, пусть $n = 6$, $k = 3$, веса товаров $a = [3, 2, 7, 1, 4, 8]$. Объединим их в следующие упаковки.

- В первую упаковку положим третий и шестой товар. Её вес будет равен $a_3 + a_6 = 7 + 8 = 15$. Стоимость упаковки составит $\lfloor \frac{15}{3} \rfloor = 5$ рублей.
- Во вторую упаковку положим первый и пятый товар, вес составит $a_1 + a_5 = 3 + 4 = 7$. Стоимость упаковки составит $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$ рубля.

- В третью упаковку положим второй и четвертый товар, вес составит $a_2 + a_4 = 2 + 1 = 3$. Стоимость упаковки составит $\lfloor \frac{3}{3} \rfloor = 1$ рубль.

При таком распределении итоговая стоимость всех упаковок составит $5 + 2 + 1 = 8$ рублей.

Входные данные.

В первой строке записано единственное число t ($1 \leq t \leq 104$) — количество наборов входных данных в тесте. Далее следуют описания наборов входных данных. В первой строке каждого набора входных данных содержится два целых числа: n ($2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$) и k ($1 \leq k \leq 1000$). Число n — чётное. Во второй строке каждого набора входных данных записано ровно n целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i \leq 109$). Гарантируется, что сумма n по всем наборам входных данных не превышает $2 \cdot 10^5$.

Выходные данные.

Для каждого набора входных данных в отдельной строке выведите единственное число — максимально возможную суммарную стоимость всех упаковок.

Пример

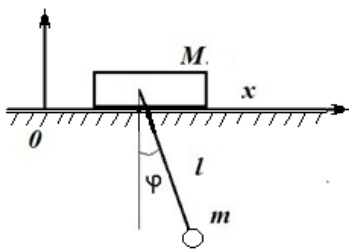
входные данные	выходные данные
6	8
6 3	4
3 2 7 1 4 8	0
4 3	2
2 1 5 6	1
4 12	5
0 0 0 0	
2 1	
1 1	
6 10	
2 0 0 5 9 4	
6 5	
5 3 8 6 3 2	

Примечание. Первый набор входных данных разобран в условии. Во втором наборе входных данных можно получить суммарную стоимость, равную 4, если в первую упаковку положить первый и второй товар, а во вторую — третий и четвертый. В третьем наборе входных данных стоимость каждого товара равна 0, поэтому суммарная стоимость будет также равна 0.

Задача 7. Дана поверхность $\vec{r}(u, v) = (k(u + v), b(u - v), uv)$, $k = \text{const} \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$.

- 1) Найти первую квадратичную форму поверхности в точке $M(u = 0, v = 0)$. (10 баллов)
- 2) Найти формулу полной кривизны поверхности в точке $M(u = 0, v = 0)$. (10 баллов)

Задача 8. Для системы, представленной на рисунке:



1. Записать кинетическую энергию системы. (6 баллов)
2. Записать закон сохранения энергии системы. (7 баллов)
3. Записать канонические уравнения Гамильтона описывающие движение системы. (7 баллов)

Второй вариант

I. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Задача 1. Исследуйте на дифференцируемость в точке $O(0, 0)$ функцию $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, ответив на вопросы:

- 1) каким условием является наличие частных производных функции в заданной точке?
а) необходимым; б) достаточным; в) необходимым и достаточным
- 2) вычислите значения: $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$
- 3) что можно сказать о пределе $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(f(x,y)-f(0,0))-(A(x-0)+B(y-0))}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}$?
а) предел существует и равен нулю
б) предел существует, но не равен нулю
в) предел не существует
- 4) дифференцируема ли функция в точке $O(0;0)$?
(5 баллов за каждый пункт)

Задача 2. Гуляя по парку, Августин и Бореслава молчали и, чтобы сгладить неловкость, подбирали прямолинейные палочки-веточки и ломали их в случайных местах на три части.

1. С какой вероятностью Августин из своих трех кусочков, сможет сложить треугольник?
 2. С какой вероятностью и Августин из своих трех кусочков, и Бореслава из своих трех кусочков, смогут сложить каждый по треугольнику?
- Обломки используются на полную длину.
- (10 баллов за каждый пункт)

Задача 3. Дано дифференциальное уравнение:

$$y''(x) - 10y'(x) + 21y(x) = 0.$$

- 1) Какого типа это уравнение? (4 балла)
 - a) с разделяющимися переменными;
 - b) линейное однородное с постоянными коэффициентами;
 - c) задача Коши;
 - d) линейное неоднородное с переменными коэффициентами
- 2) Определите характеристическое уравнение этого уравнения: (4 балла)
 - a) $\lambda = 0$;
 - b) $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$,
 - c) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$,
 - d) $21\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$
- 3) Какую структуру имеет решение данного уравнения: (4 балла)
 - a) $y(x) = 3C_1e^x + 7C_2e^x$,
 - b) $y(x) = C_1e^{3x} \sin 7x + C_2e^{7x} \cos 3x$,
 - c) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{7x}$,
 - d) $y(x) = C_1e^x \cos 3x + C_2e^x \sin 7x$
- 4) Определите значения числовых коэффициентов C_1, C_2 , при которых $y(0) = 1, y'(0) = 0$. (8 баллов)

II. ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Задача 4. Логическая функция $odd_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $n \geq 0$, принимает значение 1, если число аргументов, равных 1, нечётно, и значение 0, если чётно.

1. (2 балла) Какой логической операции соответствует функция odd_2 ?
2. (3 балла) Постройте СДНФ функции odd_3 .
3. (10 баллов, по 2 за каждый класс) В зависимости от n , определите принадлежность функции odd_n классам T_0, T_1, S, M, L .
4. (5 баллов) Докажите, что $[\{odd_3, \&\}] = T_0 \cap T_1$.

Здесь T_0, T_1 — классы функций, сохраняющих 0 и 1 соответственно, S — класс самодвойственных функций, M — класс монотонных функций, L — класс линейных функций.

Задача 5. Задана матрица A_n порядка n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Найти характеристический многочлен и собственные числа матрицы A_3 в поле комплексных чисел.
 - 2) Найти характеристический многочлен матрицы A_n .
 - 3) Найти собственные числа матрицы A_n в поле комплексных чисел.
 - 4) Найти собственные векторы матрицы A_n , соответствующие числам из п.3.
- (5 баллов за каждый пункт)

Задача 6. (20 баллов) Решения принимаются на языках программирования C, C++, C# и Java

Вдоль железной дороги расположены станции, пронумерованные от 1 до 10^9 . Скорый поезд всегда едет по маршруту, состоящему из n станций $u_1, u_2, \dots, u_n$, где $(1 \leq u_i \leq 10^9)$. Поезд едет по маршруту слева направо. Он начинает свой путь на станции u_1 , затем останавливается на станции u_2 , затем на u_3 и так далее. Станция u_n — конечная.

Допустимо, что поезд посетит одну станцию более одного раза. То есть среди чисел $u_1, u_2, \dots, u_n$ могут быть дубликаты.

Вам даны k запросов, каждый из которых содержит два различных целых числа a_j и b_j ($1 \leq a_j, b_j \leq 10^9$). Для каждого запроса необходимо определить, можно ли доехать на поезде от станции с номером a_j до станции с номером b_j .

Например, пусть маршрут поезда состоит из 6 станций с номерами $[3, 7, 1, 5, 1, 4]$ и даны 3 следующих запроса:

- $a_1 = 3, b_1 = 5$. Доехать от станции 3 до станции 5 можно, проехав по участку маршрута, состоящего из станций $[3, 7, 1, 5]$. Ответ: YES.
- $a_2 = 1, b_2 = 7$. Доехать от станции 1 до станции 7 нельзя, так как поезд не может ехать в обратном направлении. Ответ: NO.
- $a_3 = 3, b_3 = 10$. Доехать от станции 3 до станции 10 нельзя, так как станция 10 не входит в маршрут поезда. Ответ: NO.

Входные данные

В первой строке записано единственное целое число t ($1 \leq t \leq 10^4$) — количество наборов входных данных в тесте.

Далее следуют описания наборов входных данных.

Первая строка каждого набора пустая.

Во второй строке каждого набора входных данных содержится два целых числа: n и k ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 1 \leq k \leq 2 \cdot 10^5$) — количество станций, из которых состоит маршрут поезда и количество запросов соответственно.

В третьей строке каждого набора входных данных записано ровно n целых чисел $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($1 \leq u_i \leq 10^9$). Числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ необязательно различны.

В следующих k строках содержатся два различных целых числа a_j и b_j ($1 \leq a_j, b_j \leq 10^9$), описывающие запрос с номером j .

Гарантируется, что сумма значений n по всем наборам входных данных в тесте не превышает $2 \cdot 10^5$. Аналогично гарантируется, что сумма значений k по всем наборам входных данных в тесте также не превышает $2 \cdot 10^5$.

Выходные данные. Для каждого запроса в каждом наборе входных данных в отдельной строке выведите:

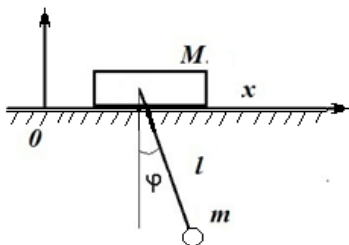
- YES, если на поезде можно доехать от станции a_j до станции b_j .
- NO в противном случае.

Пример

входные данные	выходные данные
3	YES
	NO
6 3	NO
3 7 1 5 1 4	YES
3 5	YES
1 7	NO
3 10	NO
	YES
3 3	YES
1 2 1	NO
2 1	YES
1 2	
4 5	
7 5	
2 1 1 1 2 4 4	
1 3	
1 4	
2 1	
4 1	
1 2	

Задача 7. (20 баллов) На поверхности: $\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, av\}$, $a = \text{const}$ найти линии, которые в каждой точке делят пополам углы между координатными линиями.

Задача 8. (20 баллов) Для системы, представленной на рисунке:



1. Записать закон сохранения количества движения системы. (7 баллов)
2. Записать уравнения Лагранжа 2 рода описывающие движения системы. (6 баллов)
3. Полагая угол отклонения маятника малым, линеаризовать уравнения Лагранжа 2 рода. (7 баллов)

Общий комментарий

Билет состоит из 8 практических заданий (3 заданий базового уровня и 5 заданий повышенного уровня). Задания базового уровня являются обязательными, из 5 заданий повышенного уровня нужно решить два на выбор.

Решение выбранных заданий оценивается по 100-бальной шкале: каждое задание дает до 20 баллов. Итоговая оценка формируется суммированием баллов за три базовых задания и за два решённых задания, повышенного уровня. В случае, если решено более 2 задач повышенного уровня, если нужные задачи явно не указаны абитуриентом, проверяются те, номера которых идут раньше; решение остальных задач не оценивается.